UMA REFLEXÃO SOBRE DIFICULDADE DE APRENDIZAGEM DE ANÁLISE COMBINATÓRIA

A REFLECTION ON LEARNING DIFFICULTY IN COMBINATORIAL ANALYSIS

Data de entrega dos originais à redação em: 10/08/2015
e recebido para diagramação em: 05/09/2016

Armando Handaya [1]

Análise Combinatória é a parte da Matemática que trata de problemas de contagem. O processo de aprendizagem dessa disciplina não é dos mais simples e normalmente o aluno deve passar por várias etapas antes de se chegar à solução do problema. Essas etapas serão abordadas neste texto. As dificuldades na aprendizagem dessa disciplina são muito perceptíveis, mesmo entre os alunos do ensino superior, sobretudo das IES que não fazem seleção muito rigorosa. Neste texto pretendemos apontar os principais fatores que geram tais dificuldades. Apresentamos também uma terminologia alternativa para os termos geralmente usados, com o intuito de facilitar a compreensão do problema. Como se diz no meio acadêmico: entender o enunciado do problema é meio caminho andado. Esse, pois, é o nosso propósito.

Palavras-chave: Análise Combinatória. Técnicas de Contagem. Matemática Discreta.

The combinatorial analysis is the Mathematics topic that deals with counting problems. The learning process of this topic is not of the simplest and usually the student must go through several steps before reaching the solution of a Math problem. These steps are discussed in this paper. The difficulties to learn it are noticeable, even among students in higher education, particularly in schools where there is not a very strict selection in the entrance exam. In this paper we intend to identify the main factors that generate such difficulties. We also present an alternative terminology for the terms generally used in order to facilitate the understanding of the problem. As they say in academia: understanding the statement of the problem is half the battle. Thus this is our purpose.

Keywords: Combinatorial Analysis. Counting Techniques. Discrete Mathematics.

1 INTRODUÇÃO

Um dos grandes problemas de se ensinar Análise Combinatória é a grande variedade dos tipos de problemas. Muitos discentes encontram dificuldades em entender e usar o seu entendimento para reconhecer os diferentes tipos de problemas de contagem. São tipos que se apresentam como *arranjo*, *combinação*, *permutação* e ainda subtipos que se identificam em termos como *com repetição*, *com elementos repetidos* e *desarranjo* (*permutação caótica*). Embora normalmente a grade curricular do ensino básico ou médio brasileiro não contempla todos esses tipos de problemas de contagem, certas situações exigem do aluno o conhecimento mais amplo para reconhecer os diferentes tipos e subtipos. Nas questões de exames e concursos por exemplo não caem apenas os tipos mais comuns como arranjo, combinação e permutação. Na edição de 2009 do ENEM, que contribuiu para os noticiários jornalísticos da época, caiu um problema de desarranjo! Nos concursos públicos questões de Análise Combinatória normalmente são consideradas uma parte das mais complicadas da prova. Mas isso, a grande variedade de tipos de problemas, é apenas um dos grandes problemas de Análise Combinatória. Acreditamos que os principais problemas de aprendizagem de Análise Combinatória possam ser mencionados como segue.

1. A primeira grande dificuldade de um problema de contagem é a necessidade de ler e a interpretar o enunciado do problema. Normalmente não se apresenta um problema de contagem com um enunciado seco como "*quanto dá a combinação de sete, dois a dois*?" ou "*quanto é o arranjo de oito, três a três*?". Eles se apresentam mais comumente como um texto longo e que exige leitura e interpretação cuidadosa. Isso só já é um grande desafio para muitos alunos, sobretudo para os do Ensino Fundamental. Em concursos públicos quantos recursos já não foram impetrados exatamente por culpa de interpretações ambíguas de texto ?

2. Em seguida, fato que já dissemos antes, existe uma grande variedade de tipos de problemas. Em Análise Combinatória é preciso saber diferenciar os tipos como *combinação*, *arranjo*, *permutação* e seus subtipos como *com repetição*, *sem repetição*, *linear*, *circular*, *condicional* e *caótica*. Isso assusta a qualquer um. Embora a maioria dos currículos escolares do Ensino Médio não aborde todos os citados acima, mas fato é que o aluno precisa saber diferenciar pelo menos os mais básicos e reconhecer o tipo correto de cada problema.

3. Uma terceira grande dificuldade é a necessidade de decorar fórmulas. Para cada tipo de problema

1 - Doutor em Engenharia de Sistemas – USP. Mestre em Matemática – USP. Licenciado em Matemática - USP. Professor do IFSP - Guarulhos.

uma fórmula diferente. Sem contar os casos que não possuem a fórmula geral, não é uma tarefa das mais fáceis ensinar um assunto que exige uma variedade de fórmulas. Não bastasse a dificuldade de se classificar o problema é preciso também memorizar o formulário e aprender a associar a cada tipo de problema a sua fórmula correta.

4. Existência de termos que não são padronizados. Muitos termos já são de uso comum, mas existem alguns outros que não são muito comuns. Como exemplo podemos citar *desarranjo* que também é chamado de *permutação caótica*, como se pode ver em (MORGADO, 2006). Alguns utilizam o termo *arranjo* e outros se valem do termo *permutação* tanto para arranjo quanto para permutação. Como em (GERSTING, 2004 pág.167) que cita especificamente "*Um arranjo ordenado de objetos é chamado de permutação*".

Um exemplo de como os termos podem gerar dificuldades na aprendizagem de Análise Combinatória se apresenta na classificação de dois subtipos de problemas de contagem: *com repetição* e *com elementos repetidos*. Os dois termos são muito parecidos e isso pode gerar uma confusão na mente do aluno. Destaca-se o fato de que muitos autores de livros textos deste assunto não enfatizarem o local onde ocorre a repetição de elementos, embora dê a razão pela qual ocorre tal repetição. A repetição de elementos pode-se dar tanto no conjunto selecionado quanto no conjunto inicial. As razões pelas quais podem ocorrer a repetição de elementos no conjunto selecionado são a reposição deles ao conjunto inicial ou a existência de elementos repetidos no conjunto inicial. Em relação ao primeiro termo *com repetição*, a maioria dos autores concorda em usar esse termo quando se refere à repetição de elementos no conjunto selecionado. Importante notar que não são todos os que concordam com isso, pois alguns usam esse termo quando há repetição no conjunto inicial. De qualquer forma o termo *sem repetição* é o padrão quando não se diz nada a respeito, isto é quando não há o adjetivo *com repetição* inserido no enunciado do problema. Se os autores não se preocupam muito com relação ao lugar onde possa ocorrer a repetição, é interessante notar a sua preocupação em dar a razão dessa possível repetição. Em (HAZZAN, 2004) e (SODRÉ, 2010), por exemplo, na definição de um *Arranjo com repetição* subentende-se que a repetição ocorra no conjunto selecionado devido à reposição de elementos, embora tal reposição não seja citada explicitamente na definição. Com relação ao segundo termo *com elementos repetidos* os livros são mais unânimes em apontar o local da repetição: o conjunto inicial.

Apesar de nomes muito parecidos são, enfim, conceitos diferentes, que trazem ainda outro questionamento: como fica o caso quando há repetição de elementos tanto no conjunto inicial quanto na seleção? Alguns autores simplesmente o classifica como *com elementos repetidos* ignorando o outro adjetivo. Acreditamos assim que seja necessária uma padronização de termos.

Os problemas do ensino de Análise Combinatória enfim não são poucos que não mereçam um estudo mais aprofundado em prol de uma didática melhor e mais fácil. É um assunto fértil sobre o qual já se produziu artigos, pesquisas, estudos e propostas que trazem à tona tais dificuldades e ao mesmo tempo oferecem reflexões para possíveis soluções. Em (BORTOLOTI, 2011) os autores trazem este assunto à baila sob a ótica da Análise de Erros de futuros professores que um dia vão ensinar este assunto. Já em Almeida-Ferreira (s.d) lemos uma proposta de aprendizagem baseada em discussão em grupo. Neste artigo propomos uma terminologia alternativa àquela usada normalmente. Com isso o alvo é facilitar um pouco a compreensão do enunciado do problema.

É bom mencionar que o primeiro ítem da lista de dificuldades acima, a necessidade de leitura e interpretação do texto, continuará sendo um problema. Não há técnicas que contorne tal dificuldade. O alunado precisa-se acostumar a fazer a leitura do texto e interpretar o seu conteúdo. Discriminar o que se tem e entender o quê se quer.

O quarto ítem da lista, o problema da não padronização dos termos, ainda não é muito percebido pelos educadores e muito menos pelos alunos. Um desses fenômenos didáticos é o "sumiço" do termo arranjo no ensino superior, embora no ensino Médio esse conceito é apresentado e estudado. Em textos de língua inglesa é pouco comum usar o termo Arranjo (*arrangement*). No seu lugar usa-se Permutação (tanto Arranjo quanto Permutação são denominados *permutation*). Na verdade permutação, no sentido que se usa no Brasil, é um caso particular de arranjo, mas se há uma diferença no ensino médio para o ensino superior no Brasil acreditamos que seja por questão cultural. O ensino médio brasileiro teve no seu início a influência do modelo francês, enquanto que no superior muitos livros textos usados são americanos. Assim o relata a Carmen Guerreiro em (GUERREIRO, 2011)

> ... o gosto da elite brasileira pelo refinamento francês tomou forma. ... a própria organização curricular no Brasil começou calcada no modelo francês .... No entanto, outras nações também contribuíram para a formação das instituições de ensino nos trópicos.... "Na época do Império, o modelo era francês, incluindo os livros. A partir da República, criou-se a ideia de que os Estados Unidos são mais avançados."

Neste artigo vamos preservar o termo arranjo em consonância com o Ensino Médio brasileiro. Vamos considerar os dois tipos básicos da Análise Combinatória, os quais são a *combinação* (quando não importa a ordem) e o *arranjo* (quando importa a ordem) e reservamos o termo *permutação* como um caso particular de arranjo sem reposição quando todos os elementos do conjunto inicial são selecionados. Também consideraremos os diversos subcasos como *com repetição*, *sem repetição*, *com reposição* e *sem reposição*. Estes dois últimos são propostas nossas.

2 UMA TERMINOLOGIA ALTERNATIVA PARA ANÁLISE COMBINATÓRIA

Consideremos o ESTOQUE um conjunto com *n* elementos onde *n* é um inteiro fixo

$$\Omega = \{e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n\}.$$

Deseja-se selecionar *k* (número inteiro) entre os elementos disponíveis formando um novo conjunto que chamaremos de SELEÇÃO. Na Teoria das Probabilidades esses termos são conhecidos como Espaço Amostral e Eventos, respectivamente. Normalmente pensamos que se deva ter $k < n$, mas não é necessário que assim seja pois tudo depende dos critérios da seleção. Por exemplo quando a seleção é feita com reposição dos elementos, o número *k* pode ser maior do que o *n*. A pergunta que naturalmente se faz é "*de quantas maneiras pode-se fazer tal seleção?*". A resposta a essa pergunta é "DEPENDE!'. Depende de quê?

1. *Depende da **ordem** dos elementos*. Depende se nessa seleção faz diferença a ordem dos elementos escolhidos. Isso determina o tipo arranjo (quando importa a ordem) e combinação (caso contrário). É a mesma diferença entre um conjunto e uma sucessão (ou uma lista). Um arranjo seleciona listas ordenadas e uma combinação seleciona subconjuntos.

2. *Depende da **repetição** de elementos*. O número de seleções possíveis também depende da existência ou não de elementos repetidos no ESTOQUE. Quando isso acontece propomos acrescentar o adjetivo *com repetição* ao tipo do problema correspondente. É bom frisar que os textos didáticos usam esse termo como sendo atribuído à repetição de elementos na SELEÇÃO, enquanto à repetição de elementos no ESTOQUE são usados termos *com elementos repetidos* ou *com elementos duplicados*. Em todo o caso, desta forma não fica claro se a causa da repetição é a existência de elementos iguais no ESTOQUE ou por conta da reposição dos elementos selecionados ao ESTOQUE. Causas diferentes que geram resultados diferentes. Isso justamente é o que fundamenta a nossa terminologia alternativa: atribuir o adjetivo *com repetição* quando há elementos iguais no ESTOQUE, não na SELEÇÃO. O objetivo desta proposta é a identificação das causas da repetição e também possibilitar a classificação de dois tipos de problemas que não são abordados em salas de aula por não possuírem fórmula geral (sobre isso veremos mais adiante). Completando a proposta, atribuir o adjetivo *com reposição* quando há reposição de elemento selecionado ao ESTOQUE, permitindo selecioná-lo outra(s) vez(es) para montar a SELEÇÃO.

3. *Depende da **reposição** dos elementos*. Depois o número de seleções possíveis também é afetado quando há reposição dos elementos ao ESTOQUE após ter sido selecionado. Convenciona-se que sem esta menção todos os problemas são sem reposição. O adjetivo *com reposição* é quando a repetição de elementos na SELEÇÃO se dá por conta da reposição deles ao ESTOQUE. Isso visa facilitar a compreensão do enunciado do problema. Nos textos didáticos o termo *com repetição* normalmente se refere à repetição de elementos na SELEÇÃO. Esse é o caso de arranjo com repetição apresentado em problema como das placas de carro, por exemplo (veja Exemplo 4 abaixo). Para ser mais claro deveria ser escrito assim: *arranjo com repetição devido à reposição de elementos*, ou então dizer simplesmente *arranjo com reposição*, conforme a nossa terminologia alternativa.

4. *Depende da **geometria** da seleção*. O número de seleções possíveis também se altera dependendo da formação linear ou circular da seleção. Por exemplo ABC, BCA e CAB são 3 listas diferentes pela geometria linear. Mas é uma só SELEÇÃO pela geometria circular:

Na geometria circular SELEÇÕES diferenciadas por rotação de seus elementos são consideradas a mesma.

5. *Depende da **restrição** do problema*. O número de seleções possíveis também se altera quando há restrição no problema em questão. Por exemplo, quando se quer contar quantos anagramas (embaralhamento das letras de uma palavra, com sentido ou não) existem da palavra ENTULHO que começa com a letra T. Anagrama é uma simples permutação. Começar com uma letra específica é uma restrição do problema. Tirando a restrição, a quantidade de anagramas fica mais fácil de calcular: neste caso a mesma quantidade de permutação de 7 letras. No exemplo a seguir, a segunda frase constitui a restrição do problema: *"Escolhem-se 5 entre 10 homens e 12 mulheres. Quantas seleções têm 2 homens e 3 mulheres?"*. Sem a restrição este é um problema simples de combinação de 5 entre 22 pessoas. Restrição de um problema em geral é uma das grandes causas de dificuldade de aprendizagem de análise combinatória pois ela pode dificultar sobremaneira o problema em questão.

Desses cinco ítens dependem a resolução do problema em questão. Podemos dizer que eles classificam, modificam e complicam o problema. Convém mencionar que na literatura didática existente, dos cinco modificadores citados acima apenas *a ordem* e *a repetição* têm sido considerados. Os demais ítens: *reposição*, *geometria* e *restrição*, ficam para a interpretação do aluno, infelizmente. A geometria da seleção, o quarto ítem da lista, de fato pode ser considerada como uma restrição do problema. Mas a reposição de elementos, por alterar muitos casos, a nosso ver merece uma consideração à parte. Tanto que em (MILONE, pág. 128) destaca-se especificamente um subcapítulo de Técnicas de Contagem cujo título é *"Análise Combinatória (com e sem reposição)"*. A nossa proposta é portanto apresentar os subtipos *com e sem reposição* quando há elementos repetidos na SELEÇÃO e eliminar o termo *com elementos repetidos ou duplicados* que a nosso ver podem causar confusão no entendimento do aprendiz iniciante.

3 O ENSINO CLÁSSICO COM ESSA TERMINOLOGIA PROPOSTA

Embora já haja correntes alternativas, a Análise Combinatória ainda é normalmente ensinada nas escolas apresentando os seus tipos básicos e depois fornecendo as respectivas fórmulas. Pode-se dizer que a Tabela 1 é o retrato desse ensino clássico nos seus diversos níveis. Vale observar que algumas dessas fórmulas só se vêem em cursos pré-vestibulares ou na faculdade. Com a nossa terminologia alternativa casos como *Arranjo com repetição* e *Combinação com repetição* passam a ser *Arranjo com reposição* e *Combinação com reposição*, respectivamente, ao passo que os do tipo *com repetição* não possuem fórmula geral.

Tipo	**Fórmula**
Arranjo	$A(n,k)=\dfrac{n!}{(n-k)!}$
Combinação	$C(n,k)=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$
Permutação	$P_n=n!$
Arranjo ***com reposição***	$A(n,k)=n^k$
Combinação ***com reposição***	$C^*(n,k)=\dfrac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$
Permutação ***com repetição***	$P_n^{a,b,c,\ldots}=\dfrac{n!}{a!b!c!\ldots}$
Permutação circular	$P_n^o=(n-1)!$

EXEMPLOS

Nesta seção apresentaremos alguns exemplos, de nossa autoria, de como a terminologia sugerida pode afetar na classificação de casos conhecidos como também desconhecidos (normalmente não abordados em salas de aula).

1. *"Na final de um campeonato estão 3 brasileiros e 3 argentinos. De quantas maneiras esses dois países podem formar o ranking (1º a 6º)?"*. A classificação deste problema muda de *permutação com elementos repetidos para permutação com repetição*, pois existe elementos repetidos no ESTOQUE. Todos os rankings possíveis são: BBBAAA, BBABAA, BBAABA, BBAAAB, BABBAA, BABABA, BABAAB, BAABBA, BAABAB, BAAABB, AAABBB, AABABB, AABBAB, AABBBA, ABAABB, ABABAB, ABABBA, ABBAAB, ABBABA, ABBBAA. Interessante observar que o resultado é o mesmo se o enunciado fosse *"quantos anagramas distintos podemos formar com a palavra BABABA?"*

2. *"Na final de um campeonato estão 3 brasileiros e 3 argentinos. De quantas maneiras esses dois países podem compor o pódio (1º a 3º)?"* A diferença deste exemplo com o anterior é a participação não de todos, mas de apenas 3 deles para a composição do pódio. Cada pódio aqui é um arranjo com repetição, pois existem elementos iguais no ESTOQUE. Nos textos didáticos este tipo de problema **normalmente não é abordado** e também não existe uma fórmula geral para ele. Na verdade, pode-se deduzir uma fórmula específica para cada caso de repetição, isto é, vai depender da quantidade de elementos distintos e do número de repetições. Para resolver esse tipo de problema podemos usar a lista completa do exemplo anterior e selecionar as composições que se diferenciam pelas suas primeiras três posições (da esquerda para direita): BBB, BBA, BAB, BAA, AAA, AAB, ABA e ABB. O resultado é o mesmo se o enunciado fosse *"quantos anagramas de 3 letras podemos formar com a palavra BABABA?"*

3. *"Um país disputa 5 modalidades esportivas. De quantas maneiras pode-se formar seu quadro de medalhas?"*. Um quadro de medalhas é composto por número de **o**uro (**o**), **p**rata (**p**) e **b**ronze (**b**). Mas ainda existe a opção de não ganhar **n**ada (**n**), portanto no total são 4 alternativas: **o, p, b, n.** Este é o ESTOQUE, que não tem elementos repetidos. Nos textos didáticos este tipo de problema é apresentado como *combinação com repetição* mas com a nossa terminologia ele seria *combinação com reposição*, uma vez que cada elemento selecionado é reposto ao ESTOQUE de forma que permita escolhê-lo outra vez.

4. *"Quantas placas de carro podem-se formar no Brasil?"* O ESTOQUE é formado pelas 26 letras e 10 números, portanto não há repetição de elementos. Se há placas com letras repetidas é porque houve reposição. Em nossa terminologia este é um caso de arranjo com reposição.

5. *"Numa fase do campeonato sobraram 3 vagas para repescagem disputadas entre 3 brasileiros e 2 argentinos. De quantas maneiras esses dois países podem ser contemplados com as vagas ?"*. Há elementos repetidos pois são 3 do Brasil e 2 da Argentina. Como as vagas não são ordenadas, com nossa terminologia este é um caso de *combinação com repetição.* Este é outro tipo de problema que não costuma ser abordado em salas de aula. Denotando (*x, y*) quando se atribui *x* vagas para o Brasil e *y* para a Argentina. Sendo $x+y=3$, temos inicialmente as seguintes soluções: (3,0), (2,1), (1,2), (0,3). Mas Argentina não tem 3 atletas, portanto temos apenas 3 soluções: (3,0), (2,1), (1,2).

Para resolver os problemas 2 e 5 não usamos nenhuma fórmula, senão fizemos apenas a listagem completa e dela selecionamos as que satisfazem o enunciado. Embora esses dois tipos de problema normalmente não façam parte dos currículos escolares, a nossa terminologia permite fazer a sua classificação. As vantagens dessa nossa terminologia são portanto

(1) permitir identificar mais facilmente as causas da repetição de elementos na Seleção: existência de elementos repetidos no Estoque ou a reposição deles;

(2) permitir classificar dois problemas que normalmente não são abordados em salas de aula: arranjo com repetição e combinação com repetição (conforme a nossa proposta).

4 CONCLUSÃO

Neste trabalho apresentamos as principais dificuldades na aprendizagem de Análise Combinatória: (1) a necessidade de se ler e interpretar o texto, o enunciado do problema; (2) a necessidade de classificar o problema segundo o seu tipo e subtipo dentre os vários existentes; (3) a necessidade de memorizar a fórmula geral e associá-la corretamente a cada tipo de problema; (4) existência de alguns termos que não são padronizados.

Tendo em vista este último ítem apresentamos também uma proposta alternativa de terminologia que visa facilitar um pouco a compreensão do problema quando há elementos repetidos no conjunto inicial e quando há a reposição do elemento selecionado ao conjunto inicial. Tal terminologia permite ver facilmente onde acontece a repetição de elementos, se é no conjunto inicial (aqui chamado de ESTOQUE), ou no subconjunto selecionado (aqui chamado de SELEÇÃO). Usamos o termo *com repetição* para o primeiro caso e *com reposição* para o segundo.

Relacionado ao ítem (2) da lista de dificuldades acima ainda é preciso fazer considerações, na fase da resolução do problema, quanto aos seguintes (1) se importa ou não a ordem dos elementos selecionados; (2) se existe ou não elementos repetidos no ESTOQUE; (3) se houve ou não a reposição do elemento selecionado; (4) se a geometria é linear ou circular e (5) se há restrição e qual delas. Este último ítem normalmente é o fator que mais complica a resolução do problema em questão.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Adriana Luziê; FERREIRA, Ana Cristina. **Ensinando e aprendendo análise combinatória Com ênfase na comunicação matemática.** Disponível em: < http://www.ppgedmat.ufop.br/arquivos/livreto_Adriana_Luzie.pdf >. Acesso em: 09 jan. 2014.

BORTOLOTI, R.D.M. **Formação de professores:** erros em análise combinatória. XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática 26-30 de junho de 2011, Recife-Brasil. Disponível em: < http://www.lematec.net/CDS/XIIICIAEM/artigos/1610.pdf >. Acesso em: 10 jun. 2013.

GERSTING,J.L. **Fundamentos Matemáticos para a Ciência da Computação** – um tratamento moderno de Matemática Discreta – 5ª ed. Rio de Janeiro, LTC, 2004.

GUERREIRO, C. As Pegadas Jacobinas. **Revista Educação**, setembro, 2011. Disponível em: < http://revistaeducacao.uol.com.br/textos/147/artigo234610-1.asp >. Acesso em: 10 jun. 2013.

HAZZAN, S. **Fundamentos de Matemática Elementar** – vol. 5: Combinatória e Probabilidade, 7ª edição, São Paulo, Ed. Atual, 2004.

MILLONE, G. **Estatística Geral e Aplicada.** São Paulo – Pioneira Thomson Learning, 2004.

MORGADO, A.C. et al. **Análise Combinatória e Probabilidade** – com as soluções dos exercícios, 9ª. ed, Rio de Janeiro, SBM, 2006.

SODRÉ, U. **Ensino Médio:** Análise Combinatória. Disponível em: <http://pessoal. sercomtel.com.br/matematica/medio/combinat/combinat.htm#comb11>. Acesso em: 29 dez. 2010.