

# ANÁLISE DE JUNTAS COLADAS UTILIZANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTOURNO

## ANALYSIS OF BONDED JOINTS USING BOUNDARY ELEMENT METHOD

Walace Júnior Rodrigues da Silva <sup>1</sup> Alícia Maria Pinheiro <sup>2</sup>  
William Portilho de Paiva <sup>3</sup> Paulo Sollero <sup>4</sup>

Data de entrega dos originais à redação em: 06/06/2019  
e recebido para diagramação em: 17/04/2020

Este trabalho apresenta uma aplicação da formulação bidimensional do Método dos Elementos de Contorno (MEC) voltada ao cálculo de tensão e deformação em juntas coladas. Existem vários tipos de disposição entre os aderentes de uma junta colada. Neste trabalho, especificamente, são apresentados os valores das tensões normal e de cisalhamento presentes na região colada de uma junta de sobreposição simples (SLJ). Cada uma das partes da junta é modelada utilizando-se a técnica de sub-regiões. Ressalta-se que neste trabalho são consideradas as propriedades de uma cola perfeita entre os aderentes da junta, ou seja, apenas a deformação do material da chapa é levada em conta, desprezando-se possíveis alterações que o material da cola possa sofrer. Os resultados obtidos por meio desse método são comparados com os valores encontrados a partir de formulações analíticas já publicados na literatura, para o mesmo tipo de problema, obtendo-se uma boa concordância entre eles.

Palavras-chave: Análise de Tensão. Junta Colada. Método dos Elementos de Contorno.

*This paper presents the computation of stress and strain in a bonded joint using a bi-dimensional formulation of the Boundary Elements Method (BEM). There are several types of set up of adherents in a bonded joint. In this paper, specifically, values of normal stress and shear in the bonded region of a single lap joint (SLJ) are presented. Each adherent is modeled applying the sub-regions technique. It is important to mention that, in this paper, the properties of a perfect bond condition between the adherents of the joint are considered. In other words, only the laminate material deformation is considered, neglecting possible changes that the adhesive can undergo. Results obtained through this method are compared with values found in analytical publications for a similar type of problem with a good agreement.*

*Keywords: Stress Analysis. Bonded Joint. Boundary Element Method.*

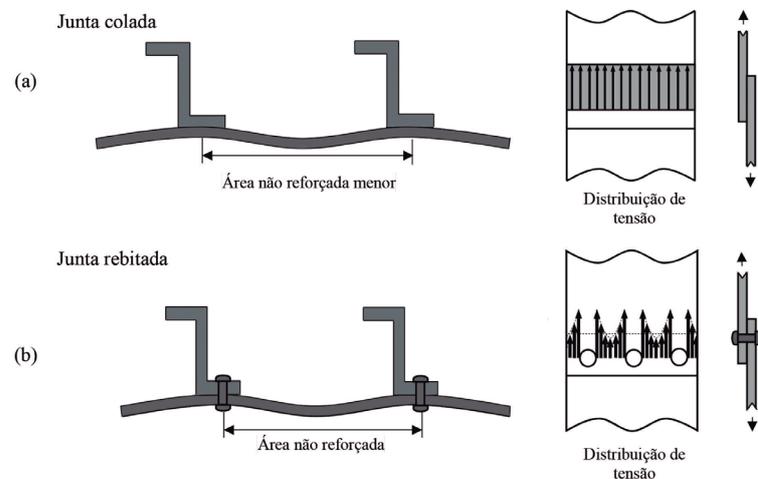
## 1 INTRODUÇÃO

A utilização da colagem como método de união de estruturas mecânicas, por parte da indústria moderna, continua mostrando tendência de crescimento. Atualmente sua aplicação pode ser vista em todos os ramos de atividade industrial, passando pelas indústrias civil, automobilística, naval, aeroespacial, de bens de consumo e até mesmo na área biomédica. Existem vários tipos de juntas coladas, cada uma adequada a uma aplicação específica, dentre as quais podem ser citadas as juntas coladas de sobreposição simples, juntas coladas de sobreposição dupla, juntas com chanfro exterior, juntas com chanfro interior, juntas degrau, juntas com cobre-junta, juntas com cobre-junta dupla, juntas topo a topo e as juntas tubulares.

Algumas vantagens das juntas coladas em relação aos outros métodos de união (juntas parafusadas, rebitadas ou soldadas) são menor

peso, maior absorção de impacto e vibrações, melhor distribuição de tensões na região da colagem, melhor vedação e melhor acabamento. Talvez a principal dessas vantagens seja a distribuição de tensões mais uniforme (Fig. 1a), quando comparada com as outras opções de união (Fig. 1b)

Figura 1 - Comparação da distribuição de tensão em (a) uma junta colada e em (b) em uma junta rebitada



1 - Tecnologia em Gestão da Produção Industrial - Instituto Federal de São Paulo - Câmpus Salto. < walace22junior@gmail.com >.

2 - Tecnologia em Gestão da Produção Industrial - Instituto Federal de São Paulo - Câmpus Salto. < ali.mapi@hotmail.com >.

3 - Área da Indústria - Instituto Federal de São Paulo - Câmpus Salto. < portilho@ifsp.edu.br >.

4 - Faculdade de Engenharia Mecânica - Universidade Estadual de Campinas. < sollero@fem.unicamp.br >.

Devido às vantagens apontadas, embora apresente pontos críticos, o estudo de juntas coladas tem se tornado um importante campo de pesquisa cujo objetivo é aprimorar aplicações e otimizar benefícios estruturais. A possibilidade de novas aplicações e otimização das existentes requer maior conhecimento de seu comportamento mecânico, bem como demanda a necessidade de desenvolvimento de ferramentas de cálculos, simulações e análises.

Desde há muito tempo, vários autores têm proposto métodos analíticos para resolver problemas que envolvem a análise da tensão em juntas coladas, como por exemplo, Volkersen (1938), Goland e Reissner (1944), Hart-Smith (1973a,b), Ojalvo e Eidinoff (1978), Hart-Smith, (1985). Estes autores consideraram os valores máximos de tensão como critérios de falha em seus trabalhos (Rodríguez et al., 2012). Além disso, análises de falhas por mecânica da fratura bem como ensaios experimentais também podem ser empregados para solucionar este tipo de problema.

No entanto, os métodos analíticos já desenvolvidos são muito específicos, visto que os valores de tensão são avaliados para casos particulares levando em consideração materiais, geometria, condições de contorno e carga aplicada para cada situação problema. Esse fato pode tornar trabalhoso, custoso ou até mesmo inviável a utilização destes métodos para análises mais gerais. Neste contexto o MEC se apresenta como uma alternativa para análises mais abrangente.

Este tipo de análise requer o conhecimento de uma série de conceitos de resistência dos materiais e do MEC (Brebbia e Domínguez, 1989; Kane, 1994).

Algumas aplicações do método dos elementos de contorno para a análise de adesão em juntas coladas de corpos bimateriais, tensão residual e fator de intensidade de tensão, calculado por técnicas de extrapolação, foram apresentadas por Yuuki e Xu (1994). Recentes trabalhos incluem os realizados por Rodríguez et al. (2012) e os realizados por Fiuza (2016) e Pinheiro et al. (2018), entre outros.

O método dos elementos de contorno vem sendo desenvolvido já há várias décadas e através dos anos vem se consolidando como uma ferramenta de análise computacional extremamente útil em várias disciplinas de engenharia. Sua aplicação tem sido objeto de estudos desde o início dos anos 70. Esta trajetória pode ser vista em Aliabadi (1997) e Cruse (1998).

## 2 METODOLOGIA

A principal motivação para o desenvolvimento deste trabalho é que o MEC se apresenta como uma ferramenta eficiente para prever o gradiente de tensão presente em juntas coladas, e vem despertando o interesse de pesquisadores interessados em utilizá-lo nesse tipo de aplicação.

### 2.1 Métodos dos elementos de contorno

Na análise pelo MEC o contorno  $\Gamma$  da peça é dividido em  $n$  elementos de contorno  $\Gamma_c$  e sobre cada um desses elementos é aplicada a equação integral de contorno. A equação integral de contorno é dada por:

$$-c_j(x^*)u_j(x^*) + \sum_{e=1}^n \int_{\Gamma_e} [t_i(x)U_j(x, x^*) - u_i(x)T_j(x, x^*)] d\Gamma(x) = 0 \quad (A)$$

onde  $U_j^*$  é a solução fundamental para problemas bidimensionais em estado plano de deformação em termos de deslocamento, e que pode ser calculada por

$$U_{ij}^* = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \left[ (3-4\nu) \ln \frac{1}{r} \delta_{ij} + r_i r_j \right] \quad (B)$$

e  $T_j^*$  é a solução fundamental para problemas bidimensionais em estado plano de deformação em termos de forças de superfície, e que pode ser calculada por

$$T_j^* = -\frac{1}{4\pi\mu(1-\nu)} \left\{ \frac{\partial r}{\partial n} [(1-2\nu)\delta_j + 2r_i r_j] + (1-2\nu)(n_i r_j - n_j r_i) \right\} \quad (C)$$

Os demais termos dessa equação são valores conhecidos. Aplicando-se adequadamente as condições de contorno em conjunto com as equações acima tem-se um sistema de equações bem determinado e possível de ser resolvido. Através de algumas manipulações algébricas podemos isolar as incógnitas em um vetor  $\mathbf{f}$  de forma que o sistema possa ser representado por

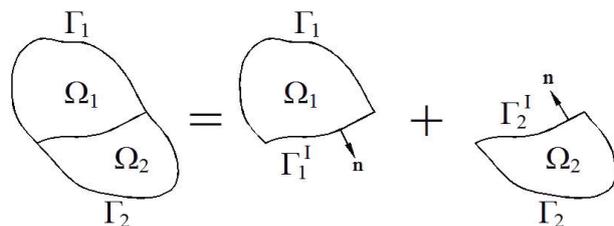
$$\mathbf{Ax} = \mathbf{f} \quad (D)$$

A formulação detalhada das soluções fundamentais pode ser vista em Brebbia e Domínguez (1989) e Kane (1994).

### 2.2 Sub-regiões

A análise estrutural pelo MEC algumas vezes requer que o domínio seja dividido em duas ou mais regiões. Isso pode ocorrer devido a presença de trincas na estrutura ou devido a existência de diferentes materiais no domínio.

Figura 2 - Divisão de um domínio em duas sub-regiões



Considere-se um domínio dividido em duas sub-regiões  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$ , com contornos  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  separados por uma interface  $I$  delimitada por  $\Gamma_1^I$  e  $\Gamma_2^I$  (Fig. 2). Os deslocamentos  $\mathbf{u}$  e as forças de superfície  $\mathbf{t}$  no contorno  $\Gamma_i$  de cada subdomínio devem satisfazer às condições de continuidade de deslocamentos e equilíbrio de forças de superfície, que podem ser expressas, respectivamente, como:

$$\mathbf{u}_1^I(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_2^I(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{u}^I \quad (E)$$

$$\mathbf{t}_1^I(\mathbf{x}) = -\mathbf{t}_2^I(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{t}^I \quad (F)$$

onde  $\mathbf{u}^i$  e  $\mathbf{t}^i$  são somente incógnitas ao longo da interface  $I$ . Ao aplicar o sistema de equações em cada uma das sub-regiões  $i$  obtém-se:

$$[\mathbf{H}_1 \quad \mathbf{H}_1^i] \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_1^i \end{Bmatrix} = [\mathbf{G}_1 \quad \mathbf{G}_1^i] \begin{Bmatrix} \mathbf{t}_1 \\ \mathbf{t}_1^i \end{Bmatrix} \quad (G)$$

onde as matrizes  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{G}$  contêm as integrais das soluções fundamentais de forças de superfície  $T_y$  e de deslocamentos  $U_y$ , respectivamente, e os vetores  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{t}$  contêm todos os deslocamentos e forças de superfícies, conhecidos ou não.

Fazendo a combinação dos sistemas de equações para  $i = 1$  e  $i = 2$ , um sistema único que descreve todo o problema pode ser obtido:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 & \mathbf{H}_1^i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{H}_2 & \mathbf{H}_2^i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_1^i \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_2^i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1 & \mathbf{G}_1^i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{G}_2 & \mathbf{G}_2^i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{t}_1 \\ \mathbf{t}_1^i \\ \mathbf{t}_2 \\ \mathbf{t}_2^i \end{Bmatrix} \quad (H)$$

Ao impor a compatibilidade de deslocamentos e o equilíbrio de forças de superfícies conforme Eqs. (E) e (F), a Eq. (H) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 & \mathbf{H}_1^i & 0 \\ 0 & \mathbf{H}_2 & \mathbf{H}_2^i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_1^i \\ \mathbf{u}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1 & \mathbf{G}_1^i & 0 \\ 0 & -\mathbf{G}_2^i & \mathbf{G}_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{t}_1 \\ \mathbf{t}_1^i \\ \mathbf{t}_2 \end{Bmatrix} \quad (I)$$

Uma vez que os deslocamentos e as forças de superfície na interface são desconhecidos, a Eq. (I) pode ser reordenada da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 & \mathbf{H}_1^i & -\mathbf{G}_1^i & 0 \\ 0 & \mathbf{H}_2 & \mathbf{G}_2^i & \mathbf{H}_2^i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_1^i \\ \mathbf{t}_1^i \\ \mathbf{u}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{G}_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{t}_1 \\ \mathbf{t}_2 \end{Bmatrix} \quad (J)$$

A equação integral de contorno é transformada em um sistema linear de equações algébricas:

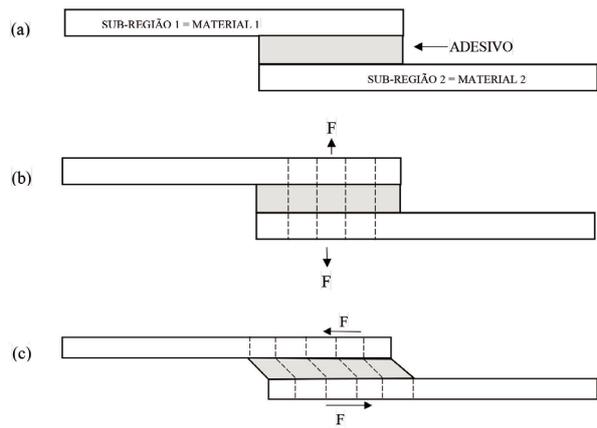
$$\bar{\mathbf{H}} \bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{G}} \bar{\mathbf{t}} \quad (K)$$

Aplicando as condições de contorno no sistema da Eq. (J) chega-se ao sistema mostrado na Eq. (D), a partir do qual os deslocamentos e forças de superfície desconhecidos no contorno e na interface são obtidos.

### 2.3 Junta colada simples

Neste trabalho foi proposta a análise de uma junta SLJ (Fig. 3a) para obter os valores das tensões normal (Fig. 3b) e de cisalhamento (Fig. 3c), e como essas tensões são distribuídas ao longo da interface.

Figura 3 - (a) Junta colada de sobreposição simples, (b) submetida à tensão normal, (c) submetida à tensão de cisalhamento



Para a realização da análise foi feita uma implementação computacional de elementos de contorno em um programa chamado MEC-SLJ.

Utilizando o MEC-SLJ foi modelada a junta SLJ. Para a modelagem foram consideradas as seguintes condições: forma geométrica e dimensões conforme norma ASTM D 1002 (Fig. 4); propriedades mecânicas: módulo de elasticidade  $E = 69$  GPa e razão de Poisson  $\nu = 0,32$ ; condições de contorno e carregamento aplicados conforme a Figura 4.

A análise foi realizada partindo do pressuposto que a união adesiva utiliza uma cola perfeita, desprezando, portanto, possíveis alterações mecânicas geradas por seu comportamento.

### 3 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Nesta seção são apresentados resultados dos valores de tensão normal e cisalhamento da junta colada, utilizado o MEC-SLJ. Na Figura 5 são mostradas a geometria da junta colada, as condições de contorno de travamento/fixação (triângulos verdes) e força de tração aplicadas (setas vermelhas), bem como a divisão do contorno da geometria em elementos de contorno (pontos azuis).

Ao ser aplicada a força a junta se deforma (Fig. 6). As linhas azuis representam a geometria original da peça, antes da aplicação da força. As linhas vermelhas apresentam a geometria da peça, deformada, após a

Figura 4 - Dimensionamento da junta analisada conforme determinado pela norma ASTM D 1002

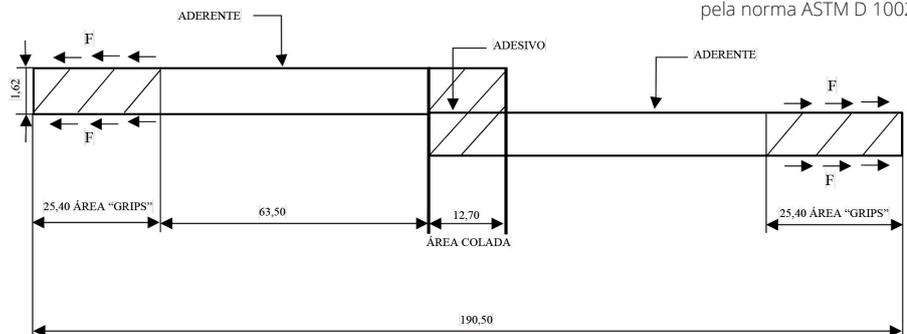
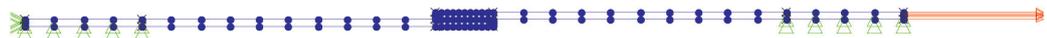


Figura 5 - Geometria e condições de contorno aplicadas na junta



aplicação da carga. Vale salientar que a deformação apresentada está ampliada, uma vez que na realidade ela é bem menor.

Figura 6 - Geometrias original (azul) e deformada (vermelha) da junta colada



A seleção do tipo de adesivo a ser utilizado e o dimensionamento da junta colada requer o conhecimento da distribuição e valores das tensões na mesma.

No primeiro estudo realizado procurou-se verificar a dependência do resultado com relação à malha de elementos de contorno. Foram realizadas quatro análises, adotando as seguintes malhas de elementos de contorno quadráticos contínuos: 82 elementos, sendo

30 na interface; 92 elementos, sendo 40 na interface; 102 elementos, sendo 50 na interface; 152 elementos, sendo 100 na interface. A Figura 7 mostra para cada uma das malhas descritas acima, os valores normalizados das tensões normal e de cisalhamento. Analisando os dados apresentados na Figura 7 pode-se concluir que os resultados são muito pouco dependentes da malha, e que valores adequados podem ser obtidos mesmo com uma discretização mais grosseira.

Figura 7 - Distribuição das tensões normal e de cisalhamento normalizadas, utilizando (a) 82 elementos, (b) 92 elementos, (c) 102 elementos e (d) 152 elementos quadráticos contínuos

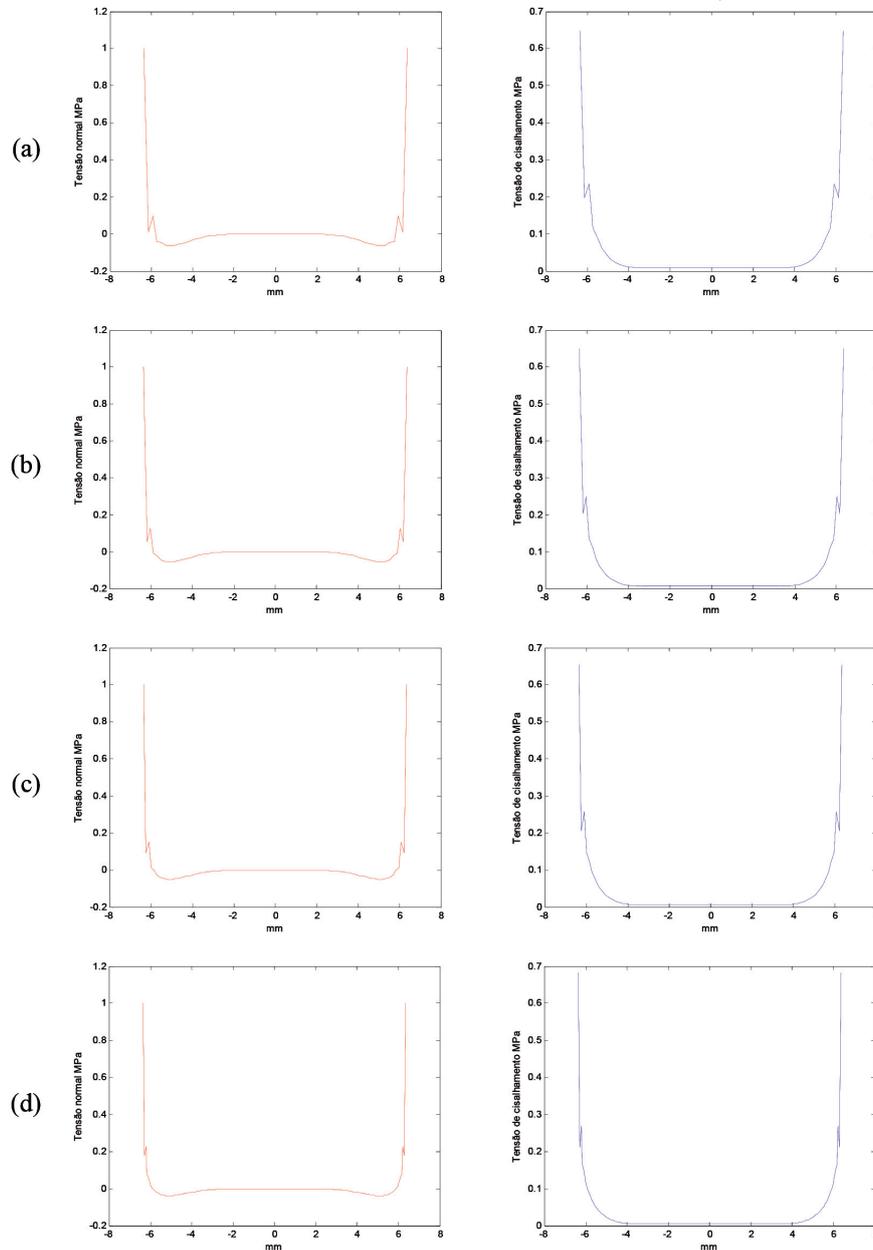


Figura 8 - Distribuição de tensão normal (normalizada) obtida (a) pelo MEC-SL; (b) analiticamente; (c) a partir de um modelo de elementos finitos 2D; (d) a partir de um modelo de elementos finitos 3D

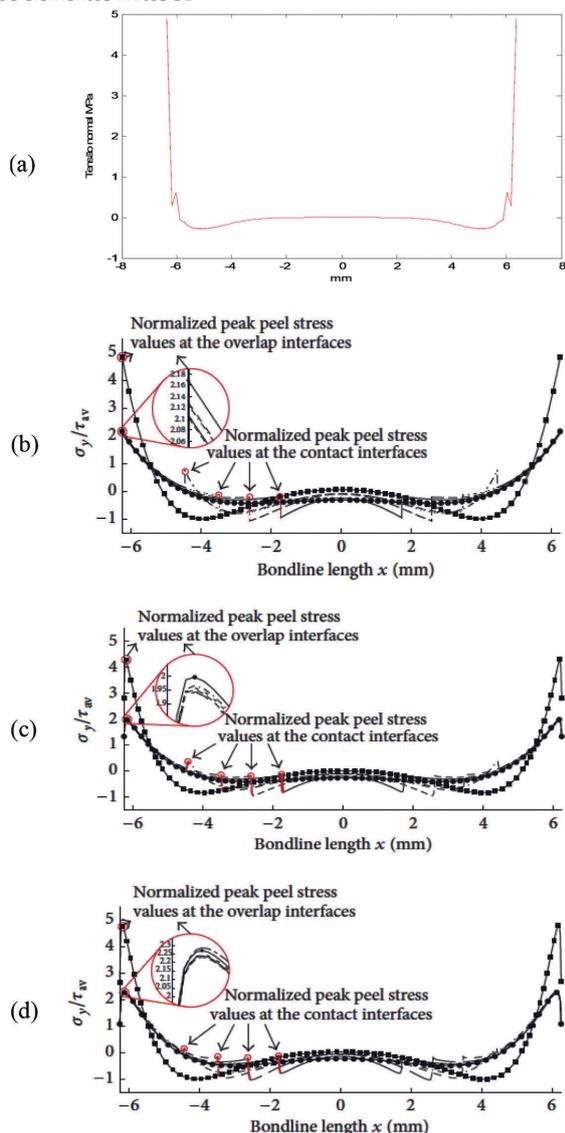
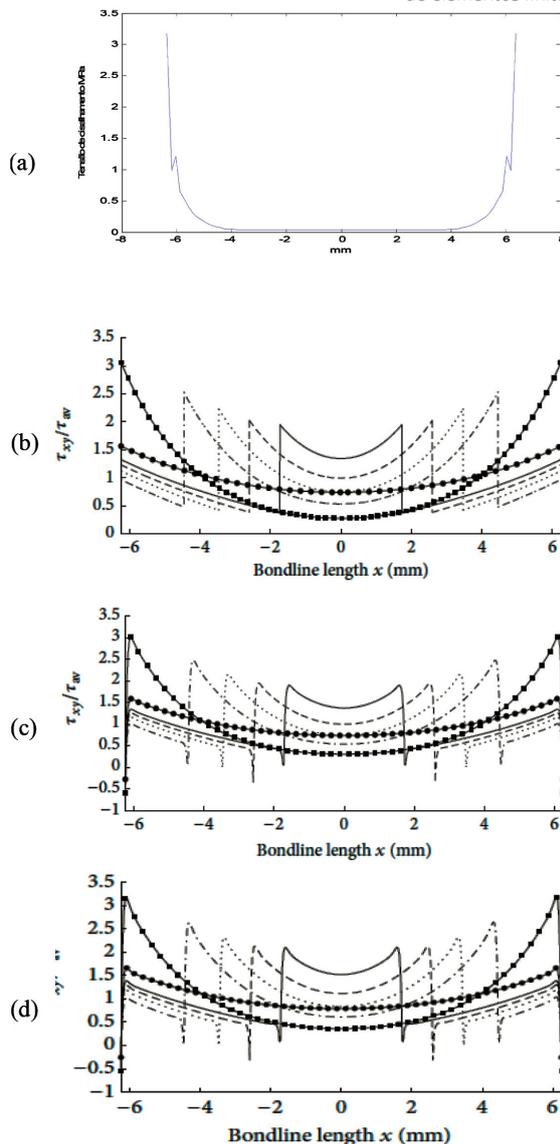


Figura 9 - Distribuição de tensão de cisalhamento (normalizada) obtida (a) pelo MEC-SL; (b) analiticamente; (c) a partir de um modelo de elementos finitos 2D; (d) a partir de um modelo de elementos finitos 3D



Na segunda fase dos estudo foram realizadas comparações entre os valores de tensão obtidos com o MEC-SL e aqueles disponíveis na literatura. A Figura 8 apresenta a comparação com os valores da tensão normal e a Figura 9 apresenta a comparação com os valores da tensão de cisalhamento, obtidas analiticamente e numericamente (Özer e Öz, 2014). Em ambos os casos a comparação deve ser feita com os valores mais altos, referentes a adesivos rígidos, uma vez que estes mais se aproximam da simplificação adotada no presente trabalho.

Analisando os gráficos apresentados nas Figuras 7, 8 e 9, destaca-se que os pontos de valores máximos de deformação de tensão, o perfil da distribuição das tensões e a deformação encontrados pelo MEC-SL apresentam comportamento compatível com os apresentados na literatura.

#### 4 CONCLUSÃO

Neste trabalho foi apresentada uma implementação do programa MEC-SLJ para o cálculo de tensões em uma

SLJ, baseado nos métodos de elementos de contorno e de sub-regiões. Os valores de tensão e das deformações do material foram calculados a partir dos valores de forças de superfície nodais obtidos através de elementos de cada sub-região.

Os estudos mostram que os resultados são pouco dependentes da discretização e que há uma compatibilidade com os resultados analíticos e numéricos já apresentados na literatura para o mesmo tipo de problema. De acordo com esses resultados pode-se concluir que a abordagem utilizada é adequada para a análise de problemas de juntas coladas em análises bidimensionais.

#### AGRADECIMENTOS

Os autores são gratos pelo apoio financeiro recebido por meio do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica e Tecnológica do Instituto Federal São Paulo (PIBIFSP) e do CNPq por meio do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação em Desenvolvimento

Tecnológico e Inovação (PIBITI) que tornou possível a realização deste projeto.

## REFERÊNCIAS

ALIABADI, M. A new generation of boundary element methods in fracture mechanics. **International Journal of Fracture**, p. 91-125, 1997.

AMERICAN SOCIETY FOR TESTING AND MATERIALS. **ASTM D1002-01: Standard Test Method for Apparent Shear Strength of Single-Lap-Joint Adhesively Bonded Metal Specimens by Tension Loading (Metal-to-Metal)**. United States, 2010.

BREBBIA, C. A.; DOMINGUEZ, J. **Boundary elements – An introductory course**. Southampton: Computational Mechanics Publications, 1989.

CRUSE, T. **Boundary element analysis in computational fracture mechanics**. Dordrecht: Kluwer Academic Publications, 1998.

FIUZA, G. C. C. **Análise de comportamento mecânico de juntas coladas multimateriais**. Rio de Janeiro: CEFET, 2016. 70 p.

GOLAND, M.; REISSNER, E. The stresses in cemented joints. **Journal of Applied Mechanics**, v. 11, p. A17-A27, 1944.

HART-SMITH, L. J. **Adhesive-bonded double-lap joints**. NASA. [S.l.]. 1973a.

HART-SMITH, L. J. **Adhesive-bonded single-lap joints**. NASA. [S.l.]. 1973b.

HART-SMITH, L. J. **Designing to minimize peel stresses in adhesive-bonded joints**. Delamination and Debonding of

Materials. Pittsburgh: ASTM Special Technical Publication, p. 238-266, 1985.

KANE, J. A. **Boundary element analysis in engineering continuum mechanics**. New Jersey: Prentice Hall, 1994.

OJALVO, I.; EIDINOFF, H. Bond thickness effects upon stresses in single-lap adhesive joints. **American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal**, v. 16, n. 3, p. 204-211, 1978.

ÖZER, H.; ÖZ, Ö. A Comparative Evaluation of Numerical and Analytical Solutions to the Biadhesive Single-Lap Joint. **Mathematical Problems in Engineering**, v. 2014, p. 1-16, 2014.

PAIVA, W. P. **Análise de Problemas de Trincas Interfaciais Usando o Método dos Elementos de Contorno**. São Paulo: UNICAMP, 2000. 100p.

PINHEIRO, A. M.; SILVA, W. J. R.; PAIVA, W. P.; SOLLERO, P. ANÁLISE DE JUNTAS COLADAS UTILIZANDO MÉTODOS DE ELEMENTOS DE CONTORNO. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE ENGENHARIA E CIÊNCIA DOS MATERIAIS, 23., 2018, Foz do Iguaçu. **Bienais...** Paraná: CBECiMat, 2018.

RODRÍGUEZ, R. Q.; PAIVA, W. P.; SOLLERO, P.; RODRIGUES, M. R. B.; ALBUQUERQUE, E. L. Failure criteria for adhesively bonded joints. **International Journal of Adhesion & Adhesives**, v. 37, p. 26-36, 2012.

VOLKERSEN, O. Nietkraftverteilung in zugbeanspruchten nietverbindungen mit konstanten. **Luftfahrtforschung**, v. 1, p. 15-41, 1938.

YUUKI, R.; XU, J. Boundary element analysis of dissimilar materials and interface crack. **Computational Mechanics**, n. 14, p. 116-127, 1994.