HIPÁTIA

Υπατία

REVISTA BRASILEIRA DE HISTÓRIA, EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA

ISSN 2526-2386

v.4, n.2, dezembro 2019

Instituto Federal de São Paulo

HIPÁTIA

Υπατία

INSTITUTO FEDERAL
São Paulo

UTFPR
UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

HIPÁTIA

Υπατία

REVISTA BRASILEIRA DE HISTÓRIA, EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA

v.4, n.2, dezembro de 2019

Instituto Federal de São Paulo

HIPÁTIA	São Paulo (SP)	v. 4	n. 2	p. 181-322	dez. 2019

LINHA EDITORIAL

A HIPÁTIA - Revista Brasileira de História, Educação e Matemática, conforme sugere seu nome, aceita trabalhos de História da Matemática, Educação Matemática e de Matemática (pura e aplicada). A revista foi oficialmente criada em 8 de março de 2016. Duas concepções principais nos norteiam: ajudar a ampliar a participação da mulher na ciência no Brasil e abrir um espaço para jovens pesquisadores (mestres, doutorandos ou doutores que tenham obtido título há, no máximo, cinco anos). Isso significa que procuramos dentro da composição de nosso Conselho Editorial, Conselho Científico e em nossas edições, obter uma maioria de pesquisadores ou de trabalhos cujos autores atendam a pelo menos um desses quesitos. É salutar destacar que, no entanto, contribuições de outros pesquisadores continuam sendo de grande valia. A revista é composta por cinco seções : **1) Ensaios**, na qual são aceitos textos discursivos de caráter crítico **2) Artigos**, na qual são aceitos trabalhos completos ou com resultados parciais consistentes; **3) Iniciação Científica**, na qual são aceitos trabalhos concluídos decorrentes de pesquisas em nível de graduação (iniciação científica, trabalho de conclusão de curso, monografias resultantes de trabalhos orientados por docentes etc.); **4) Relatos de Experiência**, na qual são publicados textos que descrevam precisamente uma dada experiência que possa contribuir de forma relevante para as áreas da HIPÁTIA; **5) Resenhas**, na qual são aceitas resenhas de livros, dissertações e teses, ou outros formatos de interesse publicados preferencialmente há não mais que sete anos.

SUMÁRIO

EDITORIAL

S. César Otero-Garcia, Línlya Sachs 187

Ensaio

A TRAGÉDIA DA ESQUERDA ACADÊMICA E O MAL-ESTAR NA UNIVERSIDADE BRASILEIRA

Marcelo Salles Batarce 189

Artigos

CIÊNCIAS HUMANAS E EXATAS: UM DIÁLOGO DIFÍCIL

Roberto Ribeiro Baldino 206

RUPTURAS EM LIMITES DE ESTRUTURAS MATEMÁTICAS DA MÚSICA OCIDENTAL

Chrisley Bruno Ribeiro Camargos ; Ademir Donizeti Caldeira ……................................ 215

ENSAIOS SOBRE COMPREENSÕES EM MATEMÁTICA EM PERSPECTIVAS DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: UMA ANÁLISE PERCUSSIVA DE ATIVIDADES AO ZAPEAMENTO

Luiz Carlos Leal Júnior ; Lourdes de la Rosa Onuchic 230

UMA CARACTERIZAÇÃO DAS TAREFAS DESENVOLVIDAS NA DISCIPLINA ESTÁGIO SUPERVISIONADO NO ENSINO FUNDAMENTAL EM MATEMÁTICA DE UMA INSTITUIÇÃO PRIVADA BRASILEIRA

Diego Fogaça Carvalho; Osmar Pedrochi Júnior; Fátima Aparecida da Silva Dias 250

OS TEOREMAS DE PAPPUS PARA OS SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO: A DEMONSTRAÇÃO DE JAMES GREGORY

Robson Raulino Rautenberg; Roy Wilhelm Probst 262

Iniciação Científica

O MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS APLICADO AO AJUSTE DE CURVAS

Francisca Edna Ferreira Félix ; Reginaldo Amaral Cordeiro Júnior 282

ESCOLAR A ABORDAGEM DA TRIGONOMETRIA NO LIVRO DIDÁTICO DO 9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL (ANOS FINAIS): DESAFIOS E NOVAS PERSPECTIVAS

Jeferson José dos Santos Almeida 295

Relato de Experiência

ENSINO DA MATEMÁTICA POR MEIO DA CONTAÇÃO DE HISTÓRIAS: RELATO DE UMA EXPERIÊNCIA VIVIDA

ARAUJO, Wellington Rabello Araújo; Gisele de Lourdes Monteiro; Fabiane Mondini; Rosa Monteiro Paulo 312

Resenha

PEREIRA, D. E. **Correspondências científicas como uma relação didática entre História e ensino de Matemática**: o exemplo das cartas de Euler a uma princesa da Alemanha. 2014. 281 p. Tese (Programa de Pós-Graduação em Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2014. Tese orientada por Iran Abreu Mendes.

Luís Felipe Gonçalves Carneiro; Mirian Maria Andrade 318

EDITORIAL

S. César **Otero-Garcia**
Editor-chefe

Línlya **Sachs**
Miriam Cardoso **Utsumi**
Coeditoras

A defesa da universidade pública já esteve e continua presente nos editoriais da HIPÁTIA – Revista Brasileira de História, Educação e Matemática. A pergunta que nos colocamos, neste momento, é: defendemos o quê, mais especificamente? O ensaio que abre esta edição, *A tragédia da esquerda acadêmica e o mal-estar na universidade brasileira*, de Marcelo Salles Batarce, possibilita questionamentos a respeito do que fazemos (e costumamos defender) cotidianamente nas universidades onde estudamos, trabalhamos, ensinamos, fazemos pesquisas e muitas outras atividades.

Poderíamos, como em um texto autobiográfico, relatar uma semana de trabalho comum nas universidades. Possivelmente, haveria aulas, com formatos mais ou menos expositivos, avaliações, envolvendo sentimento de medo, o exercício do micropoder, com discursos de mérito, com notas, reprovações e aprovações, haveria a participação em editais para obtenção de recursos, para equipar laboratórios, para que as pessoas recebam bolsas (em valores variados), para desenvolvimento de atividades de pesquisa e de extensão, haveria a escrita de pareceres a dissertações, teses, monografias, trabalhos de conclusão de curso, artigos, projetos, haveria a elaboração de relatórios de pesquisa e, também, atividades de orientação e supervisão. Haveria muito mais... reuniões, votações, decisões. Em cada uma dessas pequenas ações, poderíamos, ainda, perguntar: o que buscamos ser? Uma resposta rápida que poderíamos receber seria: queremos ser uma universidade de qualidade!

Inseridos na lógica capitalista neoliberal, não conseguimos sequer pensar em outro modelo de "qualidade", que não seja classificador, excludente, produtivista, egoísta e ambicioso. Classificador, pois ordena os "melhores" e os "piores" – nas aulas, nas avaliações, na atribuição de tarefas, na concessão de bolsas e recursos, nas notas, na eleição de representantes –; excludente, pois retira de cena os que não deveriam estar ali – basta vermos os índices de evasão das universidades públicas –; produtivista, pois sempre se quer mais – mais artigos, mais orientações, mais recursos, mais resultados, mais atividades curriculares –; egoísta porque pouco importa o outro – o professor com quem encontro todos os dias, o colega de sala, aqueles que não conseguem seguir a cartilha da produtividade, a outra universidade, o outro curso; e ambicioso, porque o céu é o limite – seja o Qualis A1, o conceito 7 do programa de pós-graduação ou a obtenção da melhor bolsa de produtividade.

Não há outro modo de sermos professores, estudantes, pesquisadores, pareceristas, avaliadores, representantes, coordenadores, reitores? Não há outro modo de sermos universidade (de qualidade)?

Com essas questões, damos sequência aos textos que fazem parte deste número. São cinco artigos, dois textos de iniciação científica e um relato de experiência, apresentados, nesta ordem, a seguir: *Ciências Humanas e Exatas: um diálogo difícil*, de Roberto Ribeiro Baldino; *Rupturas em limites de estruturas matemáticas da música ocidental*, de Chrisley Bruno Ribeiro Camargos e Ademir Donizeti Caldeira; *Ensaios sobre compreensões em Matemática em perspectivas de Resolução de Problemas: uma análise percussiva de atividades ao zapeamento*, de Luiz Carlos Leal Junior e Lourdes de la Rosa Onuchic; *Uma caracterização das tarefas desenvolvidas na disciplina Estágio Supervisionado no Ensino Fundamental em Matemática de uma instituição privada brasileira*, de Diego Fogaça Carvalho, Osmar Pedrochi Junior e Fátima Aparecida da Silva Dias; *Os teoremas de Pappus para os sólidos de revolução: a demonstração de James Gregory*, de Robson Raulino Rautenberg e Roy Wilhelm Probst; *O método dos mínimos quadrados aplicado ao ajuste de curvas*, de Francisca Edna Ferreira Felix e Reginaldo Amaral Cordeiro Junior; *A abordagem da Trigonometria no livro didático do 9º ano do Ensino Fundamental:: desafios e novas perspectivas*, de Jeferson José dos Santos Almeida; e *Ensino da Matemática por meio da contação de histórias: relato de uma experiência vivida*, de Wellington Rabello Araujo, Gisele de Lourdes Monteiro, Fabiane Mondini, Rosa Monteiro Paulo. Para finalizar, a resenha da tese de Daniele Esteves Pereira, intitulada “Correspondências científicas como uma relação didática entre História e ensino de Matemática: o exemplo das cartas de Euler a uma princesa da Alemanha”, elaborada por Luís Felipe Gonçalves Carneiro e Mirian Maria Andrade.

Desejamos uma boa leitura!

São Paulo, dezembro de 2019.

A TRAGÉDIA DA ESQUERDA ACADÊMICA E O MAL-ESTAR NA UNIVERSIDADE BRASILEIRA

THE TRAGEDY OF THE ACADEMIC LEFT AND THE UNREST IN THE BRAZILIAN PUBLIC UNIVERSITY

BATARCE, Marcelo Salles[1]

RESUMO

Este ensaio pretende desenvolver uma crítica ao posicionamento da esquerda no interior da Universidade Pública Brasileira. A crítica é respaldada por *insights* do filósofo Slavoj Zizek e desenvolvida por meio de dois casos. O primeiro caso refere-se ao posicionamento e concepção da "esquerda" no processo de privatização da Universidade Pública. O segundo caso refere-se ao atual mal-estar na Universidade Pública Brasileira.

Palavras-chave: Zizek. Esquerda Acadêmica. Brasil. Universidade Pública. Privatização.

ABSTRACT

This essay aims to develop a critique to the positioning of the left within the Brazilian Public University. The criticism is backed by insights from the philosopher Slavoj Zizek. The criticism is presented through two cases. The first case refers to the positioning and conception of the "left" in the privatization process of the Public University. The second case concerns the current unrest at the Brazilian Public University.

Keywords: Zizek. Academic Left. Brazil. Public University. Privatization.

1 INTRODUÇÃO

Na leitura deste texto, o leitor não estará diante dos discursos mais comuns e consensuais entre aqueles que hoje se consideram "esquerda", ou simpatizantes da esquerda[2]. Não estará o leitor aqui perante discursos do tipo: "Bolsonaro é o mal", "a mídia engana o povo e eles não sabem votar" etc. Muito pelo contrário, o leitor estará aqui diante da inversão de muitos destes princípios e de uma crítica a ideologias que aos poucos foram se incrustando, se enraizando nesta palavra, "esquerda", e que se tornaram verdades deste inconsciente polifônico de sujeitos que desejam ser considerados "de esquerda". O consenso é superficial, a tarefa a que me proponho é de aprofundar nestas entranhas e perscrutá-las, aliás isso já é uma tarefa que esta "esquerda" deixou de lado há algum tempo. Neste caminho, talvez a Tese central, não demonstrada mas sim sugerida, é a de que muitos que se consideram "esquerda" não passam de reprodutores daquilo que em discurso aparentemente criticam, chegando a reproduzir o Bolsonarismo.

Como está sugerido no título, o texto faz referências ao que denominei "esquerda acadêmica Brasileira". O texto não define, previamente, de modo abstrato e racional, essa denominação, mas apenas espera que o leitor possa reconhecê-la em sua experiência subjetiva na academia. De modo

[1] Doutor em Educação Matemática, London South Bank University (LSBU). Docente da Universidade Estadual do Mato Grosso do Sul (UEMS), Dourados, MS, Brasil. Endereço eletrônico: batarcem@gmail.com.

[2] É preciso ressalvar, contudo, que "ser esquerda" hoje abrange uma gama de significados. A esquerda comporta lulistas e defensores da prisão de Lula, comporta Ciro Gomes e Haddad. A esquerda lê Reinaldo de Azevedo e tantas outras coisas. Esta polissemia está intimamente ligada à discussão proposta neste texto, contudo, discuti-la requer um outro texto, aqui é preciso ao menos lembrar o leitor deste fato que parece, não por acaso, muito pouco notado diante de sua relevância.

que termos tais como "esquerda", "esquerda acadêmica" ou "esquerda acadêmica Brasileira" assumem, sem cuidadosa distinção, sentido empírico a partir de cenas do cotidiano de um colegiado de curso e, portanto, com caráter de local, bem como assume também um sentido mais geral e abstrato como ideologias nacionais ou Globais. Outro ponto importante é que, como toda tendência, as tratadas aqui excluem exceções.

Como farei referências recorrentes a Slavoj Zizek, devo uma palavra ao leitor, já de início, sobre isso. Qual o sentido e lugar da referência a este nome, neste texto? Dada a vasta obra de Zizek, bem como o reconhecimento da importância de seu trabalho para a filosofia contemporânea, e de outro lado, considerando também o tamanho e profundidade limitados deste texto, seria inapropriado considerar Zizek uma referência teórica para este texto. Prefiro chamar de uma referência no sentido de que este texto é encorajado por leituras e *insights* do trabalho do Zizek. O texto pode servir, na mais otimista das possibilidades, como uma provocação ao debate de leitores que tenham algum interesse em seu trabalho.

A afinidade deste texto com Zizek está por considerá-lo um crítico da esquerda, a partir da esquerda. Neste sentido Zizek fala de "nós", daqueles que de alguma forma se consideram no espectro da esquerda! Fala de "nossas" ideologias e paixões ocultas.

Para além dessas primeiras palavras o texto será desenvolvido em outras três partes, mais a conclusão. A primeira dessas três partes (seção 2) faz uma rápida referência a *insights* críticos de Zizek que subsidiarão o desenvolvimento das críticas. As críticas serão desenvolvidas em dois núcleos (seções 3 e 4). O primeiro trata de uma análise do processo de privatização da Universidade Pública Brasileira e o segundo é a análise de um aspecto da (falta de análise e discurso de) política no interior da academia.

2 ZIZEK CONTRA A ESQUERDA LIBERAL

> Hoje, a atitude predominante da esquerda está em grande parte reduzida em lamentar as injustiças e crueldades do Capitalismo ou ficar chocada diante do apoio de pessoas comuns a políticos como Donald Trump (KRECIC, 2017, p.10, tradução nossa).

A esquerda liberal, segundo Zizek, pretende o que ele chama de Capitalismo com face humana. Ou seja, um Capitalismo menos exploratório, menos predatório, mas ainda Capitalismo. Por isso ele caracteriza essa esquerda como Fukoiamista, ou seja, ela participa do consenso do fim da história. O Capitalismo venceu e no máximo o que podemos fazer é torná-lo menos predatório. É este tipo de contradição, no interior da esquerda, que me interessa explorar aqui.

Ora, talvez uma parte representativa, a maioria, de docentes que se consideram de esquerda na academia brasileira hoje sirvam como um bom exemplo de uma esquerda Fukoiamista. Que projeto têm os docentes de esquerda para a Universidade Pública Brasileira hoje? É muito fácil falar contra a meritocracia ou se horrorizar com os ataques da direita populista a Paulo Freire ou com o moralismo de Weintraub. Mas por acaso os ditos professores progressista não efetivam diariamente em suas salas de aula processos de seleção de indivíduos tendo como referência quase que exclusivamente a competência de conhecimentos de conteúdos? Qual a influência de Paulo Freire, se é que há alguma, na sala de aula destes professores? Quantos colegas de esquerda não estão prontos a supervisionar e enquadrar o trabalho de outros a partir de uma ideologia de produtividade ou de resultados que não passam de uma grande farsa? Ou seja, o que quer essa esquerda? Não seria uma espécie de Universidade que participe de todo este sistema de seleção, de meritocracia, de competição etc., mas com uma cara um pouco mais humana, com um pouco de inclusão e de tolerância? Se queremos entender o que diz Zizek ao acusar a esquerda liberal de Fukoiamista, olhemos para nós, para nossos colegas da esquerda acadêmica e perguntemos: o que querem?

Uma pergunta que pode surgir ao leitor neste ponto é a seguinte: por que uma crítica à esquerda neste momento? Não é momento de unificar a esquerda no combate contra a extrema direita?

Em primeiro lugar, deve estar claro e óbvio que, uma crítica à esquerda não significa uma posição em defesa da direita populista que venceu a eleição no Brasil e em outras partes do globo, mas significa, antes de tudo, acreditar que, repensar a esquerda e determinar de modo claro suas diferenças de princípios com o atual projeto populista da direita, hoje, é uma tarefa mais fundamental do que uma superficial unificação a partir de alianças centristas. Trata-se de apostar na necessidade e na urgência de deslocar a "esquerda" da posição de defesa, de vítimas do Capitalismo, do Fascismo, do Bolsonarismo, da mídia etc., bem como da posição de atuar apenas em respostas às ações colocadas pela extrema direita populista. Trata-se de buscar outras referências para se pensar.

Recentrar a esquerda tem uma outra implicação: desestabiliza a própria direita em sua posição relacional com a esquerda, ou seja, em sua posição anti-esquerda. Uma vez que Slavoj Zizek reposiciona a esquerda, movendo-a, coloca-a em outros lugares, lugares mais originais, a crítica hegemônica da direita à esquerda também se desmancha porque o objeto da crítica não está mais lá onde se procura. Em muitos pontos isolados Zizek parece concordar com posições da direita e talvez até da extrema direita e, por isso, é comum ser mal entendido. Mas isso é muito mais uma posição Hegeliana, ou dialética, ou seja, explorar a contradição, do que qualquer outra coisa.

No entanto, como o discurso superficial e hegemônico não consegue superar o dualismo do tudo certo *versus* tudo errado, não consegue perceber o simples fato de que por estar certo em alguns pontos, alguém ou uma posição pode estar, paradoxalmente, muito errada em seu todo. Tudo errado é uma posição que não existe, ou seria uma posição de um imbecil, facilmente desmascarado. O nosso grande problema é como desvendar discursos que contêm muitas verdades para esconder sua grande farsa. Essa é uma das ideias mais básica do que se pode chamar contradição. Eu costumo dizer que quanto mais verdade dizemos melhor a mentira que podemos contar.

Um exemplo é quando queríamos esconder algo de nossos pais. Vamos supor, um adolescente saiu uma noite e bebeu demais (na época em que isso era um tabu). Quando ele tem de confrontar seus pais, ele deve dizer um monte de verdades que o ajudam a mentir. Ou seja, ele não vai dizer que ficou em casa porque essa seria uma mentira facilmente desvelada por seus pais que moram com ele e o viram saindo. Então ele confirma que saiu. Se ele puder, ele vai dizer os nomes verdadeiros de colegas que estavam com ele, embora possa omitir um que não tem boa reputação. Mas o fato de ele dizer nomes verdadeiros reforça a ideia de que ele está contando a verdade. Então, ele vai selecionar o máximo de verdades para dizer e omitir algumas coisas, mas a capacidade de ele dizer um grande número de verdades lhe permite omitir ou distorcer a realidade da situação muito melhor do que se ele contasse apenas mentiras.

No caso da política é a mesma coisa. Não se pode perder tempo e energia contrariando tudo que afirma aquele que tenta nos enganar. Justamente porque ele diz muitas verdades e negá-las isoladamente é inútil e superficial. É preciso reconhecer várias verdades na direita justamente para desvendar a contradição do todo[3].

[3] O grande problema talvez seja o de que muitas das verdades ditas pela extrema direita referem-se a erros, "defeitos", infantilidades reais da esquerda que ela própria não quer admitir, deste modo ambos carregam a

Tempos atrás, o Movimento Brasil Livre (MBL) dizia que as escolas eram doutrinadoras. Houve uma onda de filmagem nas escolas. Qual foi a reação da esquerda liberal? De oposição completa a tudo isso. Entrando, na verdade, a ideia de doutrinação na escola é uma ideia clássica do pensamento de esquerda, por exemplo, para Althusser, a educação é o principal aparelho ideológico de Estado. Então, de certo modo a extrema direita não estava "errada". Havia uma verdade fundamental no que se dizia, mas havia também mentiras. Qual a grande mentira naquela história? A mentira é que a doutrinação era de esquerda, quando na verdade a doutrinação era justamente pró-Capitalismo.

Passado um tempo, a própria direita e os meios de comunicação começaram a protestar contra as filmagens na escola. Certamente há toda uma questão ética das filmagens, mas penso que filmar a escola e os professores seria um problema muito maior para a própria ordem Capitalista do que para aqueles interessados em revolucionar a escola. Revolucionários poderíamos assumir o risco de tomar justamente a posição contrária que a esquerda tomou, ou seja, de incentivar as filmagens. Um tempo depois, derrubado o governo PTista e estabelecido um novo governo com a extrema direita, o próprio MBL, Fernando Holiday, aparece com um discurso de autocrítica dizendo que cometeram erros ao demonizar o professor. Assumem uma mea-culpa diante da questão das câmeras, da escola sem partido etc. Parte da esquerda liberal ou centro esquerda compra isso como uma autocrítica mesmo. Na verdade, aquele discurso serviu a apenas um fim, que foi de elegê-los e derrubar o governo Dilma, mas agora não é mais necessário e é muito difícil sustentar aquele posicionamento cheio de contradições. Provavelmente, eles nunca acreditaram naquilo.

Enfim, o erro da esquerda foi tomar uma posição que defendia que tudo que era dito pelo outro lado era uma mentira, uma falsificação. Essa posição ajuda o outro porque ela é simplista, dualista, o debate acaba por se perder em questões menores e ajuda a esconder as verdadeiras contradições, como no caso da escola Doutrinadora, o que não é completamente uma fantasia, algo absurdo, impensável. A grande contradição está em outro lugar. Há doutrina na escola, mas a doutrina da escola, longe de ser socialista ou Marxista, ou Freiriana, é completamente pró-Capitalismo, pró Ensino tradicional.

Finalmente, como denuncia Zizek, há na esquerda hoje um pseudoativismo de urgências, por exemplo, nas ações de rua, um militantismo como o único caminho de mudança, este militantismo de rua muitas vezes serve a alguns como uma sensação quase que mística, um certo estado de excitação e êxtase, um frenesi, um culto, algo como estar diante da verdade, da realidade, do poder de estar fazendo algo, transformando o mundo, lutando de verdade. Neste ponto é oportuna a seguinte provocação do Zizek.

> Eu mesmo provoquei alguns dos meus amigos esquerdistas quando eu disse a eles que se a famosa fórmula Marxista era: "Filósofos apenas interpretaram o mundo, agora o momento era de mudá-lo"... tese 11 sobre Feuerbach… talvez hoje nós devamos dizer: "No século XX, nós talvez tentamos mudar o mundo rápido demais, a hora agora é de interpretar novamente, começar a pensar" (ZIZEK, 2013).

De modo algum devemos negar a importância das ações de rua, dos movimentos de massa, coletivos etc., mas isso não é suficiente. Especificamente tentaremos mostrar que o militantismo acadêmico não é suficiente e é suspeito quando se apresenta completamente descolado da

---

cumplicidade que constrói este debate de infantilidades para evitar-se uma discussão mais radical. Não seria esta cumplicidade justamente o fato de que nem a extrema direita populista, nem a esquerda liberal estão dispostas a grandes mudanças? E, portanto, não há aqui uma espécie de cumplicidade entre setores da política que se apresentam como oposição um ao outro?

atividade cotidiana dos mesmos docentes que saem às ruas. Ou seja, o grande perigo é transformar as ruas em conveniências e álibis que nos livram de uma tarefa mais dura que é a de pensar o mundo e nossa ação cotidiana. Isso nos livraria da difícil tarefa de aproximar o que pregamos em discursos das nossas práticas reais e concretas, como propunha Paulo Freire. Há um projeto de esquerda para Universidade? Que projeto é este? E, como atuam concretamente a partir dele aqueles que se autointitulam progressistas? Por exemplo: Quão progressista é a pedagogia dos docentes que se dizem progressistas? O que fazem ao assumir a coordenação de um curso? Como se portam nas reuniões de colegiado ou conselho? Que alianças fazem?

3 NOSSO PASSADO: A DISCRETA CUMPLICIDADE DA ESQUERDA ACADÊMICA DIANTE DA PRIVATIZAÇÃO DA UNIVERSIDADE PÚBLICA

> O establishment reage à teoria "radical" de hoje do mesmo modo que Hegel descreveu no prefácio ao seu "A filosofia do direito", em que menciona "uma carta de Joh. v Muller, que, falando das condições de Roma no ano de 1803, quando a cidade estava sob domínio francês, escreve: "Perguntado sobre como estavam as academias públicas, um professor respondeu: 'On les tolère, comme les bordels! [Elas são toleradas como os bordéis]'". Ora, a maior parte do que hoje sucede na academia "radical" não é tolerada do mesmo modo? Considera-se que, "embora não tragam muito benefício, [elas] não podem fazer grande mal. Daí a recomendação, assim se imagina: se inúteis, não podem prejudicar". (ZIZEK, 2019, p.19-20)

Não seria esse o caso de uma boa parcela da esquerda universitária hoje?

Desde Fernando Henrique Cardoso, as alas ditas progressistas do mundo acadêmico denunciam o que chamam um processo de privatização da Educação Superior. Em cada momento destes anos, sempre o presente foi denunciado como um estágio mais avançado de um processo que reconhecia se desenvolver já no passado.

Enquanto críticas a um processo, o discurso se caracterizou mais como denúncias do que como proposições. A resposta considerada mais propositiva era a de militância de rua, em momentos pontuais, quando ações explícitas, como aprovação de Leis na direção da privatização eram tomadas. Mas mesmo a militância parecia assombrada por uma luta de uma causa praticamente perdida e cada vez mais perdida. Tudo limitava-se ao tom de alertas diante de uma tragédia inevitável, um processo irreversível, cada vez mais em vias de acontecer. Se é verdade que o processo se aprofundou, e eu acredito que é, e como não há ninguém de fora, a esquerda contribuiu com a trilha sonora de lamento de um triste destino irreversível. Denunciar o processo (o que inclui militância de rua e passeatas) de modo crítico, talvez serviu também como terapia e álibi para dissimular um estar fora da tragédia de que participava.

Não há metáfora melhor do que a de Édipo Rei. Há 20 anos o setor progressista da universidade é consciente do processo de privatização, coloca-se na luta contra ele, mas considera o processo tão inevitável como um destino. Em um futuro bem próximo, que na verdade já é praticamente presente, o setor progressista continuará seu lamento, mas já executando as tarefas necessárias e típicas da universidade privatizada. Trata-se de uma posição paradoxal, angustiante, mas conveniente enquanto nossos empregos e salários estão mantidos e podemos sempre dizer que fazemos as coisas porque a estrutura nos obriga, que não é nosso desejo íntimo, que somos contra, que vamos às ruas etc., mas mesmo assim continuamos levantando todos os dias e participando como uma engrenagem deste nosso trágico destino.

Na tragédia Grega, Édipo cumpre o destino sem perceber e o faz, justamente nas ações que realizava conscientemente para evitar o destino. E se o mesmo estiver ocorrendo com o setor progressista da universidade? O que parece fato é que este setor não se considera como parte do processo, como engrenagem daquilo que denuncia. Percebe a privatização apenas como resultado de uma força externa (o destino traçado), mas também não se percebe executando o destino por meio de suas próprias ações. Como se os processos internos e cotidianos, microestruturas, das quais participamos concretamente, nada tivessem a ver com a preparação do terreno para germinação da privatização. Como se nós não fossemos justamente parte da máquina que executa as ações necessárias ao nascimento da Universidade privada. Quase como se a Universidade pudesse ser privatizada de fora, independentemente das pessoas que atuam nela, independente das ações concretas e cotidianas dessas pessoas. De certo modo, isso é justamente tudo em que Foucault, por exemplo, jamais poderia acreditar.

O modo geral (a ideologia) pela qual a ala progressista atuou nos últimos anos em relação ao processo de privatização, até mesmo dito em forma de palavra de ordem, foi a defesa da Universidade Pública. Ora, mas qual flanco fica então aberto com essa posição? Justamente da análise crítica dos processos internos, a posição de defesa da Universidade mitiga a crítica interna e o repensar da Universidade. Isso por uma razão bastante simples. À medida que temos de defender um objeto somos obrigados a minimizar a crítica contra ele. Como direcionar críticas e repensar justamente o objeto que defendemos, o objeto que queremos resguardar contra as transformações externas?

Esse discurso não se repete ainda hoje? Quando, por exemplo, muitos dizem que temos que lutar para manter o que conquistamos e que não é hora de críticas? Hoje, quando até salários e carreiras estão ameaçados, alcançamos o extremo dessa posição. Muitos progressistas “dariam tudo” para que a Universidade continuasse como era antes. Não seria um sonho que o Governo Federal voltasse a respeitar o processo de eleição para Reitor, ou seja, que voltasse a respeitar a lista tríplice? Eles dividem as ruas com centristas, direitistas e ex-bolsonaristas (juntos somados, na verdades são poucos os defensores da Universidade Pública) em uma aliança corporativista, que sai às rua tentando mostrar o valor da ciência e da universidade para a sociedade: “nós somos importantes para vocês”, gritam em desespero. Ai daquele que hoje pretenda qualquer crítica à Universidade Pública. O momento é de união contra a extrema direita que tenta acabar com a Universidade. Mas, defender a Universidade Pública!? Ora, não há nada de novo nisso, há apenas um grito de misericórdia.

Uma hipótese, porém, parece não ser levantada: E se essa velha defesa, de um sistema que se esgota (a social democracia (?) que aqui chegou no máximo a uma social democracia latinoamericana) e mais ainda, um sistema que na verdade nunca foi aquilo que sonhamos, nunca foi inclusivo (a universidade brasileira), público apenas para as elites, for justamente a causa fundamental daquilo que nos trouxe aqui e nos leva ao precipício? Agora queremos ser inclusivos? Agora queremos apoio da sociedade? Agora que cortam nossos recursos, gritamos por isso!? Como podem nos acreditar?

Contra a privatização, os críticos progressistas direcionam suas energias em defesa da Universidade que existia (pública). O inimigo portanto sempre se apresentou fundamentalmente como algo externo, o interior da universidade ficou de certo modo resguardado, como o objeto da defesa e, portanto, não fundamentalmente, da crítica. Há dois conjuntos de questões fundamentais que parecem despercebidas, talvez não por acaso, em todo este processo: 1 - O que é efetivamente a privatização da Universidade? De que modo isso se implementa? 2 - Como se relacionam os processos que realizamos cotidianamente na atividade acadêmica, que aparentemente parecem neutros, e o próprio processo histórico da privatização?

Olhemos com mais atenção e detalhe em que consiste este processo de mitigação da autocrítica. Ele consiste em sermos sempre brandos, menos rigorosos, mais conveniente com o que de errado vivenciamos concretamente no dia a dia. Menos rigoroso e errado em que sentido? No sentido de uma posição política coerente no que se refere à defesa de princípios de esquerda por parte daqueles que se dizem de esquerda.

Mais uma vez insisto: e se justamente essa falta de rigor que a princípio serviria para resguardar a Universidade contra o seu cruel destino, seja a própria ação que efetiva seu destino? Como em Édipo Rei, que acaba matando seu Pai justamente por meio da ação que em sua consciência evitaria aquele trágico destino.

Tornou-se urgente observar com mais atenção e denunciar os processos internos e cotidianos, microestruturas, dos quais participamos e que têm preparado e adubado o terreno da privatização. A nós, nos compete entender para além da fantasia de que a privatização consiste em uma ação puramente técnico-financeira, de um dia para o outro, que mudaria a fonte de financiamento da Universidade, provavelmente isso nunca ocorrerá e é apenas conveniente lutar contra o que não ocorrerá e deixar de lado o que de fato ocorre. Em realidade, a fonte de financiamento da Universidade já tem sido modificada ano após ano, como o próprio setor progressista tem denunciado e muitas vezes combatido. Todos nós sabemos que, na verdade, o repasse de recursos do Estado para Universidade sempre foi uma novela. Todos nós sabemos das Emendas, do uso de recurso para fins de política populista, a construção de prédios, a escolha das cidades, dos cursos implementados etc. Na verdade, muitos de nós, enquanto Conselheiros Universitários fomos cúmplice e executores dessas políticas. As Fundações vêm fazendo o papel de captação de recursos privados há décadas. Mas isso não é tudo!

Outro aspecto importante é que uma luta por mais recursos financeiros para Universidade Pública independente de uma proposta política para Universidade Pública, que indica seu sentido e lugar no interior da totalidade que é o Estado (Federal ou Estadual), não deixa de ser uma posição corporativista. Universidade pública, gratuita e de qualidade é um slogan completamente vazio. Qual a preocupação da esquerda acadêmica, não apenas com o recurso da "educação superior", mas com o orçamento nacional? Com todas essas contradições assumidas ou escondidas debaixo do tapete, muitos progressista querem uma ampliação, democratização da Universidade Pública, como uma criança quer um doce, sem pensar como nem por quê e acabam como presas fáceis de uma crítica superficial e populista da direita.

Contudo, o ponto fundamental para mim é que essa simplificação do significado do processo de privatização não é um acaso. É mais uma vez uma conveniência, notadamente, a conveniência de se furtar de pensar pragmaticamente uma outra Universidade possível e necessária. E, sobretudo, essa conveniência depende de não enxergarmos, de evitar enxergamos, como participamos fundamentalmente do processo de privatização em nosso modo de fazer acadêmico, que sonhamos ser neutro.

Ora, evitamos pensar como essa estrutura de produção, de reprodução, em todos os níveis e sentidos é engrenagem central do processo de privatização. Portanto, não se trata apenas de evitar uma ação de ordem técnico-financeira, mudança da fonte do orçamento, mas se trata antes de reforçar ou resistir a um modelo, a uma ideologia, como um todo. Ora! Que modelo é esse? É o modelo da produção de artigos, o modelo do currículo Lattes, o modelo do Qualis, o modelo das avaliações de massa tipo Enade, este conjunto de instrumentos de rankeamento, de meritocracia, de produção em série. Mas é também resistir a modelos de aulas, de pedagogia não só ultrapassados, mas que se associam, como Paulo Freire (2018) já havia notado, a posições ideológicas, modelos nos quais um fala e o outro escuta, modelos de centralidade no conteúdo e não no aluno, modelos que valorizam o individualismo, a competição. É também resistir à política de uma falsa democracia que está nos *lobbies* para eleições de coordenadores, formação de comissões, escolha de quem participará deste ou daquele projeto, dos editais, brigas por laboratórios e equipamentos, tudo isso que torna as assembléias e reuniões de colegiado apenas um álibi, uma falsa democracia que legitma o autoritarismo. Em uma palavra, a privatização da Universidade é fenômeno que se desenvolve pelas nossas ações cotidianas e concretas, o problema de ordem técnico-financeira é apenas uma faceta deste todo que participamos.

Por exemplo, as estruturas de rankeamento e avaliações quantitativas padronizadas das quais participamos diariamente são as condições necessárias, adubam o solo, para uma divisão e contingenciamento de recursos. Foi preciso criar e estabelecer um instrumento que se acredita objetivo e padronizado para poder dar valor econômico concreto à produção acadêmica.

A tese que tento construir neste ponto é a de que a dita esquerda tem sido cúmplice deste processo de defesa da meritocracia, do individualismo e da falsificação da democracia. Reproduz uma ideologia individualista e de competição no interior da Universidade e muito pouco tem feito de fato para buscar ações mais coletivas.

É confortante para o setor progressista acreditar que a privatização se dê por uma ação pontual de ordem administrativa financeira de um ente externo à Universidade. Um dia o Congresso colocará em votação uma Lei que modifica a fonte de financiamento da Universidade. O sindicato vai encher ônibus de docentes e alunos, todos unidos em defesa da Universidade Pública gratuita e de qualidade, irão lotar a assembleia legislativa, mudam a data da votação e segue a novela de meses ou anos. No fim, provavelmente irão se lamentar por ter perdido a batalha, mas irão para a casa tranquilos por terem feito sua parte. Quando a Lei mudar a fonte de financiamento da Universidade, e só a partir deste dia, diremos que a Universidade foi privatizada.

Pensando assim, o setor progressista se isenta de sua cumplicidade com a privatização que efetua todos os dias em sua ação concreta. Antes de ser uma ação de ordem administrativa e financeira, a privatização é uma ideologia. É um modo de conceber e atuar na Universidade. Este modo rege até como nos portamos em uma reunião de colegiado. A privatização é a ideologia de que os professores da Universidade Pública não produzem o suficiente e que devem ser avaliados por sistemas quantitativos padronizados. É a ideologia de que os debates são improdutivos e que no lugar deles deve se impor uma gestão pragmática, como de uma empresa privada. É a ideologia que a burocracia democrática do setor público é apenas um peso, de que é melhor ter uma gestão eficiente, técnica, gerida por uma, duas ou três pessoas, principalmente que não entendam muito do assunto, mas tenham uma mente gestora. Sobretudo, é o privilégio das falas privatizadas, nos corredores e nas casas de colegas sobre a ágora da tradição Grega.

Nesse ponto, muitos podem dizer: "mas isso são verdades", eu concordaria; outros podem pensar o mesmo, mas evitam assumir. Contudo, não se trata aqui de julgamentos de valores de verdade – tudo são meias verdades e focos em direções que desviam de outras direções – trata-se aqui apenas de denunciar uma ideologia escondida por uma pseudocrítica de sujeitos que, na verdade, são cúmplices com aquilo que fingem criticar. Tudo isso já é realidade na "Universidade Pública" e assim atuam muitos progressistas de um lado, enquanto de outro vão às ruas contra a privatização da Universidade. Por que fazem isso? Algumas hipóteses serão sugeridas ao final do texto.

4 NOSSO PRESENTE: O MAL-ESTAR NA UNIVERSIDADE PÚBLICA BRASILEIRA E A ESQUERDA ANTIPOLÍTICA

No bojo da ideologia privatista, floresceu uma Universidade com bases individualista e de competição, produtivista e de reprodução. Inevitavelmente, neste ambiente propício, conflitos de vaidades e egoicos despontavam aqui e ali. Disputas de poder, de apropriação de espaços tais como laboratórios, ou de instrumentos e equipamentos, de recursos públicos de editais tornaram-se recorrente na Universidade Pública Brasileira. Da mesma maneira, os *lobbies* para eleições de coordenadores, de conselheiros, de comissões, de aprovação de pautas em colegiados de cursos eram fundamentais para garantir, além dos recursos materiais, as ideologias de ensino, de pesquisa, de extensão de indivíduos ou pequenos grupos. As vísceras do interior da Universidade Brasileira que processam a política, como tinha de ser, são as mesmas do Congresso Nacional Legislativo. Não há uma capa que proteja e separe a Universidade Pública daquilo que é a Sociedade e a Política Brasileira. Não há um interior e um exterior. A sociedade é uma só!

Não é preciso muita perspicácia para perceber que, nos últimos anos, notadamente neste período de crise econômica e política, de crise da democracia liberal, de legitimação de ideologias autoritárias, o clima de tensão e desentendimentos se aprofundou. Trata-se de um fenômeno generalizado que pode ser constatado em qualquer parte do País e nos mais diferentes cantos de uma mesma Universidade. Há um mal-estar na Universidade Pública Brasileira. Este mal-estar expressa-se, como teria de ser, nas relações intersubjetivas, ou seja, nas relações entre as pessoas, sejam elas docentes, estudantes ou técnicos.

Nesse ponto, há um conjunto de questões clássicas da filosofia, ou talvez mais ainda da psicanálise, que poderia ser colocado ao redor da seguinte questão: como se relacionam a esfera subjetiva (psíquica?) e a esfera externa ao sujeito de determinações mais gerais (coletivas, sociais)? Uma é determinante da outra? Elas podem ser concebidas separadas uma da outra? Certamente, dado o limite deste texto e a intensidade com que essa questão já foi tratada por grandes pensadores, não há fôlego aqui para qualquer avanço fundamental nessa direção. No entanto, retomar a discussão entre as relações pessoais e o campo político/público parece-me fundamental no atual momento.

Talvez não exista um slogan melhor do que aquele atribuído à segunda onda do movimento feminista (second wave) para sintetizar a questão que se coloca. Na década de 60 nos EUA, o movimento feminista defendia a tese de que as experiências de opressão sofridas pelas mulheres em suas vidas pessoais estavam intrinsecamente ligadas às estruturas de poder da sociedade. Portanto, falar delas era denunciar e contrapor essas estruturas. O grande slogan do movimento era “the personal is political”. O termo foi abstraído da psicanálise, mas de modo a rejeitar a psicanálise, segundo Kurtay (2018). Volto a isso mais adiante.

Paralelamente, desenvolveu-se nas últimas décadas o que hoje costumamos chamar de pautas identitárias. Dentro dos movimentos identitários, encontramos também afinidades com aquele slogan. Por exemplo, a escrita autobiográfica de pessoas pertencentes a grupos minoritários tornou-se uma forma de luta em direção ao reconhecimento acadêmico desses grupos tradicionalmente excluídos do espaço acadêmico[4].

---

[4] Em outra direção Gilles Deleuze afirmou que: “Argumentos baseados na experiência privilegiada de alguém são argumentos ruins e reacionários” (1995, p. 11-12, minha tradução). Mas é preciso tomar cuidado para não rotular uma oposição simples entre os dois discursos. Há feministas Deleuzianas(os), como há também expoentes do

Para além do campo acadêmico, a pauta identitária e seus métodos de luta por legitimação de minorias se adentrou ao debate político-eleitoral. A pauta foi tema central na guerra entre a esquerda liberal e a extrema direita nas últimas eleições na maioria dos países democráticos Ocidentais. Na Europa, o foco foi a questão dos refugiados; nos EUA, a imigração e o racismo; no Brasil, o racismo e a questão de gênero. Tanto nos EUA, como no Brasil, como em boa parte da Europa a extrema direita venceu o debate eleitoral.

Poder-se-ia notar a princípio que há uma diferença entre o uso pelo próprio sujeito de suas próprias experiências pessoais, feito de modo consciente como ação de afirmação ou de legitimação de discurso acadêmico, como por exemplo no caso das autobiografias, e o uso feito por terceiros ou por um outro com quem o sujeito se envolve em suas interações. Isso coloca mais uma complicação no debate.

Há, obviamente, um problema quando envolvemos a esfera pessoal no debate institucional, a saber, a possibilidade de assédio fruto da exposição de privacidades de outros. A exposição da privacidade de alguém, quando usada de modo a constranger, notadamente quando existe uma relação de poder imbricada, do tipo patrão-empregado, professor-aluno, diretor-professor, médico-paciente, é uma ação violenta como todos sabemos. Com relação a essas formas de violência, é preciso sempre se opor.

As formas mais diretas de assédio continuam bastante comuns nas relações que envolvem pessoas das classes mais populares totalmente desprovidas de direitos e dependentes financeiramente, emocionalmente ou de qualquer outra forma de seus agressores. Em ambientes mais institucionalizados, como a academia, no entanto, as formas de opressão precisam ser mais sutis - o que pretendo sugerir mais adiante é que uma dessas formas consiste justamente no avesso da forma direta de assédio, ou seja, justamente no discurso de defesa da privacidade do sujeito - O conceito de interseccionalidade, por exemplo, tornou-se fundamental na literatura acadêmica justamente para que raça, gênero e classe não sejam tratados de modo isolado. Os problemas da mulher da periferia não são os mesmo de uma atriz de Hollywood assediada para ser promovida.

A complicação não para aqui. É bastante ingênuo separar os discursos em falas próprias de um sujeito em si e fala de terceiros sobre um sujeito, uma vez que a própria ideia de um sujeito que fala por si também é questionada por toda uma tradição da análise do discurso. Há casos em que motivar o sujeito falar é em si uma forma de constrangimento.

Colocado de lado essas diferenças e complicações, o que quero chamar a atenção é que a inclusão e legitimação no discurso acadêmico da experiência pessoal, portanto, da experiência privada, de todo modo, está colocada com assunto contemporâneo. Uma importante implicação disso é a de que a demarcação entre a esfera pessoal e a esfera do que é institucional/profissional, antes de ser uma questão simples que pode ser tratada pelo senso comum de cada um, em realidade, estabelece questões fundamentais dos debates político, ético, moral e acadêmico contemporâneos. É importante marcar esse ponto inicialmente justamente porque se tornou conveniente para muitos decidir o que é pessoal e o que não é, sempre que isso lhes favoreçam, como se essa questão não fosse em si já um debate fundamental.

---

feminismo negro da grandeza de Angela Davis que jamais trataram ingenuamente a questão como uma “guerra dos sexos”.

4.1 O que é privado é subjetivo

Retomemos a origem histórica da questão como proposta pela segunda onda do feminismo: "o pessoal é político", que depois se tornou: "o privado é político". A fórmula parece-me muito oportuna, confesso. Mas há uma interessante crítica ao modo de como ela foi explorada já em sua origem na década de 60 pelo movimento feminista.

O movimento estava baseado em lições absorvidas por meio do compartilhamento de experiências em grupos fechados chamados de "Consciousness Raising Groups (CRG)". Justamente esse método foi o problema fundamental segundo Kurtay (2018).

> A "privacidade" nesse caso não estava resguardada por uma autoridade que não identificava-se com o problema e que, portanto, teria direito de negociação com o externo. O grupo estava configurado em um circuito fechado de compartilhamentos sem nenhum agente neutro (não-feminista). Para ver como e porque isso se tornou um problema de ordem prática e teórica, vamos olhar a lógica legal-usual-Hegeliana com relação a privacidade do compartilhamento de informações pessoais: dentro das relações entre advogado-cliente, doutor-paciente ou professor-aluno, o primeiro tem uma obrigação pública e consequentemente, como resultado dessa obrigação ele(a) tem a responsabilidade de proteger a privacidade (do cliente, paciente, estudante etc.) Essa garantia de privacidade está legalmente constituída para proteger a objetividade da relação entre o cliente e o "externo", isso é chamado "proibição de identificação com o caso". Essa regra, ao contrário do que se pensa, não é de interesse da contraparte, mas é de interesse do cliente" Privacidade, então, pode produzir soluções para problemas que são mediados apenas por sujeitos que não são parte do problema expresso, capazes de preservar uma visão objetiva. Os "consciouness raising groups" contudo, não estão equipados com tal "não-feminista" (o que não significa necessariamente "anti-feminista") mediador(a) que teriam o direito de negociação. Consequentemente, a lógica dialética fica suspensa e esses compartilhamentos ineficientes (KURTAY, 2018).

A mesma crítica descrita acima para o caso do feminismo pode ser generalizada para se desvelar a forma pela qual uma falsa defesa da privacidade e uma defesa puritana da esfera do pessoal pode, no fundo, paradoxalmente, significar justamente seu oposto, ou seja, uma forma mais sutil de violência. Frisemos: privacidades podem produzir soluções apenas para problemas mediados por sujeitos que não são partes do problema expresso. Agora o que ocorre quando o mediador está envolvido no problema?

Antes mesmo de refletirmos mais profundamente sobre o sentido dessa possível neutralidade no interior do significado mais amplo onde ela se dá, ou seja, o significado de Universidade, notamos que essa situação de possível envolvimento com os problemas a serem mediados parece mais comum em ambiente acadêmico uma vez que, ao menos que um processo seja instaurado (e mesmo que seja) e ao menos que a questão em disputa seja completamente não-acadêmica, ou seja, claramente não envolva de forma alguma disputas acadêmicas, de princípio não há mediadores neutros. Agora se pensarmos que a Universidade é, por excelência, o espaço de debates de significados, o ser acadêmico, em última instância, está sempre envolvido, de modo não-neutro, em todos problemas de sujeitos. A questão que se coloca então é a da negação desse envolvimento subjetivo com fundamento do ser acadêmico. Voltaremos a isso, mas frisemos: quando o mediador está envolvido no problema, a proteção de privacidade se torna o próprio problema[5].

Portanto, se em ambientes populares onde os direitos humanos estão precarizados e as formas de dominação e dependência estão exacerbadas, as formas de assédio e imposição são mais tradicionais e diretas, em ambientes acadêmicos, uma forma contemporânea de assédio disfarçado acontece justamente pelas mãos daqueles que se vestem com pele de cordeiro, ou seja, de defensor de privacidades, especialmente quando a partir daí se promove o constrangimento de um terceiro sujeito. Isso equivale a "bater a carteira e gritar pega ladrão". Nesse caso, o que se apresenta como "cuidado" com o sujeito, atua justamente ao contrário, como castração do sujeito e repressão política.

Silvio Almeida (2019) corretamente aponta para o fato de que pensar o racismo como uma ação direta de indivíduos desvia a atenção para uma compreensão do racismo como algo estrutural e estruturante das relações.

No momento em que as relações pessoais se deterioram, tornou-se fundamental hoje não apenas estarmos atentos para o problema da privacidade das pessoas, obviamente que isso continua fundamental, mas na medida em que a sociedade civilizada encontra uma maneira sutil de usar esse "cuidado" em benefício pessoal de uns, a própria ideia de "cuidar da privacidade do indivíduo" deve ser tomada como suspeita. Devemos suspeitar tanto dos mediadores (supostamente neutros) como do puritanismo que condena qualquer coisa que cheire de longe questão pessoal, para de modo desvelado empenhar, de fato, ataques mais pessoais ainda. Dito de outro modo, temos que ter mais cuidado ainda com esses "excessos de cuidados" justamente porque eles podem servir às agressões que em discurso dizem condenar.

Nesse ponto, só há uma saída. Devemos acolher o mantra feminista de forma mais radical ainda, isso é, mais radical do que o radicalismo das feministas da second wave. "O privado é político", o que isso significa fundamentalmente? Primeiro que não há como separar objetivamente o privado e o não privado, o que não significa que não devemos proteger as relações privadas por meio do bom senso e códigos sociais; segundo, toda separação, isso é, quando alguém aponta "isso é uma questão pessoal", é subjetiva e não neutra; terceiro, aquele que assume a posição de mediador principalmente quando ocupa posição de poder institucional, opera uma ação quase que totalitária com enorme poder de violência e repressão; e, finalmente, o ponto ao qual queremos nos deter, toda repressão do privado é também uma repressão política.

4.2 O que é geral não pode ser mascarado como privado

Voltemos a questão inicial desta seção. Na verdade, independentemente de qualquer reflexão mais teórica, ao nos depararmos empiricamente com esse fenômeno de mal-estar nas Universidade Brasileiras, algo que deveríamos perceber, se estivéssemos atento, é que não estamos diante fundamentalmente de problemas limitados à ordem pessoal (acreditando que uma separação ingênua entre o pessoal e o social seja possível), mas sim de algo de ordem mais geral (social, talvez pudéssemos dizer, ou econômica para Marxistas) que interfere nas relações pessoais as quais, por sua vez, retroagem na esfera social. Aqui, mais uma vez estamos próximo das críticas de Silvo Almeida (ibidem) sobre as formas de "mal-entender" o fenômeno do racismo.

---

[5] Estabelece-se aqui também o seguinte paradoxo: acusar alguém de invadir a esfera pessoal de outro, é em si uma invasão da esfera pessoal do primeiro. Os mesmos agravadores para qualquer caso de invasão de privacidade valem aqui, ou seja, se estiver diante de uma relação do tipo patrão-empregado, a acusação é mais violenta ainda.

Se a essência do fenômeno não é de ordem particular, é preciso indagar a quem interessa essa tentativa de maquiá-lo assim. Vejamos.

Tradicionalmente, qual tem sido o lugar fundamental, no discurso acadêmico, das divergências pessoais? É comum escutarmos “não misture questões pessoais com profissionais”, ou algo similar. Portanto, o lugar das questões de ordem pessoal é o lugar do proibido, aquilo do que não se pode falar. Há um certo discurso acadêmico para o qual não há talvez lugar mais proibido e também mais criminalizado do que as divergências pessoais. A insistência em empurrar os problemas para esse local é a insistência institucionalizada de silenciamento!

Estranhamente, no mesmo momento em que parecemos celebrar as diferenças e a diversidade, vivenciamos também o fim do debate acadêmico, justamente graças a insistência de caracterizar qualquer divergência como algo de ordem pessoal e, em seguida, criminalizar qualquer coisa que tenha qualquer suspeita de ser de ordem pessoal. Ora, mas isso é justamente uma incapacidade de lidar com a diferença. Talvez o que vivenciamos, não é a celebração da diferença, mas uma tentativa desesperada de controle do significado da diferença, sempre de modo conveniente, justamente no momento que ela explode para o mundo de modo inconveniente. Os conflitos não são senão sinais de que a diferença não se permite dominada, a diferença talvez seja a única coisa que não pode ser ideologia porque é princípio. Depois da diferença, tudo é ideologia.

Esse modo de caracterizar tudo como da ordem do pessoal para em seguida criminalizar, mata o lado mais produtivo da tradição acadêmica: os desentendimentos, o debate de ideias diferentes, de diferentes projetos de Universidade. Minha percepção é que isso também não é um acaso, tampouco uma situação excepcional, mas é a característica de uma decadência, a decadência das Universidades hoje que, discretamente, está associada à vitória da extrema direita nas últimas eleições (aqueles na universidade que se apresentam como resistência, talvez não escapem de ser enquadrados como associados a essa vitória em uma análise mais cuidadosa), uma Universidade onde se privilegia as superficiais concordâncias negociadas a partir de *lobbies* e interesses próprios, ou as infantis brigas de bastidores, em detrimento a debates mais sérios em instâncias institucionais oficiais que deveriam ser tratadas de modo público.

Cada vez mais, o discurso torna-se o discurso privatizado dos “grupos secretos” de WhatsApp, ou das reuniões na casa de colegas. Cada vez mais, as decisões estão definidas pelos *lobbies* antes das reuniões coletivas. E, cada vez mais, as reuniões coletivas, garantidas pelo estatuto, são apenas álibi de uma falsa democracia. Uma “vaza-jato” nesses grupos de WhatsApp revelaria talvez o lamaçal em que nos lambuzamos. Tudo isso é também um sintoma da privatização, nada mais privado do que os grupos de WhatsApp.

4.3 O oposto de Paulo Freire

Mas como teria de ser, há nisso implicações políticas. Onde estão os freirianos (no facebook?) que se esqueceram disso? De que no fundo está sempre a política? Talvez estejam convenientemente entorpecidos por esse veneno que é a insistência de que toda diferença é da ordem de questões pessoais e que, portanto, toda diferença deve ser criminalizada. Ao lembrar de Paulo Freire não pretendo nenhuma apologia, ao contrário, pretendo exemplificar um caso de apologia histérica de muitos que em suas salas de aulas reproduzem o contrário de Paulo Freire e no fundo acabam por reforçar a ironia em torno desse nome promovido pela direita populista. Não há dúvidas de que é preciso respeitar a obra de Paulo Freire. Podemos celebrar a forma de sua defesa de que a ação educativa é sempre política, mas isso enquanto princípio não é exclusivo a Paulo Freire, antes é princípio de qualquer pedagogia e de toda tradição que se queira progressista.

Transformar todo o debate em problemas de ordem pessoal e criminalizá-lo é justamente uma tentativa de negar que toda ação educativa e no interior da Universidade é política. É o que querem damaris e sérgios moro! A primeira acredita que os problemas são fundamentalmente de ordem moral e portanto trata-se de moralizar os sujeitos. Os distúrbios da ordem social seriam explicados pelos de distúrbios psíquicos de “sujeitos problemáticos”: um destempero emocional, provavelmente de algum drama sexual-amoroso, talvez falta de sofrimento na vida “ele não foi pobre, não passou dificuldades, falta de apanhar” (sadismo). Outras vezes usam a lógica de culpar a vítima “ele/a reclama demais”, como nos casos de estupro: a roupa estava exagerada. Elucubrações de ordem moral e religiosa não faltam para apagar qualquer debate de posições e tentar pintar um cenário onde, para além das psicoses do outro, nenhuma posição (minha) subjetiva exista nesses desentendimentos, em uma palavra, um cenário onde colocado no campo do doentil tudo que é diferença, a normalidade é a neutralidade. Deveriam reler Paulo Freire:

> A neutralidade frente ao mundo, frente ao histórico, frente aos valores, reflete apenas o medo que se tem de revelar o compromisso. Esse medo quase sempre resulta de um ‘compromisso’ contra os homens, contra sua humanização, por parte dos que se dizem neutros. Estão comprometidos consigo mesmos, com seus interesses ou com os interesses dos grupos aos quais pertencem. E como esse não é um compromisso verdadeiro, assumem a neutralidade impossível (FREIRE, 2018, p. 23).

Ora, como não falta na Universidade hoje estes homens comprometidos! Comprometidos consigo mesmo, com seu laboratório, seu artigo, suas orientações, sua produção, seu reconhecimento, seu projeto, seu grupo, seu WhatsApp etc.

Tampouco nos falta hoje “medo”. Principalmente para os progressistas! Atuam de modo retroativo (como diria Nietzsche) em resposta ao medo. Esse ser do medo é o mais perigoso, sua função, toda sua (des)coragem, é espancar qualquer corajoso (como faz um espectro da polícia brasileira). É por aqui que progressistas reproduzem o bolsonarismo, reproduzem as ameaças que sofrem, como o homem subordinado que humilhado pelo patrão chega em casa e agride a esposa.

Sim, trata-se do medo! Esse sentimento que paralisa o país há alguns anos. Isso todos nós sabemos. O medo, junto das frustrações, por exemplo, diante dos mecanismos de avaliação (Enade, Qualis etc.) desencadeia esse “compromisso não verdadeiro” e “contra os homens”. Não verdadeiro porque estamos diante de uma construção cujo fundamento não é a coragem, mas a falta dela.

Não se trata de uma ação autêntica, própria, fundada na ousadia, na mudança, na transformação, mas trata-se de uma reação para atender e reproduzir, para ajustar-se a uma política que se impõe a cada dia, para fazer com que ela funcione melhor. Qual o horizonte da esquerda que participa disso tudo? Um Capitalismo adaptado, inclusivo, mais humano? Na hipótese mais otimista caberia lembrarmos de Rosa Luxemburgo e sua crítica ao reformismo (1999).

Muitos têm tentado explicar o mal-estar da Universidade Pública Brasileira como fruto das pressões advindas das políticas e ondas ideológicas da extrema direita que venceu as últimas eleições. Essa explicação é superficial e joga toda a responsabilidade da situação para o outro. Antes de tudo, é preciso entender a ascensão da extrema direita (como propôs a escola de Frankfurt, notadamente Walter Benjamin) como um fracasso, um vácuo deixado por um projeto que se pretendia revolucionário. Há uma crise fundamental no interior da própria esquerda e é isso que nos cabe analisar.

O medo e a falta de um programa próprio unificou grupos que, em discurso, são politicamente distintos. Assim, os progressistas saem às ruas contra uma ideologia e quando entram na Universidade dão as mãos para os sujeitos dessas ideologias, sem qualquer pudor com as alianças que fazem, porque fingem-se de neutros, como se, na Universidade, as relações não fossem políticas. A neutralidade aliada à defesa da esfera privada contra o público e o político é o mal-estar da Universidade hoje porque elas inibem a fala e impedem a política, atuam como forma de repressão. Nesse ponto, os progressistas se aliam à crítica que fazem ao bolsonarismo.

5 A ESQUERDA INSUFICIENTE

Se, por um lado, parece que se tornou difícil assumir a posição de esquerda hoje, diante da repressão da direita populista, estranhamente, por outro lado, há também uma disputa por querer assumir a bandeira "da esquerda", pelo poder de falar em nome da esquerda. Uma disputa que, inclusive, acaba por alargar e flexibilizar o conceito do que seria a esquerda. Uma esquerda que comporta lulistas, anti-petistas, ciristas e muito mais. Esse alargamento não comporta apenas diferentes sujeitos, mas também diferentes ideologias, ali cabe tanto a defesa da democracia como do autoritarismo.

Há ainda uma resistência em ser esquerda, há aí ainda uma paixão, uma ideologia. Cabe indagar: por que ainda há sujeitos eloquentes pelo discurso de esquerda? O que eles de fato querem? O que tanto se ganha neste momento por se pertencer à esquerda?

Talvez um álibi! Como se o fato de falar a partir da esquerda e defender bandeiras tais como a justiça social, a igualdade, livrasse as pessoas de qualquer mal. Tal ideologia funciona como uma espécie de crença na salvação. A crença nos afasta da atividade de reflexão, nos coloca em uma posição de não precisar pensar, criticar, modificar etc.

Mais do que servir a uma razão prática, muitas vezes a sensação de pertencer à esquerda nos serve como um alívio psicológico, um apoio para se sustentar neste mundo, poder dormir mais tranquilo diante de uma realidade tão dura. Como quem diz: "apesar de toda essa desgraça, eu pelo menos defendo os oprimidos" ou "eu não sou responsável por essa desgraça toda". Essa esquerda não é suficiente para se opor ao populismo de direita que se espalha pelo mundo. O que não é suficiente?

De modo geral, já sabemos que não é suficiente uma luta sindical limitada a questões trabalhistas e salariais. Do mesmo modo, não é suficiente uma esquerda que milita no Facebook. Mas tampouco basta, uma esquerda que sai em passeatas nacionais quando chamada. Não é suficiente uma esquerda que apenas brigue para que a verba continue sendo repassada para a universidade.

É também preciso desconfiar desse recente inchamento do movimento em defesa da universidade. Justamente é preciso desconfiar de um número crescente de acadêmicos que estavam ausentes, ou em cima do muro, em todo processo do *impeachment* e da prisão do Lula e agora começam a ir às ruas para defender seus recursos. Não se trata de uma desconfiança de ordem moral. Não se trata de considerar esses acadêmicos de traidores, de mau caráter, ou qualquer coisa do tipo. Tampouco se trata de uma necessária defesa do lulismo e do petismo. Trata-se apenas de pragmaticamente desconfiar da capacidade e interesse dessa massa de um ponto de vista político. Trata-se simplesmente de perguntar: calados diante de um escandaloso golpe contra a democracia e um processo de perseguição política, o que querem de fato hoje?

Como diz Zizek, não é suficiente uma esquerda apenas ativista, apenas ligada a movimentos sociais, bem como, não se deve iludir com movimentos de massa, como ocorreram na primavera árabe e na Grécia com o Syriza.

Zizek tampouco propõe uma ação que milagrosamente resulte uma revolução à moda antiga, com barricadas etc. Muito pelo contrário, Zizek tem repetidamente considerado isso uma grande ilusão. O conceito de burocracia socialista que Zizek tem desenvolvido refere-se justamente à ideia de que o grande problema não está em mobilizar revoltas, mas sim em o que fazer depois da vitória. Isso porque a primavera árabe, bem como o movimento na Grécia mostraram que a tomada das ruas e vitória da multidão não garantem nada no dia seguinte.

Zizek, referindo-se à Grécia, fala da importância da denúncia da falta de transparência nos processos burocráticos (no caso da União Europeia) da democracia liberal. O mesmo vale para a universidade penso eu. É preciso denunciar a falsificação da democracia no dia a dia da universidade. Essa falsidade está ligada a um desprezo às normas e burocracias. Nossa tarefa, no entanto, não seria continuar defendendo uma burocracia e regulamentação que não funcionam, mas buscar construir uma burocracia que funcione e defenda objetivamente as decisões coletivas e possibilidade de ações coletivas.

É preciso construir uma esquerda que entenda melhor o fenômeno Bolsonaro. Que não apenas fique em estado de choque e de perplexidade diante de cada movimento do mito. É preciso uma esquerda atenta para as ações locais, próximas, concretas, mas que também se disponha a entender o fenômeno em seu contexto nacional e global. É preciso uma esquerda atenta para o cenário global.

É preciso uma esquerda que entenda o processo de privatização para além de uma simples mudança na fonte de recursos. Não é necessária uma esquerda que responda ou finja estar respondendo às demandas de um grande Outro, ou seja, que esteja sempre na posição de continência e fiel prontidão para toda demanda meritocrática que nos últimos anos transformaram a Universidade em um local de competição individualistas e *lobbies* baseados em alianças, sem uma pauta de princípios comuns, mas apenas focada em assegurar posições de poder em departamentos, coordenações, comissões etc.

É preciso uma esquerda que enfrente o Lattes, as avaliações técnicas e padronizadas do Enade, o Qualis, o estabelecimentos de *rankings*. Ora, não que esses índices e políticas não possam existir, mas antes, não se pode rifar tudo o que mais possa ser feito, que possa ser pensado, ousado, criado, não se pode penalizar aqueles que buscam resistir a isso, para se seguir de cabeça baixa, feito manada, tendo essa como a única possibilidade para a Universidade. A esquerda não deve assumir o papel de soldado desse totalitarismo, contra os colegas que ousam desafiá-lo. Ainda que não se consiga sempre se abster desse jogo, é preciso permitir espaços para se inventar outros caminhos.

Por exemplo, é preciso denunciar a falsidade em toda essa política. Cresce o plágio e má qualidade nas publicações, inclusive nas revistas bem avaliadas. Não podemos tratar isso como uma doença do sistema que deve ser remediada, mas temos que ver a cumplicidade dos plágios e da baixa qualidade das publicações como intrínseca a política do produtivismo e da meritocracia. É preciso repetir que não há isenção ideológica nos processos de *peer review*, que a neutralidade é uma ideologia da direita. É preciso dizer que o Enade não vai além de uma medida fraca estatisticamente e padronizadora de massas. As fraudes das universidades particulares do sistema Enade já foram vastamente reportadas pela mídia. É sob essas farsas que se pretende defender a Universidade Pública? Faz-se necessária uma esquerda pronta a escancarar, sutilmente, essas farsas e pronta a se negar a participar desse jogo ao invés de se lambuzar com o doce canto da Sereia.

Não é necessária uma esquerda pronta a cumprir tarefas, mas é necessária uma esquerda que tenha coragem de rejeitar tarefas e inventar as suas próprias. É preciso uma esquerda que se veja como parte do processo que tenta descrever e não caia no dualismo do eles são maus e nós bons. Não é suficiente uma esquerda de contraturno, que vista camisa da esquerda apenas depois de tirar o uniforme acadêmico.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Silvio Luis de. **Racismo Estrutural.** São Paulo: Sueli Carneiro; Pólen, 2019.

DELEUZE, Gilles. **Negotiations 1972-1990.** New York: Chichester, 1995.

FREIRE, Paulo. **Educação e Mudança.** Rio de Janeiro: Paz e Terra, 2018.

KRECIC, Jela. The Final Countdown or Lesson to be learned from Comedy and Antihumanism In: KRECIC (Ed.). **The Final Countdown: Europe, refugees and the left** Ljubljana: Wiener Festwochen, 2017. p. 10.

KURTAY, Engin. Feminism having turned to its opposite and Zizek’s warnings. **Kurtay academics**. 26 de abril de 2018. Disponível em: http://kurtayacademics.com/2018/04/26/feminism-that-has-turned-into-its-opposite-and-zizeks-warnings/ . Acesso em: 20 de dez. De 2019.

LUXEMBURGO, Rosa. **Reforma ou Revolução**. São Paulo: Expressão Popular, 1999.

ZIZEK, Slavoj. Capitalismo é uma religião. **Youtube**, 31 ago. 2013. Disponível em https://www.youtube.com/watch?v=a_RjYc0Wfl4 . Acesso em: 20 dez. 2019.

ZIZEK, Slavoj. **A Coragem da Desesperança**: crônicas de um ano em que agimos perigosamente. Rio de Janeiro: Zahar, 2019.

CIÊNCIAS HUMANAS E EXATAS: UM DIÁLOGO DIFÍCIL

HUMAN AND EXACT SCIENCES: A DIFFICULT DIALOGUE

BALDINO, Roberto Ribeiro[1]

RESUMO

Considero as vicissitudes de um professor de cálculo submetido ao controle dos colegas do ciclo profissional e às condições vigentes de preparo dos alunos da UERGS, Guaíba. A partir de *relato de a experiência* de sala de aula, localizo as dificuldades dos alunos em pontos específicos do ensino fundamental que denomino *núcleo epistemológico mínimo* (NEMin). Mostro que a atual estrutura legal formação de professores em cursos de pedagogia tende a selecionar pessoas que completam o ensino médio com deficiências no NEMin e não lhes proporcionam condições de recuperação. Concluo que o problema crônico e falta de base dos calouros universitários de cursos de ciências exatas tende a se agravar.

Palavras-chave: Formação de professores do ensino fundamental. Falta de base de alunos de cálculo. Regra dos sinais. Matemática em cursos de pedagogia. Epistemologia.

ABSTRACT

I consider the vicissitudes faced by of a calculus teacher, constrained between the control of his mates of subsequent courses and the poor preparation of his students. From reports of *classroom experience*, I locate students' difficulties on specific points of elementary teaching that I call the *minimal epistemological kernel* (NEMin). I argue that the present legal structure of teacher formation in pedagogy programs tends to select people who finish high school with deficiency in the NEMin and provides them little support to overcome such deficiency. I conclude that the lack of preparation chronical problem of freshmen of exact science programs tend to become more severe.

Keywords: Elementary teacher formation. Lack of preparation of exact science freshmen. Sign rule. Mathematics in pedagogy courses. Epistemology.

1 INTRODUÇÃO

Abordo o fosso universal entre essas duas grandes áreas de conhecimento sob o ponto de vista das condições atuais da UERGS. Retomo, portanto a tentativa de aproximação prevista na fundação e posta em prática no primeiro ano de vida desta universidade cuja existência coincide com a luta por sua sobrevivência. Faço isso como educador matemático que há anos lida com um objeto interdisciplinar específico, o ensino de cálculo. Autorizo-me, pois, a tratar esse objeto lançando mão de conhecimentos de ambas as áreas.

Especificamente, apresento um *núcleo epistemológico mínimo* (NEMin) extraído da área de exatas, mas que pode ser entendido pela área de humanas em nível de cultura geral, por pessoas sem formação matemática além do senso comum. É claro que, para entender, é preciso querer e me esforçarei para fornecer informações de modo que isso baste. A partir do NEMin mostro o problema que os professores de exatas enfrentam e cuja solução escapa às estratégias sugeridas, tanto pela pedagogia vigente quanto pelos trabalhos teóricos atuais da área de humanas.

Começarei descrevendo o NEMin com dois exemplos simples. Depois de discuti-los, completarei a descrição com mais exemplos, antes da conclusão explicando por que recebemos

---

[1] Doutor em Matemática pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA). Professor da Universidade Estadual do Rio Grande do Sul (UERGS), Guaíba, RS, Brasil. Endereço eletrônico: rrbaldino@terra.com.br.

calouros cada vez mais despreparados nos cursos de exatas. Para alguns tópicos do NEMin recomendarei, às licenciaturas em pedagogia, estratégias didáticas baseadas em bibliografia existente no campo da educação matemática. Para outros, convidarei à pesquisa conjunta.

2 A ESTRUTURA MULTIPLICATIVA

> Problema 1. Três picolés custam dois reais. Quanto custa um picolé?
> Problema 2. Um táxi custa 5 reais por quilômetro. Quanto custam x quilômetros?

Esses problemas simples embaraçam muitos alunos a quem tento ensinar cálculo. Lembro particularmente de um a quem devo a análise que farei a seguir. Ele ficou conosco durante alguns meses; sustentava a família trabalhando como técnico autônomo em eletrônica. Para esse aluno, o problema dos picolés foi especialmente dramático: 'tem que dividir', dizia, mas não atinava: dividir o que pelo quê? Em 15 minutos, não conseguiu produzir a resposta.

Diante desse problema outros alunos dizem: 'é regra de três' e muitos param por aí. Os que aprenderam a tal regra de três, fazem:

> 3 picolés 'está para' 2 reais
> assim como
> 1 picolé está para x reais

Nesse ponto eles executam um ritual como o sinal da cruz: 'x é este 1 vezes aquele 2 dividido por este 3'. Antes de responderem ou escreverem 2/3 eles pegam a calculadora; não consideram 'dois terços' como resposta possível.

Essa é a maneira trágica de resolver o problema: foram amestrados. A professora do fundamental tinha de mostrar o resultado, a escola e a coordenação a pressionavam, não tinha tempo para *conversar* com os alunos e muitos, em casa, também não tinham essa 'conversa' com os pais. Então, o jeito foi amestrá-los: 'está para'. Com isso os alunos dão conta das tarefas de promoção, conhecidas pelo eufemismo, 'avaliação'.

A solução que eu gostaria que dessem começa com a pergunta: *quantos reais por picolé*? 'É só dividir', disse o aluno, mas parou aí. Por quê? Porque não pensou em 'reais por picolé', isso não lhe faria sentido. Tampouco fazia sentido aos gregos antigos. Trata-se da chamada 'razão externa' a junção em uma unidade conceitual de quantidades de naturezas diferentes. Os gregos antigos jamais tiveram o conceito de velocidade como razão distância/tempo, daí os paradoxos de Zenão. Mesmo Kepler escreveu 'áreas iguais em tempos iguais', não 'área por tempo', o que depois se chamou elegantemente velocidade areolar.

Para o aluno citado e para muitos outros que recebo todos os anos, 'dois terços' não pode ser uma resposta válida; o conceito de fração não lhes aparece como uma unidade; 2/3 para eles, é algo incompleto, é um comando para dividir 2 por 3, por isso pegam a calculadora. Admitindo-se que o comando seja dividir, poder-se-ia pensar do seguinte modo. Bom, se cada picolé custasse 1,00, o preço dos três seria 3,00. Como custam 2,00 significa que cada picolé custa menos de 1,00, portanto a divisão a ser feita é 2 por 3. Entretanto, esse raciocínio exige uma hipótese, o que tratarei no problema 8.

Aos alunos que encontram dificuldade no problema do táxi, costumo oferecer este encaminhamento. 'Andando 2 quilômetros, pago quanto? ' O aluno responde: '10 reais'. 'Andando 3 quilômetros? ' Responde: '15 reais'. 'Andando x quilômetros?'. Silêncio. Pergunto: 'Que conta você estava fazendo? De mais ou de vezes?' Resposta: 'De mais'. Para ele os 'cinco reais por quilômetro' não funcionam como operador multiplicativo, ou seja, o número pelo qual devo multiplicar os quilômetros para ter os reais.

Em resumo, 1) se os esquemas multiplicativos não estiverem *disponíveis para uso preferencial* (esquemas) na estrutura cognitiva do aluno e 2) se a escola treinou este aluno no uso de esquemas aditivos para que ele desse conta das tarefas promocionais (provas), então, para este aluno, a aprendizagem de cálculo será uma tarefa hercúlea, porque a) ou ele terá de continuar aperfeiçoando seus esquemas aditivos em circunstâncias em que não são mais adequados (obstáculo epistemológico, (BACHELARD, 1980, p. 17)), ou b) ele terá de sofrer uma verdadeira amputação desses esquemas *ad hoc* e desenvolver o que Piaget chama de *composições multiplicativas* **(**PIAGET; SZEMINSKA, 1975; PIAGET; INHELDER, 1978). A sequência didática recomendada para a construção desses '*ratio operators*' (operadores de razão) encontra-se em Freudenthal (1983). Significantes manipuláveis, também conhecidos como 'materiais concretos' são úteis (BALDINO, 2017).

O professor das exatas não faz a menor ideia dessa epistemologia nem da origem da dificuldade do aluno. Ele explica, no máximo explica de novo, dialoga com quem desenvolveu a estrutura multiplicativa. Ele nunca desce do tablado para ouvir o que o aluno lhe diz. Se descer, vira educador e não tem como subir de volta.

3 O PROBLEMA DOS PROFESSORES DE EXATAS

Há dois ou três anos, recebi a visita de um colega em minha sala de aula; em essência, me disse o seguinte. "Seus alunos não sabem calcular coisa alguma. Acho que é porque você trabalha com grupos em vez de dar aula".

De fato, eu tinha aprovado alguns alunos que eu sabia não terem condições de enfrentar as exigências do ciclo profissional. Por que os aprovei? Já eram repetentes e *não havia outros*. A universidade tem um papel social a cumprir. Não teriam aprendido porque eu trabalhara em grupos? Isso não se pode provar, não tem como voltar no tempo, dar aulas expositivas e mostrar que o resultado teria sido o mesmo ou pior. Porém, certamente, se eu tivesse 'dado aulas' como o colega sugeriu, ele não teria dito: 'acho que foi porque você *não trabalhou em grupos'*. A exigência de 'dar aulas' nada tem a ver com desejo de sucesso da aprendizagem. Ela tem outra origem e cumpre outro papel. Disso não falarei aqui. Apenas mencionei o episódio para deixar claro que, nas exatas, nosso trabalho é vigiado pelos colegas das disciplinas seguintes.

Alguns anos antes desse episódio, Carlos Porto, presidente da DATACOM estivera conosco, e nos dissera: "o engenheiro tem que dar lucro à empresa". É essa a demanda do capitalismo sobre a área de exatas. Tentarei discutir aqui o constrangimento sobre o professor de cálculo, dessa demanda que nos chega pela via direta, a partir dos colegas do ciclo profissional submetidos às exigências do mercado, para o qual produzem a força de trabalho qualificada. A área de humanas tem dificuldade de entender que o conhecimento matemático se estrutura de modo que tópicos avançados dependem de outros anteriores. Assim como não se pode ser *expert* em Hegel e ignorar Kant, também não tem sentido pretender resolver problemas de eletromagnetismo sem resolver problemas de cálculo.

4 EVITANDO O NEMIN

O núcleo epistemológico mínimo (NEMin) é um conjunto de *certezas* que o aluno deve *usar preferencialmente* como parte de sua estrutura cognitiva. Esse núcleo funciona como pré-requisito à aprendizagem de cálculo e à continuação dos cursos de exatas. Acima, referi-me à estrutura multiplicativa por meio de dois problemas, o dos picolés e o do táxi. Problemas como esses têm sofrido inúmeras críticas na literatura: que sentido eles têm para os alunos? É aprendizagem alienada, dizem. Quem é o 'vovô que viu a uva'? etc. etc. Temos aí a crítica contundente de Paul Dowling (1998) e alternativas bem conhecidas em Paulo Freire, Makarenko (CAPRILES,1989) e tantos outros que nos mostram os caminhos da aprendizagem significativa.

Porém, pode-se propor essa discussão sobre alienação/significação para encobrir e desviar o fato de que esses dois problemas têm embasbacado um número crescente de alunos que buscam o curso de engenharia da computação da UERGS. Também aqui pode-se dizer: 'por que não haveriam de se embasbacar? São problemas ridículos, sem sentido nem conexão com suas vidas'. Verdade. Porém, uma vez que escolheram este curso, a universidade *tornou-se parte de 'suas vidas'*. Precisam da aprovação em cálculo. Como se faz para ensinar cálculo a alunos que se embasbacam diante desses problemas? Mostrem-me e começarei hoje mesmo.

Esses alunos estão incluídos entre os que, dentro de 4 semestres, devem 'saber calcular alguma coisa' e, dentro de 10 semestres, 'dar lucro a empresas'. Também se pode dizer que a universidade não tem de prestar atenção ao lucro, que não deve se submeter às exigências das empresas etc. É uma proposta respeitável, mas deve ser dita toda: os formados não devem ter lucro ao venderem sua força de trabalho qualificada por salários maiores de quem só têm ensino médio. Isso se aplica às humanas também. "De acordo com o Sensus Bureau, os formados ganham... 23 mil dólares a mais por ano do que quem tem só um diploma de ensino médio" (TRUMP, 2016 p. 66). Deveríamos dizer aos calouros de todas as áreas, como faria um personagem de Brecht: 'não esperem ganhar mais com vossos diplomas; cuidaremos para que isso não aconteça; somos críticos do capitalismo e contrários às exigências do mercado. Não aumentaremos o valor de uso de vossa força de trabalho qualificada'. Sobre a formação da força de trabalho qualificada, veja Baldino e Cabral (2013). Novamente, essa tentativa de alargar a discussão pode bem funcionar para evitar o reconhecimento do NEMin.

5 DOMANI È TROPPO TARDI

A equilibração inicial de estruturas cognitivas que apontarei abaixo deve ser formada até os 8 ou 10 anos, portanto, totalmente sob a responsabilidade de pais e pedagogos licenciados. Dizia Lauro de Oliveira Lima: 'criança que não mente aos 8 não faz hipótese aos 18'. Eu acrescento: quem não multiplica aos 8 não deriva aos 18. O que isso significa? Estarei dizendo que, se as estruturas do NEMin não estiverem formadas até os 8 ou 10 anos elas não se formarão mais? Sim e não. Toda criança é esperta e inteligente, até entrar na escola. A escola impõe urgências promocionais. Um aluno que não formou o conceito de fração (2/3 como 'reais por picolé' etc.) ou o conceito de operador multiplicativo ('5 reais por quilômetro') mas tem de enfrentar a prova de matemática na segunda feira, pode muito bem aperfeiçoar esquemas *ad hoc* como o 'está para' ou 'quando não sei o x escrevo vezes' para garantir a promoção.

Uma vez que esse aluno tenha sucesso, ele tenderá a confiar seus esquemas *ad hoc* e a formação da estrutura multiplicativa ficará cada vez mais distante. Dar-lhe problemas mais difíceis fará com que ele aperfeiçoe os esquemas *ad hoc*, mas não fará que ache necessário substituí-los.

Há dois anos, num encontro obrigatório em julho na unidade de Guaíba, diante desse problema uma pedagoga me sugeriu: 'por que você não explica a ele a estrutura multiplicativa?'. Certamente, em meus 40 anos de experiência também tentei isso. Ao final do encontro os alunos perguntavam: 'na prova posso fazer do meu jeito?'. Essa pedagoga não tem a menor ideia da dificuldade e do trabalho necessário para o desenvolvimento das estruturas cognitivas. Para ela, bastaria explicar. Talvez seja por isso que nos explicaram exaustivamente que não devemos dar aulas de explicações.

São as urgências promocionais da escola que impõem esquemas *ad hoc* em substituição à formação da estrutura multiplicativa. Por isso, quem não aprendeu aos 8 *e continuou na escola*, é vítima quase irreversível de um crime. Quem não multiplica aos 8 mas chega à universidade, aperfeiçoou seus esquemas aditivos *ad hoc* de tal modo que, abandoná-los significaria total desamparo. Foram vítimas do crime cometido nas 5 primeiras séries. A recuperação não é impossível. Há exemplos de alunos que chegam com todas as deficiências do NEMin, as que apontei mais as que apontarei abaixo, mas que terminaram se recuperando. Desses, há quem esteja fazendo doutorado no exterior. Entretanto, são poucos, e não se sabe prever quem serão.

6 A DEFICIÊNCIA NO NEMIN COMO CLASSIFICADOR SOCIAL

Mais tarde, muitos notam que foram enganados. Desses, uma parte declara horror pelas exatas e naturalmente procura cursos nas humanas. Outra parte aposta que seus esquemas *ad hoc* poderão dar conta das exigências de cursos em exatas que levam a profissões mais rentáveis. Além de esquemas *ad hoc* para lidar com o NEMin, esses alunos desenvolveram habilidade em jogar com os critérios subsidiários de aprovação: desenvolver uma questão parecida com a que pede a prova, mostrar que não sabe uma coisa, mas sabe outra, argumentar contra o critério de correção do professor, liderar a turma pedindo 'prova substitutiva', tentar aproximação informal com o professor, esperar por um trabalho de 'pesquisa' para casa para 'melhorar a nota' etc. Acostumaram-se que, afinal, no ensino médio, sempre acontecia um milagre no fim do ano e todos passavam.

Na área de humanas essa estratégia pode dar frutos. Alguém inventa uma palvra, como 'precarizado' ou 'capital cultural', faz com ela discursos comoventes, recheados de citações e, de repente, a mídia o anuncia como um dos grandes filósofos ou sociólogos do século 20. Vide Sokal e Bricmont (1999). A vicissitude do grande filósofo ou sociólogo é ter de esperar pela consagração histórica que os distingue dos oportunistas de plantão. Na área de exatas essa estratégia não cola. A recente prova do teorema de Fermat foi cuidadosamente escrutinada: ou estaria certa ou estaria errada. Esse atributo natural da área de exatas é de difícil compreensão na área de humanas, embora ele esteja presente na pedagogia, desde o maternal. Em duas frases o embuste transparece: 'seus alunos não sabem calcular nada'.

Porém, uma parte dos alunos não sabe que foi enganada. Desenvolveram formas de inteligência que lhes permite dar conta das tarefas promocionais através de uma lógica exterior a elas. Contam com esquemas *ad hoc* achando que matemática é isso. São esforçados, desenvolvem questões em página inteira quando a solução esperada se faz em duas linhas. Esses desenvolvimentos raramente estão certos. Quando estão, os pontos são contados. Com essa estratégia, em duas ou três tentativas conseguem passar em cálculo I e até em cálculo II, aproveitando que, em alguns semestres, a percentagem de calouros sem o NEMin é elevada. É preciso distinguir quem não sabe de quem sabe menos. Porém, em cálculo III, IV e cálculo vetorial, encontram colegas que passaram direto e não têm dificuldades no NEMin. Resultado: nessas matérias a aprovação desses alunos fica cada vez mais difícil. Vê-se que se esforçam, estudam, vêm às aulas, mas nas provas sequer reconhecem o problema, o que me obriga a escrever “nada a ver”. Para mim esses alunos constituem um drama. Quando os aprovo, logo recebo a queixa. Alguns deles transferem-se para a UFRGS, onde validam os cálculos em que foram aprovados e vão nos representar mal, com prejuízo dos que os seguirem.

7 MAIS SOBRE O NEMIN

Além da estrutura multiplicativa, evidenciada a partir dos exemplos acima, destaco as seguintes, sempre através de exemplos acessíveis a pessoas sem formação matemática. Quando possível, indico sequências didáticas para os cursos de pedagogia.

7.1 A regra dos sinais

> Problema 3: Mostro a mão fechada a um aluno e digo: ‘Tenho aqui um punhado de grãos de arroz. Tiro 5 e coloco 3. O que aconteceu?

A hesitação revela dificuldade com composição de operadores aditivos. Às vezes a hesitação é explicada: ‘não sei quantos tem’. Essa dificuldade é típica dos alunos para quem a regra dos sinais (menos vezes menos dá mais) é uma mágica arbitrária que tem de ser repetida a cada aplicação. Explicarei por que, sugerindo uma estratégia didática para números com sinal, chamados números inteiros que, essencialmente, encontra-se em Freudenthal (1983), complementada por Baldino (1997).

A raiz dessa estratégia é a língua materna. Certas perguntas podem desafiar crianças desde as primeiras séries. Qual é maior, a metade do dobro ou o dobro da metade? Quem é o pai do filho do João? As atividades multiplicativas devem ser introduzidas junto com as aditivas, exatamente para evitar que estas funcionem como obstáculo epistemológico àquelas (BACHELARD, 1980, p. 17). Penso, porém, que posso colocar o essencial da regra de sinais ao alcance da licenciatura em pedagogia. As seguintes balizas marcam o terreno a ser palmilhado desde os primeiros contatos das crianças com números. Malba Tahan deve voltar à ordem do dia.

> Problema 4. Um camelo leva 7 sacos, cada saco tem 7 gatos, cada gato tem 7 pulgas, quantas pulgas o camelo leva?

Essa primeira baliza marca a passagem da operação concreta de multiplicação aos operadores multiplicativos, no caso, o operador ‘sete vezes’. A operação natural com operadores é a aplicação em cadeia, um no outro: ‘sete vezes, vezes sete vezes’. A adição de operadores multiplicativos dá a continuação das operações abstratas iniciadas com operadores aditivos no problema 3.

> Problema 5: Cinco vezes menos três vezes, quantas vezes são?

Nessas atividades, significantes manipuláveis devem ser usados. Tal como no problema 3, surge a pergunta: vezes o quê? Trata-se de operação abstrata, o marco zero do que Piaget denomina operatório abstrato que só se completa bem mais tarde, mas que não se forma de per si, sem apoio da escola. Vezes o quê? Podem ser picolés ou patinhos, ou... A segunda baliza consiste em que, a partir de certo momento, as crianças *descubram* que a resposta é ‘duas vezes’, *sem que isso lhes tenha sido ensinado*. Antecipar a resposta deveria ser considerado crime hediondo. A natureza sempre esteve em vigor: só a galinha pode ajudar o pinto a sair do ovo: qualquer interferência externa o mata.

Problema 6: Três vezes menos cinco vezes, quantas vezes são?

Números negativos devem ser introduzidos como qualidades; por exemplo, azul para dinheiro, vermelho para dívidas (promissórias), para cima, para baixo, patinhos petos e brancos etc. Quando a resposta 'menos duas vezes' surgir a partir de uma criança *e for encampada pelas outras*, é hora de convidar para o churrasco da cumeeira. A terceira baliza terá sido atingida. Ela é o sintoma de que os números com sinal adquiriam estatuto de objetos, a ponto de servirem como resposta a uma pergunta. Um objeto novo terá sido criado, o número negativo

Problema 7. Menos 3 vezes, vezes menos 2 vezes, quantas vezes são?

Quando a resposta dessa questão, 'seis vezes' surgir espontaneamente como descoberta esse será o dia do habite-se, o trabalho estará completo. Terá acontecido a fusão de dois operadores, um operador multiplicativo e um comando de troca de qualidade. Completou-se a adição de operadores multiplicativos. As próprias crianças nos explicarão porque menos vezes menos dá mais. Isso deverá ocorrer lá pelo 5º ano, ainda sob responsabilidade das pedagogas.

Quando tal desenvolvimento é postergado e o aluno da 6ª série pergunta por que menos por menos dá mais, já é tarde, não há resposta possível. Explicar que se trata da fusão de dois operadores abstratos não adiantará nada, porque ele não terá desenvolvido o nível de abstração necessário para entender essa explicação. Daí por diante, ele terá que contar com estratagemas do tipo 'inimigo do meu inimigo é meu amigo' etc. Mais honesto seria dizer-lhe que a regra dos sinais é dada por Deus.

7.2 Incógnitas

Problema 8. Um tijolo pesa 1 quilo mais meio tijolo; quanto pesa um tijolo e meio?

Problemas desse tipo, resolvidos sem o auxílio do que se chama 'álgebra', são um importante instrumento de desenvolvimento de inteligência que será útil em várias ocasiões. Porém, o problema do professor de cálculo começa quando os alunos não conseguem aplicar o conceito de incógnita para achar a resposta. A sugestão de usar letras para representar as quantidades incógnitas não lhes faz sentido. Este diálogo é comum: 'O que você chamou de x? x é o peso de um tijolo. Qual é o peso de um tijolo? Não sei.' Ou seja, x é o peso de um tijolo, mas o peso de um tijolo *não é* x. A identificação não retroage, não é reflexiva: a é B, mas B pode não ser A. A hipótese não se sustenta. Essa é uma questão de matemática ou de língua materna? Para quem tem essa dificuldade, chamar de x o peso de um tijolo não tem desdobramentos porque, se eu não sei quanto é x, nada posso dizer ou fazer com x. Pensando assim, o aluno não formula a equação: $x = 1 + x/2$. Será preciso esperar pela introdução oficial da álgebra na 7ª série para tratar essas questões sobre incógnitas? Penso que não; as pedagogas poderão começar antes.

7.3 A igualdade

Obtida a equação $x = 1 + x/2$, começa outro problema do professor de cálculo: o aluno não sabe o que fazer com ela. Aliás, foi em parte para não topar com essa dificuldade que ele não pensou em escrever uma equação. Não só não a escreveu porque não sabia quanto era x, mas não a escreveu porque o processo de solução não lhe seria familiar, seria, antes, lembrança de dificuldade: o tal passa-passa. Em nível do segundo segmento do fundamental ele terá aprendido com os licenciados em matemática que, para 'isolar x', passa-se alguma coisa para o outro lado. Surge então uma nova gama de problemas para o professor de cálculo: para muitos alunos, o sinal de igual é mera burocracia. Alguns o substituem por uma flechinha, talvez por a acharem mais elegante, talvez para evitarem um compromisso que sabem existir, mas não sabem qual é.

Há 70 anos toda 'venda' tinha uma balança de dois pratos e sua caixa de pesos. Nenhum aprendiz teria dificuldade de achar o peso do tijolo. Ele poria na balança, de um lado um tijolo, do outro, 1kg mais meio tijolo:

$$x = 1 + \frac{1}{2}x$$

dobraria os pesos

$$2x = 2 + x$$

removeria um x de cada lado

$$x = 2$$

7.4 Variáveis

Variáveis são muitas vezes confundidas com incógnitas; elas são letras que podem assumir vários valores numéricos dentro de um mesmo problema. Se João é dois anos mais velho que Pedro, $J = P + 2$, mas J e P são variáveis, porque não se disse mais nada que permita determinar seus valores. Dizendo, por exemplo, que João tem 7 anos, essas letras passam de variáveis a incógnitas.

8 O CIRCUITO

Ao final do ensino médio uma parte dos alunos que foi submetida a decorar esquemas *ad hoc* sem nunca achar o fio da meada do entendimento, pegou ojeriza pela matemática e ciências exatas. Essa parte naturalmente tende a procurar cursos universitários em áreas não exatas, especialmente nas humanas e, entre essas nas licenciaturas em pedagogia. É aqui que a deficiência do NEMin como seletor social se manifesta, fechando o circuito. Espera-se que em quatro anos os alunos de pedagogia estejam aptos a desenvolver, nas crianças pequenas, os primeiros passos das estruturas cognitivas que eles mesmo não desenvolveram. Para recuperação do NEMin, essa 'matéria' de que têm horror, eles contam no máximo com duas disciplinas: nas melhores universidades do RS só há duas disciplinas de educação matemática. O que se espera delas? Por que método, em 8 créditos, esses alunos aprenderão, por exemplo, a colocar as crianças diante de problemas de multiplicação quando eles mesmos só usaram, até então, esquemas aditivos *ad hoc*? Como poderão ensinar às crianças o sentido daquilo que não lhes faz sentido, como 'dois terços', 'x, vezes' etc.

O que acontece é o fechamento do circuito: *recrutam-se deficientes do NEMin para reproduzir deficientes do NEMin.* Desse circuito emerge o pedagogo sênior, com doutorado, que eleva sua deficiência no NEMin a honroso distintivo. Esses vão, então, ocupar posições de comando, propor e coordenar reformas de ensino, como a que nos trouxe à presente situação. Antigamente as normalistas eram bem treinadas no ensino de atividades de multiplicação. Durante esse ensino, centrado nas crianças, falando e interagindo com elas, muitas normalistas tinham oportunidade de completar a formação de suas estruturas multiplicativas, numa faixa etária de 15 a 18 anos: ensinavam o que tinham aprendido. Hoje, a recuperação do NEMin foi postergada para a faixa etária de 20 a 21 e diluída em meio a enorme massa de disciplinas abstratas.

As pedagogas distanciaram-se do problema e não mais o reconhecem como responsabilidade delas. O crime cometido com alunos das primeiras séries foi legalizado. Quando esses alunos chegam à universidade, os professores das exatas declaram que essas vítimas são culpadas e as reprovam.

REFERÊNCIAS

BACHELARD, G. **La Formation d l'Esprit Scientifique.** Paris: J. Vrin, 1980.

BALDINO, R. R. **Frac-Soma 235**. São Leopoldo: YNAITSABES Jogos & Estilo, 2017.

BALDINO, R. R. On the Epistemology of integers. **Recherches en Didactique des Mathématiques,** v. 17, n. 2, p. 211-250, 1997.

BALDINO. R. R., CABRAL, T. C. B. The productivity of students' schoolwork: an exercise in Marxist rigour. **The Journal for Critical Educational Policy Studies** (JCEPS), v. 11, n. 4, p. 70-84, nov. 2013.

CAPRILES, R. **Makarenko: o Nascimento da Pedagogia Socialista**. São Paulo: Scipione, 1989.

DOWLING, P. **The Sociology of Mathematics Education.** London: Falmer Press, 1998.

FREUDENTHAL, H. **Didactical Phenomenology of Mathematical Structures**. Dordercht: Reidel, 1983.

PIAGER, J. ; INHELDER, B. **Le Développement des Quantités Physiques chez l'Enfant**. Paris: Delachaux et Niestlé, 1978.

PIAGET, J.; SZEMINSKA, A. **A Gênese do Número na Criança.** Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1975.

SOKAL, A.; BRICMONT, J. **Imposturas Intelectuais.** Rio de Janeiro: Record, 1999.

TRUMP, D. **América debilitada.** Porto Alegre: Citadel, 2016.

RUPTURAS EM LIMITES DE ESTRUTURAS MATEMÁTICAS DA MÚSICA OCIDENTAL

RUPTURES IN THE LIMITS OF OCCIDENTAL MUSIC STRUCTURES

CAMARGOS, Chrisley Bruno Ribeiro[1]

CALDEIRA, Ademir Donizeti[2]

RESUMO

O objetivo deste trabalho foi descrever como o desenvolvimento racional da matemática veio influenciando a música em momentos no decorrer da história e, de certa forma, impondo limites racionais às formas musicais ocidentais eurocêntricas praticadas até o início do século XX. Para refletir sobre as influências matemáticas na música, recorreu-se a uma abordagem qualitativa por meio da análise bibliográfica de temas, como a escrita musical, o desenvolvimento de sistemas de afinação e a evolução do sistema tonal, tratando especificamente da partitura de notação e do chamado temperamento igual. A partir disso, ponderou-se sobre como a música contemporânea vem sendo influenciada tecnológica e culturalmente por outras vertentes, muitas vezes adversas ao sistema racional temperado. Essa reflexão envolveu alguns elementos da filosofia de Wittgenstein e de ideias foucaultianas, nas quais a crítica se fundamenta na análise dos limites e na reflexão sobre eles. Dessa forma, a discussão transcorreu sobre o modo como as formas musicais contemporâneas puderam transbordar os limites impostos pela racionalidade musical, fortemente influenciada pela linguagem matemática.

Palavras-chave: Matemática. Racionalidade. Escrita Musical. Temperamento Igual.

ABSTRACT

The purpose of this article was to describe how the rational development of mathematics has been influencing music throughout history and, in a certain way, imposed rational limits to the occidental eurocentric musical forms practiced until the beginning of the 20th century. To reflect on the mathematical influences in music, a qualitative approach was used through the bibliographical analysis of themes such as musical writing, the development of tuning systems and the evolution of the tonal system, specifically dealing with the notation score and the equal temperament. From this, a reflection was made on how contemporary music has been influenced technologically and culturally by other slopes, sometimes adverse to the tempered rational system. This analysis included the use of some elements of Wittgenstein's philosophy and Foucault's ideas, in which criticism is based on the analysis of limits and considerations on them. Thus, the discussion also covered aspects on how the contemporary musical forms could overflow the limits imposed by the musical rationality strongly influenced by the mathematical language.

Keywords: Mathematics. Rationality. Musical Writing. Equal Temperament.

1 INTRODUÇÃO

Este artigo apresenta excertos de uma tese de doutorado do Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal de São Carlos / SP (UFSCar). As argumentações aqui tecidas são pautadas em um estudo teórico-bibliográfico, que buscou não apenas analisar os limites e os efeitos que o racionalismo matemático possa ter lançado sobre a música ocidental por meio do

[1] Doutor em Educação pela Universidade Federal de São Carlos (UFSCar). Docente do Instituto Federal de Minas Gerais (IFMG), Formiga, MG, Brasil. Endereço eletrônico: chrisley.camargos@ifmg.edu.br

[2] Doutor em Educação pela Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP). Docente do Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal de São Carlos (UFSCar), São Carlos, SP, Brasil. Endereço eletrônico: mirocaldeira@gmail.com

sistema tonal e da divisão das notas, na busca por um modelo de temperamento igual, mas também a viabilidade de transpor esses limites por meio de novas possibilidades sonoras que surgiram no século XX.

A pesquisa apresenta uma abordagem qualitativa, propiciada pela análise bibliográfica de trabalhos acadêmicos consultados no Catálogo de Teses e Dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) que apresentaram a temática: "matemática e música"; de livros e artigos que descrevem a história da música ocidental, nos quais se buscaram interseções com aspectos da história da matemática, tendo como foco: a escrita musical, o racionalismo presente no desenvolvimento de sistemas de afinação, a evolução do sistema tonal e as formas de temperamento musical que tendiam a seguir modelos aparentemente matemáticos.

Além da análise bibliográfica, a pesquisa como um todo também se pautou em um trabalho de campo desenvolvido em Curso de Licenciatura em Música de uma Universidade pública, em que foram utilizados instrumentos para produção dos dados, como: diário de campo, entrevistas e gravações de aulas para posterior análise (quando permitidas), nos momentos em que o pesquisador acompanhou disciplinas do curso referido, as quais apresentaram abordagens históricas sobre a música, sobre diferentes formas musicais e sobre temas que envolviam criação e experimentação de instrumentos musicais acústicos, eletroacústicos e eletrônicos. Isso nos levou a questionar as rupturas nos limites das estruturas matemáticas da música ocidental e a refletir sobre elas.

Nosso objetivo é mostrar como o modelo do racionalismo matemático também se encontra presente em fases da história da música ocidental eurocêntrica e como a música contemporânea vem buscando, de certa forma, caminhos que transcendam os limites impostos por estruturas matemáticas.

De início, teceremos reflexões remontando aos momentos históricos que culminaram no sistema tonal, desde o período helênico da Antiguidade greco-romana, passando pela Idade Média europeia, até o período iluminista do século XVIII, quando e onde a formatação musical, em uma tentativa de universalidade, se deu em um sistema matemático, denominado "temperamento igual". Depois, evocando acontecimentos a partir do século XIX, mostraremos também o declínio do sistema tonal e, ao mesmo tempo, a forma como se deu a ultrapassagem dos limites gerados pelo sistema musical estabelecido no século XVIII.

Para fomentar a discussão teórica neste artigo, refletiremos sobre alguns aforismos das *Investigações filosóficas* de Wittgenstein, ideias sobre os limites da racionalidade, descritas em Foucault e em eruditos do contexto musical histórico eurocêntrico.

Dessa forma, valendo-nos da história da música ocidental como aporte, procuraremos debater a influência, o efeito rigoroso e controlador que a matemática acadêmica, ou mesmo a lógica matemática, tem sobreposto à sociedade, desde os pitagóricos até os dias atuais, neste mundo ocidental altamente informatizado. Assim, mais especificamente, descreveremos influências de uma linguagem cartesiana na constituição da partitura musical ocidental – por vezes conhecida no meio musical como uma "partitura de precisão" – e de pensamentos matemáticos na divisão das frequências sonoras dentro de uma escala de 12 notas que culminou no "temperamento igual".

2 INFLUÊNCIAS DA RACIONALIDADE MATEMÁTICA EM MEIO À HISTÓRIA DA MÚSICA

Nada mais se opõe ao jogo formal das transposições... (Pierre Lévy,1998).

Conforme afirma Vilela (2013, p. 16-17), as características predominantemente difundidas a respeito da matemática são "exatidão, precisão, previsão, unicidade e verdade", e os valores propalados são os de racionalidade, progresso, objetividade, controle, abstração, disciplina, simplificação, uniformidade, dentre outros similares. São tais características e valores que, contemporaneamente, nos instigam quase universalmente a acreditar num único caminho a seguir, numa única resposta possível, fazendo com que, cada vez mais, sejamos formatados e influenciados por esse mito que criamos da matemática perfeita, ou seja, de uma linguagem ideal (VILELA, 2013).

Wittgenstein (2014, p. 60, grifo no original), em sua obra *Investigações filosóficas*, ao falar sobre considerarmos a lógica como uma "ciência normativa", uma "linguagem ideal", nos indica que a palavra "ideal" seria enganosa:

> Ao passo que a lógica não trata em absoluto da linguagem – respectivamente do pensamento – no mesmo sentido que uma ciência da natureza trata de um fenômeno da natureza, e o máximo que se pode dizer é que nós *construímos* linguagens ideais. Mas, aqui a palavra "ideal" seria enganosa, pois isto soa como se estas linguagens fossem melhores, mais perfeitas, do que a nossa linguagem corrente; e como se o lógico fosse necessário, para mostrar aos homens, finalmente, que aspecto tem uma proposição correta.

Essa busca pela perfeição, por uma linguagem ideal que representasse fenômenos observados, já pôde ser percebida há aproximadamente 2500 anos, quando Pitágoras e seus discípulos esticaram uma corda que emitia um som para, assim, buscar relações entre a matemática e a música. De acordo com Lévy (1998, p. 72), esses filósofos e cientistas helênicos, conhecidos como "os pitagóricos", expuseram um primeiro sistema em que algum tipo de escrita, de linguagem, representasse o som, ou melhor, uma representação de notas musicais por meio de números, "[…] forjaram as noções fundamentais sobre as quais continuam apoiando-se a análise e a compreensão da música: tom, ritmo, melodia e harmonia".

De acordo com Abdounur (1999), Pitágoras inventou um instrumento de uma corda (monocórdio), capaz de verificar a teoria musical daquela época. Pitágoras teria esticado uma corda musical que produzia um determinado som, que tomou como fundamental o tom. Fez, na corda, marcas que a dividiam em 12 seções iguais. Quando tocou a corda na 6.ª marca, que correspondia à metade do comprimento, Pitágoras observou que se produzia a oitava (a 8.ª equivaleria a 1/2 corda). Tocou depois na 9.ª marca e resultou a quarta (a 4.ª representaria 3/4 da corda). Ao tocar a 8.ª marca, obtinha-se a quinta (a 5.ª correspondia a 2/3 da corda). Assim, as frações 1/2, 3/4, 2/3 equivaleriam, respectivamente, à oitava, à quarta e à quinta notas da escala, que conhecemos hoje como: Dó, Ré, Mi, Fá (4.ª), Sol (5.ª), Lá, Si e Dó (8.ª). Pitágoras verificou ainda que os sons produzidos, ao tocar em outras marcas, não eram tão consonantes quanto os anteriores.

As razões pitagóricas utilizadas para representar as relações entre as notas e o comprimento da corda eram: Dó = 1, Ré = 8/9, Mi = 64/81, Fá = 3/4, Sol = 2/3, Lá = 16/27, Si = 128/243 e Dó (8.ª) = 1/2. Essas frações foram calculadas com o *Percurso das Quintas*, baseado em uma razão igual a 2/3 entre as quintas.

O Percurso das Quintas envolve cálculos matemáticos, utilizando a fração 2/3, correspondente à 5.ª nota. Exemplificando, o Percurso das Quintas obtém as frações relativas às outras notas da escala diatônica: “Dó, Ré, Mi, Fá, Sol, Lá, Si, Dó”, por meio dos seguintes cálculos:

Vale-se da escala diatônica de Dó como referência. Sabendo-se que a 4.ª nota (Fá) seria equivalente a 3/4, calculando a 5.ª de Fá, obtém-se:

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$$

A fração 1/2 representa uma nota Dó que, apesar de ser uma 5.ª correspondente à nota Fá, também equivale à oitava (8.ª), conforme a experiência do monocórdio.

Sabendo-se que a 1.ª nota (Dó) corresponde ao inteiro 1, e que sua 5.ª representa a fração 2/3, então já se têm as seguintes frações:

Dó	Ré	Mi	Fá	Sol	Lá	Si	Dó
1	?	?	3/4	2/3	?	?	1/2

Para calcular as frações alusivas às notas que faltam, é necessário estabelecer que tais frações estejam no intervalo [1/2, 1]. Assim, utilizando o Percurso das Quintas, é possível encontrar as outras frações por meio dos seguintes cálculos:

Seja uma fração f. Para encontrar sua quinta equivalente, faz-se: $f_n \cdot \frac{2}{3} = f_{n+1}$

Exemplificando, para calcular a 5.ª equivalente à nota Sol, faz-se:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}.$$

Porém, 4/9 é menor do que 1/2; então, é necessário multiplicar o resultado por 2, que corresponderia à oitava da fração 4/9, conforme a relação entre tônica (1) e oitava (1/2), descrita na experiência de Pitágoras. Logo:

$$\frac{4}{9} \cdot 2 = \frac{8}{9} \text{ , sendo } \frac{1}{2} < \frac{8}{9} < 1.$$

Então, para a 5.ª equivalente à nota Sol, que corresponde à nota Ré, tem-se a fração 8/9.

Assim, é possível estipular o seguinte modelo matemático para encontrar as notas que faltam:

$$\left(\frac{2}{3}\right) \cdot f_i = f_j \text{, se } \frac{2}{3} f_i > \frac{1}{2} \text{ e}$$
$$2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \cdot f_i = f_j \text{, se } \frac{2}{3} f_i < \frac{1}{2}.$$

Sendo f_j a quinta de f_i.

Portanto, depois de alguns cálculos utilizando a fração 2/3, obtém-se o Modelo Pitagórico:

Dó	Ré	Mi	Fá	Sol	Lá	Si	Dó
1	8/9	64/81	3/4	2/3	16/27	128/243	1/2

Nesse modelo, se estabelece a fração 8/9 para o espaço de um tom[3] e a fração 243/256 para o espaço de um semitom.

[3] O tom corresponde ao espaço entre duas notas e também pode ser expresso como a soma de dois semitons; o semitom é menor espaço entre duas notas na escala cromática: Dó, Dó#, Ré, Ré#, Mi, Fá, Fá#, Sol, Sol#, Lá, Lá#, Si, Dó, utilizada constantemente na música ocidental temperada. Exemplificando, de Lá para Si há um tom, de Si

Esse modelo pitagórico foi sendo modificado no decorrer dos séculos, sofrendo influências à medida que o corpo de conhecimentos abstratos da matemática se expandiu, conforme mostraremos em meio às discussões sobre a partitura musical, que, de modo paralelo aos estudos das divisões feitas em sistemas de afinação, também sofreu, em seu sistema de notação, influências aparentemente de uma logicidade matemática.

Lévy (1998, p. 72) afirma que, no século II (d.C.), a "ritmografia e a melografia são ocasionalmente mencionadas como matérias de exame". A teoria musical para os gregos dessa época, assim como para os pitagóricos, era considerada um dos ramos da ciência, ocupando lugar dentro do "*quadrivium*", formado por música, aritmética, geometria e astronomia. Assim, segundo Lévy (1998, p. 73), na alvorada helênica iniciou-se um processo de "[…] formalização, certo tipo de universalização abstrata e um começo de projeção da música num sistema de *signus*".

Foi na Idade Média europeia que a notação da música passou por uma nova evolução racional, pois, "[…] das neumas do século X, indicando apenas a linha geral da melodia, até o plano óptico do século XVII, a notação adquire uma precisão cada vez maior" (LÉVY, 1998, p. 73). As neumas, citadas por Levy (1998), remontam às primeiras notações musicais feitas em uma pauta; porém, este tipo de notação era "[…] ainda bastante *imperfeita*; representava a altura das notas, mas não indicava sua duração relativa" (GROUT; PALISCA, 2014, p. 83, itálico nosso). Apesar de encontrarem sinais que aparentemente se referiam a ritmos em muitos dos manuscritos encontrados da Idade Média, os musicólogos modernos não conseguiram firmar padrões quanto aos significados desses sinais. Em alguns casos, as linhas de símbolos das neumas apresentavam cores diferentes para significar tons diferentes. Por exemplo, as linhas vermelhas representavam a nota Fá, e as amarelas, o Dó (GROUT; PALISCA, 2014).

De acordo com Grout e Palisca (2014, p. 81), durante a Idade Média houve um grande empenho para criar um sistema de notação musical que atendesse aos mais variados cânticos religiosos que emergiam, porém ainda eram transmitidos oralmente; portanto, já no século IX começaram a utilizar os sinais denominados "neumas" acima das palavras nos cânticos, "indicando uma linha melódica ascendente (/), uma linha descendente (\ ) ou uma combinação de ambas (/\)". Grout e Palisca (2014, p. 82) assim explicam essa evolução:

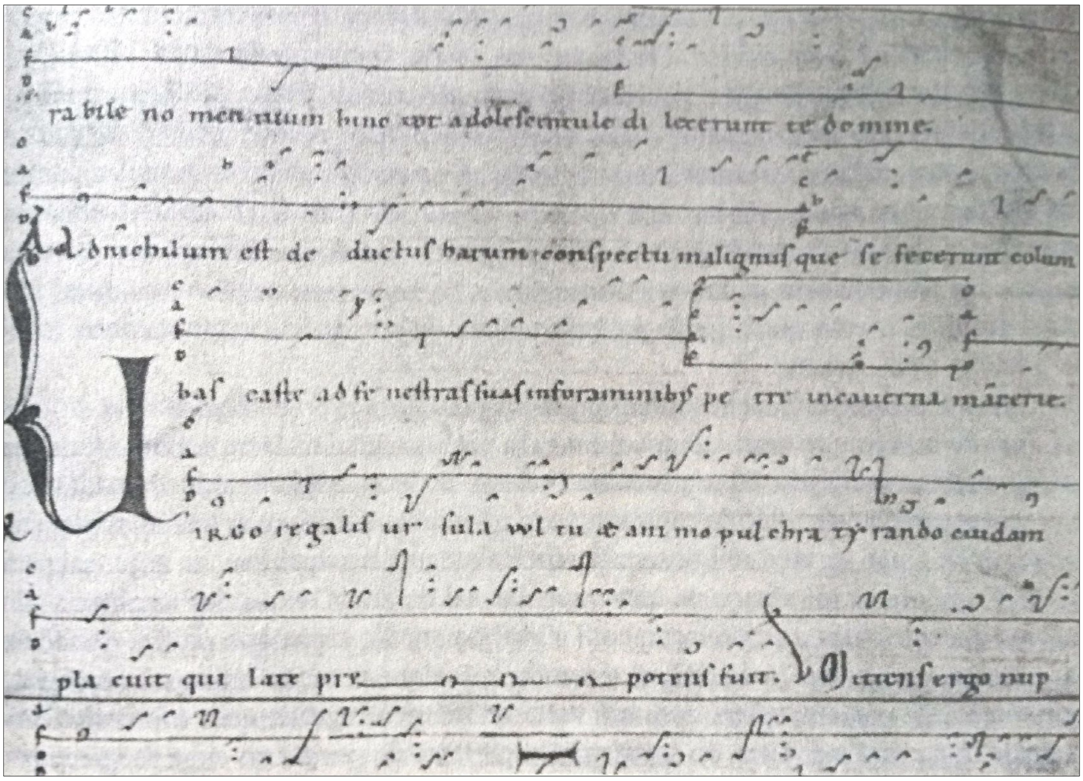
> Registrou-se um progresso decisivo quando um escriba traçou uma linha horizontal vermelha para representar a nota *fá* e agrupou os neumas em torno desta linha; mais tarde uma segunda linha, geralmente amarela, foi acrescentada a esta, representando o dó. No século XI Guido de Arezzo descrevia já a pauta de quatro linhas que então se usava e na qual se faziam corresponder, através de letras, as linhas às notas fá, dó e, por vezes, sol (f, c e g) – letras que acabaram por dar origem às nossas modernas claves.

Observemos na Figura 1 a seguir, no canto esquerdo, que as cifras c, a, f, d correspondem às notas Dó, Lá, Fá e Ré; segundo Grout e Palisca (2014), foi a partir dessas letras, visíveis nas antigas notações, que se originaram as claves utilizadas no sistema moderno de escrita musical.

para Dó um semitom (ou meio tom). O tom (ou tônica) é também uma denominação que corresponde à primeira nota de uma escala. Por exemplo, na escala diatônica, tendo a nota Dó como o tom, teremos: Dó (1.ª), Ré (2.ª), Mi (3.ª), Fá (4.ª), Sol (5.ª), Lá (6.ª), Si (7.ª) e Dó (8.ª).

Uma das características legadas à música europeia por essa evolução do sistema de notação e do sistema de afinação foi a polifonia[4]; muitos musicólogos, conforme frisa Lévy (1998), concordam que esse privilégio polifônico da música europeia é uma característica única entre outras culturas existentes. Grout e Palisca (2014, p. 97) salientam que "[…] a polifonia enquanto tal não é exclusivamente ocidental, mas foi a nossa música que, mais do que qualquer outra, se especializou nesta técnica".

Figura 1: Neumas (notação musical feita por Guido de Arezzo, século XI)



Fonte: Grout e Palisca (2014, p. 83).

Podemos dizer que, paralelamente à evolução da escrita musical, necessária para registar cada vez com mais detalhes as diversas notas que emergiam em melodias polifônicas, as notas musicais começaram a ter suas frequências analisadas por teóricos como Gioseffo Zarlino (1517-1590), Marin Mersenne (1588-1648) e Leonhard Euler (1707-1783), que avançariam para além das frações pitagóricas e continuariam a aperfeiçoar as relações entre matemática e música, em especial, lidando com as frequências das notas, que pareciam tender a bailar em um sarau polifônico.

Conforme observamos em Grout e Palisca (2014) e de acordo com Abdounur (1999), a supremacia das razões pitagóricas citadas anteriormente percorreu toda a Idade Média até o século XVI, sendo substituída gradativamente por outras razões, algumas sob o influxo de teorias matemáticas, como o desenvolvimento dos logaritmos e da divisão em progressão geométrica proporcionada pelo temperamento igual.

[4] Ao contrário da monofonia, que se refere a uma única linha melódica, a um único som, a polifonia remete a uma combinação simultânea de vários sons, várias notas – por exemplo, um músico fazendo a nota dó, o outro fazendo uma nota fá e outro fazendo uma nota sol seria uma multiplicidade sonora buscando uma melodia.

Rodrigues (1999) descreve que a sequência de frações pitagóricas foi aprimorada no século XVI pelo padre italiano Gioseffo Zarlino, quando ele remodelou algumas relações de frequência que prevaleciam no sistema pitagórico. Zarlino tentou substituir frações pitagóricas mais complexas por outras mais simples, ou seja, tendo como base a escala diatônica: Dó, Ré, Mi, Fá, Sol, Lá, Si, modificou as notas Mi(3.ª), Lá(6.ª) e Si(7.ª), que resultaram em relações matemáticas (em termos de frequência) dadas, respectivamente, pelas frações: 5/4, 5/3 e 15/8.

De acordo com Bromberg (2014, p. 16), "Zarlino, apesar de ser mestre-capela, era um músico teórico, cuja prática musical era restrita". Para ele, o conhecimento matemático das relações musicais tinha maior importância que a própria prática musical. Assim, conforme vimos em Camargos (2011, p. 52), o padre italiano construiu uma nova sequência de frequências, baseada na pitagórica, na qual o intervalo de terça apresentava uma relação de frequências 5/4, que existe na série harmônica. "Supondo-se que a primeira nota, *dó*, tenha frequência 1, obteremos para as outras notas as seguintes frequências: (Dó = 1, Ré = 9/8, Mi = 5/4, Fá = 4/3, Sol = 3/2, Lá = 5/3, Si = 15/8 e Dó (8.ª) = 2" (p. 51).

No entender de Rodrigues (1999), como Zarlino manteve as outras notas inalteradas, isso não resolveu o problema de transposição da época, que buscava um temperamento igual. As primeiras aproximações numéricas das gamas do que viria a ser chamado de "temperamento musical" eram geométricas e mecânicas. Segundo Rodrigues (1999), um instrumento mecânico chamado de mesolábio, constituído de três retângulos móveis, foi reproduzido na edição de 1573 da *Istitutione armoniche*, de G. Zarlino, como "um dos três métodos que ele expôs na sua obra *Sopplimenti musicali* (Veneza, 1588)", numa tentativa de "dividir a oitava diretamente em 12 partes ou semitons iguais e proporcionais" (p. 23).

Conforme relato de Abdounur (1999), outro matemático que contribuiu com estudos sobre as formas de afinação, já no século XVII, foi o monge francês Marin Mersenne, que também era filósofo e músico teórico. Mersenne desenvolveu, em 1636, a obra *L'harmonie universelle*, em que aborda relatos de distintos experimentos utilizados nos estudos sobre o som, considerando a consonância como o papel principal de uma composição e refletindo sobre as relações observadas entre matemática e música. Mersenne apresenta ainda, nessa obra, considerações sobre as leis de vibração de uma corda esticada: estipula padrões físicos de vibrações da corda e determina como a frequência diminui em relação às suas características físicas.

Em meio a essa efervescência de pensamentos matemático-musicais, a escrita musical parece ter acompanhado essa tendência racionalista. Lévy (1998, p. 73) observa que, na evolução do sistema de notação musical, "[...] alturas, ritmos, passos, instrumentações e até as indicações de força e expressividade, as mínimas nuanças [...]" puderam ser determinados.

Nesse decorrer dos tempos, então, as neumas da Idade Média foram evoluindo para um sistema de escrita cada vez mais detalhado, e isso foi um "[...] acontecimento tão crucial para a história da música ocidental como a invenção da escrita o foi para a história da linguagem" (GROUT; PALISCA, 2014, p. 82). Com as possibilidades de registro sonoro, inicialmente por meio de impressão, que culminou na difusão da imprensa no século XVI, "a partitura impressa fortaleceu a ideia de autoria, e com isso delineou a separação entre o compositor e o intérprete; disseminou o conhecimento musical, possibilitando a fixação dos traços composicionais e de uma teoria da música" (IAZZETTA, 2009, p. 29-30).

Com essa formalização inerente ao sistema de escrita musical, ocorrida entre os séculos XVI e XVIII, conforme descrito por Iazzeta (2009), a música impressa se disseminou pela Europa. No entanto, de nada adiantaria uma escrita logicamente padronizada, se as afinações (as frequências) das notas não seguissem uma estandardização que permitisse que os intérpretes pudessem executar as músicas conforme a ideia composicional. Assim, começaram a surgir padronizações nas divisões das frequências das notas, culminando para uma divisão semitonal na música, denominada “temperamento igual”. Essa forma de temperamento musical ocidental é constituída pela divisão da oitava em 12 notas, cujos intervalos de semitom se encontram em divisão simétrica, ou melhor, em progressão geométrica.

De acordo com Lévy (1998, p. 74), esse “sistema tonal envolve [...] uma graduação contínua e homogênea de semitons que facilita as modulações”. Com o temperamento igual, tornou-se possível realizar a transposição tonal sem alterar o resultado harmônico, o que forneceu homogeneidade e eficiência à música.

Referido por Rodrigues (1999, p. 24), um dos estudiosos responsáveis pela divisão conhecida como o “temperamento igual” foi o matemático Leonhard Euler (1707-1783). Em seus feitos “[...] se encontra uma das mais engenhosas teorias algébricas da divisão da oitava e do grau de consonância dos intervalos musicais”.

Na observação de Camargos (2011, p. 53), o problema consistia em encontrar um fator equivalente ao intervalo de semitom, que, após multiplicar 12 vezes uma frequência inicial (f_0), correspondente a uma determinada nota, atingisse a sua oitava referente a uma frequência que seria o dobro da tônica ($2f_0$). Baseado na progressão geométrica e após a criação dos logaritmos, Euler pesquisou um sistema de afinação que permitiria aos compositores ocidentais transporem ou tocarem qualquer música em quaisquer dos 12 centros tonais[5], sem distorções geradas por intervalos correlatos, que se apresentavam, até então, como assimétricos em diferentes escalas.

Para Camargos (2011, p. 55), matematicamente isso foi feito da seguinte forma:

> fo.f.f.f.f.......f = fo.f^{12} = 2.fo.
>
> Após algumas operações algébricas simples, podemos concluir que o fator f deve assumir o valor de $2^{1/12}$. Considerando a nota Dó com frequência 1 como referência, obtemos, para as outras notas da gama temperada, os valores: Dó = 2^0, Dó# = Ré*b* = $2^{1/12}$, Ré = $2^{2/12}$, Ré# = Mi*b* = $2^{3/12}$, Mi = $2^{4/12}$, Fá = $2^{5/12}$, Fá# = Sol*b* = $2^{6/12}$, Sol = $2^{7/12}$, Sol# = Lá*b* = $2^{8/12}$, Lá = $2^{9/12}$, Lá# = Si*b* =$2^{10/12}$, Si =$2^{11/12}$, Dó = $2^{12/12}$ = 2.

Feita essa divisão, houve o que podemos chamar aqui de uma formatação musical, de maneira que se pudesse tocar uma música em diversos tons diferentes, sem alterar o seu sentido, diferentemente do que se praticava no sistema anterior, conhecido como sistema modal[6]. Assim, consoante destaca Lévy (1998), ao final do século XVII e início do século XVIII, chega-se ao temperamento igual, um sistema de divisão das frequências sonoras que remete a uma escala temperada capaz de alterar sutilmente os sons naturais, em busca de uma estandardização da escala musical, gerando dessa forma inúmeras possibilidades de transposições sonoras, num jogo

[5] Os 12 centros tonais correspondem às 12 notas da escala temperada: Dó, Dó#, Ré, Ré#, Mi, Fá, Fá#, Sol, Sol#, Lá, Lá#, Si.

[6] O sistema modal é um sistema musical baseado nos modos gregos: jônico, dórico, frígio, lídio, mixolídio, eólico e lócrio, conhecidos e utilizados na Europa. Conforme descreve Wisnik (2007, p. 85), entre os gregos, cada modo evidenciava certo “caráter de verdadeiro território sonoro, era associado, pela sua denominação, a uma região ou povo”. O sistema modal consistiu em “uma exploração dos efeitos dados pelas diferentes distribuições de intervalos”, conforme estivessem constituídas as escalas, e dependendo da nota que fosse tomada como tônica, nos mais diferentes contextos (WISNIK, 2007, p. 86).

formal de transposições, baseado em critérios matemático-musicais a que nenhum músico, durante um bom tempo, ousaria se opor.

> A neutralidade que fundamenta a música europeia é uma das causas de seu sucesso junto às outras culturas. Fenômeno esse que não é isolado. A ciência moderna, as técnicas de ponta, a economia monetária capitalista (fundada num equivalente geral) são ao mesmo tempo produtos típicos da sociedade ocidental e dispositivos epistemológicos, práticos e sociais que tiram todo seu poder de uma fundamental neutralidade. Ciência, técnica ou capital não são neutros por serem bons ou maus apenas em função do seu uso, mas sim por cruzarem as fronteiras das identidades culturais por baixo demais do solo histórico para que as alfândegas das diversas tradições possam reconhecer a tempo a passagem do estranho radical. (LÉVY, 1998, p. 74)

Torna-se evidente em Lévy (1998) o enquadramento da música ocidental no que ele retrata como "a máquina universo"[7], devido à sua "neutralidade", às possibilidades de ser delineada num sistema moderno de escrita, tão cartesiano quanto um gráfico matemático bidimensional, e também por ser transponível para diversos tons, sem mudança de seu sentido musical.

3 TRANSBORDANDO LIMITES DO SISTEMA TONAL

No sistema tonal, pressupõe-se a ideia de que se está trabalhando dentro de uma escala maior ou menor. Resumidamente, se estabelece a noção de que temos um tom, um acorde principal; logo, quando as principais notas utilizadas no desenvolvimento da música parecem girar em torno de um centro, formando uma escala (maior ou menor), tal centro é chamado de tônica (tom). Nesse sistema, têm-se as funções harmônicas: tônica, sobretônica, mediante, subdominante, dominante, sobredominante, subtônica ou sensível. Em músicas do sistema harmônico tonal, utiliza-se a subdominante para gerar uma sensação de afastamento, sair do repouso, afastar-se, para, em seguida, chegar ao trítono[8] de dominante. Dessa forma, o compositor cria tensão e instabilidade e resolve isso com o acorde de tônica novamente (CAMARGOS, 2017). O discurso desse sistema, que se baseia principalmente nas relações entre as funções harmônicas denominadas como tônica, subdominante e dominante, veio sofrendo algumas influências e se modificando aos poucos, em meio ao surgimento de novas possibilidades sonoras, conforme descreveremos adiante.

De acordo com Wisnik (2007, p. 115), a primeira grande forma tonal ocorreu no início do século XVIII, precisamente em 1722, quando, com a adoção do temperamento igual, Johann Sebastian Bach (1685 - 1750) pôde escrever o primeiro volume do *Cravo bem temperado*, mesmo ano em que Jean-Philippe Rameau (1683-1764) publicou o seu *Tratado de harmonia*. Após as fugas bachianas, veio a "forma-sonata (que tem seu auge em Haydn, Mozart e Beethoven)". Mais tarde,

[7] Seu conceito de "máquina universo" caracteriza-se por meio das ideias de cálculo e algoritmo; uma máquina universal, como, por exemplo, o computador, utiliza uma linguagem numérica, interpretada ou lida por meio de cálculos e executada (colocada em execução) por meio de um algoritmo propício para resolver o problema dado. Lévy (1998, p. 63) também considera os *softwares* como "máquinas universais" e assim pensa pelo fato de utilizarem "regras sintáticas de uma linguagem formal" (matematizada), quando "todos os procedimentos efetivos podem ser descritos nessa linguagem" para obter os resultados procurados.

[8] Trítono é uma relação sonora que existe no sistema tonal e corresponde à distância de três tons entre uma nota e outra, que gera uma sensação sonora de dissonância. Por exemplo, se tocarmos juntos uma nota Fá e um Si, teremos um trítono. A distância entre Fá e Si é de três tons: Fá - (tom) - Sol - (tom) - Lá - (tom) - Si.

com o declínio do sistema tonal, viria a "melodia infinita wagneriana", no século XIX, sucedida pelo dodecafonismo de Schönberg, no início do século XX.

Também, já no início do século XX, vários compositores começaram a utilizar a ideia de ruído como elemento de composição sonora, em contraposição ao sistema "ideal" de notas permitido pelo modelo matemático do temperamento igual e pelo sistema de escrita musical já estabelecido como um sistema "ideal" de registro dos sons.

Foram utilizados elementos sonoros de máquinas — sons que buscavam representar uma locomotiva — na obra *Pacific 231*, de Honneger (1924), sons de hélices de avião, como no *Balé mecânico*, de Antheil (1926), dentre outros, consoante descreve Schafer (2012, p. 160-161). Contudo, o verdadeiro revolucionário dessa nova era teria sido "Luigi Russolo, que inventou uma orquestra de ruídos, formada por objetos que zumbiam e uivavam e outras quinquilharias, calculadas para introduzir o homem moderno no potencial musical do novo mundo que surgia". Foi em 1913 que Luigi Russolo proclamou o evento em seu manifesto intitulado *A arte do ruído* ("*L'Arte dei Rumori*"). Conforme nos informa Schafer (2012, p. 160), "quando a orquestra continuou a se expandir no decorrer do século XX, basicamente se acrescentaram instrumentos de percussão", até então não utilizados, por não terem altura definida.

Além desses pontos destacados por Lévy (1998) e por Schafer (2012), Iazzetta (2009, p. 43) assinala o poder do registro sonoro como influente no meio musical – não só a partitura como registro sonoro, mas, a partir do momento em que se pôde registrar o som musical para posteriormente ouvi-lo, essa ferramenta também passou a fazer parte da construção do que se entende hoje, no Ocidente, por música:

> Deve-se tomar cuidado para não separar os meios de registro musical (partitura, gravação) dos processos de criação (composição e *performance*) e de escuta. As tecnologias do registro devem ser entendidas dentro desses processos e não como meios autônomos de inscrição ou transcrição de informação musical. Tanto a partitura quanto a gravação estão intimamente implicadas na construção daquilo que entendemos por música no Ocidente [...] a quantização dos parâmetros notados (por exemplo, a fixação das doze notas da escala cromática) serviu como um filtro para todos os tipos de desvios e flutuações que são característicos das músicas baseadas na tradição oral ou de culturas não ocidentais.

Sobretudo, a escrita musical, como um sistema cartesiano, pôde registrar várias formas musicais ocidentais provavelmente até a primeira metade do século XX, pois, com as novas formas musicais influenciadas por sons não definidos, espectros sonoros, ruídos etc., já não era possível registrar em um sistema de 12 notas temperadas alguns dos objetos sonoros advindos da música eletroacústica[9] ou eletrônica. Observemos a partitura de uma música eletroacústica na Figura 2, proveniente de uma peça musical descrita em Camargos (2017). Não há vestígios de limitação temporal ou mesmo de uma temporalidade somente no sentido horizontal (da esquerda para direita), conforme ocorre em compassos de uma notação musical clássica, e os sons emitidos pelos instrumentos criados para o desenvolvimento da obra, representados pelos números 1, 2, 3, 4_A, 4_B

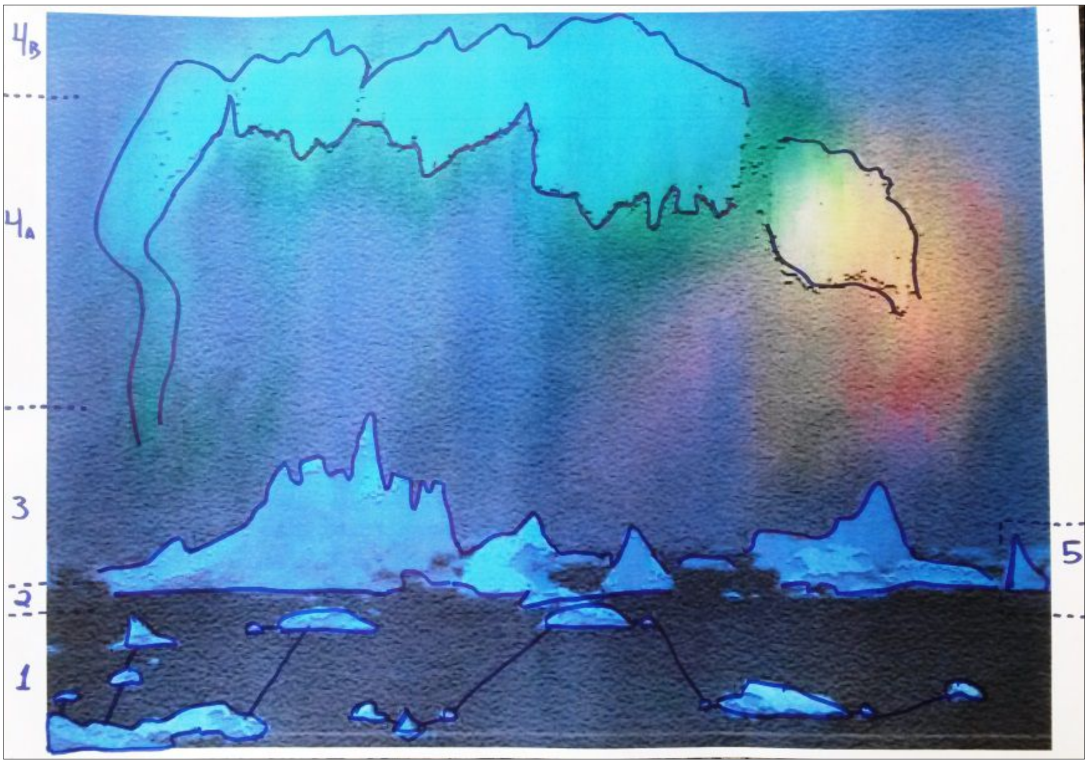
[9] A música eletroacústica é um tipo musical que utiliza instrumentos elétricos, acústicos e eletrônicos (moduladores, sintetizadores, *samplers*, *softwares* etc.) em suas composições. Podem ser utilizados tanto sons temperados quanto ruídos, silêncio e espectros sonoros sem altura definida. Neste tipo de música, os sons naturais, como são habitualmente ouvidos em sua fonte no meio ambiente, podem ser modulados e modificados.

e 5, seguem linhas que indicam estruturas sonoras mais voltadas à improvisação do que a uma regulamentação nas alturas das notas.

Conforme observamos em Camargos (2017, p. 217), a noção temporal dessa paisagem mostrada na Figura 2 não segue um sentido horizontal nos instrumentos: “Tambor em 1, e as flautas em 4A e 4B”, uma característica distinta daquilo que se vê em uma partitura convencional, além da impossibilidade de limitar as notas emitidas por meio de uma “dialética das alturas” (FENERICH, 2015, p.16), estabelecida por uma relação entre alturas definidas e uma temporalidade distribuída horizontalmente em compassos. Na interpretação da peça musical ilustrada pela Figura 2, os músicos que a criaram interpretam os sons que são emitidos em meio às linhas formadas pela paisagem sonora.

Ao olharmos além do limite ocidental, veremos culturas orientais que utilizam notas que não se enquadram no que chamamos “temperamento igual”. Na Índia, por exemplo, temos cerca de 22 a 28 sons distintos dentro de um espaço ocidentalmente chamado de uma oitava. Apesar de haver formas de registro de submúltiplos tonais, como um quarto de tom, outras formas de culturas podem apresentar, em suas expressões musicais, sons não passíveis de serem identificados dentro do sistema de notas tradicional. Um exemplo, dado por Camargos (2017, p. 106), seria “o canto de povos indígenas africanos como os Bakas (também conhecidos como Pigmeus)”.

Figura 2: Partitura de uma música eletroacústica



Fonte: Camargos (2017, p. 207)

Mesmo dentro do limite que separa a música ocidental de outras culturas musicais, encontramos gêneros que não puderam ser reduzidos ao sistema de escrita musical. Segundo Iazzetta (2009, p. 44), o gênero musical conhecido como *jazz* também se contrapôs “[...] à submissão da música erudita às leis e hierarquias que podem ser anotadas na partitura [...]”. O *jazz* apresenta elementos (trechos) baseados em uma cultura musical de improvisação e, assim, não estaria preso a uma “camisa de força” imposta pela notação musical. Apesar de utilizar também partituras, grande parte da execução apresenta elementos descritos como cifras, que dão liberdade aos músicos para improvisar, para jogar com as possibilidades sobre o tema, sem se preocupar com os limites impostos pela partitura de precisão. Para Iazzetta (2009, p. 44), no século XX esse gênero musical teria se utilizado de uma configuração de registro "muito mais ágil e contundente" que a partitura. Provavelmente, devido sua complexidade e sua característica envolvendo as improvisações, seus registros fizeram uso das gravações.

Desse modo, a linguagem musical – pautada em divisões que poderiam ser expressas como um gráfico bidimensional: altura definida *versus* tempo – teve seus limites, tanto da escrita quanto em termos tonais, transbordados pelas possibilidades alcançadas pela música eletroacústica, pela música eletrônica e também pelo *jazz*, apesar de esses estilos musicais também utilizarem elementos da música ocidental temperada. A formatação musical estabelecida desde o período helênico até os dias atuais tornou-se um terreno escorregadio, um conflito insustentável. Dessa forma, cabe aqui utilizar o pensamento de Wittgenstein (2014, p. 70):

> Quanto mais precisamente considerarmos a linguagem real, tanto mais forte se toma o conflito entre ela e nossa exigência. (A pureza cristalina da lógica não se deu a mim como *resultado* -, ela era, sim, uma exigência.). O conflito torna-se insustentável. A exigência corre o risco de se converter em algo vazio. – Entramos por um terreno escorregadio, onde falta o atrito, portanto, onde as condições, em certo sentido, são ideais, mas nós, justamente por isso, também não somos capazes de andar. Queremos andar. Então precisamos do *atrito*. De volta ao chão áspero!

Constatamos possibilidades de extrapolar os limites impostos por uma *linguagem real* expressa em aspectos que permeiam uma *pureza logicista;* ao se transbordarem tais limites, não se está mais preso a um único jogo musical proposto pela lógica, calcado em uma "dialética das alturas" (FENERICH, 2015, p.16). Aos poucos, os artistas passaram a empregar outras formas de composição, outras formas de criação musical, outros sons, além de notas definidas, outras formas temporais, além dos compassos, para assim expor sua arte, arte essa que não podia mais ficar somente sob uma égide construída sobre notas definidas, tempos cronométricos e um sistema de escrita cartesiano. Apesar de alguns compositores ainda se valerem de ferramentas possibilitadas pelo temperamento, como a noção de notas ou a noção de tempo presente na música, novas possibilidades foram estabelecidas pela manipulação do espectro sonoro.

De acordo com Camargos (2017, p. 56), a volta ao solo onde há atrito compreende voltar ao terreno da *práxis* e, "[...] dessa forma, enxergar as significações dentro de diferentes práticas, em meio aos jogos de linguagens estabelecidos em uma forma de vida", tendo, assim, "uma visão de conjunto – ver os diversos usos – possibilita outras regras, as regras de um jogo mais amplo" (VILELA, 2013, p. 39).

Essa noção de jogos de linguagem[10], apresentada nas *Investigações filosóficas* do filósofo austríaco Wittgenstein, permeia a ideia de que "os significados se constituem e se transformam em

[10] "O significado de uma palavra é seu uso na linguagem" (WITTGENSTEIN, 2014, § 43, p. 38). Quando o filósofo austríaco reflete sobre a utilização da palavra "significado", pondera que esse poderia, em um grande número de casos, ser explicado de forma ostensiva, ao apontarmos para aquilo que pretendemos descrever. Contudo, o significado estaria ligado às formas de uso das palavras, à maneira, aos gestos, à entonação de voz, à colocação da palavra em uma frase – tudo isso em meio a uma comunicação, a um diálogo, gerando sentido (significados) para as palavras proferidas. Sobretudo, em meio à comunicação, existem regras que se estabeleceram no desenvolvimento da linguagem e que determinam relações de sentido entre o que se profere e o que se entende, conforme cita Wittgenstein (2014, § 7, p. 19): "chamarei de 'jogo de linguagem' também à totalidade formada pela linguagem e pelas atividades com as quais ela vem entrelaçada".

seus usos em diferentes contextos" (VILELA, 2013, p. 30). As formas de vida podem ser compreendidas como contextos para esses jogos de linguagem, dentro dos quais as expressões linguísticas e/ou musicais adquirem seu significado. Compreendemos que até mesmo os aspectos culturais de um povo fazem parte dessa noção de formas de vida. Assim, as diferentes manifestações musicais se constituem em diferentes contextos. Portanto, nesta fase contemporânea, a forma de vida musical expressa outras possibilidades sonoras, além da dialética pautada no sistema de notas definidas (alturas) e tempos cronométricos.

Moreno (2005, p. 177) estabelece a noção de "formas de vida" como "sistemas de ações convencionais e imersos na prática efetiva de nossa vida com a linguagem"; ali se entrecruzam hábitos e atitudes, sob uma ética desse sistema, no qual se estabelecem concepções a respeito de conhecimentos e decisões. Portanto, até mesmo as formas musicais estabelecidas estão envoltas por suas formas de vida. Desse modo, assim como é possível enxergar outras matemáticas dentro de diferentes jogos de linguagem, devemos perceber outras formas musicais se constituindo em meio aos diversos jogos de linguagem musicais possíveis, sem atentar apenas às práticas musicais sutilmente limitadas pela racionalidade estabelecida pelo temperamento igual, pelo sistema tonal, ou, ainda, por uma única forma de notação musical.

Tais jogos musicais que apresentam elementos da música eletroacústica vão além de relações entre alturas definidas *versus* tempos cronométricos, ultrapassam os limites da música apoiada em critérios de exatidão, pois não há pretensão de tentar delimitar um ruído, como, por exemplo, os sons da hélice de um avião, em uma nota fundamental. O que se pode ouvir ou constatar nessas novas possibilidades musicais seriam manipulações do elemento primordial da música, que é o som, permitindo criar espectros sonoros, ruídos e massas sonoras, aproveitando outras formas sonoras, além das notas fundamentais.

Sendo assim, esta discussão dos limites entre a música ocidental baseada em sistemas como o sistema tonal e as possibilidades de criar uma linguagem musical contemporânea remete a ideias foucaultianas sobre os limites da racionalidade, ou seja, revela uma contraposição à visão universal posta pelo Iluminismo.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

As possibilidades de manipulação da onda sonora vêm trazer questionamentos, dúvidas e reflexões sobre os "limites" da música contemporânea. A introdução de outras sonoridades (massas sonoras, ruídos) como elementos de composição nos levaria à ideia de que não existe um "limite" matemático composicional fechado pelo conjunto do mencionado "temperamento igual". Há novas potencialidades e, então, a música poderia remeter a uma arte de manipular sons (definidos ou não) que provoquem sensações ao ouvinte.

Refletindo sobre esse limite racional, formatado matematicamente e estabelecido no sistema de escrita musical e no sistema tonal que culminou no chamado "temperamento igual", e pensando agora nas novas possibilidades permitidas pelos avanços tecnológicos e pelas influências de diversas culturas no que chamamos hoje de música contemporânea, consideramos eventuais formas de transbordar tais limites de uma perspectiva foucaultiana de afastamento de um racionalismo universal.

Conforme evidenciado em Foucault (2000), o filósofo expressa seus pensamentos por meio de sistemas. Com o pensamento relacional (relações de poder), não há como pensar em algo fora do sistema. Ele discute as diferenças, a ruptura dos limites... Em que medida o objeto se afasta da universalidade? Nesse caso, há um afastamento do universal? Pelo menos houve uma tentativa de universalizar a música pelo sistema de escrita e pelo temperamento igual, verificado por nós anteriormente em Iazzetta (2009), Lévy (1998) e Schafer (2012).

Depois, porém, constata-se uma possível extrapolação dos limites da racionalidade presente na música temperada, em obras como: *A arte do ruído*, de Luigi Russolo (1885-1947); as experiências sonoras com gravações em fitas magnéticas do artista francês Pierre Schaeffer (1910-1995), que, em meados do século XX, manipulava os sons e os utilizava como "objetos sonoros" em suas composições; as obras de John Cage (1912-1992), em que o artista utilizava a poética do silêncio para gerar sensações ao ouvinte, modificava a estrutura de instrumentos convencionais temperados, como o piano, para obter resultados distintos daqueles regulados por uma estética musical ocidental temperada. Ou seja, Cage criava sistemas musicais distintos do que convencionalmente se considerava como música naquela época.

Para Foucault (2000), como a diferença é relacional, conseguimos delimitar tal diferença por meio da relação ao "o que" seria normal. Assim Foucault busca os limites e as tensões geradas nas rupturas desses limites. Para ele, não existe a ideia do terceiro excluído. Devemos ir além dos limites, discutir outras possibilidades, além do simples ser ou não ser. Então, fazendo uma analogia a essa ruptura desse limite da música puramente temperada, pautada em uma dialética altura definida *versus* tempo, para a música programática[11], por exemplo, podemos vislumbrar que não há o questionamento do que seria ou não música nesse sentido. O que há é uma revelação de que a música pode ir além dos limites impostos pela escrita ou pelo temperamento. Compositores contemporâneos propõem discutir possibilidades além do simples ser ou não ser música. Conforme destaca Swanwick (2003), para se fazer música, é necessária também a *intenção* de fazê-la. O compositor/intérprete pretende fazê-la, e nós pretendemos ouvi-la como música.

Ultrapassar tais limites descritos, enfatiza Foucault (2000), deve ser objeto da crítica, à qual cabe, certamente, analisar os limites e refletir sobre eles, pois o "*êthos*" filosófico seria uma atitude limite, ou seja, não seria um comportamento de simples rejeição, mas buscaria estabelecer-se nos limites, nas fronteiras, para fugir à alternativa de estar fora ou dentro. Dessa forma, Foucault (2000, p. 351) compreende que se deve transformar a crítica em uma atitude, em um "*êthos*", em "[...] uma via filosófica em que a crítica do que somos é simultaneamente análise histórica dos limites que nos são colocados e prova de sua ultrapassagem possível".

Como menciona Lévy (1998), novas possibilidades lógico-informacionais são abertas pelos computadores, que utilizam algoritmos de programação lógico-matemáticos. Assim, novamente cairíamos em uma influência logicista? Provavelmente cairíamos; porém, dessa vez, de uma forma que permitiria ultrapassar os próprios limites impostos por ela ao sistema formal de afinação da música ocidental temperada — mas isso seria assunto para outra discussão. Finalizando, ponderamos que, como a música é algo que envolve sensibilidade, criatividade e emoções, ela nem sempre estará restrita aos limites de uma racionalidade matemática.

REFERÊNCIAS

ABDOUNUR, O. J. **Matemática e música:** pensamento analógico na construção de significados. São Paulo: Escrituras, 1999.

BROMBERG, C. Os Objetos da Música e da Matemática e a Subalternação das Ciências em alguns tratados de Música

[11] Para Schafer (2012, p. 151), a música programática utiliza registros ou elementos sonoros do meio ambiente em sua composição, fazendo isso em contraposição à sala de concertos, que evita sons de ambientes externos.

do século XVI, **TransFormAção**, Marília, vol.37, n.1, p.9-30. 2014.

CAMARGOS, C. B. R. **Música e matemática**: a harmonia dos números revelada em uma estratégia de modelagem. São Paulo: Edgard Blücher, 2011.

CAMARGOS, C. B. R. **Músicas que ultrapassam as estruturas regidas por números:** Uma análise de práticas matemáticas em construções de instrumentos musicais. Tese (Educação em Ciências e Matemática) – Universidade Federal de São Carlos. São Carlos, 2017.

FENERICH, A. S. Obra musical opaca: a confluência de valores da música experimental em Pierre Schaeffer e John Cage. **Revista Poiésis**, Tubarão, n. 25, p. 13-26, 2015.

FOUCAULT, M. O que são as luzes? In: **Ditos & Escritos**, vol. III. Rio de Janeiro: Forense Universitária, 2000. p. 335-351.

GROUT, D. J. & PALISCA, C. V. **História da música ocidental**. Trad.: Ana Luísa Faria. 6. ed. Portugal, Lisboa: Gradiva Publicações, 2014.

IAZZETTA, F. **Música e mediação tecnológica.** São Paulo: Perspectiva. 2009.

LÉVY, P. **A máquina universo**: criação, cognição e cultura informática. Porto Alegre: ArtMed, 1998.

MORENO, A, R. **Introdução a uma pragmática filosófica**: de uma concepção de filosofia como atividade terapêutica a uma filosofia da linguagem. Campinas, SP: Editora da Unicamp. 2005.

RODRIGUES, J. F. A matemática e a música. **Revista Colóquio/Ciências**, Coimbra, nº 23, p. 17-32, 1999. Disponível em: <http://cmup.fc.up.pt/cmup/musmat/MatMus_99.pdf>. Acesso em: 16 jul. 2019.

SCHAFER, M. Música, paisagem sonora e mudanças de percepção. In: **A afinação do mundo**. São Paulo: Editora da UNESP, 2012. p. 151-172.

SWANWICK, K. **A basis for music education**. Oxford: Taylor & Francis e-Library, 2003.

VILELA, D. S. **Usos e jogos de linguagem na matemática**: diálogo entre filosofia e educação matemática. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2013.

WISNIK, J. M. **O som e o sentido**. 2. ed. São Paulo: Companhia das Letras, 2007.

WITTGENSTEIN, Ludwig. **Investigações filosóficas**. Trad.: Marcos G. Montagnoli; revisão da tradução e apresentação: Emmanuel Carneiro Leão. 9. ed. Petrópolis, RJ: Vozes; Bragança Paulista, SP: Editora Universitária São Francisco, 2014.

ENSAIOS SOBRE COMPREENSÕES EM MATEMÁTICA EM PERSPECTIVAS DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: UMA ANÁLISE PERCUSSIVA DE ATIVIDADES AO ZAPEAMENTO

ESSAYS ON UNDERSTANDING IN MATHEMATICS IN PROBLEM SOLVING PERSPECTIVES: A PERCUSSIVE ANALYSIS FROM ACTIVITY TO ZAPPING

LEAL JUNIOR, Luiz Carlos[1]

ONUCHIC, Lourdes de la Rosa[2]

RESUMO

Considerando diversos modos e diversificados elementos que compõem práticas de Resolução de Problemas, este trabalho vem dedicar-se a analisar alguns pressupostos que são engendrados e mobilizados nessas práticas e, objetiva-se, através de um estudo analítico do discurso, evidenciar discursos que permeiam e são permeados, potencializam e são potencializados pelo funcionamento de práticas, teorias, teorizações e outros discursos sobre a Resolução de Problemas, além de suas aproximações e distanciamentos. Assim, procedeu-se à análise do discurso pautada pela arqueogenealogia em Michel Foucault para articulação desta composição discursiva. A Resolução de Problemas, então, vem a encaixar-se em diversos cenários e em muitas perspectivas, desde uma metodologia a uma filosofia, além de poder aliar elementos essenciais aos acontecimentos do cenário escolar, como ensino e aprendizagem, mas também funcionar como um agenciamento de um em outro. Nessa esteira, torna-se interessante olhar outros elementos para poder diferenciá-las ou aproximá-las, em termos de práticas, visando a transformação do território e dos atores que a praticam.

Palavras-chave: Resolução de Problemas. Ensino e Aprendizagem de Matemática. Prática Educacional em Matemática. Arqueogenealogia.

ABSTRACT

Considering diverse ways and diverse elements that compose Problem Solving practices, this work is dedicated to analyze some theoretical tenants that are engendered and mobilized in these practices and, through an analytical study of the discourse, aims to point out discourses that permeate and are permeated, potentiate and potentialized by the running of practices, theories, theorizations and other discourses on Problem Solving, in addition to their engagements and distancing. Thus, it proceeded to the discourse guided by archaeogenealogy in Michel Foucault to articulate this discursive composition. Problem Solving then takes place in a lot of settings and in many perspectives, from a methodology to a philosophy, as well as linking elements essential to events in the school setting, such as teaching and learning, besides to be agency of one in other. However, in terms of practices, it becomes interesting to look at other elements in order to differentiate them or approach them to transform the territory and the actors who practice it.

Keywords: Problem Solving. Teaching and Learning of Mathematics. Educational Practice in Mathematics. Archeogenealogy.

1 INTRODUÇÃO: INICIANDO UMA TRAJETÓRIA

Diversas perspectivas de práticas em torno de Resolução de Problemas vêm se mostrando no âmbito educacional, não só da matemática, mas em outros campos. Entretanto, com respeito à

[1] Doutor em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista (UNESP). Docente do Instituto Federal de São Paulo (IFSP), Sertãozinho, SP, Brasil. Endereço eletrônico: luizleal@ifsp.edu.br.

[2] Doutora em Matemática pela Universidade de São Paulo (USP). Docente da Universidade Estadual Paulista (UNESP), Rio Claro, SP, Brasil. Endereço eletrônico: lronuchic@gmail.com.

Educação Matemática, há muitas vertentes que procuram abordar o tema Resolução de Problemas ou resolução de problemas. Atualmente vemos propostas didáticas e/ou pedagógicas de Resolução de Problemas, resolução de problemas[3] , proposição de problemas, problematização, modelação, Modelagem Matemática, solução de problemas, exploração de problemas, Investigação Matemática etc. Não há dúvidas que são propostas educacionais distintas e que se faz necessário, para nossa Análise do Discurso, não apenas focarmos sobre a nomenclatura, mas, sobretudo, na essência de cada uma delas.

No trabalho de pesquisa de Leal Junior (2018) temos exposto o que vem sendo pensado sobre algumas destas concepções e, assim, queremos destacar que uma das possibilidades que estão mais latentes em nossa pesquisa é a extrema confluência entre as propostas de Resolução de Problemas e problematização, posto que elas têm sido analisadas e trabalhadas, discursivamente, através de relações de necessidade e suficiência, onde uma caracteriza a outra. Há uma relação de idiossincrasia entre elas, o que é diferente daquilo que acontece com a resolução de problemas, como atividade nuclear.

Aqui, trazemos o discurso de um dos pesquisadores que entrevistamos, o qual chamaremos, logo a seguir, de P01, que propõe considerar a relação existente entre a Resolução de Problemas e a Filosofia da Educação Matemática, referindo-se a uma proposta pedagógica e não a uma atividade e, por tal motivo, propõe reconhecer e diferenciar a multiplicidade de enunciados acerca de resolução de problemas pela terminologia problematização. Outros trabalhos como o de Wikler (1974) trabalham nesse sentido, o de relacionar estas duas regiões de inquérito, evidenciando que a filosofia é uma prática de Resolução de Problemas, como vimos discursando nos trabalhos do GTERP[4] e vimos dando continuidade, também, nos estudos do GPEMS[5]. Para este pesquisador, este tema é interessante do ponto de vista de potencialidades. E, prega-o ao dizer:

> Bom, mas existe uma diferença entre o que vocês chamam de resolução de problemas de um problema, claro, tem várias maneiras de conceber problema, normalmente as pessoas quando estão trabalhando o domínio da matemática, encaram os problemas como um grande tema ou uma grande unidade do programa de matemática. Enfim, a palavra usada no mundo escolar remete a uma situação muito específica da matemática, como se só a matemática lidasse com problemas, e com determinados tipos de problemas que a gente costuma chamar de "problemas de matemática". Mas isso já remete a uma diferença no uso que faço da palavra problematização em relação às perspectivas de resolução de problemas, porque a problematização me remete, digamos assim, a uma postura filosófica (Pesquisador P01) (LEAL JUNIOR, 2018, p. 105).

Essa vertente de problematização pode ser considerada uma ponte entre as regiões de inquérito que são mote de nossa pesquisa. Esta visão é confluente com a do Pesquisador P02, quando visa uma ligação entre elas, ou seja, que ligue diretivamente a Resolução de Problemas à Filosofia da Matemática e ao Ensino de Matemática, "em muitos aspectos, eles são os mesmos. De

[3] Aqui, a expressão resolução de problemas refere-se ao ato de resolver problemas ou situações-problemas, algo que pode ser esporádico ou momentâneo, uma atividade de cunho recognitivo e puramente heurístico, que vise à exploração pontual de problemas matemáticos. Já a expressão Resolução de Problemas diz de uma prática institucionalizada ou um movimento educacional, algo que acontece em atividades e perpassa todo um movimento educacional e, por sua vez, ultrapassa os limites impostos pelo tempo e pelo espaço, *extravasando* as paredes da escola, problematizando a vida de alguma forma.

[4] Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas vinculado ao Programa de Pós-graduação em Educação Matemática da UNESP de Rio Claro.

[5] Grupo de Pesquisa de Educação, Matemática e Subjetividades do Instituto Federal de São Paulo – Campus Sertãozinho.

fato, a 'resolução de problemas' é uma das muitas posições ou focos de atenção para professores nas salas de aula" (Pesquisador P02) (LEAL JUNIOR, 2018, p. 108, tradução nossa).

Essa ideia relaciona-se bem de perto com muitas concepções e pressupostos do GTERP. Percorrer linhas que vão do interacionismo (como proposto por Vygotsky) ao conexionismo, do construtivismo ao sociointeracionismo, da Teoria Crítica à Teoria Histórico-Cultural entre outras e nos dois sentidos, o que é algo interessante para nosso grupo, uma vez que nos permite visualizar os acontecimentos de forma menos engessada.

1.1 Itinerário de pesquisa: à guisa de metodologia

Esta pesquisa é uma compilação da tese de doutorado de Leal Junior (2018), onde o autor fez uma pesquisa analítico-pragmática pautado pela Arqueogenealogia com base na Filosofia de Michel Foucault acerca de discursos sobre Resolução de Problemas e seus pressupostos teórico-filosóficos como uma análise do discurso. Nossa interrogação para este trabalho é: Como concepções teóricas acerca de práticas de Resolução de Problemas têm influenciado o trabalho didático-pedagógico na visão de pesquisadores em Educação Matemática? Essas concepções são algumas daquelas que o autor supracitado trouxe para compor sua tessitura, e outros discursos podem ser encontrados na mesma referência.

De saída, faz-se necessário pensarmos sobre o que é fazer esta arqueogenealogia e como ela implica nessa cartografia. Contudo, destacamos que a cartografia não é o objeto primeiro da análise discursiva pretendida, ela se mostrou como um dos resultados possíveis para se olhar para nossa questão de pesquisa. Decorrente de Foucault (1999, 2014, 2015) e Veiga-Neto (2011), a arqueogenealogia é um movimento de pesquisa, enquanto que a arqueologia e a genealogia não se dão como movimento, elas atuam sobre corpos e sobre as práticas que envolvem estes corpos. A arqueologia foucaultiana é uma forma de estudos e pesquisas que atua sobre os discursos de forma analítica, ela se dedica à relação ser-discurso à análise do discurso. No segundo campo, o da genealogia enquanto ato de pesquisar, ele está estabelecido em torno da relação poder-saber, vai em busca de entender a constituição do sujeito da ação sobre outros. Fará isso interrogando e problematizando o surgimento de algo relacionando saber e poder.

No último campo que compõe a arqueogenealogia, aquele da ética, que é atravessado por influências dos primeiros campos e centrado na relação ser-consigo, ou no cuidado de si, visa compreender o sujeito da ação sobre si. Nesse movimento, problematiza-se a própria subjetividade e, por isso, muitos autores de estudos foucaultianos preferem falar de três domínios de Foucault, mas, isso não será nosso foco.

Em nosso trabalho, bem como no de Leal Junior (2018) os discursos que nos dispusemos a analisar, seus enunciados, enunciações e dizibilidades são decorrentes de um questionário aberto enviado a pesquisadores nacionais e internacionais do tema que foram bastante referenciados em pesquisas apresentadas nas três primeiras versões do Seminário de Resolução de Problemas, realizados na UNESP, e nos proceedings do XIII ICME – International Congress of Mathematics Education – realizado na Alemanha. As perguntas-chave da pesquisa que enviamos aos pesquisadores foram colocadas conforme Quadro 1.

Quadro 1: Perguntas-chave feitas a pesquisadores

1: Segundo sua perspectiva, o quê ou com o quê as teorizações sobre a Resolução de Problemas têm contribuído para se pensar a Educação Matemática?
2: Como nós educadores/pesquisadores poderíamos trabalhar a matemática em sala de aula pautados por princípios ou proposições advindas da Resolução de Problemas? Você pode dar um exemplo?
3: Como você percebe, através de pressupostos da Resolução de Problemas, questões como: A sala de aula de matemática; conhecimento matemático; ensino, aprendizagem e avaliação de Matemática; sociedade; e conceitos?
4- Você percebe alguma relação entre Filosofia da Educação Matemática e Resolução de Problemas?
5- Que outras considerações você poderia fazer sobre Resolução de Problemas e Filosofia da Educação Matemática?

Fonte: Autores.

As questões presentes no Quadro 1 remontam a uma percepção relacional entre Resolução de Problemas e Filosofia da Educação Matemática, o que nos foi posto propositadamente, pois, segundo Leal Junior (2018), é um campo de estudos que reflete muitos dos pressupostos que permeiam práticas de Resolução de Problemas e da própria Educação Matemática. Os pressupostos dessa prática nem sempre estão explícitos em trabalhos de pesquisa acerca do tema e, pelo fato de a Filosofia se dispor a trabalhar questões em torno de pressupostos, ela traz à tona alguns deles que são fundamentais para se entender a essência que perpassa tais práticas.

Não estamos interessados, principalmente, na identificação dos sujeitos entrevistados, pois não nos interessa focar no sujeito depoente nem de sua interioridade essencial, em sua identidade, ou da captação superficial de sua verdade, pois esse sujeito consiste em uma fabricação da modernidade, mas queremos focar em suas dizibilidades. Posto que o discurso, em Foucault, apresenta-se como um "campo de regularidade para diversas posições de subjetividade", que nos permite buscar "na rede de discursos, os fios que constituíram, em uma trama histórica, a produção de sujeitos", como destacam Souza e Fonseca (2010, p. 44). Todavia, informamos que trabalhamos com discursos de dez pesquisadores de países como Brasil, Canadá, Estados Unidos, Reino Unido e Alemanha, que serão denominados de P01, P02,..., P06, além dos pesquisadores citados nos proceedings do ICME e dos pesquisadores Kilpatrick, Liljedahl, Allevato e Onuchic que nos enviaram trabalhos autorais que poderiam responder ao nosso questionário e, por isso, serão postos nomeadamente nesta análise discursiva.

Assim, analisando práticas de Resolução de Problemas, evidencia-se que ela não visa trabalhar sob as imposições sistemáticas que se lhe colocam, mas miná-la a ponto de que não resista às tensões produzidas e uma nova proposta educacional de ensino, de aprendizagem e de avaliação emerjam focando no que deve ser aprendido em detrimento do que deve ser ordenadamente ensinado. Uma vez que as imposições de conteúdos estão postas a fim de permitir apenas a circulação de algumas políticas de verdades, ou seja, que apenas alguns conteúdos sejam veiculados. Dessa forma, é mister pensarmos estes atos, essas políticas e todos os outros elementos desses campos a partir de outros territórios que não aquele da sala de aula, da escola, ou de um campo restritivo, mas como propõe a arqueogenealogia, precisamos desterritorializarmo-nos para poder ver a gama de forças, valores e problemas que permeiam este sistema.

2 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: ALGUMAS VISÕES

Trabalhos do GTERP perpassam a visão de treinamento, subjetivação e objetivação dos estudantes, onde se procura conceder à Resolução de Problemas um pano de fundo mais construtivista, construcionista e/ou interacionista, onde os aspectos supracitados são considerados, embora não sejam supervalorizados. Assim, alargam-se suas práticas e seus desdobramentos. O que proporciona uma estrutura processual bem mais complexa, uma vez que entram em cena o sujeito e os objetos de seu conhecimento, os valores, o próprio conhecimento e a sociedade.

Elas são próximas quando tomam como base a conceitualização da Matemática através da problematização, quando enfatizam a prática da Matemática como um movimento educacional que pretende distanciar-se do tradicionalismo, das aulas expositivas e enciclopédicas, e que valorizem posturas passivas de alunos e professores diante do sistema. Em qualquer uma das posturas de Resolução de Problemas abordadas, todas elas admitem potencializar a produção do conhecimento matemático e, de forma intencional, desenvolver modos e maneiras de trabalhar efetivamente essa prática de forma contextualizada social, cultural e historicamente.

Elas são diferentes, quando da efetivação da prática de Resolução de Problemas, posto que ela acontece, segundo Leal Junior e Onuchic (2015), na multiplicidade da sala de aula, na singularidade de cada grupo e de cada sujeito, que carregam consigo anseios e interesses diferentes. Isso tudo de forma bastante emblemática, pois o que as aproxima também se baseia na intencionalidade e regionalidade da prática, e o que as diferencia é exatamente o contexto social, histórico e cultural onde a mesma ocorre, posto que é ele quem determinará como dar-se-á a Resolução de Problemas em termos de empiria e de experimentação e, sobretudo, como acontecerá a produção do conhecimento.

Uma abordagem puramente heurística, baseada em treinamentos, não consegue dar conta da tomada de consciência dos estudantes para os processos de construção do conhecimento matemático e, muitas vezes, reside aí a razão de os mesmos não conseguirem explicar como, de fato, resolveram o problema. Acabam tornando-se incapazes de expressar e acessar os processos de autorregulação e metacognitivos, o pensar-em-alta-voz, que faz parte da aprendizagem matemática, pois não conseguem relatar nem sequer como aprenderam a resolver tais problemas, apenas resolveram de forma mecânica. Essa vertente de Resolução de Problemas é uma forma de praticar-se um movimento educacional insubordinado ao tradicionalismo, o qual é objeto dos estudos do GTERP, que tem amparo no sociointeracionismo enquanto interação entre estudantes em trabalhos colaborativos e entre professor-alunos em trabalhos cooperativos, como propõem Leal Junior e Onuchic (2015).

A respeito do pensar-em-alta-voz, trata-se de um conceito proposto pelos autores supracitados, em que esse conceito atravessa a proposta de trabalho através da Resolução de Problemas e entende-se que ela se comporte como uma atividade cognitiva, em que o estudante narra como aprendeu ou como aprendeu a aprender, que diz respeito ao/a movimento/atitude que se configura por meio da autorregulação e da metacognição no âmbito de uma prática sociointeracionista voltada para o Ensino-Aprendizagem. É um conceito cunhado pelos autores desse grupo que se diferencia do pensar-em-voz-alta, que diz de uma atividade de leitura, recognição, simples percepção, atividade de introspecção ou exposição do que se pensa de maneira audível, como muito se percebe em materiais de cunho psicológico que tratam do assunto.

Mantendo-nos um pouco mais sobre algumas considerações construtivistas acerca de Resolução de Problemas, P03 vem dizer que o trabalho e a prática em sala de aula de Matemática podem evoluir, melhorar e tornar-se potente a partir do trabalho com Resolução de Problemas. Esse pesquisador se vale de estudos e pesquisas do Mathematics Assessment Project, Teaching for Robust Understanding – TRU Framework[6]. Esse pesquisador aponta que tanto a compreensão como a aprendizagem estão relacionadas ao ensino e, para que essas atividades cognitivas ocorram de forma plena, com bons resultados, dependerá em muito da composição do cenário educacional, como a sala de aula, motivação dos alunos, disposição docente e meios/instrumentos de aprendizagem.

Aqui, compilamos os conceitos e as ideias expressas sobre o TRU englobando uma tradução, pois como apontado pelo pesquisador P03, são itens caros à Educação Matemática com uma proposta filosófica que permeia, também, a Resolução de Problemas e tem sido bastante influente em pesquisas nos EUA e, em especial, em sua própria pesquisa. A primeira dimensão diz do conteúdo, ou seja, do grau em que as estruturas de atividade de sala de aula estão estruturadas e como elas oferecem oportunidades para que os alunos se tornem pensadores disciplinares conhecedores, flexíveis, criativos e engenhosos. As discussões são focadas e coerentes, proporcionando oportunidades para aprender ideias, técnicas e perspectivas disciplinares, fazer conexões e desenvolver hábitos disciplinares produtivos de mente.

Em segundo lugar, vem a demanda cognitiva, que versa sobre as oportunidades de os alunos lidarem com o fazer/produzir sentido a partir de importantes ideias disciplinares (nesse caso, referentes à matemática) e seus usos. Nessa dimensão, os alunos aprendem melhor quando são desafiados de maneiras que proporcionam tempo, espaço e apoio para o crescimento, com o nível de dificuldade das tarefas variando de moderado a exigente. O nível de desafio deve ser compatível para o que tem sido chamado de "luta produtiva"[7].

Em terceira posição, vem a dimensão referente ao acesso equitativo ao conteúdo, que se refere ao grau em que as estruturas de atividade de sala de aula convidam e promovem o envolvimento ativo de todos os alunos na sala de aula com o conteúdo disciplinar principal sendo abordado pela classe. As salas de aula em que um pequeno número de alunos obtém a maior parte do "tempo de ar" – folga – não são equitativas, não importa quão rico o conteúdo: todos os alunos precisam estar envolvidos de maneiras significativas.

A quarta dimensão diz daquilo que Leal Junior e Onuchic (2015) vêm falando, do agenciamento, autoridade e identidade. Isto é, a palavra agenciamento tem o intuito de colocar o estudante em contato com objetos do conhecimento e fazê-lo pensar sobre o que pode ser construído a partir de algumas problematizações. A isso é chamado por esses autores de agenciamento, fazer, agenciar, fomentar, patrocinar a produção de sentidos por parte do próprio

---

[6] Disponível em: http://map.mathshell.org/trumath.php. Acesso em 27/04/2017.

[7] Os pesquisadores usam o termo "demanda cognitiva" para descrever o nível de dificuldade, em relação ao que eles sabem, do trabalho que os alunos são convidados a participar. O objetivo é encontrar um meio termo, uma situação de equilíbrio, onde os alunos têm oportunidades de construir sobre o que eles conhecem e ampliar seus entendimentos atuais. A fim de dar sentido ao conteúdo, tornando-o rico, os alunos precisam se engajar em "luta produtiva" (STEIN; SMITH, 1998; HESS, 2006). Um esquema amplo para pensar em diferentes níveis de desafio é a estrutura de profundidade de conhecimento (DOK) de Webb (1997, 2002), que identifica quatro níveis de DOK: Recuperação e Reprodução, Competências e Conceitos, Pensamento Estratégico e Raciocínio, cf. Hess (2006). Em vários momentos, os alunos precisam se engajar em todos esses níveis. Quando os alunos experimentam dificuldade em lidar com questões complexas, ou encontram-se presos nos problemas, há uma tendência para os professores de reduzir a demanda cognitiva e, assim, privar os alunos de oportunidades de luta produtiva e de fazer sentido (HENNINGSEN; STEIN, 1997). O desafio para a instrução em todas as disciplinas é fornecer esclarecimentos e outro apoio (por exemplo, aconselhamento heurístico, levantando questões, sugerindo abordagens) sem dizer aos alunos exatamente o que fazer, mas a todo tempo problematizar, o que não é fácil (SCHOENFELD; TRU, 2016, p. 5).

aluno visando contribuir para conversas sobre ideias disciplinares que contribuam para o seu desenvolvimento de agência – A vontade de se engajar. A questão em torno da palavra identidade é bastante problemática, mas ela está relacionada sobre a posse sobre o conteúdo.

O desenvolvimento de identidades positivas, como pensadores e aprendizes, é questão nessa dimensão, pois tem a ver com como o aluno se vê diante da construção de seu conhecimento e como age nesse processo. Essa dimensão fala sobre a identidade formada pelo próprio aluno ao perceber suas potencialidades nesse processo.

A questão referente à palavra autoridade[8] corresponde a uma propriedade evocada pelo pesquisador P03, mas ela quer dizer que, após muito se pensar sobre um conceito, um problema ou conteúdo o aluno tenha desenvolvido ideias e pensamentos relacionados que possam conduzi-lo a uma resolução, ou que esse construto tenha lhe permitido produzir sentido para o que tem feito, o que é diferente de quando um aluno tem apenas que aceitar a autoridade externa de alguém que saiba resolver o problema e diga-lhe como proceder, ou ainda, que resolva para ele.

Enfim, a quinta dimensão é um fator bastante importante e pouco discutido em propostas educacionais baseadas em Resolução de Problemas. O GTERP tem se debruçado sobre essas questões e, de acordo com o proposto por P03, entendem que a avaliação formativa se dá na medida em que as atividades de sala de aula suscitam o pensamento do aluno, promovem interações subsequentes e respondem a essas ideias. Tal avaliação atua sobre as ideias iniciais e fomenta o desenrolar de equívocos conceituais que tenham se formado no processo de resolução de problemas, se este for o caso.

Trata-se de um processo avaliativo holístico, que acontece durante o desenvolvimento do processo de produção do conhecimento, nas interações da sala de aula e nas percepções dos atores do cenário da sala de aula. Dessa forma, a TRU, enquanto uma educação potencializadora, “encontra os estudantes onde estão” (SCHOENFELD; TRU, 2016, p. 11) e dá-lhes oportunidades de aprofundar seus entendimentos. O Pesquisador P04 aponta que

> A Resolução de Problemas evoluiu passando de ser um dos objetivos da Educação Matemática para ser uma metodologia de ensino, depois para uma metodologia de ensino e aprendizagem, em seguida para uma metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação. Por fim, a Resolução de Problemas como uma forma de Filosofia da Educação Matemática. Assim, em seu desenvolvimento a Resolução de Problemas aproximou-se de uma Filosofia da Educação Matemática e isso é essencial para se analisar, refletir e avaliar a Educação Matemática. Questões, tais como: o valor do conhecimento matemático no processo educativo; seus objetivos; quais conteúdos ensinar; como ensinar; como avaliar, entre outras, podem ser discutidas e mostrar uma matemática significativa para os estudantes. (Pesquisador P04) (LEAL JUNIOR, 2018, p. 112).

Nessa esteira, os trabalhos de P04 e de Onuchic e Allevato (2011), bem como de alguns outros pesquisadores do GTERP, têm bastantes aproximações, posto que ao considerar o Ensino-Aprendizagem-Avaliação os atores do cenário de pesquisa e educativo devem ter em mente que esses três elementos ocorrem simultaneamente, ou seja, “enquanto o professor ensina, o aluno, como um participante ativo, aprenda, e que a avaliação se realize por ambos. O aluno analisa seus próprios métodos e soluções obtidas para os problemas, visando sempre à construção do

[8] Não pensamos que ela seja a melhor tradução para ownership, palavra utilizada no original, mas desenvolvemos, então, a compreensão do que os autores quiseram destacar com essa terminologia no corpo do texto.

conhecimento". Tal forma de trabalho do aluno torna-se resultado de processos de pensamento sobre questões matemáticas, levando o aluno a "elaborar justificativas e a dar sentido ao que faz. De outro lado, o professor avalia o que está ocorrendo e os resultados do processo, com vistas a reorientar as práticas de sala de aula, quando necessário" (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p. 81).

Esta fonte pode ser considerada a mola propulsora de nossa intencionalidade a partir da tese de Leal Junior (2018), a qual tem mostrado muitas possíveis conexões entre o que praticamos e o que outros grupos e comunidades têm praticado.

Segundo Bruder (2000, 2005), o processo de resolução de problemas com um fim em si mesmo pode enfraquecer qualquer prática e filosofia subjacente que vise atuar sobre a aprendizagem podendo ser apenas compreendido pela metodologia. Dessa postura de trabalho com problemas, a autora infere que as competências matemáticas de resolução de problemas são adquiridas através da promoção de manifestações de agilidade mental (redução, reversibilidade, atenção aos aspectos e mudança de aspectos), o que pode ser alcançado com consciência dos atos em busca do heurismo adequado. O que se contrapõe à heurística por si mesma, uma vez que se propõe a estudar os efeitos dessas últimas.

Sobre isso, Collet e Bruder (2008) propõem os princípios que sustentam uma pedagogia pautada por heurismos, os quais pregam que aprender a resolver problemas é um processo de ensino e de aprendizagem de longo prazo, que abrange basicamente quatro fases, quais sejam: (1) Familiarização intuitiva com métodos e técnicas heurísticas; (2) Tomar consciência de heurismos especiais por meio de exemplos proeminentes (estratégia de aquisição explícita); (3) Fase de prática consciente curta para usar as heurísticas recém-adquiridas com tarefas de dificuldades diferenciadas; e, (4) Expandir o contexto das estratégias aplicadas.

Resumidamente, essa concepção está bem próxima daquelas praticadas no Brasil, inclusive de uma postura de Modelagem Matemática, podendo ser esta última parte integrante da Resolução de Problemas ou, ainda, que a resolução de problemas seja parte constitutiva dos processos que circundam a primeira. Mas isso, torna-se válido desde que o professor se disponha a inventar e modelar os problemas, tornando-os interessantes e contextualizados aos alunos. Contudo, a relação resolução de problemas – Modelagem Matemática – Resolução de Problemas é bastante passível de discordância e nada consensual, necessitando adentrar por suas bases teóricas para compreender como se sustentam ou como se distanciam (MACHADO, 2006; SOUSA; ALMEIDA, 2017).

Na primeira fase, intenta-se uma familiarização ou contextualização das heurísticas com os alunos por meio de um processo intuitivo de impulsos e perguntas ou perguntas e respostas; na fase seguinte procura-se estabelecer um modelo de resolução para o problema, nomeadamente, para enfatizar a tomada de consciência daquele processo; a terceira fase tem por objetivo certa familiarização com os novos heurismos e a experiência de competência através da prática individualizada em diferentes níveis de exigência, como a promoção de tarefas de casa; enfim, a quarta fase visa à flexibilidade através da transferência para outros conteúdos e contextos, além de potencializar, cada vez mais, o uso e aplicação dos heurismos recém-adquiridos, de modo a agregar aos modelos de resolução de problemas já apreendidos (BRUDER; COLLET, 2011).

Há muitos trabalhos que relacionam estes campos já institucionalizados de pesquisa em termos de suas principais características. Não obstante, não há consenso sobre formas de relacionamentos e concepções, mas há aqueles que procuram olhar de perto para os elementos constituintes desses campos e trabalhar em cima das tangências e confluências, embora nos seja interessante também olhar para as divergências e como esses entes que tencionam as práticas, evidenciando muitos pressupostos e permitindo avançar sobre as potencialidades subjacentes a qualquer prática relacionada.

A perspectiva supracitada aproxima-se, em termos, de ações-orientadas e metodologias pedagógicas, ou até mesmo de uma Didática da Matemática, uma vez que se dispõe a trabalhar conteúdo e treinamento via problemas de Matemática, como se pode evidenciar nos depoimentos de alguns pesquisadores daquela tese de doutorado. A partir de onde, pode-se evidenciar processos de mediação e questionamentos como forma de dirigir a resolução dos alunos, onde pode ser enfatizada a relação interpessoal na formação das respostas e relacionamentos na sala de aula. O fato de o professor questionar, e também sugerir uma linha de pensamento ao aluno, não permite que o mesmo crie suas próprias resoluções enquanto um processo inaugural de pensamento, mas facilita o trabalho docente no momento de discussão das respostas encontradas pelos estudantes, que convergem para uma mesma solução correta, aquela almejada pelo docente antes mesmo da oferta do problema, ideia esta que corrobora a proposta de D'Amore (2007).

As heurísticas realizadas em classe parecem seguir um mesmo fluxo, pelos motivos que destacamos acima. Mas, nessa perspectiva, os sujeitos pesquisadores expõem que o aluno pode, sim, a despeito das sugestões do docente, criar suas próprias heurísticas, e que esse procedimento é enfatizado e estimulado nas tarefas. Os autores afirmam que a partir de perguntas básicas com uma formulação prototípica, os estudantes podem sempre ter a oportunidade de encontrar seus próprios heurismos, mesmo que em salas de aula o docente possa valorizar aquele que, de antemão, tenha previsto ou ensaiado, algo bastante relacionado à proposição e formulação de problemas, como estudado pelo GTERP e proposto por Carrillo Yanes (2018).

Eles advertem, ainda, que para muitos estudantes, a aplicação de abordagens heurísticas não acontece de forma automática, uma vez que dependem da interpretação do problema para ativação da autorregulação de aspectos metacognitivos da aprendizagem, que nem sempre são alcançados em uma aula, segundo Lester e Garofalo (1989) e Collet e Bruder (2008). Seguindo o trabalho da pesquisadora alemã nos Topic Survey, vem o trabalho do pesquisador canadense Peter Liljedahl, que versa sobre a Resolução de Problemas criativa, em um tom de tensão para com o apresentado até o momento – a matemática como descoberta –, posto que este pesquisador tem uma postura diferenciada a respeito dos matizes que fundamentam a Resolução de Problemas, e que comprovam que a mesma é um campo multifacetado no âmbito educacional.

Uma das tensões encontra-se já no início da escrita desse pesquisador, na medida em que constrói sua articulação discursiva sobre heurísticas. O pesquisador canadense coloca que Arquimedes, ao submergir na banheira em busca de uma solução para seu problema, não tomara consciência de quaisquer processos de resolução de problemas, não tinha em mente processos de osmose, memorização, imitação, cooperação ou reflexão como proposto em Kilpatrick (2017), nem tampouco baseou-se em redução, reversibilidade, atenção a aspectos, mudança de aspectos e transferência, como abordado por Bruder (2000), os quais podem ser associados a processos psicogenéticos de Piaget ou de funções superiores em Vygotsky ou, ainda, em alguns outros desdobramentos dessas teorias.

Arquimedes somente pensava em como resolveria seu problema, buscava algum insight ou alguma iluminação súbita para isso. Para Liljedahl et al. (2016), os princípios heurísticos ou de heurismos não participam da resolução de problemas, podendo apenas ser encontrados ou presenciados nas análises que se fazem dessa atividade. O que se relaciona, de alguma forma, à tomada de consciência ou não dos processos cognitivos que ocorrem durante a Resolução de Problemas. Isso face às propostas docentes que, em muito, também não têm noção de tais conceitos que ficam à mercê, apenas, das pesquisas que pouco se aproximam das práticas em sala de aula.

Enfatiza ainda o autor supracitado que tomar consciência desses processos não ajudaria Arquimedes a resolver o problema, o que levanta o paradigma de que a resolução de problemas acontece de forma inconsciente durante seu desenvolvimento, ou seja, os sujeitos não têm consciência do que, de fato, acontece-lhes na mente para buscar uma resolução, mas buscam satisfazer-se diante de um problema que lhes foi proposto, apelando para meios e conhecimentos que lhes estejam acessíveis. Afirma ainda que esse parece ser o cenário mais aceito pelos matemáticos quando se fala de resolução de problemas, divergindo drasticamente da opinião de educadores matemáticos que se dedicam à Resolução de Problemas.

Entretanto, essa polissemia é devido a concepções adversas de problema. Realmente há muitas definições para esse conceito. Todavia, diferentemente do que ocorre no Brasil, onde as definições de problemas em Educação Matemática confluem para aquela apresentada por Onuchic e Allevato (2011, p. 81) onde problema é aquilo “que não se sabe, mas que se está interessado em fazer” e que possui, como vimos demonstrando, matizes ontológicos, epistemológicos, éticos, axiológicos, estéticos e políticos mediante a prática de Resolução de Problemas (LEAL JUNIOR; ONUCHIC, 2015). Tal concepção está emparelhada àquela proposta por P02, ao inquerir

> Você vê a resolução de problemas como o coração e a essência da matemática ou você vê a resolução de problemas como extra para aqueles estudantes que completam os exercícios de rotina rapidamente? A Resolução de Problemas é a resolução de tarefas de rotina ordinárias triviais que exigem procedimentos de rotina, ou está atacando novas situações problemáticas? A questão principal é "quando é um problema" em vez de "o que é um problema" porque não é a tarefa que é "o problema", mas sim uma pessoa que experimenta algo como um problema (Pesquisador P02) (LEAL JUNIOR, 2018, p. 114, tradução nossa).

No cenário internacional há concepções bastantes variadas, por exemplo, Resnick e Glaser (1976) definem um problema como algo para o qual não se tem a experiência necessária para resolver, colocando sua definição em um viés pragmático. Definição esta que parece agradar aos matemáticos, conforme aponta Liljedahl (2016), valorizando a construção da prática e o desenvolvimento empírico dessa ciência [matemática]. Esse fato reforça também que a Resolução de Problemas é um meio de se fazer ciência e também filosofia ao envolver em sua trama as nuanças teórico-filosóficas intrínsecas à esta constituição, mas requerem a tomada de consciência desses processos (WIKLER, 1974).

A respeito dos esforços dispensados para buscar ou construir uma solução para um problema, como abordados em pesquisas estruturalistas apontadas por Liljedahl et al. (2016) e que são representadas por Schoenfeld e Kilpatrick (2013), coloca-se que se os esforços forem deliberados, tem-se então um problema de rotina e não uma invenção importante. Um problema inédito para um sujeito é aquele para o qual o mesmo precise de empenho, tentativas e erros que resultem de seus esforços, para enfim poder passar a confiar em intuições, inspirações súbitas ou até mesmo na sorte, como ele coloca em Liljedahl (2016), reforçando a influência no sistema de crenças envolvidos nessa prática.

Todavia, há pesquisas como as de Liljedahl (2016), Mason et al. (1982) e Polya (1945), que trazem suas ideias acerca do conceito de problemas do plano pragmático para o epistemológico, preservando assim seus matizes na práxis e na ontologia, uma vez que suas concepções de problema confluem para essa expressa por Liljedahl et al. (2016), onde “os problemas, então, são tarefas que não podem ser resolvidas por esforço direto e requerem algumas ideias criativas para resolvê-lo” (LILJEDAHL et al., 2016, p. 6, tradução nossa).

Enfim, é possível ter-se cada uma dessas abordagens com pontos de vista em outros campos, buscando assim uma percepção mais holística a esse respeito, além de manter uma determinada essência para o conceito de problema que, em suma, mesmo diante de perspectivas diferentes da Educação Matemática, pode-se contar com uma confluência desses conceitos acerca da produção ou construção do conhecimento matemático. Pois, como assestaram Leal Junior e Onuchic (2015), são os problemas que nos conduzem aos conceitos matemáticos e seus conhecimentos relacionados a partir de problematizações.

Retomando a exposição do pesquisador canadense ao *Topic Survey*, ele se apega a ideias de Henry Poincaré, bem como se apropria de ideias de Claparède acerca da psicologia (nomeadamente estudo filosófico sobre a consciência e o conhecimento) de sua época, como aquela intitulada L'Invention mathématique, que é traduzida para o português com fins acadêmicos-comerciais por Criatividade Matemática, onde o pesquisador aborda questões acerca da descoberta, da criatividade e da invenção em matemática, sendo estas duas sinônimas uma da outra.

3 ANALISANDO EM CRIATIVIDADES...

Embora o trabalho de Lildejahl tenha dado bastante destaque à questão da iluminação súbita – AHA! – a resolução de problemas se constitui apenas como um estágio dentre quatro, que corroboram o fenômeno da criatividade matemática. De acordo com Hadamard (2009), os quatro estágios são iniciação, incubação, iluminação e verificação. Sobre essas considerações Liljedahl et al. (2016) coloca que

> A primeira dessas fases, a fase de iniciação, consiste em trabalho deliberado e consciente. Isso constituirá o engajamento voluntário e aparentemente infrutífero de uma pessoa com um problema e será caracterizado por uma tentativa de resolver o problema através de um repertório de experiências passadas. Esta é uma parte importante do processo inventivo porque cria a tensão do esforço não resolvido que estabelece as condições necessárias para a liberação emocional que se segue no momento da iluminação (…). Após o estágio de iniciação, o resolvedor, incapaz de encontrar uma solução, deixa de trabalhar no problema a um nível consciente e começa a trabalhar nele em nível inconsciente (…). Isto é referido como o estágio de incubação do processo inventivo e pode durar desde vários minutos até vários anos. Após o período de incubação, pode ocorrer uma rápida vinda à mente de uma solução, referida como iluminação. Isto é acompanhado por um sentimento de certeza e emoções positivas (…). Embora os processos de incubação e iluminação estão envoltos por trás do véu do inconsciente, há uma série de coisas que podem ser deduzidas sobre eles. Em primeiro lugar e acima de tudo é o fato de que o trabalho inconsciente, de fato, ocorre. Poincaré (1952) e Hadamard (1945) utilizam a experiência muito real da iluminação, fenômeno que não pode ser negado, como evidência do trabalho inconsciente, cujos frutos aparecem no flash de iluminação. Nenhuma outra teoria parece viável para explicar o repentino aparecimento de solução durante uma caminhada, um banho, uma conversa, ao acordar, ou no caso de voltar a pensar a mente de volta para o problema depois de

> um período de repouso (…). Também é deduzível que o trabalho inconsciente está inextricavelmente ligado ao esforço consciente e intencional que o precede. […] portanto, os esforços infrutíferos da fase de iniciação são apenas aparentemente assim. Eles não apenas estabelecem a tensão acima mencionada responsável pela liberação emocional no momento da iluminação, mas também criam as condições necessárias para que o processo entre na fase de incubação. A iluminação é a manifestação de uma ponte que ocorre entre a mente inconsciente e a mente consciente (…), uma aproximação à mente (consciente) de uma ideia ou solução. Porém, o que leva a ideia à consciência não é claro. Existem teorias das qualidades estéticas da ideia, surpresa / choque efetivo de reconhecimento, fluência de processamento ou quebra de fixidez funcional. Por razões de brevidade, vou apenas alargar a primeira delas. Poincaré propôs que as ideias que foram estimuladas durante a iniciação permaneceram estimuladas durante a incubação. Contudo, liberadas das restrições do pensamento consciente e do cálculo deliberado, essas ideias começariam a se unir em uniões rápidas e aleatórias para que “seus impactos mútuos possam produzir novas combinações” (POINCARÉ, 1952). Essas novas combinações, ou ideias, seriam então avaliadas quanto à viabilidade usando uma peneira estética, que permite através da mente consciente apenas as “combinações certas” (POINCARÉ, 1952). É importante notar, no entanto, que bom ou estético não significa necessariamente correto. A correção é avaliada durante a fase de verificação. O objetivo da verificação não é apenas verificar a correção. É também um método pelo qual o resolvedor se reengaja com o problema no nível de detalhes. Ou seja, durante o trabalho inconsciente, o problema está envolvido no nível de ideias e conceitos. Durante a verificação, o solucionador pode examinar essas ideias em detalhes mais detalhados. Poincaré descreve sucintamente ambos os objetivos. (LILJEDAHL et al., 2016, p. 8-9, grifos do autor).

A terminologia criatividade é bastante usada em pesquisas sobre Educação Matemática. Muitas vezes indiscriminada, imprudente ou não rigorosamente definida. Conforme levantado por esse pesquisador, uma outra forma de compreender esse termo é como um processo [subjetivo] cujos produtos são originais, novos, incomuns ou até anormais, de acordo com Csíkszentmihályi (1996). Sob esse prisma, a criatividade passa a ser definida a partir dos efeitos e resultados, baseados nos produtos externos e observáveis, na medida em que o produto chega a ser ou nos traços de caráter do sujeito criativo. Cada um desses usos são etapas de um processo que Liljedahl e Allan (2014) denominam de produto, processo, pessoa – que vem a ser a raiz daqueles discursos.

Ao mesmo tempo, Dewey coloca que o processo de investigação pressupõe a lógica e não pode ser causa e efeito de si mesma, nem a medida das formas lógicas. Tais formas são construídas durante o processo de investigação, de pesquisa e/ ou resolução de problemas [para Dewey, esses processos são sinônimos, o que corrobora a produção do conhecimento como uma ação reflexiva e autoanalítica, ao que o filósofo chamará de autocorreção. Para ele, a ciência e seus avanços são resultantes dos processos de autocorreção através de investigações que se dão mediante as experimentações (DEWEY, 1991, 1991a, 1959; DIAS, 2015), ou seja, a ciência é resultado de constante aperfeiçoamento sobre determinados campos de estudos construídos através de Resolução de Problemas.

Corroborando essa ideia, sob um prisma hegeliano, percebemos que a fundamentação e colocação de Stanic e Kilpatrick (1989), de que a Resolução de Problemas é uma arte, estão bastante relacionadas a fazer algo criativo, ao lançar-se sobre o desconhecido em busca de resposta, encontrando artifícios ou meios de expressar-se criativa e livremente. Nesta esteira, por arte entende-se "ocupar-se do verdadeiro como objeto absoluto da consciência, pertence à esfera absoluta do espírito e graças a seu conteúdo situa-se no mesmo plano da religião e da filosofia". Entretanto, "como posição e resolução de problemas […], a arte não reproduz nada de existente, mas produz sempre algo de novo, forma uma nova situação espiritual e, portanto, não é imitação, mas criação". Por sua vez, nesse cenário, "criação é pensamento que também consiste em posição e resolução de problemas […], e nunca em reprodução de objetos ou de ideias" (GROCI, 1920 apud ABBAGNANO, 2007, p. 369). Assim, direcionando essas concepções para os resolvedores de problemas, tal cenário visa a sua constituição como artistas.

Com efeito, Gentile, na obra de Abbagnano (2007), relata que o artista é um espírito criador livre, onde o "pensamento comum encontra dificuldade em aperceber-se claramente dessa criatividade do homem, mas, embora obscura, essa ideia do artista que cria um mundo seu está profundamente arraigada em todo homem que se aproxima da obra de arte". E, continua a afirmação alegando que, "no âmbito da concepção romântica de arte, o princípio de arte como criação aparece como verdade evidente" (p. 369).

Essa colocação é cara em nossa prática, pois antes de procurarmos ver a Resolução de Problemas como um campo mais abrangente, ela se nos mostrou enquanto uma arte, a arte de resolver problemas.

3.1 Resolução de Problemas: pensamentos e acontecimentos

Considerando a proposta de Dewey, procuramos refletir sobre seu potencial no escopo dessa tessitura, a qual nos fornece subsídios para adentrar pelo que o filósofo vem a chamar de pensamento reflexivo. "A resolução de problemas exercita o pensamento reflexivo, a iniciativa e a capacidade do aluno para organizar e executar por si o trabalho" (AGUAYO, 1970, p. 157). Para Dewey, esse pensamento é cifrado de uma "espécie de pensamento que consiste em examinar mentalmente o assunto e dar-lhe consideração séria e consecutiva" (DEWEY, 1959, p. 13). Trata-se do ato de pensar de uma forma mais consciente e efetiva, onde as coisas passam a ter um sentido ou um sentido outro, e a função do pensamento reflexivo consiste em transformar uma situação na qual se tenham experiências caracterizadas pela obscuridade, pela dúvida, pelo conflito, isto é, de qualquer modo perturbadas, em uma situação que seja clara, coerente, ordenada, familiar e/ou harmoniosa (LALANDA; ABRANTES, 1996, p. 44).

Para ele, a Resolução de Problemas no seio da ciência e da tecnologia, onde reside a Matemática, poderia contribuir significativamente com a modernização e com o progresso social, onde o pragmatismo e sua pedagogia seriam motivadores e fomentadores de uma reestruturação da sociedade, transformando-a em uma sociedade científica, aberta e democrática (POPKEWITZ, 1997). E, em essência, tal discurso conflui para aquilo que o GTERP tem trabalhado, ou seja, a partir de trabalhos como Onuchic et al. (2017), Allevato, Jahn e Onuchic (2017), Hoyles e Lagrange (2010), Abbagnano (2007), Leal Junior e Pinheiro (2016) entre outros, temos vivenciado uma concepção de Resolução de Problemas enquanto tecnologia e uma prática que se vale da tecnologia digital para trabalhar processos de desenvolvimento da aprendizagem pautados pela Teoria Histórico Cultural, visando à autorregulação, metacognição, abstração, visualização e percepção de conceitos matemáticos como pregam Onuchic e Leal Junior (2016).

Para esses pesquisadores supracitados, a tecnologia refere-se a estudos de processos técnicos de determinados ramos científicos relacionados à produção de conhecimento. Trata-se de um conceito que está relacionado ao conhecimento técnico e científico, além de suas aplicações através de desenvolvimentos e transformações com uso de ferramentas, processos e materiais construídos a partir de e com tal conhecimento (ABBAGNANO, 2007). Por isso caracteriza-se a Resolução de Problemas enquanto uma tecnologia, a qual está voltada ao ensino visando à aprendizagem de conceitos matemáticos. Isso, ao passo em que também pode valer-se do uso de recursos e materiais computacionais para possibilitar melhor apreensão de conceitos e potencializar a resolução de problemas. Mas, tal concepção dilui-se nas vertentes de modelação, design e experiências em torno do movimento educacional com o uso de tecnologias, muito embora a própria Resolução de Problemas seja caracterizada como uma tecnologia para Educação Matemática.

Na corrente desse pensamento, ele evoca um conceito de experiência como um momento da natureza que transforma os sujeitos e seu entorno. E com essa visão, concebe a educação como "[…] o processo de reconstrução e reorganização da experiência, pelo qual lhe percebemos mais agudamente o sentido, e com isso nos habilitamos a melhor dirigir o curso de nossas experiências futuras" (DEWEY, 1958, p. 17). Acrescenta, ainda, que a educação não seria um "processo de preparo para a vida, mas uma contínua reconstrução e reorganização da experiência pela qual lhe percebemos mais agudamente o sentido, e com isso nos habilitamos a melhor dirigir o curso de nossas experiências futuras" (p. 17). Em sua obra Experiência e Educação, Dewey (1971) nos traz o entendimento de que há uma estreita relação entre experiência e Resolução de Problemas, uma vez que tais problemas devem ser concretos e visarem à transformação e compreensão no contexto social em que os estudantes vivem, uma forma de experimentarem o contexto de onde vem o problema e, em nosso caso, a Matemática.

Tal experiência, sendo ela educativa ou educadora[9], deveria por meio das problematizações que emergem do mundo real, elevar e potencializar melhores interações sociais, tanto para o presente quanto para o futuro. Em Dewey (1985), "a crença de que toda autêntica educação se efetua mediante a experiência não significa que todas as experiências são verdadeiras ou igualmente educativas. A experiência e a educação não podem ser diretamente equiparadas uma a outra" (p. 22).

Sobre a experiência educativa, Dewey considera que a experiência, para ser educativa, "deve conduzir a um mundo expansivo de matérias de estudo, constituídas por fatos ou informações, e de ideias. Esta condição somente é satisfeita quando o educador considera o ensino e a aprendizagem como um processo contínuo de reconstrução da experiência" (DEWEY, 1958, p. 118).

Avançando sobre as considerações deweyanas, retomando a questão da criatividade, agora sob a luz do conceito de formas lógicas[10], ela se contrapõe ao raciocínio dedutivo e às tentativas e

---

[9] Aqui estamos trazendo estes dois conceitos problematizadores de nossa escrita porque, de fato, embora sejam próximos em sentido, também se distanciam em magnitude. Educativa refere-se àquilo que promove a educação, que possibilita a instrução, o ensino, a aprendizagem e a produção do conhecimento. Por sua vez, educadora diz daquilo que educa, que trabalha efetivamente os conhecimentos, a instrução e o ensino. Essas duas palavras mantém uma relação de meios e fins.

[10] Segundo Cocchieri e Moraes (2009), "o objetivo do pensamento é eliminar a insegurança do comportamento, no qual as formas lógicas tendem à consolidação e ampliação de uma atividade racional controlada e a justificação de uma hipótese que seja submetida ao teste do experimento, evitando toda e qualquer sorte de surpresa, permitindo o estabelecimento de uma postura comportamental própria referente à expectativa positiva" (COCCHIERI; MORAES, 2009, p. 10).

erros como resolução de problemas, porque seria resumida e superficial, visando apenas a uma incorporação de ideias e de conceitos a priori. Liljedahl et al. (2016) coloca que "ando através do trabalho de autores e pesquisadores-chave cujo trabalho nos oferece insights progressivamente mais criativos de resolução de problemas heurísticos para resolver problemas verdadeiros" (p. 12).

Essencialmente isso não significa que o processo foi perdido, mas que necessita de novos direcionamentos, posto que os esforços "infrutíferos" da fase de iniciação carecem de nova abordagem, de novo tratamento. Esse pesquisador aponta outra forma de conceber a prática de Resolução de Problemas, que é denominada Design. O design é definido como a abordagem algorítmica e dedutiva para resolver um problema, que não lhe exime a parte heurística, como posto por Leal Junior e Miskulin (2017) e no escopo de suas referências. Brodie (2004) trabalha nessa direção quando prega que os designs são movimentos para resolução de problemas em que as técnicas de resolução são seu foco principal. Esta vertente está muito associada ao uso de algoritmos e trabalhos em interfaces da Matemática com a tecnologia.

Essa abordagem é um processo que se inicia com objetivos bem estabelecidos antes de quaisquer atividades relacionadas. Evidentemente, tal processo carrega consigo a extrema dependência da experiência e dos conhecimentos a priori dos sujeitos envolvidos na resolução de problemas e, segundo Poincaré (1952), potencializará pensamentos, resultados, estratégias e opções que levarão até uma [re]solução do problema. Para esse pensador francês, a Matemática é uma ciência ou um produtor científico altamente complexo, que é perpassado por muitos campos, como a psicologia e a filosofia. Para ele, a Matemática é uma invenção da lógica e da intuição em determinados espaço e tempo. Ciência e filosofia não andam separadas, mas em sinergia e, muitas vezes, apresentam-se como um mesmo elemento, dados seus constantes tangenciamentos. A essência dessa relação está bastante pontuada pela análise dessas duas áreas e pelos métodos que emergem, em que a Resolução de Problemas se mostra como um modo de fazer ciência com raízes na Filosofia, na Matemática e na Psicologia, conforme podemos perceber em Poincaré (1995).

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Muitos pesquisadores e professores podem tecer outras considerações acerca dos discursos analisados ou pensar que faltam perspectivas a estas expressas aqui. Com efeito há outras perspectivas, e muitas delas estão na análise de Leal Junior (2018). Por hora, expomos um recorte em pesquisas acerca do tema premente da pesquisa. As perspectivas dessa prática fazem-se subjetivamente por aqueles que as praticam, que podem ser postas sob outro prisma, mas essa ideia reforça aquilo que entendemos como uma arqueogenealogia, devido à multiplicidade de significações e de sentidos desta tessitura. Intentamos, com o exposto, orientar o leitor sobre os objetos de nosso estudo, como eles se constituíram para nós e para os sujeitos pesquisadores que foram reificados no corpus de nossa pesquisa.

De fato, há outras perspectivas tão importantes quanto essas presentes em nosso texto, mas por motivos que destacamos anteriormente, não foram incluídas em nossa análise. Todavia, procuramos adentrar na parte que equivale a regularidades discursivas e algumas políticas e vontades de verdades que perpassam a Educação Matemática em termos de práticas de Resolução de Problemas, onde analisamos os pressupostos das mesmas que vêm sendo veiculados nas pesquisas sobre o tema.

Seja enquanto design de ensino, matemática criativa, modelagem ou modelação, prática sociointeracionista, pedagogia crítica, filosofia da Matemática, processos lógicos ou autorregulação e metacognição, a Resolução de Problemas ainda é percebida como o mote de um ensino pragmático concernente à matemática. Pode ela ser um elemento abstrato, teórico ou aplicado da Matemática tanto no ensino básico quanto no superior, tanto no Brasil quanto no exterior, mas, essencialmente, isso dependerá dos atores e dos cenários onde essa prática ganhará vida. Isso dependerá das políticas educacionais, das crenças dos docentes e do envolvimento dos alunos com esse componente curricular. Certo é que vários elementos entram nessa trama, o que acentua a diversidade de resultados e olhares sobre o que se tem falado acerca de Resolução de Problemas.

Mas, há possibilidades de algumas respostas à nossa interrogação inicial, que estão idiossincraticamente ligadas a concepções de comunidades que praticam Resolução de Problemas. Desde uma atividade de cunho recognitivo ao zapear[11] de possibilidades (método de tentativa e erro) para se resolver problemas, essas práticas estão próximas pelo objetivo e distantes pelo fazer. Esse jogo de fazer Matemática resolvendo problemas envolve fazer e saber, além de estar ligado à criatividade e produção do conhecimento matemático, onde a aprendizagem pode ser subjetivamente efetivada e tem primazia sobre o ensino que é imposto acerca de uma política educacional. Contudo, não estamos falando de uma concorrência entre ensino e aprendizagem, mas uma potencialização recíproca entre eles, porque uma trabalhará em confluência para o outro direcionando, de alguma forma, os acontecimentos. Assim, a Resolução de Problemas mostra-se perspectivamente com implicações diferenciadas a partir de seus motes e cenários e calendários escolares e atores e políticas e períodos de aulas e índices avaliativos e…

REFERÊNCIAS

ABBAGNANO, N. **Dicionário de filosofia. Dizionario di filosofia.** São Paulo: Martins Fontes, 2007. 1026 p.

AGUAYO, A. M. **Didáctica da escola nova**. São Paulo: Cia. Editora Nacional, 1970.

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem-avaliação: por que através de resolução de problemas? In: ONUCHIC *et al.* (org.). **Resolução de problemas**: teoria e prática. Jundiaí: Paco Editorial, 2014. p. 35-52.

ALLEVATO, N. S. G.; JAHN, A. P.; ONUCHIC, L. R. O computador no ensino e aprendizagem de matemática: reflexões sob a perspectiva da resolução de problemas. *In*: ONUCHIC, L. R.; LEAL JUNIOR, L. C.; PIRONEL, M. (org.). **Perspectivas para resolução de problemas**. 1. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2017.

BRUDER, R. Akzentuierte Aufgaben und heuristische Erfahrungen. *In*: HERGET, W.; FLADE, L. (org.). **Mathematik lehren und lernen nach TIMSS**: Anregungen für die Sekundarstufen. Berlin: Volk und Wissen, 2000. p. 69-78.

BRUDER, R. Ein aufgabenbasiertes anwendungsorientiertes Konzept für einen nachhaltigen Mathematikunterricht—am Beispiel des Themas “Mittelwerte”. *In*: KAISER, G.; HENN, H. W. (org.). **Mathematikunterricht im Spannungsfeld von Evolution und**

11 Refere-se ao ato de ficar tentando canais ou formas diferentes e aleatórias para se chegar a algum lugar ou a alguma resposta.

Evaluation. Berlin: Franzbecker, 2005. p. 241-250.

BRODIE, L. **Thinking forth**: a language and philosophy for problem solving. [New Jersey, USA]: Prentice Hall, 2004. 313 p.

BRUDER, R.; COLLET, C. **Problemlösen lernen im Mathematikunterricht.** Berlin: Cornelsen Verlag Scriptor, 2011.

CARRILLO YANES, J. Resolución y formulación de problemas. **REnCiMa**, v. 9, n. 1, p. 158-169, 2018.

COCCHIERI, T.; MORAES, J. A. Uma perspectiva pragmática da lógica da descoberta e da criatividade. **Cognitio-Estudos**: Revista Eletrônica de Filosofia, São Paulo, v. 6, n. 1, p. 8-14, jul. 2009.

COLLET, C.; BRUDER, R. Joint Meeting of PME 32 and PME-NA XXX. *In:* FIGUERAS, O. *et al.* (org.). THE JOINT MEETING OF PME 32 AND PME-NA XXX, 30., 2008, Morelia, México. **Proceedings […]**. [*S.n.t.*]. v. 2, p. 353-360. Disponível em: http://www.pmena.org/pmenaproceedings/PMENA%2030%202008%20Proceedings%20Vol%201.pdf.

CSÍKSZENTMIHÁLYI, M. **Creativity**: flow and the psychology of discovery and invention. New York: Harper Perennial, 1996.

D'AMORE, B. **Elementos de didática da Matemática**. São Paulo: Livraria da Física, 2007.

DEWEY, J. **A filosofia em reconstrução**. São Paulo: Cia. Editora Nacional, 1958.

DEWEY, J. **Como pensamos**: como se relaciona o pensamento reflexivo com o processo educativo. 4. ed. São Paulo: Ed. Nacional, 1959.

DEWEY, J. **Experiência e educação**. São Paulo: Ed. Nacional, 1971.

DEWEY, J. **A arte como experiência**. 2. ed. São Paulo: Abril Cultural, 1985. (Os pensadores).

DEWEY, J. Experience, knowledge, and value: a rejoinder. *In:* BOYDSTON, J. A. (org.). **John Dewey**: the later works, 1939-1941. Carbondale: SIU Press, 1991. v.14, p. 3-90.

DEWEY, J. Logic: the theory of inquiry. *In*: BOYDSTON, J. A. (org.). **John Dewey**: the later works, 1925-1953. Carbondale: SIU Press, 1991a. v.12, p. 1-5.

DIAS, A. R. **O ensino e a aprendizagem do conceito de função através da resolução de problemas**: um estudo para desenvolver noções básicas inerentes ao conceito em classes do ensino fundamental. 2015. 195 f. (Mestrado) – Departamento de Matemática, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2015.

FOUCAULT, M. **As palavras e as coisas**: uma arqueologia das ciências humanas. 8. ed. São Paulo: Martins Fontes, 1999.

FOUCAULT, M. **A ordem do discurso**. 24. ed. São Paulo: Loyola, 2014. 78 p.

FOUCAULT, M. **Arqueologia do saber**. 8. ed. Rio de Janeiro: Forense Universitária, 2015.

HADAMARD, J. **A psicologia da invenção matemática**. Rio de Janeiro: Contraponto, 2009. 168 p.

HENNINGSEN, M.; STEIN, M. K. Mathematical tasks and student cognition: classroom-based factors that support and inhibit high-level mathematical thinking and reasoning. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 28, n. 5, p. 524-549, 1997.

HESS, K. K. **Exploring cognitive demand in instruction and assessment**. 2006. Disponível em: https://www.nciea.org/publications/DOK_ApplyingWebb_KH08.pdf.

HOYLES, C.; LAGRANGE, J. B. **Mathematics education and technology – Rethinking the terrain.** New York: Springer; The 17th ICMI Study, 2010.

KILPATRICK, J. Reformulando: abordando a resolução de problemas matemáticos como investigação. *In:* ONUCHIC, L. R.; LEAL JUNIOR, L. C.; PIRONEL, M. (org.). **Perspectivas para resolução de problemas**. São Paulo: Livraria da Física, 2017. Cap. 6, p. 163-188.

LALANDA, M. C.; ABRANTES, M. M. O conceito de reflexão em J. Dewey. *In:* ALARCÃO, I. (org.). **Formação reflexiva de professores**: estratégias de supervisão. Porto: Porto Editora, 1996.

LEAL JUNIOR, L. C. **Tessitura sobre discursos acerca de resolução de problemas e seus pressupostos filosóficos em educação matemática**: cosi è, se vi pare. 2018. 352 f. Tese (Doutorado) – UNESP, Rio Claro, 2018.

LEAL JUNIOR, L. C.; MISKULIN, R. G. S. Perspectivas de resolução de problemas por meio de articulações entre teoria, prática e conceitos sobre comunidade de prática. *In:* ONUCHIC, L. R; LEAL JUNIOR, L. C.; PIRONEL, M. (org.). **Perspectivas para resolução de problemas**. 1. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2017. Cap. 11, p. 305-353.

LEAL JUNIOR, L. C.; ONUCHIC, L. R. Ensino e aprendizagem de matemática através da resolução de problemas como prática sociointeracionista. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, v. 29, n. 53, p. 955-978, dez. 2015. Disponível em: http://www.redalyc.org/html/2912/291243162010/.

LEAL JUNIOR, L. C.; PINHEIRO, J. M. L. Modos de compreender a Soma de Riemann e suas aplicações ao estar em um ambiente informatizado de aprendizagem. **Unión: Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, Espanha, v. 47, p. 23-43, set. 2016.

LESTER, F. K.; GAROFALO, J.; L., K. D. **The role of metacognition in mathematical problem solving:** a study of two grade seven classes: Mathematics Education Development Center School of Education, Indiana University, Bloomington. Final Report. Indiana: Indiana University, 1989.

LILJEDAHL, P. *et al.* (org.). Problem solving in mathematics education. *In:* INTERNATIONAL CONGRESS ON MATHEMATICS EDUCATION: TOPIC SURVEYS, 13., 2016, Hamburg. **Proceedings […]** Hamburg: Springer Open, 2016. p. 6-19.

LILJEDAHL, P.; ALLAN, D. Mathematical discovery. *In:* CARAYANNIS, E. (org.). **Encyclopedia of creativity, invention, innovation, and entrepreneurship**. New York: Springer, 2014.

MACHADO, E. S. **Modelagem matemática e resolução de problemas.** 2006. 140 f. (Mestrado) – Faculdade de Física, PUCRS, Porto Alegre, 2006.

MASON, J.; BURTON, L.; STACEY, K. **Thinking mathematically**. Harlow: Pearson Prentice Hall, 1982.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Pesquisa em resolução de problemas:

caminhos, avanços e novas perspectivas. **BOLEMA - Boletim de Educação Matemática**, v. 25, n. 41, p. 26, 2011.

ONUCHIC, L. R.; LEAL JUNIOR, L. C. A influência da leitura na resolução de problemas: questões de sentidos, significados, interesses e motivações. **REMATEC - Revista de Matemática, Ensino e Cultura**, v. 11, n. 21, p. 23, set. 2016.

PALANGANA, I. C. **Desenvolvimento e aprendizagem em Piaget e Vygotsky**: a relevância do social. São Paulo: Plexus, 1994. 160 p.

POINCARÉ, H. **Science and method**. New York: Dover Publications, 1952.

POINCARÉ, H. **O valor da ciência**. Rio de Janeiro: Contraponto, 1995. 180 p.

POLYA, G. **How to solve it**: a new aspect of mathematical method. Princeton: Princeton University Press, 1945.

POPKEWITZ, T. S. **Reforma educacional:** uma política sociológica: poder e conhecimento em educação. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

RESNICK, L.; GLASER, R. Problem solving and intelligence. *In:* RESNIK, L. B. (org.). **The nature of intelligence**. Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates, 1976. p. 230-295.

SCHOENFELD, A. H. Research methods in (mathematics) education. *In*: ENGLISH, L. D. (org.). **Handbook of international research in mathematics education**. 2. ed. New York: Routledge: Taylor & Francis Group, 2010. cap. 19, p. 467-520.

SCHOENFELD, A. H. What makes for powerful classrooms, and how can we support teachers in creating them? A story of research and practice, productively intertwined. **Educational Researchers**, v. 43, n. 8, p. 404-412, 2014.

SCHOENFELD, A. H.; (TRU), T. F. R. U. P. **An introduction to the Teaching for Robust Understanding (TRU) Framework**. Berkley: CA: Graduate School of Education, 2016.

SCHOENFELD, A. H.; KILPATRICK, J. A US perspective on the implementation of inquiry-based learning in mathematics. **ZDM Mathematics Education**, Springer online, v. 45, n. 6, p. 901-909, 2013.

SOUSA, B. N. P. A.; ALMEIDA, L. M. W. Mathematical thinking in mathematical modelling activities. **Acta Scientiae**, Canoas, v. 19, n. 5, p. 709-724, set./out. 2017.

SOUZA, M. C. R. F.; FONSECA, M. C. F. R. **Relações de gênero, educação matemática e discurso**: enunciados sobre mulheres, homens e matemática: tendências em Educação Matemática. Belo Horizonte: Autêntica, 2010. 159 p.

STANIC, G. M. A.; KILPATRICK, J. Historical perpectives on problem solving mathematics curricula. *In:* CHARLES, R.; SILVER, E. A. (org.). **The teaching and assessment of mathematical problem solving**. Reston: Lawrence Erlbaum, 1989.

STEIN, M. K.; SMITH, M. S. Mathematical tasks as a framework for reflection. **Mathematics Teaching in the Middle School**, v. 3, p. 268-275, 1998.

VEIGA-NETO, A. **Foucault & Educação**. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2011. 159 p.

WEBB, N. **Research monograph number 6**: criteria for alignment of expectations and assessments on mathematics and science education. Washington: CCSSO, 1997.

WEBB, N. **Depth-of-knowledge levels for four content areas.** 2002. Disponível em: http://facstaff.wcer.wisc.edu/normw/All%20content%20areas%20%20DOK%20levels%2032802.pdf.

WIKLER, D. Philosophy as Problem-Solving. **American Behavioral Scientist**, v. 18, n. 2, p. 250-260, nov./dez. 1974.ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática: por que através da resolução de problemas? In: ONUCHIC et al. (Org.). **Resolução de problemas**: teoria e prática. 1. ed. Jundiaí: Paco Editorial, 2014. p. 35-52.

UMA CARACTERIZAÇÃO DAS TAREFAS DESENVOLVIDAS NA DISCIPLINA ESTÁGIO SUPERVISIONADO NO ENSINO FUNDAMENTAL EM MATEMÁTICA DE UMA INSTITUIÇÃO PRIVADA

A CHARACTERIZATION OF THE TASKS DEVELOPED IN THE DISCIPLINE STAGE SUPERVISED IN THE FUNDAMENTAL TEACHING IN MATHEMATICS OF A PRIVATE BRAZILIAN INSTITUTION

CARVALHO, Diego Fogaça[1]
PEDROCHI JUNIOR, Osmar[2]
DIAS, Fátima Aparecida da Silva[3]

RESUMO

Neste estudo, temos por objetivo caracterizar por meio dos saberes docentes, de acordo com Tardif (2002), as tarefas desenvolvidas na disciplina de Estágio Supervisionado no Ensino Fundamental, componente curricular de um curso de Licenciatura em Matemática, ofertado na modalidade Educação a Distância de uma universidade privada brasileira. Para organização e análise dos dados, utilizou-se a Análise de Conteúdo de Bardin (2016), em um movimento de categorização *a priori*. Advindo desse movimento analítico, foi possível compreender que as tarefas possibilitam manifestações dos saberes docentes, bem como os processos de reflexão da e na ação e a reflexão da reflexão da ação, de modo a configurar um ambiente propício para a aprendizagem da docência.

Palavras-chave: Educação Matemática. Estágio Curricular Supervisionado. Formação do professor de matemática. Educação a Distância. Saberes Docentes.

ABSTRACT

In this study, we aim to characterize, according to Tardif (2002), the tasks developed in the subject of Student Teaching in Primary Education, a curricular component of a Mathematics Graduation course offered in the Distance Education modality a private Brazilian university. For the organization and analysis of the data, the Content Analysis of Bardin (2016) was used, in a movement of *a priori* categorization. In light of this analytical movement, it was possible to understand that all the tasks make possible the manifestations of the teaching knowledge, as well as the processes of reflection of the action and reflection of the reflection of the action, in order to configure an environment conducive to the learning of teaching.

Keywords: Mathematics Education. Student Teaching. Mathematics teacher Education. Distance Education. Teachers knowledge.

1 INTRODUÇÃO

No Brasil, no ano de 2002, por meio da publicação das resoluções CNE/CP1, de 18 de fevereiro de 2002 e CNE/CP2, de 19 de fevereiro de 2002, pelo Conselho Nacional de Educação, houve a instituição das Diretrizes Curriculares Nacionais para a formação de professores da Educação

[1] Doutor em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL). Docente da Universidade Norte do Paraná (UNOPAR), Londrina, Paraná. Endereço eletrônico: diegofocarva@gmail.com.
[2] Doutor em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL). Docente da Universidade Norte do Paraná (UNOPAR), Londrina, Paraná. Endereço eletrônico: ojpedrochi@yahoo.com.br
[3] Doutora em Educação Matemática pela Universidade Bandeirante Anhanguera de São Paulo (UNIAN). Docente da Universidade Norte do Paraná (UNOPAR), Londrina, Paraná. Endereço eletrônico: fatimadiasconsultoria@gmail.com

Básica, nível superior, para os cursos de Licenciatura Plena, as quais se constituíram "um conjunto de princípios, fundamentos e procedimentos a serem observados na organização institucional e curricular de cada estabelecimento de ensino" (BRASIL, 2002, p.1).

Em suma, esses documentos, além de trazerem um entendimento sobre o papel da educação, do professor e, consequentemente, da formação docente, apresentaram uma distribuição de como a carga horária deveria ser organizada, definindo o valor mínimo de 2800 (duas mil e oitocentas horas), distribuídas, de acordo com Brasil (2002), em: 400 (quatrocentas) horas de prática como componente curricular, ao longo do curso; 400 (quatrocentas) horas de estágio supervisionado a partir do início da segunda metade do curso; 1800 (mil e oitocentas) horas de aulas para os conteúdos de natureza científico-cultural; 200 (duzentas) horas para outras formas de atividades acadêmico-científico-culturais.

Após essas publicações, os cursos de licenciatura tiveram dois anos para se adequar às solicitações. Pode-se interpretar, com base nos documentos, que as ações realizadas pelo CNE, visaram garantir para a formação de professores um espaço para a articulação entre a teoria e prática, principalmente a evidenciação da carga horária para prática como componente curricular e estágio supervisionado.

No ano de 2015, o mesmo conselho publicou a Resolução nº 2, de 1º de julho de 2015, que ampliou a regulamentação, incluindo a formação continuada. Em suma, além da formação inicial, que inclui o curso de licenciatura, cursos de formação pedagógica para graduados e os cursos de segunda licenciatura, a formação continuada de professores também ganhou um contorno legal no Brasil. Interpreta-se que um dos objetivos dessa resolução deu-se pela necessidade da formação docente estar alinhada aos pressupostos que viriam a compor a Base Nacional Comum para o Ensino Fundamental e Médio.

Nessa resolução, também foi ampliada a carga horária do curso de licenciatura, composta por 3200 (três mil e duzentas horas), com a duração mínima de oito semestres letivos ou quatro anos. Dessa forma, foram destinadas 400 (quatrocentas) horas para prática como componente curricular, 400 (quatrocentas) horas para o estágio supervisionado na área específica de formação, 2200 (duas mil e duzentas horas) para a realização de atividades formativas distribuídas em dois grandes núcleos formativos, a saber: o primeiro de estudos de formação geral, áreas específicas e interdisciplinares, campo educacional, seus fundamentos e metodologias, e das diversas realidades educacionais; o segundo se refere ao núcleo de aprofundamento e diversificação de estudos das áreas de atuação profissional, incluindo os conteúdos específicos e pedagógicos, priorizados pelo projeto pedagógico das instituições. Por fim, 200 (duzentas horas) de atividades teórico-práticas de aprofundamento em áreas específicas de interesse do aluno, englobando seminários, iniciação científica, iniciação à docência, intercambio, entre outras.

Com essa breve contextualização, do ponto de vista legal, pode-se elucidar como a prática docente e sua articulação com a teoria foram ganhando proporções, sendo inseridas nas resoluções que normatizam os cursos de formação docente em âmbito nacional. Consequentemente, o Estágio Curricular Supervisionado se constituiu, junto à Prática como Componente Curricular, espaço para que a abordagem da prática e sua articulação com a teoria possam acontecer. Diante desse contexto, este artigo tem por objetivo caracterizar as atividades previstas na disciplina Estágio em Matemática no Ensino Fundamental, componente curricular de um curso de Licenciatura em Matemática a distância de uma instituição privada brasileira. Para essa caracterização, será utilizado a tipologia dos saberes docentes, elaborada pelo pesquisador canadense Maurice Tardif (2002). Em suma, almeja-se associar os tipos de saberes docentes propícios de serem mobilizados em cada uma das atividades, elaborando, assim, um perfil.

Na sequência, explana-se a tipologia de saberes docentes, utilizadas neste contexto investigativo, como categorias a priori para análise do manual da disciplina analisada.

2 ALGUNS APONTAMENTOS A RESPEITO DA FORMAÇÃO DE PROFESSORES

Nesta seção, realiza-se algumas ponderações a respeito da formação de professores e, na sequência, aprofunda-se a tipologia de saberes docentes, elaborada por Tardif (2002).

Para Ibernóm (2006), é de extrema importância que a formação de professores considere as mudanças sociais que estamos vivenciando e as incorpore no currículo, preparando professores para atuar em uma sociedade em transição. Dessa forma, é importante que sejam viabilizados espaços de participação, discussão e reflexão, de modo que os professores possam interagir entre si, aprendendo a conviver e atuar em contexto de transição e incerteza.

Zaichner (1993) afirma que a formação docente deve promover o desenvolvimento do pensamento reflexivo e analítico para que os professores exerçam um papel ativo nos processos de inovações curriculares. Contreras (2002), por sua vez, destaca que a reflexão do professor não deve se limitar à sala de aula, é necessário ir além, de modo a obter uma compreensão teórica a respeito dos elementos que condicionam a prática docente.

Essas afirmativas corroboram para que se possa pensar na opção realizada por utilizar a tipologia de Tardif (2002) como categorias a priori. Essa opção se deu pelos critérios que foram utilizados pelo autor se relacionarem diretamente com a prática do professor. De acordo com o autor, o modelo por ele proposto foi construído “a partir das categorias dos próprios docentes e dos saberes que utilizam efetivamente em sua prática profissional cotidiana” (TARDIF, 2002, p.18).

Ao iniciar a obra “Saberes Docentes e Formação Profissional”, Tardif (2002) apresenta os fios condutores de seu texto e assume o seguinte posicionamento: a “minha perspectiva procura, portanto, situar o saber do professor na interface entre o individual e o social, entre o autor e o sistema, a fim de captar a sua natureza social e individual como um todo” (TARDIF, 2002, p.16).

O primeiro fio condutor diz respeito à relação entre saber e trabalho. Para o autor, o saber está a serviço do trabalho, ou seja, o trabalho se constitui um condicionante para as relações que os professores estabelecem com os saberes, pois “nunca são relações estritamente cognitivas: são relações mediadas pelo trabalho que lhes fornece princípios para enfrentar e solucionar situações cotidianas” (TARDIF, 2002, p.17).

O segundo fio condutor diz respeito ao pluralismo imputado aos saberes docentes, ou seja, os saberes que os professores se valem na prática, em sala de aula, são compostos por um amalgama de princípios: “o saber dos professores é plural, compósito, heterogêneo, porque envolve, no próprio exercício do trabalho, conhecimentos e um saber-fazer bastante diverso, provenientes de fontes variadas e, provavelmente, de natureza diferente” (TARDIF, 2002, p.18).

O próximo fio condutor diz respeito ao fato de os saberes docentes serem temporais, ou seja, são adquiridos em um contexto de história de vida, de uma carreira profissional. Consequentemente, para o autor, ensinar pressupõe aprender a ensinar, ou seja, um processo de aprendizagem e domínio progressivo dos saberes que são necessários para a realização do trabalho.

Pela maneira como os saberes docentes são caracterizados até o momento, heterogêneos e temporais, deve-se pensar na maneira como os professores realizam essa articulação. Para o autor, esse fato se dá pelo trabalho, pela utilidade no ensino.

Nessa ótica, os saberes oriundos da experiência do trabalho cotidiano parecem constituir o alicerce da prática e da competência profissionais, pois essa experiência é, para o professor, condição para aquisição e produção de seus próprios saberes profissionais. Ensinar é mobilizar uma ampla variedade de saberes, reutilizando-os no trabalho para adaptá-los e transformá-los pelo e para o trabalho (TARDIF, 2002, p.21).

Dessa forma, nesse fio condutor, o autor assume a experiência do trabalho docente como fundamento para os saberes.

Outra característica atribuída ao trabalho dos professores é o fato de ser interativo, ou seja, o professor, trabalhador, interage diretamente com o “objeto” de trabalho, o aluno, por meio da interação humana, diferente dos modelos tradicionais de educação que se pautam no modelo fabril, advindo da revolução industrial, estruturado em modelos do trabalho material.

Por fim, ao descrever o último fio condutor, o autor destaca a emergência de se pensar nesse instante a formação docente, tomando como parâmetro os saberes docentes e as realidades específicas do cotidiano dos professores.

Com a apresentação desses pressupostos, compreende-se uma aderência com as diretrizes elaboradas pelo Conselho Nacional de Educação do Brasil, principalmente a valorização da prática docente e sua articulação com a teoria, justificando a opção teórica realizada.

A tipologia elaborada por Tardif (2002) considera os saberes docentes como um amalgama, oriundo de diversos contextos epistemológicos, situados temporalmente, que tomam a sua eficiência para o ensino como critério de valoração. Para o autor, define-se os saberes docentes “como um saber plural, formado pelo amálgama, mais ou menos coerente, de saberes oriundos da formação profissional e de saberes disciplinares, curriculares e experienciais” (TARDIF, 2002, p.36).

Os saberes da formação profissional referem-se ao conjunto de saberes que são abordados pelas instituições de formação de professor. O processo de ensino e aprendizagem e seus atores referem-se ao objetivo de pesquisa nas ciências humanas, especificamente as áreas de educação e ensino. Essas áreas do saber, de acordo com o autor, além de produzirem os saberes, promovem a sua incorporação na prática do professor.

Porém, para o autor, a prática do professor não é somente um objeto de saber das ciências da educação, é uma atividade que mobiliza diversos saberes, denominados saberes pedagógicos. Esses saberes “apresentam-se como doutrinas ou concepções provenientes de reflexões sobre a prática educativa no sentido amplo do termo, reflexões racionais e normativas que conduzem a sistemas mais ou menos coerentes de representação e orientação da atividade educativa” (TARDIF, 2002, p.37).

Os saberes disciplinares referem-se aos que são incorporados pelas instituições universitárias. Esses saberes correspondem a diversos campos do conhecimento, integrados sobre a forma de disciplina. Pode-se interpretar que, em relação à matemática, seriam as geometrias, a análise, o cálculo diferencial e integral, a estatística, entre outras áreas da matemática. Para o autor, esses saberes emergem da tradição cultural e dos grupos que produziram esses conhecimentos.

Os saberes curriculares, em suma, consistem nos programas escolares, ou seja, nos discursos, objetivos, métodos e conteúdo; a partir dos quais as instituições escolares categorizam e apresentam os saberes sociais selecionados para a formação de uma cultura erudita.

Por fim, Tardif (2002, p.39) define os sabres experienciais, elaborados pelos professores no exercício da prática de sua profissão. Para o autor, esses "saberes brotam da experiência e são por ela validados. Eles incorporam-se à experiência individual e coletiva sob a forma de habitus e de habilidades, de saber-fazer e de saber-ser".

Assumindo a tipologia como categorias a priori, deu-se início aos procedimentos de análise das tarefas que compuseram o manual da disciplina Estágio em Matemática no Ensino Fundamental. Na continuidade, são apresentadas considerações a respeito do método de análise do material analisado.

3 CONSIDERAÇÕES TEÓRICO-METODOLÓGICAS

Para a constituição desse artigo, tomou-se como objeto de análise o Manual de Estágio em Matemática no Ensino Fundamental, elaborado pelos professores do curso de Licenciatura em Matemática, na modalidade a distância, aplicado no ano de 2017. Tem-se por objetivo caracterizar as tarefas por meio da tipologia docente de Tardif (2002), com o intuito de identificar como as tarefas se configurariam e quais saberes docentes dessa tipologia poderiam ser mobilizados de acordo com as orientações elaboradas pelos docentes responsáveis pela disciplina.

O manual de estágio foi composto por onze seções que abordam desde orientações de como o aluno deve proceder no ambiente escolar até as fichas que devem ser preenchidas e anexadas no relatório final. Há, também, um cronograma com as datas de entrega e a exemplificação de todo o procedimento que o futuro professor deve realizar para estabelecer um convênio entre a universidade e a escola.

Este artigo valeu-se de inspirações nos procedimentos da Análise de Conteúdo, sendo assim compreendida:

> Definitivamente, o terreno, o funcionamento e o objetivo da análise de conteúdo podem resumir-se da seguinte maneira: atualmente, e de modo geral, designa sob o termo de análise de conteúdo: Um conjunto de técnicas de análise das comunicações visando obter por procedimentos sistemáticos e objetivos de descrição do conteúdo das mensagens indicadores (quantitativos ou não) que permitam a inferência de conhecimentos relativos às condições de produção/ recepção (variáveis inferidas) dessas mensagens. (BARDIN, 2016, p.48).

Esse método de pesquisa e análise de dados é composto por três fases: pré-análise, exploração do material, tratamento dos resultados e interpretações (BARDIN, 2016).

Na pré-análise, o pesquisador escolhe os documentos que serão submetidos aos procedimentos analíticos, podendo elaborar hipóteses e objetivos, referenciar índices, elaborar indicadores. Em suma, pode-se estruturar todo o procedimento analítico, construindo regras e recortes no material selecionado e constituindo o *corpus* da análise. Todavia, cabe destacar que o primeiro contato que se tem com os dados a serem analisados, dá-se por meio da leitura flutuante. De acordo com Bardin (2016, p.126, grifo da autora): "A leitura 'flutuante' – A primeira atividade consiste em estabelecer contato com os documentos a analisar e em conhecer o texto, deixando se invadir por impressões e orientações".

Na sequência, a Análise de Conteúdo tem por objetivo fragmentar o *corpus* de análise, possibilitando ao pesquisador compreensões específicas dos pormenores. Consequentemente, por se perder a compreensão do todo, o pesquisador deve elaborar uma sequência de códigos que possibilite seu regresso ao texto original. Para Bardin (2016, p.134, grifo da autora): "A *unidade de registro* – É a unidade de significação codificada e corresponde ao segmento de conteúdo considerado unidade de base, visando a categorização e a contagem frequencial".

Após esse procedimento, dá-se início à categorização, trata-se de "uma operação de classificação de elementos constitutivos de um conjunto por diferenciação e, em seguida, por reagrupamento segundo o gênero (analogia), com os critérios previamente definidos" (BARDIN, 2016, p.147). Cabe destacar que esses critérios podem ser de vários tipos, sendo necessário que o pesquisador os estabeleça de forma clara previamente à categorização, eles são: semânticos, sintáticos, léxicos e expressivos. Esse processo de classificação é caracterizado pela autora como estruturalista e é composto por duas etapas: a primeira diz respeito ao inventário, ou seja, é necessário isolar os elementos e, na sequência, em um segundo movimento, a classificação, que se refere à organização aos elementos, unindo-os por meio de uma semelhança, definida pelos critérios adotados.

De acordo a autora, a categorização pode ser realizada de duas maneiras:

> ▪ é fornecido o sistema de categorias e repartem-se da melhor maneira possível os elementos à medida que vão sendo encontrados. Este é o procedimento por "caixas" [...], aplicável no caso de a organização do material decorrer diretamente dos funcionamentos teóricos hipotéticos;
> ▪ o sistema de categorias não é fornecido, antes resulta da classificação analógica progressiva dos elementos. Este é o procedimento por "acervo". O título conceitual de cada categoria somente é definido no final da operação (BARDIN, 2016, p.149)

Na primeira maneira de categorização, tem-se um conjunto categorial previamente elaborado, as denominadas categorias *a priori*. Cabe ao pesquisador percorrer as unidades de registro e classificar as unidades de acordo com as definições e critérios de cada uma dessas categorias. Em relação a segunda maneira, denominado por categorias emergentes, o pesquisador almeja produzir um conjunto de categorias a partir dos dados em um movimento de sucessivas comparações entre as unidades e estruturação de critério ao longo do processo de análise. Dessa forma, as teorias agem implicitamente, fundamentando e justificando as ações realizadas pelo pesquisador.

Após sintetizar todo *corpus* de análise em uma estrutura categorial, o pesquisador chega na inferência que resulta na comunicação de interpretações não evidenciadas anteriormente e que estava susceptível aos dados analisados. Para Bardin (2016, p.165), a "análise de conteúdo fornece informações suplementares ao leitor crítico de uma mensagem, seja este linguista, psicólogo, sociólogo, crítico literário, historiador, exegeta religioso ou leitor profano que deseja distanciar-se da sua leitura 'aderente', para saber mais sobre esse texto".

Consequentemente, nesse processo é que se encontra a contribuição do pesquisador para o que se propõe a investigar, ou seja, a comunicação de compreensões que vão além de uma leitura convencional, evidenciando informações que não se encontram em uma leitura do explícito.

Dessa forma, os saberes docentes foram considerados categorias *a priori*, nas quais cada tarefa prevista foi alocada. Cabe destacar que a utilização do termo inspirações se deve ao fato de que, não necessariamente, uma tarefa está diretamente relacionada a um tipo de saber docente, podendo contemplar mais de um. Consequentemente, esse fato vai de encontro ao critério da exclusão mútua, conceituado por Bardin (2016), um indicador de uma boa categoria. Todavia, não se compreende, nesse contexto investigativo, de acordo com a forma que a Análise de Conteúdo foi utilizada, o não respeito à exclusão-mútua um desqualificador da análise. Em suma, o termo inspirações tem a intenção de amenizar o conflito descrito anteriormente.

A análise dos dados foi iniciada por meio da organização das informações em um quadro, em que foi disposto o objetivo de aprendizagem da tarefa e os saberes docentes que se interpretou serem mobilizados. Em suma, desse movimento analítico, culminou a elaboração de um perfil, descrito e analisado na continuidade deste trabalho.

4 OS SABERES DOCENTES MOBILIZADOS PELAS TAREFAS DA DISCIPLINA ESTÁGIO EM MATEMÁTICA NO ENSINO FUNDAMENTAL

O Manual utilizado na disciplina Estágio em Matemática no Ensino Fundamental foi composto por nove tarefas que têm por objetivo proporcionar uma imersão do futuro professor na realidade da sala de aula, de modo que seja possível reconhecer semelhanças e diferenças nas séries que compõem os anos finais do Ensino Fundamental (6º ao 9º ano). Busca-se, também, a associação entre teoria e prática, tendo o currículo como contexto. Em suma, almeja-se constituir uma configuração de aprendizagem da docência que visa uma articulação interdisciplinar do conteúdo matemático por meio da observação, reflexão e supervisão com a realidade observada.

A primeira atividade da disciplina visa a apresentação do futuro professor no ambiente escolar. Refere-se a um pedido formal para o diretor e professor regente, com o intuito de obter autorização para a realização do estágio. Interpreta-se que a atividade, além de ser um primeiro contato, pode proporcionar ao futuro professor uma primeira impressão da estrutura organizacional da escola, bem como as turmas em que desenvolverá suas atividades.

As duas próximas tarefas têm por objetivo proporcionar momentos de leitura, reflexão e síntese, levando o futuro professor a ler e resenhar um artigo que aborda o papel do estágio curricular supervisionado na formação do professor de matemática e uma análise dos Parâmetros Curriculares Nacionais. Interpreta-se que essas tarefas proporcionam situações em que os futuros professores podem mobilizar de forma direta saberes que estão relacionados com a formação profissional, especificadamente os saberes pedagógicos, caracterizando seu papel no desenvolvimento profissional do professor de matemática.

Por outro lado, a análise dos Parâmetros Curriculares Nacionais, oportuniza ao futuro professor conhecer os saberes curriculares que subsidiam o Ensino Fundamental, conhecendo os objetivos, temas transversais e a maneira como o conteúdo matemático é distribuído ao longo das séries. É possível, também, que o futuro professor tenha contato com os saberes pedagógicos, que são as sugestões metodológicas apresentadas pelo documento. Cabe esclarecer que essa atividade deverá ser atualizada, principalmente pela publicação da BNCC (Base Nacional Comum Curricular) que trouxe outros contornos para a Educação Básica brasileira.

É importante destacar nesse contexto a relação entre as teorias que são estudadas na licenciatura e a prática que se realiza nos estágios do curso de licenciatura. Carvalho (2012) ressalta que as teorias contribuem na signficação dos episódios da ação docente que são problematizados. Nesse sentido, as leituras que compõem essa tarefa são fundamentos que serão mobilizados pelos licenciandos em outras atividades que busquem a relação entre as teorias e a prática observada em sala de aula.

A quarta tarefa refere-se a um momento de entrevista com a direção da escola, podendo ser realizada com o diretor ou com a direção auxiliar. Objetiva-se que o futuro professor conheça a função da direção na escola, bem como as ações que podem ser tomadas por essa instância para contribuir no processo de ensino e aprendizagem, organização e função do conselho de classe e o projeto político pedagógico. Interpreta-se que essa entrevista pode mobilizar saberes curriculares, bem como saberes experienciais, situados no contexto da escola.

De acordo com Carvalho (2012, p. 3), é de extrema importância que o licenciando, nas realizações de seus estágios, conheça a realidade que circunda o trabalho do professor, pois a

> [...] organização das escolas orienta em relação às atitudes, às ideias e soa modos de agir tanto do professsor e alunos. Um professor não desenvolve seus cursos da mesma maneira em estabelecimentos de ensino diferentes, pois as formas de organização e gestão têm um papel educativo sobre os atores sociais que estão na escola.

Diante desses argumentos, a autora destaca que o acompanhamento, por parte dos licenciandos, da docência e da gestão educacional é uma maneira de superar a visão fragmentada e simplista da prática pedagica. Interpretamos que a entrevista com o diretor da escola vem ao encontro das propostas de Carvalho (2012), principalmente pelo fato da gestão democrática e o Projeto Político Pedagógico da escola serem elementos centrais.

Na tarefa sequente, o futuro professor realizará a observação de dezoito aulas, distribuídas em três turmas do Ensino Fundamental. Tem-se por intuito mobilizar vários saberes docentes, mas compreende-se que o foco está na atuação do professor, ou seja, a maneira como atua, fundamentado em seus saberes experienciais. No entanto, é possível que o futuro professor tenha contato com os saberes disciplinares e pedagógicos, dependendo da gestão de classe e da matéria realizadas pelo docente observado.

A observação da prática de um professor experiente, regente de uma classe, é uma prática de estágio considerada por Carvalho (2012). De acordo com a autora, a observação apresenta

> [...] aos futuros professores condições para detectar e superar uma visão simplista dos problemas de ensino e aprendizagem, proporcionando dados significativos do cotidiano escolar que possibilitem uma reflexão crítica do trabalho a ser desenvolvido como professor e dos processos de ensino e aprendizagem em relação ao conteúdo específico (p.11).

A análise do livro didático utilizado pelo professor, refere-se a próxima atividade apresentada pelo manual. Interpreta-se que a tarefa pode proporcionar a mobilização de saberes disciplinares, curriculares e pedagógicos articulados, de modo a estruturar um contexto em que esses saberes se articulam para compreensão da maneira como o autor do livro didático estrutura o processo de ensino e aprendizagem da disciplina.

Após a análise do livro didático, as tarefas sequentes têm por objetivo estruturar a realização da regência. Em um primeiro momento, o futuro professor deverá planejar seis aulas que serão ministradas em uma das salas que realizou a observação. Na sequência, deve apresentar esse planejamento para o professor regente, com o intuito de haver um refinamento e adequações à realidade da sala de aula. Por fim, deve ministrar essas aulas, supervisionado pelo professor da turma.

Interpreta-se que essa sequência de tarefas pode proporcionar a articulação de toda a tipologia de saberes docentes apresentados por Tardif (2002), assumindo a prática em sala de aula como contexto e a aprendizagem dos alunos o objetivo da ação do futuro professor. Cabe destacar que a presença do professor regente é de suma importância para a efetivação do ambiente de aprendizagem configurado, pois seus saberes experienciais são mobilizados, refinando as aulas apresentadas, desencadeando um processo reflexivo de aprendizagem da docência, situada na prática.

Carvalho (2012) destaca que a regência é a principal atividade da formação de professores, devendo ser planejado de modo que todos os alunos tenham oportunidade de ser regente de um volume necessário para que possam superar as dificuldades apresentadas na gestão de classe e da matéria, consideradas por Tardif (2002), os condicionantes do trabalho docente.

> O planejamento das atividades de estágio de regência precisa ter por meta a eficiência, para fazer com que a profissão de professor não se torne, em pleno século XXI, um conjunto de experiências aleatórias de « acerto » e « erro ». Um dos principais objetivos desse tipo de estágio é fazer com que nossos alunos aproveitem os estágios para testar, como professores, as inovações que discutiram teoricamente na universidade e/ou observaram com os bons professores da educação básica (CARVALHO, 2012, p.66)

Na continuidade, oportuniza-se a realização de um processo reflexivo, por parte do futuro professor, das atividades realizadas até o momento. É sugerida a leitura de um artigo sobre o estágio supervisionado na disciplina matemática que tem por objetivo motivar o estudante a refletir sobre todas as situações formativas vivenciadas anteriormente. Interpreta-se a mobilização de saberes pedagógicos, por se tratar de um texto da área da Educação Matemática, mas os demais saberes também podem ser mobilizados, principalmente pela oportunidade de pensar no que foi vivenciado, pontos valorados por positivos, bem como negativos.

Interpretamos que essa tarefa permite ao futuro professor de matemática um movimento de reflexão do que se viveu e da possibilidade de que esse vivido seja adpatado e ressignificado para o futuro. Nesse sentido, encontramos indícios que podem promover a reflexão da reflexão na ação, pois é possível, induzido ou não,

> [...] olhar retrospectivamente e reflectir *sobre* a reflexão-na-ação. Após a aula, o professor pode pensar no que aconteceu, no que observou, no significado que lhe deu e na eventual adopção de outros sentidos. Reflectir *sobre* a refçexão-na-ação é uma ação, uma observação e uma descrição, que exige o uso de palavras (SCHON, 1997, p.83).

As próximas tarefas visam abordar a inserção das tecnologias digitais no ensino de matemática. Foi pedido para que os futuros professores entrevistassem o professor regente com o objetivo de conhecer como as tecnologias digitais são utilizadas nas aulas de matemática e quais são esses aplicativos. Na sequência, foi requerida a elaboração de um projeto envolvendo tecnologias digitais em aulas de matemática. Interpreta-se uma complementariedade entre as duas tarefas, principalmente pela entrevista proporcionar que o professor regente possa compartilhar seus saberes experienciais. Ao elaborar o projeto, o estudante pode fundamentar os saberes docentes resultantes das experiências que vivenciou na disciplina, bem como os apresentados na entrevista.

Em relação a formar professores e as tecnologias digitais no contexto educacional, é de extrema importancia que se crie "[...] condições para que [o professor] construa conhecimento sobre as técnicas computacionais, entenda por que e como integrar o computador na sua prática pedagógica e seja capaz de superar barreiras de ordem administrativa e pedagógica” (VALENTE; ALMEIDA, 1997, p. 08).

Dessa forma, interpretamos que as afirmativas elaboradas pelos autores encontram na elaboração do projeto de ensino um campo frutífero, pois a relação que se estabelece envolvendo as teorias das tecnologias digitais no ensino da matemática e os saberes experienciais do professor regente podem contribuir para conscientização e exemplificação de como as tecnologias podem integrar o processo de ensino e aprendizagem.

Para finalizar, a última tarefa refere-se à escrita do Relatório Final de Estágio, momento de organizar os manuscritos das tarefas realizadas ao longo da disciplina. Novamente, compreende-se que o amalgama de tipos de saberes docentes encontram condições propícias para serem mobilizados.

Teixeira e Cyrino (2015) destacam que a elaboração do relatório final de estágio se configura em uma nova oportunidade de aprendizagem do estagiário, indo além de uma descrição de experiências vividas durante o estágio. Para os autores, os estagiários podem “expressar suas reflexões acerca do ambiente profissional com o qual interagiu, ao desenvolver uma escrita discursiva acerca da Matemática e dos processos de ensino e de aprendizagem, ao propor possibilidades alternativas à prática desenvolvida”.

Ao olhar transversalmente para os dados, é possível observar uma valorização dos saberes experienciais mobilizados pelo professor supervisor do estágio e um processo de refinamento desses saberes com a prática e o conjunto de saberes docentes em formação do futuro professor. Interpreta-se que o ambiente formativo configurado tende a possibilitar o desenvolvimento do pensamento reflexivo da prática em sala de aula por meio da experiência. De acordo com Tardif (2002, p.53): a

> experiência provoca, assim, um efeito de retomada crítica (retroalimentação) dos saberes adquiridos antes ou fora da prática profissional. Ela filtra e seleciona os outros saberes, permitindo assim aos professores reverem seus saberes, julgá-los e avalia-los e, portanto, objetivar um saber formado de todos os saberes retraduzidos e submetidos ao processo de validação constituído pela prática cotidiana.

Nesse sentido, interpreta-se que a disciplina Estágio em Matemática no Ensino Fundamental se configura uma oportunidade de aprendizagem da docência em matemática, bem como o início de um processo formativo com as características supracitadas, apresentadas por Tardif (2002).

Na sequência, apresenta-se algumas considerações finais e aspirações que se configuram em possibilidades de direcionamentos futuros de outras investigações.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Partindo do objetivo de caracterizar as tarefas desenvolvidas na disciplina de Estágio Supervisionado no Ensino Fundamental, pertencente ao currículo de um curso de Licenciatura em Matemática de uma universidade privada na modalidade a distância, considerou-se a tipologia de saberes docentes de Tardif (2002) como um conjunto categorial *a priori*. Proveniente do movimento analítico, foi possível interpretar que o conjunto de tarefas propicia a mobilização de toda a tipologia de saberes.

Destaca-se que, no decorrer da disciplina Estágio Supervisionado no Ensino Fundamental, há tarefas que enfocam os saberes pedagógicos e curriculares. Porém, essas tarefas são realizadas pelos alunos utilizando toda gama de saberes pedagógicos, curriculares e experienciais que os compõem, naquele momento, como docente da disciplina de Matemática que estão trabalhando.

Diferentemente do que ocorre em outras disciplinas, os licenciandos têm contato pela primeira vez com a escola na perspectiva de um docente. Suas atitudes e reflexões mudam de foco e de objetivo, deixando de ter como meta apenas sua própria aprendizagem e passando a ter, além da sua aprendizagem, a aprendizagem do outro. Consequentemente, a aprendizagem a respeito da docência está condicionada à aprendizagem dos alunos na sala em que ele realiza seu estágio. Uma experiência docente valorada como boa ou ruim depende do que foi observado quanto à aprendizagem do outro.

Na maioria das tarefas, foi perceptível que houve possibilidades de mobilização de saberes docentes, ou seja, a constituição de um amálgama que considera o processo de ensino e aprendizagem em matemática, em sala de aula, como referente para aprendizagem da docência.

Todo o processo de constituição do docente para que se reconheça como tal, passa também por uma avaliação por pares. Nesse sentido, cabe destacar a importância do professor que supervisiona as atividades dos alunos estagiários na esccola. É esse professor que valida ou não as atitudes dos estágiários, discutindo com eles a respeito de suas atitudes, de seu comportamento, das tarefas que propõe e indica caminhos e alternativas para os problemas que surgem no decorrer das aulas.

Em suma, interpretou-se que a maneira como a disciplina de Estágio foi estruturada, fomentou a participação do professor regente do estágio de modo a configurar um ambiente propício para que seus saberes experienciais fossem inseridos no escopo de possibilidades formativas para o futuro professor.

REFERÊNCIAS

BARDIN, L. **Análise de Conteúdo**. São Paulo: Edições 70, 2016.

BRASIL. Conselho Nacional de Educação / Conselho Pleno. **Resolução CNE/CP 1**: diretrizes curriculares nacionais para a formação de professores da Educação Básica, em nível superior, cursos de licenciatura, de graduação plena. Brasília, 2002a. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/rcp01_02.pdf. Acesso em 12 abr. 2019.

BRASIL. Conselho Nacional de Educação/Conselho Pleno. **Resolução CNE/CP 2**: Institui a duração e a carga horária dos cursos de licenciatura, de graduação plena, de formação de professores da Educação Básica em nível superior. Brasília, 2002b. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/CP022002.pdf.. Acesso em 12 abr. 2019.

BRASIL. Conselho Nacional de Educação. **Resolução CNE 2**: Define as Diretrizes Curriculares Nacionais para a formação inicial em nível superior (cursos de licenciatura, cursos de formação pedagógica para graduandos e cursos de segunda licenciatura) e para a formação continuada. Brasília, 2015. Disponível em: http://pronacampo.mec.gov.br/images/pdf/res_cne_cp_02_03072015.pdf . Acesso em 12 abr. 2019.

CARVALHO, A. M. P. De. **Os estágios nos cursos de licenciatura**. São Paulo : Cengage, 2012.

CONTRERAS A. **A autonomia de professores**. São Paulo: Cortez, 2002.

IMBERNÓN, F. **La profesión docente desde el punto de vista internacional** ¿qué dicen los informes?. Revista de Educación, Madrid, n.340, p.41-50, 2006.

SCHÖN, D. A. Formar professores como profissionais reflexivos. In : NÓVOA, A. (Org.). **Os professores e a sua formação**. Lisboa : Publicações Dom Quixote, 1997, p.

75-91.

TARDIF, M. **Saberes docentes e formação profissional**. Petrópolis: Vozes, 2002.

TEIXEIRA, B. R.; CYRINO, M. C. C. T. O estágio supervisionado como oportunidade de desenvolvimento profissional para futuros professores de matemática. In: LOPES, C. E.; TRALDI, A. ; FERREIRA, A. C. (Orgs.). **O estágio na formação inicial do professor que ensina matemática**. Campinas, SP : Mercado de Letras, 2015, p.81-112.

VALENTE, J. A.; ALMEIDA, F. J. de. **Visão analítica da informática na educação no Brasil**: a questão da formação do professor. Revista Brasileira de Informática na Educação, Florianópolis, v. 1, 1997.

OS TEOREMAS DE PAPPUS PARA OS SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO: A DEMONSTRAÇÃO DE JAMES GREGORY

PAPPUS'S THEOREMS FOR REVOLUTION SOLIDS: JAMES GREGORY'S PROOF

RAUTENBERG, Robson Raulino[1]

PROBST, Roy Wilhelm[2]

RESUMO

Este artigo apresenta, como resultado de uma pesquisa realizada durante a elaboração da dissertação de mestrado, a partir de teoremas encontrados na publicação Geometriae Pars Universalis (1668), pela primeira vez em Português, a prova dos teoremas de Pappus para os sólidos de revolução.Tal publicação, que foi traduzida para o Inglês por Andrew Leahy em 2009, foi escrita originalmente em Latim pelo matemático escocês James Gregory (1638-1675) e antecede o desenvolvimento do Cálculo.

Palavras-chave: História da Matemática. James Gregory. Sólidos de Revolução. Teoremas de Pappus.

ABSTRACT

This article presents, as a result of a research carried out during my master's, from theorems found in the publication Geometriae Pars Universalis (1668) and for the first time in Portuguese, the proof of Pappus's theorems for solids of revolution. This publication, which was translated to English by Andrew Leahy in 2009, was originally written in Latin by Scottish mathematician James Gregory (1638-1675) and predates the development of Calculus.

Keywords: History of Mathematics. James Gregory. Revolution solids. Pappus's Theorems.

1 INTRODUÇÃO

No livro VII da sua obra Coleção, publicada no ano de 320, Pappus de Alexandria escreveu o que em linguagem atual pode ser interpretado da seguinte forma: A razão entre os volumes de dois sólidos de revolução é dada pela razão obtida por meio da multiplicação entre a razão das áreas das figuras que rotacionam em torno dos seus eixos de rotação e a razão entre as distâncias dos seus respectivos centros de gravidade ao eixo de rotação. A demonstração original dessa afirmação conhecida como 1ª Relação de Pappus, se existe, não é conhecida. Alguns séculos depois o matemático suíço Paul Guldin (1577-1643) publica Centrobaryca, com mais de 700 páginas, no qual tratava principalmente do estudo do centro de gravidade de figuras geométricas. Nesse livro aparece novamente, porém em uma linguagem um pouco diferente, segundo (HEATH, 1921), a afirmação feita por Pappus há mais de 1200 anos: "Quantitas rotunda in viam rotationis ducta producit Potestatem Rotundam uno grado altiorem Potestate sive Quantitate Rotata"[3]. Apesar dos

[1] Mestre Profissional em Matemática pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Docente do Instituto Federal de Santa Catarina (IFSC), Gaspar, Santa Catarina, Brasil. E-mail: robson.rautenberg@ifsc.edu.br.

[2] Doutor em Matemática Aplicada pela Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP).Docente da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), Curitiba, Paraná, Brasil. E-mail: rwprobst@gmail.com.

[3]Encontrado em (GULDIN,1635), Livro II, cap. VIII, Prop. 3. Viena 1641. Uma tradução direta dessa frase, segundo (MANCOSU,1996), é a seguinte: A quantidade que é rodada ao longo do caminho de rotação produz uma quantidade de um grau maior do que a quantidade que foi rotacionada. Nesse caso, quantidade pode ser compreendida como o elemento que foi rotacionado e grau como a sua dimensão. Se, por exemplo, for rotacionada uma figura plana de dimensão dois, obteremos um sólido. Nessa mesma obra Guldin apresentou, como corolário, um método que permitia calcular o volume dos sólidos obtidos.

teoremas sobre sólidos de revolução serem, de maneira geral, conhecidos como teoremas de Pappus-Guldin para sólidos de revolução, existem ainda algumas controvérsias em relação à autenticidade dos teoremas encontrados na publicação Centrobaryca. Isto ocorre, de acordo com (BULMER-THOMAS, 1984), porque Guldin tivera a oportunidade de ler os trabalhos traduzidos de Pappus enquanto estudava em Roma, 20 anos antes de publicar a sua obra. Além disso, vale destacar ainda que na demonstração encontrada no Centrobaryca, conforme afirmado por (BUSSARD,1970) em seu Dicionário da Biografia Científica, Guldin apelou inclusive para a metafísica, deixando espaço para que outros matemáticos também trabalhassem nesses teoremas e os demonstrassem rigorosamente.

Segundo (RAUTENBERG, 2013), entre outros grandes nomes que abordaram esses teoremas e suas respectivas demonstrações, se destaca o trabalho do matemático escocês James Gregory[4] (1638-1675). De acordo com (EVES, 2008), James Gregory foi professor em St. Andrews e Edinburgh e em 1668 publicou Geometriae Pars Universalis, com mais de 70 teoremas. A partir de alguns desses teoremas é possível demonstrar os teoremas de Pappus. Escrita originalmente em latim, essa obra de James Gregory vem sendo estudada e traduzida para o inglês pelo professor Andrew Leahy, do Knox College (LEAHY, 2009), e parte de seu trabalho foi publicado no jornal de matemática MathDL (The MAA Mathematical Sciences Digital Library) da Associação Matemática da América (MAA).

2 A DEMONSTRAÇÃO DE JAMES GREGORY

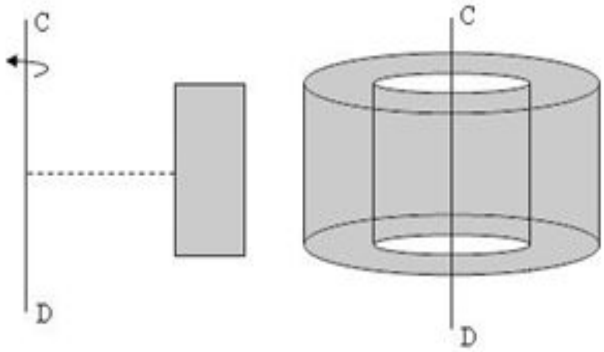
Alguns séculos se passaram até que James Gregory revelasse uma demonstração bastante engenhosa da afirmação encontrada no livro VII da obra Coleção. Para que possamos compreender essa demonstração é necessária a introdução de algumas definições e notações. Primeiramente considere que sólidos de revolução podem ser obtidos pela rotação de uma região de um plano em torno de uma reta desse plano, chamado eixo de revolução ou rotação, que toca a fronteira da região ou não intersecta a região em nenhum ponto. A figura 1a mostra um invólucro cilíndrico enquanto que na figura 1b é representada uma esfera, obtidos da rotação de um retângulo e de um semicírculo, respectivamente, em torno de um eixo de revolução dado por um segmento CD. Vale ressaltar ainda que em todo o texto seguinte, sempre que nos referirmos a uma rotação de uma região ou de uma curva em torno de um eixo de revolução, essa região ou curva estará inteiramente de um lado do eixo considerado.

Considere também que uma superfície de revolução é formada quando uma curva é girada ao redor de uma reta que não intersecta essa curva. A figura 2a mostra uma superfície obtida a partir da rotação de um arco de uma curva em torno do eixo de revolução CD. Note ainda que na figura 2.b é mostrada a superfície lateral de um tronco de cone obtida a partir da rotação de um segmento de reta que não toca e não é paralelo ao eixo de revolução dado pelo segmento CD.

Além disso, considere Ω uma figura ou região plana, com centro de gravidade A, que é rotacionada em torno de um eixo CD. Definimos como $\mathrm{Raio(A)}$ a distância de A ao eixo de rotação ou revolução. De modo semelhante, podemos considerar Φ outra figura plana com centro de gravidade E que é rotacionada em torno de um eixo GH, cujo raio é dado por $\mathrm{Raio(E)}$, conforme ilustra a figura 3 a seguir.

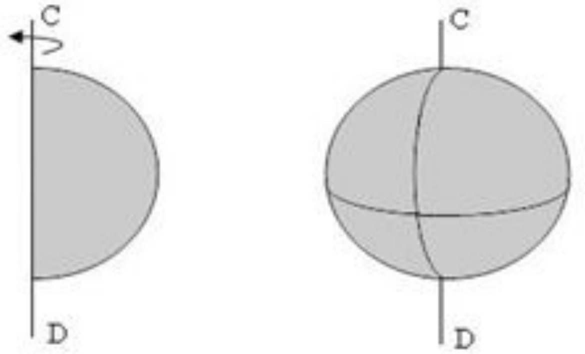
[4] Entre outros resultados, é creditada a ele a obtenção da série infinita $arctg(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots$ utilizada para o cálculo de π.

Figura 1a: Invólucro cilíndrico



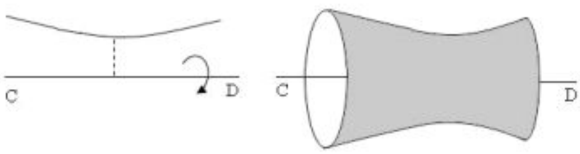
Fonte: Rautenberg (2013, p. 10)

Figura 1b: Esfera



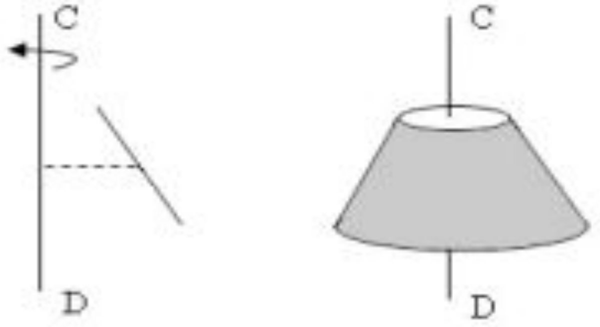
Fonte: Rautenberg (2013, p. 10)

Figura 2a: Superfície de revolução



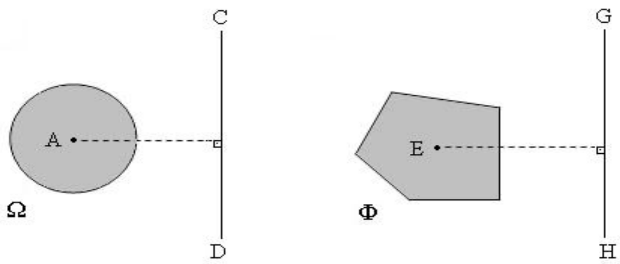
Fonte: Rautenberg (2013, p. 10)

Figura 2b: Superfície lateral do tronco de cone



Fonte: Rautenberg (2013, p. 10)

Figura 3: Figuras planas com seus respectivos centros de gravidade



Fonte: Rautenberg (2013, p. 13)

Sejam também $\text{Área}(\Omega)$ e $\text{Área}(\Phi)$ as áreas das figuras planas Ω e Φ, assim como $\text{Rev}(\Omega)$ e $\text{Rev}(\Phi)$ os volumes dos sólidos obtidos pela rotação ou revolução de Ω e Φ em torno dos eixos CD e GH, respectivamente. Desse modo, a primeira relação mencionada por Pappus pode ser escrita como:

$$\frac{\text{Rev}(\Omega)}{\text{Rev}(\Phi)} = \frac{\text{Área}(\Omega)}{\text{Área}(\Phi)} \frac{\text{Raio}(\text{A})}{\text{Raio}(\text{E})} \tag{1}$$

de onde obtemos, multiplicando por $\frac{2\pi}{2\pi}$ o membro direito da igualdade, a seguinte proporção:

$$\frac{\text{Rev}(\Omega)}{\text{Rev}(\Phi)} = \frac{\text{Área}(\Omega)}{\text{Área}(\Phi)} \frac{2\pi\text{Raio}(A)}{2\pi\text{Raio}(E)}$$

ou ainda

$$\frac{\text{Rev}(\Omega)}{\text{Rev}(\Phi)} = \frac{\text{Área}(\Omega)}{\text{Área}(\Phi)} \frac{\text{Circ}(A)}{\text{Circ}(E)} \quad (2)$$

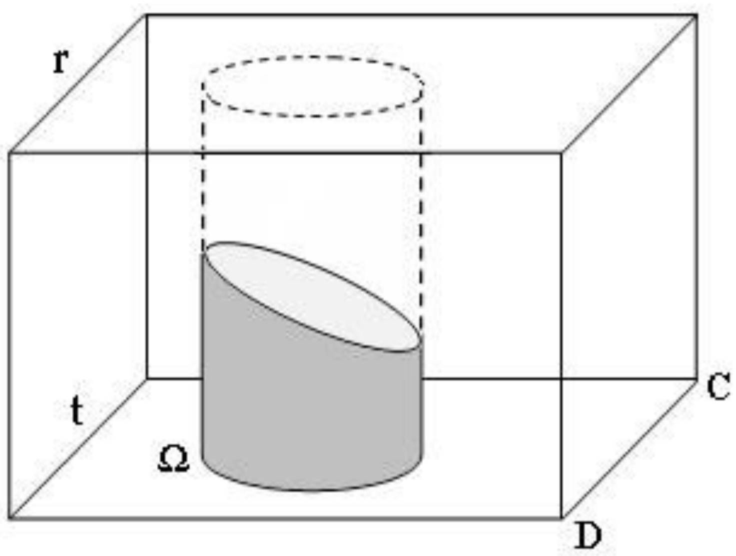
Aqui, $\text{Circ}(A)$ e $\text{Circ}(E)$ representam o perímetro da circunferência descrita pelo $\text{Raio}(A)$ e $\text{Raio}(E)$, respectivamente.

2.1 Tronco

Até agora apenas colocamos em linguagem atual a afirmação feita por Pappus. Para que possamos continuar é necessário introduzir o conceito de tronco, investigado por James Gregory. Dada uma figura plana, podemos obter a partir dela duas figuras tridimensionais; a primeira delas um cilindro reto ou oblíquo e a outra, um sólido de revolução. No nosso caso utilizaremos um cilindro circular reto e um toro, obtidos de um círculo Ω.

Definimos tronco de cilindro como uma porção do cilindro compreendida entre a base e uma seção não paralela a essa base. De acordo com Gregory podemos obter um tronco a partir de um cilindro reto, conforme a figura 4.

Figura 4: Tronco obtido a partir da figura plana

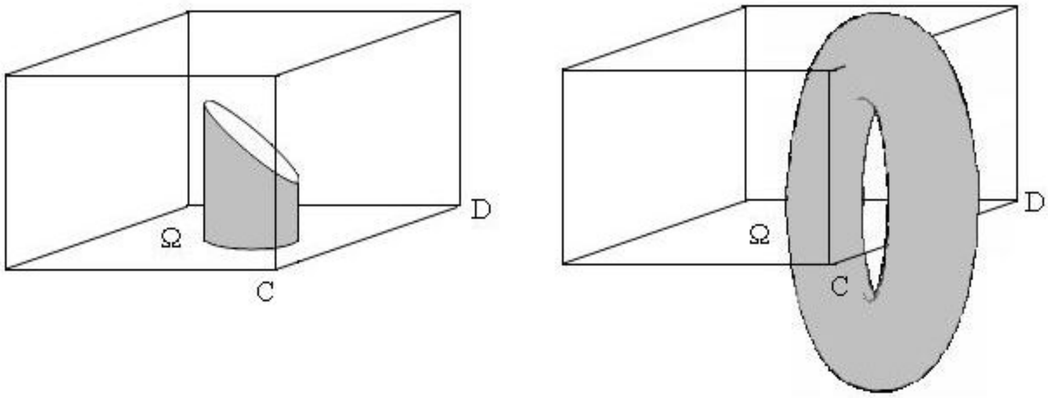


Fonte: Rautenberg (2013, p. 14)

A ilustração mostra que o tronco foi obtido do cilindro reto original, que foi cortado por um plano que passa pelo eixo de rotação e intersecta o plano da base superior do cilindro segundo a reta r. Além disso, a partir de r é baixado um plano perpendicular ao plano superior, determinando uma reta t no plano que contém a base do cilindro. Nessa etapa define-se também que a distância entre a reta t e o eixo de rotação, dado pelo segmento CD, será o raio de rotação da figura plana. Note que a partir do momento em que foi fixado um tronco, entre os vários possíveis, o raio de rotação também é fixado.

Grande parte do trabalho da prova do teorema está em estabelecer uma relação entre o volume do tronco e o volume do cilindro, assim como uma relação entre o volume do tronco e o volume do sólido de revolução. A figura 5 mostra um tronco de cilindro e um sólido de revolução, obtidos a partir de uma figura plana circular Ω.

Figura 5: Tronco e sólido de revolução

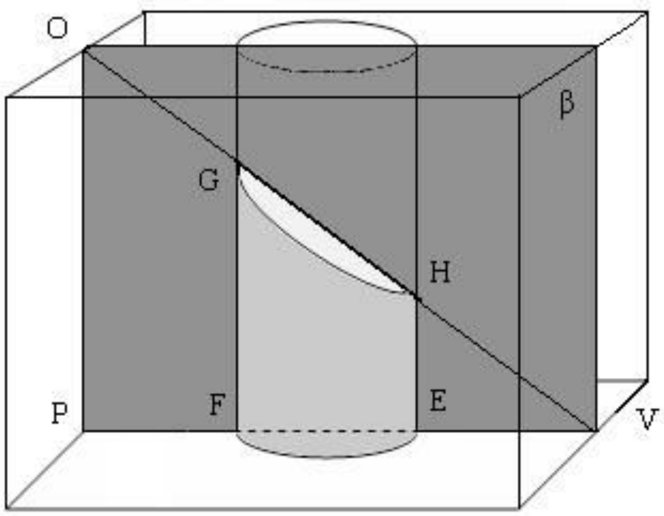


Fonte: Rautenberg (2013, p. 15)

2.2 Relação entre volumes: tronco e sólido de revolução

Para entender essa relação, Gregory utiliza o Princípio de Cavalieri: Se dois sólidos são tais que todo plano secante a eles e paralelo a um plano dado determina nos sólidos secções cuja razão entre suas áreas é constante, então a razão entre os volumes desses sólidos é a mesma constante. Desta forma, a partir do momento em que se consiga estabelecer uma razão fixa entre as áreas das secções do tronco e do sólido de revolução, teremos, pelo Princípio de Cavalieri, que a razão entre os volumes desses sólidos será igual a essa razão fixa.

Figura 6: Secção do tronco



Fonte: Rautenberg (2013, p. 16)

Para obter essa razão constante foi utilizado um processo relativamente simples, usando o tronco mostrado na figura 4, que é intersectado por um plano β qualquer, perpendicular ao eixo de rotação, conforme mostra a figura 6. Considerando os pontos de intersecção O, P e V, entre os planos e ainda F, G, H e E os pontos de intersecção do plano com o tronco, podemos utilizar semelhança entre os triângulos OPV e HEV para obtermos:

$$\frac{OP}{PV} = \frac{HE}{EV} \tag{3}$$

Assim como a semelhança entre os triângulos OPV e GFV resulta em:

$$\frac{OP}{PV} = \frac{GF}{FV} \tag{4}$$

Sendo que OP representa a altura do cilindro reto e PV o raio de rotação, multiplicando ambos os membros da equação (4) por $\frac{1}{2\pi}$, e depois o numerador e o denominador do membro direito por $\frac{1}{2}FV$, obteremos:

$$\frac{OP}{2\pi PV} = \frac{GF}{2\pi FV} \Rightarrow \frac{OP}{2\pi PV} = \frac{GF}{2\pi FV}\frac{\frac{1}{2}FV}{\frac{1}{2}FV} \Rightarrow \frac{OP}{2\pi PV} = \frac{\frac{1}{2}GF.FV}{\pi FV^2} = \frac{\text{Área}(GFV)}{\text{Área}(FV)} \tag{5}$$

sendo que, no último membro, o numerador representa a área do triângulo GFV e o denominador representa a área do círculo de raio FV. Do mesmo modo podemos obter da equação (3) que:

$$\frac{OP}{2\pi PV} = \frac{\text{Área}(HEV)}{\text{Área}(EV)} \tag{6}$$

Das propriedades das proporções temos que se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ e $\frac{a}{b} = \frac{e}{f}$, com $c > e$ e $d > f$, então:

$$\frac{a}{b} = \frac{c-e}{d-f} \tag{7}$$

Dessa forma, podemos usar (7) em (5) e (6) e obter

$$\frac{OP}{2\pi PV} = \frac{\text{Área}(GFV) - \text{Área}(HEV)}{\text{Área}(FV) - \text{Área}(EV)} = \frac{\text{Área}(GHEF)}{\text{Área}\big(\text{Anel}(FV-EV)\big)} \tag{8}$$

Note que, na equação (8), o numerador do lado direito representa a área de uma secção qualquer do tronco, enquanto que o denominador representa a área de um anel circular proveniente de uma secção do sólido de revolução obtido pela rotação do círculo em torno do eixo de rotação, conforme mostra a figura 7 a seguir.

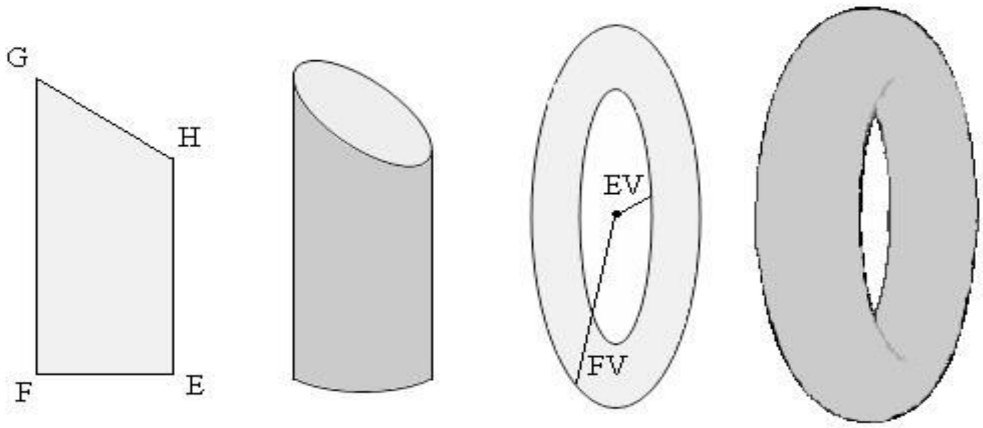
Como a razão $\frac{OP}{PV}$ é fixa, independentemente da posição do plano β, a razão dada por $\frac{OP}{2\pi PV}$ também será e, portanto, pelo Princípio de Cavalieri, temos que a razão entre os volumes dos sólidos será igual a essa razão. Portanto, teremos que

$$\frac{\text{Tronc}(\Omega)}{\text{Rev}(\Omega)} = \frac{OP}{2\pi PV} \tag{9}$$

Na igualdade (9), $\text{Tronc}(\Omega)$ representa o volume do tronco gerado a partir do círculo Ω e $\text{Rev}(\Omega)$ representa o volume do sólido gerado pela rotação desse mesmo círculo em torno do seu eixo de rotação. Além disso, temos que OP representa a altura do cilindro de base Ω, ou seja, $OP = \text{Alt}(\Omega)$ e PV é o raio de rotação de Ω, dessa forma $2\pi PV = \text{Circ}(\Omega)$. Logo, podemos escrever que

$$\frac{\text{Tronc}(\Omega)}{\text{Rev}(\Omega)} = \frac{\text{Alt}(\Omega)}{\text{Circ}(\Omega)} \tag{10}$$

Figura 7: Área das secções



Fonte: Rautenberg (2013, p. 17)

Essa igualdade (10) é a relação procurada entre o volume do tronco e o volume do sólido de revolução obtidos a partir de uma figura plana, no nosso caso um círculo Ω.

A partir dessa igualdade podemos obter uma relação entre os volumes de dois sólidos de revolução. Suponha que Ω e Φ são duas figuras planas, como mostra a figura 3, com seus respectivos eixos e raios de rotação, das quais são obtidos dois cilindros retos de mesma altura. Utilizando a relação encontrada em (10) podemos escrever que

$$\frac{\mathrm{Tronc}(\Omega)}{\mathrm{Rev}(\Omega)} = \frac{\mathrm{Alt}(\Omega)}{\mathrm{Circ}(\Omega)}, \ \frac{\mathrm{Tronc}(\Phi)}{\mathrm{Rev}(\Phi)} = \frac{\mathrm{Alt}(\Phi)}{\mathrm{Circ}(\Phi)} \tag{11}$$

Como, por hipótese, temos que $\mathrm{Alt}(\Omega) = \mathrm{Alt}(\Phi)$, combinando as duas proporções encontradas em (11), obtemos

$$\frac{\mathrm{Rev}(\Omega)}{\mathrm{Rev}(\Phi)} = \frac{\mathrm{Tronc}(\Omega)}{\mathrm{Tronc}(\Phi)} \frac{\mathrm{Circ}(\Omega)}{\mathrm{Circ}(\Phi)} \tag{12}$$

De onde percebemos que a razão entre os volumes dos sólidos de revolução pode ser escrita apenas em função dos volumes de troncos e de raios de rotação.

2.3 Relação entre volumes: tronco e cilindro

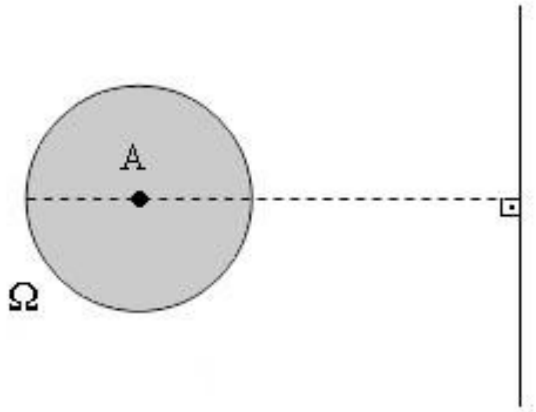
James Gregory inicia o estudo dessa relação investigando a respeito da localização do centro de gravidade de um tronco. Da Física, centro de gravidade é definido como um ponto onde toda a força da gravidade que atua sobre um corpo pode ser concentrada, ou seja, o corpo se comporta como se simplesmente toda a sua massa estivesse concentrada nele.

Nesse estudo Gregory considera os seguintes axiomas: 1) o centro de gravidade de um segmento é seu ponto médio; 2) se uma figura possui um eixo de simetria, então o seu centro de gravidade pertence a esse eixo. Como consequência, se uma figura plana homogênea[5] possui um centro geométrico (intersecção de dois eixos de simetria), então esse ponto é seu centro de gravidade. De modo equivalente, define-se que o centro geométrico de um sólido homogêneo coincide com o seu centro de gravidade.

[5] Neste artigo, o conceito de homogeneidade está relacionado à razão entre a massa e o volume de um corpo. Se esta razão for constante em cada uma de suas partes, então ele será homogêneo.

Na sequência são tomados cilindros retos construídos a partir de figuras planas, no nosso caso um círculo, que é simétrico em torno de um eixo perpendicular ao eixo de rotação da figura, mostrado na figura 8.

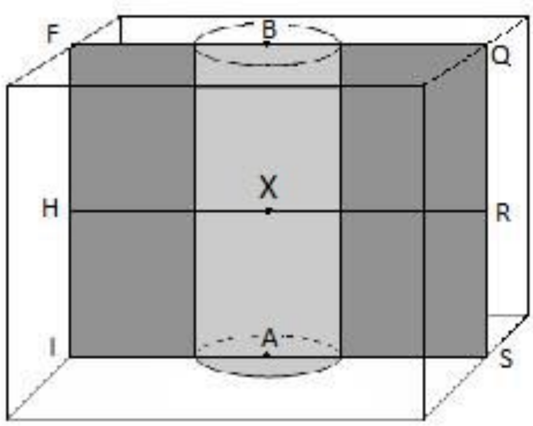
Figura 8: Figura plana simétrica



Fonte: Rautenberg (2013, p. 18)

Essa restrição de simetria é muito útil tendo em vista que, de acordo com os axiomas apresentados, se uma figura é simétrica, então o seu centro de gravidade estará sobre esse eixo de simetria. Além disso, se A é o centro de gravidade da figura plana Ω e se B é o centro de gravidade da base superior do cilindro reto obtido a partir de Ω, então o centro de gravidade de todo o cilindro encontra-se no ponto médio X do segmento AB.

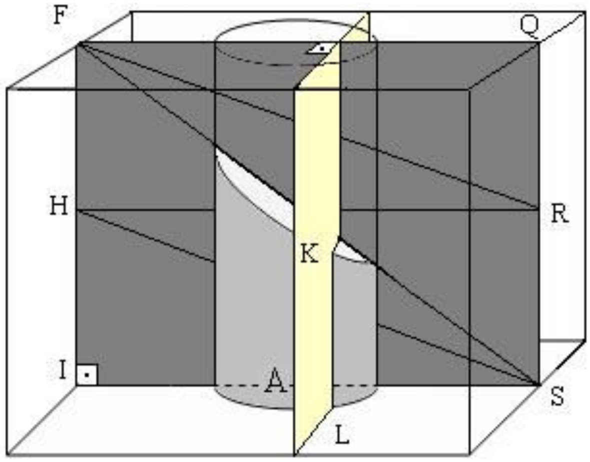
Figura 9: Cilindro e seu eixo de simetria



Fonte: Rautenberg (2013, p. 19)

Considere agora o caso em que o plano FQSI passa pelo eixo de simetria e é perpendicular ao eixo de rotação, conforme mostra a figura 9, onde $\mathrm{FI} = \mathrm{QS}$ representam a altura do cilindro, cuja base é dada pela figura plana Ω. Além disso, H e R são os pontos médios de FI e QS, respectivamente. Dessa forma, o centro de gravidade X deve estar na intersecção dos segmentos AB e RH. Utilizaremos essas informações para determinar o centro de gravidade do tronco. Considere, para tanto, o tronco visto na figura 4 e também o plano FQSI da figura 9, mostrados agora na figura 10.

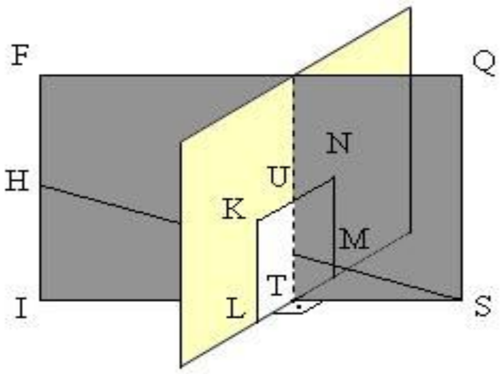
Figura 10: Plano FQSI



Fonte: Rautenberg (2013, p. 19)

Como o plano FQSI passa perpendicularmente pelo eixo de simetria da figura plana e consequentemente pelo eixo do cilindro reto obtido de Ω, temos que FQSI também será o plano de simetria dos troncos superior e inferior. Consequentemente, os seus centros de gravidade também deverão pertencer ao plano FQSI. Considere agora um plano perpendicular ao plano FQSI que intersecta o tronco inferior formando o retângulo KLMN, mostrado na figura 11, onde M e N são os vértices opostos a L e K, respectivamente.

Figura 11: Secção retangular KLMN

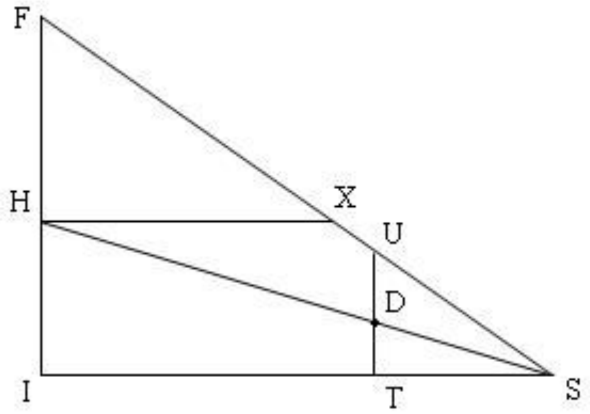


Fonte: Rautenberg (2013, p. 20)

Seja ainda UT o segmento pertencente à intersecção do plano FQSI com o plano que contém o retângulo KLMN. Como esses planos são perpendiculares e, além disso, o plano FQSI passa pelo eixo de simetria da figura plana Ω, temos que o segmento UT é o eixo de simetria do retângulo KLMN. Desse modo, o centro de gravidade desse retângulo pertence ao segmento UT. De acordo com os axiomas vistos no início dessa seção temos que se uma figura é simétrica, então o seu centro de gravidade pertence ao seu eixo de simetria, porém qualquer retângulo possui dois eixos de simetria, o que implica que o seu centro de gravidade estará localizado na intersecção desses eixos, no caso do retângulo KLMN será no ponto médio de UT.

Mostraremos agora que o centro de gravidade de KLMN pertence ao segmento HS. Primeiramente note que HS e UT pertencem ao mesmo plano FQSI e que $\mathrm{HS} \cap \mathrm{UT} = \mathrm{D}$, conforme mostra a figura 12.

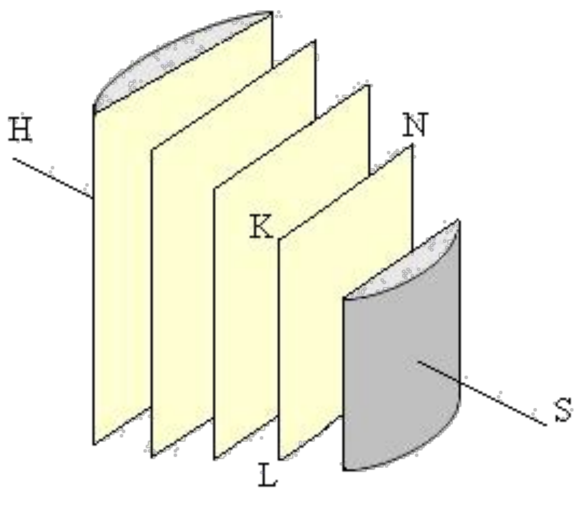
Figura 12: Triângulo FIS



Fonte: Rautenberg (2013, p. 20)

Da semelhança entre os triângulos FIS e UTS e entre os triângulos HIS e DTS, e sabendo que $\mathrm{HI} = \frac{1}{2}\,\mathrm{FI}$, obtemos que $\mathrm{DT} = \frac{1}{2}\,\mathrm{UT}$. Portanto, $\mathrm{D} \in \mathrm{HS}$ é a intersecção entre os eixos de simetria do retângulo KLMN, ou seja, é o seu centro de gravidade. Note que todo plano paralelo ao plano que contém o retângulo KLMN produzirá no tronco secções retangulares, cujo centro de gravidade estará no segmento HS. Portanto, o centro de gravidade Y do tronco inferior do cilindro reto, obtido a partir de Ω, pertencerá ao segmento HS. A figura 13 mostra algumas das secções retangulares obtidas. De modo equivalente mostra-se que o centro de gravidade Z, do tronco superior, pertence ao segmento FR.

Figura 13: Secções retangulares

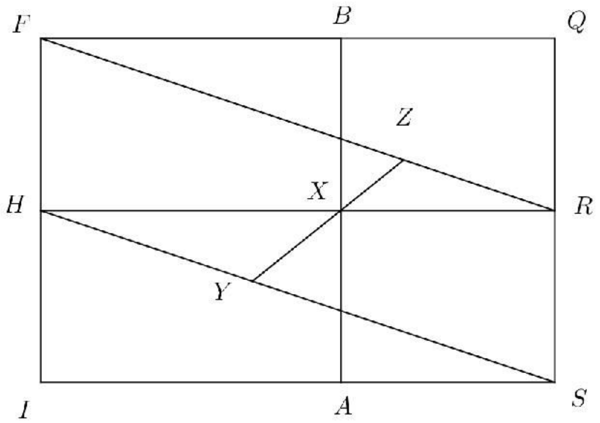


Fonte: Rautenberg (2013, p. 21)

Pelo Princípio de Arquimedes, conhecido como Lei da Alavanca, temos que: Se duas massas m_1 e m_2 são ligadas por uma haste de peso desprezível em lados opostos de um ponto de apoio a uma distância $\mathrm{d1}$ e $\mathrm{d2}$ a partir desse ponto, então a haste ficará equilibrada se $\mathrm{m1d1} = \mathrm{m2d2}$. Portanto, considerando um cilindro de densidade constante ρ, o seu volume pode ser representado por sua massa, a menos de uma constante ρ. Desse modo, se considerarmos que toda a massa do tronco superior está concentrada em Z e que toda a massa do tronco inferior está concentrada em Y, o centro de gravidade dessas duas massas deve estar em algum ponto do segmento YZ. Porém, a massa dos dois troncos somadas resulta na massa do cilindro, que por sua vez tem centro de gravidade em X.

Dessa forma X, Y e Z pertencem ao mesmo plano FQSI e estão alinhados, conforme mostra a figura 14.

Figura 14: Centros de gravidade



Fonte: Rautenberg (2013, p. 21)

Do Princípio de Arquimedes podemos escrever que

$$\mathrm{Vol}\big(\mathrm{Sup}(\Omega)\big).\mathrm{XZ} = \mathrm{Vol}\big(\mathrm{Inf}(\Omega)\big).\mathrm{XY} \Rightarrow \frac{\mathrm{Vol}(\mathrm{Sup}(\Omega))}{\mathrm{Vol}((\mathrm{Inf}(\Omega))} = \frac{\mathrm{XY}}{\mathrm{XZ}} \tag{13}$$

Em (13), temos que $\mathrm{Vol}(\mathrm{Sup}(\Omega))$ representa o volume do tronco superior do cilindro obtido a partir de Ω enquanto que $\mathrm{Vol}(\mathrm{Inf}(\Omega))$ representa o volume do tronco inferior. Além disso, da figura 14 temos que FQ, HR e IS são paralelos e os triângulos HYX e RZX são semelhantes, de onde obtemos

$$\frac{\mathrm{IA}}{\mathrm{AS}} = \frac{\mathrm{HX}}{\mathrm{XR}} = \frac{\mathrm{XY}}{\mathrm{XZ}} = \frac{\mathrm{Vol}(\mathrm{Sup}(\Omega))}{\mathrm{Vol}(\mathrm{Inf}(\Omega))} \tag{14}$$

Agora, usando o fato de que $\mathrm{IS} = \mathrm{IA} + \mathrm{AS}$, de (14), podemos escrever que

$$\frac{\mathrm{IS}}{\mathrm{AS}} = \frac{\mathrm{IA}+\mathrm{AS}}{\mathrm{AS}} = \frac{\mathrm{IA}}{\mathrm{AS}} + 1 = \frac{\mathrm{Vol}\big(\mathrm{Sup}(\Omega)\big)}{\mathrm{Vol}\big(\mathrm{Inf}(\Omega)\big)} + 1 = \frac{\mathrm{Vol}\big(\mathrm{Sup}(\Omega)\big)+\mathrm{Vol}\big(\mathrm{Inf}(\Omega)\big)}{\mathrm{Vol}\big(\mathrm{Inf}(\Omega)\big)} = \frac{\mathrm{Vol}\big(\mathrm{Cil}(\Omega)\big)}{\mathrm{Tronc}(\Omega)}$$

Dessa forma obtemos

$$\frac{\mathrm{IS}}{\mathrm{AS}} = \frac{\mathrm{Vol}\big(\mathrm{Cil}(\Omega)\big)}{\mathrm{Tronc}(\Omega)} \tag{15}$$

Podemos ainda multiplicar o numerador e o denominador por 2π do lado esquerdo da igualdade (15) e obter

$$\frac{2\pi\mathrm{IS}}{2\pi\mathrm{AS}} = \frac{\mathrm{Vol}\big(\mathrm{Cil}(\Omega)\big)}{\mathrm{Tronc}(\Omega)} \Rightarrow \frac{\mathrm{Circ}(\mathrm{A})}{\mathrm{Circ}(\Omega)} = \frac{\mathrm{Tronc}(\Omega)}{\mathrm{Vol}\big(\mathrm{Cil}(\Omega)\big)} \tag{16}$$

Onde $\mathrm{Vol}(\mathrm{Cil}(\Omega))$ representa o volume de todo o cilindro reto obtido a partir do círculo Ω e ainda $2\pi\mathrm{IS} = \mathrm{Circ}(\Omega)$, já que IS é igual ao raio de rotação de Ω.

Do mesmo modo, a partir de uma figura plana simétrica Φ de centro de gravidade E, podemos obter

$$\frac{\mathrm{Tronc}(\Phi)}{\mathrm{Vol}(\mathrm{Cil}(\Phi))} = \frac{\mathrm{Circ}(\mathrm{E})}{\mathrm{Circ}(\Phi)} \tag{17}$$

2.4 A 1ª Relação de Pappus

Do que já vimos na igualdade (12), temos que se Ω e Φ são figuras planas com centros de gravidade A e E, respectivamente, das quais são obtidos cilindros retos de mesma altura, então

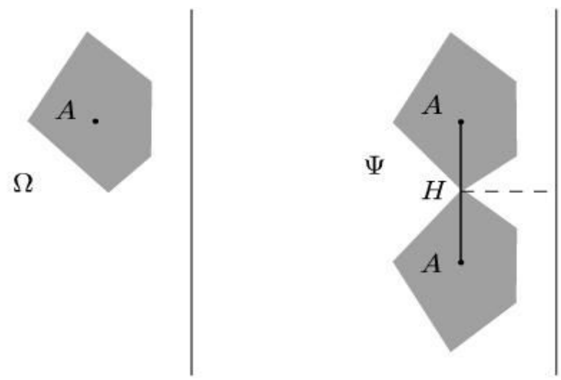
$$\frac{\mathrm{Rev}(\Omega)}{\mathrm{Rev}(\Phi)} = \frac{\mathrm{Tronc}(\Omega)}{\mathrm{Tronc}(\Phi)} \frac{\mathrm{Circ}(\Omega)}{\mathrm{Circ}(\Phi)} \tag{18}$$

Agora, multiplicando a igualdade (18) por $\frac{\mathrm{Vol}(\mathrm{Cil}(\Omega))}{\mathrm{Vol}(\mathrm{Cil}(\Omega))} \frac{\mathrm{Vol}(\mathrm{Cil}(\Phi))}{\mathrm{Vol}(\mathrm{Cil}(\Phi))} = 1$ e usando (16), assim como (17), obteremos

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{Rev}(\Omega)}{\mathrm{Rev}(\Phi)} &= \frac{\mathrm{Tronc}(\Omega)}{\mathrm{Tronc}(\Phi)} \frac{\mathrm{Circ}(\Omega)}{\mathrm{Circ}(\Phi)} \\
&= \frac{\mathrm{Tronc}(\Omega)}{\mathrm{Vol}(\mathrm{Cil}(\Omega))} \frac{\mathrm{Vol}(\mathrm{Cil}(\Omega))}{\mathrm{Vol}(\mathrm{Cil}(\Phi))} \frac{\mathrm{Vol}(\mathrm{Cil}(\Phi))}{\mathrm{Tronc}(\Phi)} \frac{\mathrm{Circ}(\Omega)}{\mathrm{Circ}(\Phi)} \\
&= \frac{\mathrm{Circ}(\mathrm{A})}{\mathrm{Circ}(\Omega)} \frac{\mathrm{Vol}(\mathrm{Cil}(\Omega))}{\mathrm{Vol}(\mathrm{Cil}(\Phi))} \frac{\mathrm{Circ}(\Phi)}{\mathrm{Circ}(\mathrm{E})} \frac{\mathrm{Circ}(\Omega)}{\mathrm{Circ}(\Phi)} \\
&= \frac{\mathrm{Circ}(\mathrm{A})}{\mathrm{Circ}(\mathrm{E})} \frac{\mathrm{Vol}(\mathrm{Cil}(\Omega))}{\mathrm{Vol}(\mathrm{Cil}(\Phi))} \\
&= \frac{\mathrm{Circ}(\mathrm{A})}{\mathrm{Circ}(\mathrm{E})} \frac{\mathrm{Área}(\Omega)}{\mathrm{Área}(\Phi)}
\end{aligned} \tag{19}$$

Porém, esse resultado só foi obtido sob a hipótese de que Ω e Φ são simétricas em torno de um eixo perpendicular ao eixo de rotação. Mas essa restrição pode ser removida; se Ω não é simétrica podemos refleti-la em torno de um eixo de simetria perpendicular ao eixo de rotação, conforme a figura 15.

Figura 15: Duplicação de Ω



Fonte: Rautenberg (2013, p. 23)

Note que da duplicação de Ω obtemos a figura Ψ e que, de acordo com o Princípio de Arquimedes, o centro de gravidade H, dessa nova figura, será o ponto médio do segmento que une os centros de gravidade de Ω e de sua cópia. Como o eixo de simetria é perpendicular ao eixo de rotação, temos que os centros de gravidades de Ω e de sua cópia estão à mesma distância do eixo de rotação, ou seja, o segmento que une os centros de gravidade é paralelo ao eixo de rotação e, portanto, obteremos a seguinte igualdade: $\mathrm{Circ(A)} = \mathrm{Circ(H)}$. Além disso, $\text{Área}(\Psi) = 2\text{Área}(\Omega)$, da mesma maneira obtemos $\mathrm{Rev}(\Psi) = 2\mathrm{Rev}(\Omega)$. De modo equivalente, podemos construir outra figura simétrica Γ, de centro de gravidade J, a partir da duplicação de Φ. Portanto, usando a relação (19) em Ψ e Γ, obtemos

$$\frac{2\mathrm{Rev}(\Omega)}{2\,\mathrm{Rev}(\Phi)} = \frac{\mathrm{Rev}(\Psi)}{\mathrm{Rev}(\Gamma)} = \frac{\text{Área}(\Psi)}{\text{Área}(\Gamma)}\frac{\mathrm{Circ(H)}}{\mathrm{Circ(J)}} = \frac{2\text{Área}(\Omega)}{2\text{Área}(\Phi)}\frac{\mathrm{Circ(A)}}{\mathrm{Circ(E)}}$$

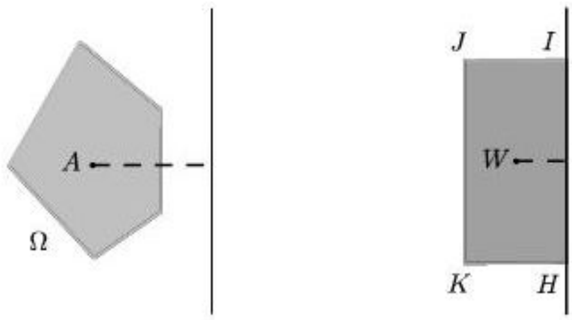
Logo

$$\frac{\mathrm{Rev}(\Omega)}{\mathrm{Rev}(\Phi)} = \frac{\text{Área}(\Omega)}{\text{Área}(\Phi)}\frac{\mathrm{Circ(A)}}{\mathrm{Circ(E)}} = \frac{\text{Área}(\Omega)}{\text{Área}(\Phi)}\frac{\mathrm{Raio(A)}}{\mathrm{Raio(E)}} \tag{20}$$

Portanto, dessa forma, fica demonstrada a 1ª Relação de Pappus: a razão entre os volumes de dois sólidos de revolução é dada pela razão obtida por meio da multiplicação entre a razão das áreas das figuras que rotacionam em torno dos seus eixos de rotação e a razão entre as distâncias dos seus respectivos centros de gravidade ao eixo de rotação[6].

A partir da 1ª Relação de Pappus será obtida uma fórmula, enunciada como um teorema, que relaciona diretamente o volume de um sólido de revolução, o centro de gravidade e a área da figura que foi rotacionada para obtê-lo. Para tanto, James Gregory aplica a relação (20) em duas figuras, sendo uma delas de dimensões conhecidas, conforme a figura 16.

Figura16: Figura plana Ω e o retângulo de vértices HIJK



Fonte: Rautenberg (2013, p. 24)

Do lado direito da figura 16 temos um retângulo de $\text{Área} = \mathrm{HK.HI}$, cujo centro de gravidade W está a uma distância $\frac{\mathrm{HK}}{2}$ do eixo de rotação. Além disso, o sólido de revolução terá o volume de um cilindro de altura HI e raio da base igual a HK.

Usando a 1ª Relação de Pappus podemos escrever:

$$\frac{\mathrm{Rev}(\Omega)}{\mathrm{HI.HK^2}.\pi} = \frac{\text{Área}(\Omega)}{\mathrm{HK.HI}}\frac{\mathrm{Circ(A)}}{2\pi.\frac{\mathrm{HK}}{2}}$$

Portanto,

$$\mathrm{Rev}(\Omega) = \text{Área}(\Omega)\mathrm{Circ(A)}$$

Dessa forma, demonstramos o seguinte teorema: Teorema 1) Se uma figura plana é rotacionada em torno de um eixo que não a intersecta, então o volume do sólido de revolução

[6] Essa relação é mencionada na obra *Pappi Alexandrini Collectio* - v.3, encontrada em (HULTSCH, 1878).

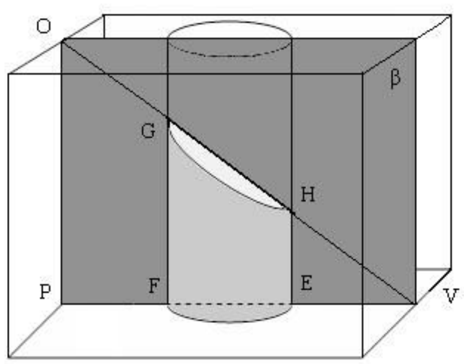
gerado é dado pelo produto entre a área da figura rotacionada e o comprimento da circunferência cujo raio é a distância entre o centro de gravidade dessa figura e o eixo de rotação.

2.5 Relação entre superfícies: tronco e sólido de revolução

Embora não seja encontrada em Leahy (2009), utilizando argumentos semelhantes aos anteriores, obtemos diretamente do trabalho de Gregory que a razão entre as áreas das superfícies de dois sólidos de revolução é dada pela razão obtida por meio da multiplicação entre a razão dos perímetros das figuras que rotacionam em torno dos seus eixos de rotação e a razão entre as distâncias dos seus respectivos centros de gravidade ao eixo de rotação. Esta é a 2ª Relação de Pappus.

Aqui novamente são investigadas as relações entre o tronco e o sólido de revolução, obtidos a partir de uma figura circular plana Ω e suas respectivas superfícies. Considere, ainda, nas relações seguintes, que quando nos referirmos à superfície do tronco, não são consideradas as áreas da base nem da secção oblíqua superior do tronco. Na sequência, considere na figura 17 a semelhança entre os triângulos OPV e HEV.

Figura 17: Secção do tronco



Fonte: Rautenberg (2013, p. 19)

A partir dessa figura 17 podemos escrever que

$$\frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{PV}} = \frac{\mathrm{HE}}{\mathrm{EV}} \Rightarrow \frac{\mathrm{OP}}{2\pi\mathrm{PV}} = \frac{\mathrm{HE}}{2\pi\mathrm{EV}} \tag{21}$$

Dessa forma, fica claro que a razão entre uma aresta qualquer do tronco inferior do cilindro reto e uma das circunferências que compõem a superfície do sólido de revolução, obtido da rotação de Ω em torno do eixo de rotação, é constante. Note ainda que essa razão $\frac{\mathrm{OP}}{2\pi\mathrm{PV}}$ é fixa para qualquer plano paralelo ao plano que contém OPV. Além disso, podemos escrever, de acordo com (LIMA et al., 2006), que a superfície do tronco inferior será composta pela união de todos os segmentos obtidos da intersecção da superfície do tronco com os planos paralelos mencionados. Do mesmo modo, a superfície do sólido de revolução será composta pela união de todas as circunferências provenientes da intersecção do sólido de revolução com os mesmos planos paralelos ao plano que contém OPV.

Aqui usaremos novamente as propriedades das proporções que afirmam que, se

$$\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}} = \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{d}} \text{ e } \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}} = \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{f}}\text{, então } \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}} = \frac{\mathrm{c+e}}{\mathrm{d+f}} \tag{22}$$

Como todas as razões obtidas conforme (21) serão fixas e iguais a $\frac{\mathrm{OP}}{2\pi\mathrm{PV}}$, podemos usar (22) para adicioná-las e igualá-las a essa razão fixa, de onde obtemos

$$\frac{\mathrm{OP}}{2\pi\mathrm{PV}} = \frac{\mathrm{Super}(\mathrm{Inf}(\Omega))}{\mathrm{Super}(\mathrm{Rev}(\Omega))}$$

Note ainda que OP representa a altura do cilindro reto obtido de Ω, ou seja, $\mathrm{OP} = \mathrm{Alt}(\Omega)$, assim como $2\pi\mathrm{PV}$ representa a circunferência, cujo raio é o raio de rotação de Ω, logo $2\pi\mathrm{PV} = \mathrm{Circ}(\Omega)$. Portanto

$$\frac{\mathrm{Super}(\mathrm{Inf}(\Omega))}{\mathrm{Super}(\mathrm{Rev}(\Omega))} = \frac{\mathrm{Alt}(\Omega)}{\mathrm{Circ}(\Omega)} \tag{23}$$

Aqui $\mathrm{Super}(\mathrm{Inf}(\Omega))$ representa a superfície do tronco inferior, ou seja, a soma de todas as arestas obtidas das intersecções do tronco com os planos paralelos ao plano que contém OPV, enquanto que $\mathrm{Super}(\mathrm{Rev}(\Omega))$ representa a superfície do sólido de revolução, resultante da soma de todas as circunferências obtidas de forma equivalente.

Agora iremos estabelecer uma relação entre as superfícies de dois sólidos de revolução. Suponha que Ω e Φ são duas figuras planas, das quais são obtidos dois cilindros retos de mesma altura. Da relação (23) podemos escrever

$$\frac{\mathrm{Alt}(\Omega)}{\mathrm{Circ}(\Omega)} = \frac{\mathrm{Super}(\mathrm{Inf}(\Omega))}{\mathrm{Super}(\mathrm{Rev}(\Omega))} \quad \text{e} \quad \frac{\mathrm{Alt}(\Phi)}{\mathrm{Circ}(\Phi)} = \frac{\mathrm{Super}(\mathrm{Inf}(\Phi))}{\mathrm{Super}(\mathrm{Rev}(\Phi))} \tag{24}$$

Como, por hipótese $\mathrm{Alt}(\Omega) = \mathrm{Alt}(\Phi)$, combinando essas duas igualdades de (24) obtemos

$$\frac{\mathrm{Super}(\mathrm{Rev}(\Omega))}{\mathrm{Super}(\mathrm{Rev}(\Phi))} = \frac{\mathrm{Super}(\mathrm{Inf}(\Omega))}{\mathrm{Super}(\mathrm{Inf}(\Phi))}\frac{\mathrm{Circ}(\Omega)}{\mathrm{Circ}(\Phi)} \tag{25}$$

2.6 Relação entre superfícies: tronco e cilindro

Para encontrarmos essa relação usaremos novamente as estruturas utilizadas quando investigamos a relação entre os volumes de um tronco e de um sólido de revolução, com uma exceção, agora A e B representam os centros de gravidade dos perímetros das bases opostas dos cilindros obtidos a partir de Ω. Da mesma forma como foi feito anteriormente, X representará o centro de gravidade de toda a superfície do cilindro, assim como Y e Z representam, respectivamente, os centros de gravidade das superfícies do tronco inferior e superior. De modo semelhante aqueles já indicados, mostra-se que os centros de gravidade Y e Z pertencem aos segmentos HS e FR, respectivamente.

Novamente utilizando o Princípio de Arquimedes, supondo que toda massa resultante da superfície dos troncos superior e inferior estejam localizadas em Y e Z, podemos obter a seguinte igualdade: $\mathrm{Super}(\mathrm{Sup}(\Omega)).\mathrm{XZ} = \mathrm{Super}(\mathrm{Inf}(\Omega)).\mathrm{XY}$, ou ainda

$$\frac{\mathrm{Super}(\mathrm{Sup}(\Omega))}{\mathrm{Super}(\mathrm{Inf}(\Omega))} = \frac{\mathrm{XY}}{\mathrm{XZ}}\,.$$

Aqui $\mathrm{Super}(\mathrm{Sup}(\Omega))$ representa a superfície do tronco superior do cilindro, enquanto que $\mathrm{Super}(\mathrm{Inf}(\Omega))$ representa a superfície do tronco inferior.

Agora, da figura 14, podemos usar a semelhança entre os triângulos HYX e RZX e o fato de que FQ, HR e IS são paralelos, para obter

$$\frac{\mathrm{IA}}{\mathrm{AS}} = \frac{\mathrm{HX}}{\mathrm{XR}} = \frac{\mathrm{XY}}{\mathrm{XZ}} = \frac{\mathrm{Super(Sup(\Omega))}}{\mathrm{Super(Inf(\Omega))}} \tag{26}$$

Além disso, de (26) podemos escrever que

$$\frac{\mathrm{IS}}{\mathrm{AS}} = \frac{\mathrm{IA}}{\mathrm{AS}} + 1 = \frac{\mathrm{Super}\big(\mathrm{Sup}(\Omega)\big)}{\mathrm{Super}\big(\mathrm{Inf}(\Omega)\big)} + 1 = \frac{\mathrm{Super}\big(\mathrm{Sup}(\Omega)\big) + \mathrm{Super}\big(\mathrm{Inf}(\Omega)\big)}{\mathrm{Super}\big(\mathrm{Inf}(\Omega)\big)} = \frac{\mathrm{Super}\big(\mathrm{Cil}(\Omega)\big)}{\mathrm{Super(Inf(\Omega))}}$$

Portanto,

$$\frac{\mathrm{Super}\big(\mathrm{Cil}(\Omega)\big)}{\mathrm{Super(Inf(\Omega))}} = \frac{\mathrm{IS}}{\mathrm{AS}} \tag{27}$$

Na igualdade (27), $\mathrm{Super(Cil(\Omega))}$ representa a superfície de todo o cilindro, e multiplicando o numerador e o denominador do lado direito dessa última igualdade por 2π, obtemos

$$\frac{2\pi\mathrm{IS}}{2\pi\mathrm{AS}} = \frac{\mathrm{Super}\big(\mathrm{Cil}(\Omega)\big)}{\mathrm{Super(Inf(\Omega))}} \Rightarrow \frac{\mathrm{Super(Inf(\Omega))}}{\mathrm{Super}\big(\mathrm{Cil}(\Omega)\big)} = \frac{\mathrm{Circ(A)}}{\mathrm{Circ(\Omega)}} \tag{28}$$

Note que na equação (28) temos que $2\pi\mathrm{IS} = \mathrm{Circ}(\Omega)$ pois IS foi definido como raio de rotação de Ω, assim como $2\pi\mathrm{AS} = \mathrm{Circ(A)}$. Além disso, a partir de uma figura simétrica Φ de centro de gravidade E, podemos de maneira equivalente escrever que

$$\frac{\mathrm{Super(Inf(\Phi))}}{\mathrm{Super}\big(\mathrm{Cil}(\Phi)\big)} = \frac{\mathrm{Circ(E)}}{\mathrm{Circ(\Phi)}} \tag{29}$$

2.7 A 2ª Relação de Pappus

Agora podemos multiplicar a equação (25) por $\frac{\mathrm{Super}(\mathrm{Cil}(\Omega))}{\mathrm{Super}(\mathrm{Cil}(\Omega))} \frac{\mathrm{Super}(\mathrm{Cil}(\Phi))}{\mathrm{Super}(\mathrm{Cil}(\Phi))} = 1$ e usar as igualdades (28) e (29) para obter

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{Super}\big(\mathrm{Rev}(\Omega)\big)}{\mathrm{Super}\big(\mathrm{Rev}(\Phi)\big)} &= \frac{\mathrm{Super}\big(\mathrm{Inf}(\Omega)\big)}{\mathrm{Super}\big(\mathrm{Inf}(\Phi)\big)} \frac{\mathrm{Circ}(\Omega)}{\mathrm{Circ}(\Phi)} \\
&= \frac{\mathrm{Super}\big(\mathrm{Inf}(\Omega)\big)}{\mathrm{Super}\big(\mathrm{Cil}(\Omega)\big)} \frac{\mathrm{Super}\big(\mathrm{Cil}(\Omega)\big)}{\mathrm{Circ}(\Phi)} \frac{\mathrm{Super}(\mathrm{Cil}(\Phi))}{\mathrm{Super}\big(\mathrm{Inf}(\Phi)\big)} \frac{\mathrm{Circ}(\Omega)}{\mathrm{Super}(\mathrm{Cil}(\Phi)} \\
&= \frac{\mathrm{Circ(A)}}{\mathrm{Circ(E)}} \frac{\mathrm{Super(Cil(\Omega))}}{\mathrm{Super}\big(\mathrm{Cil}(\Phi)\big)} \\
&= \frac{\mathrm{Circ(A)}}{\mathrm{Circ(E)}} \frac{\mathrm{Per}(\Omega)}{\mathrm{Per}(\Phi)} \ .
\end{aligned} \tag{30}$$

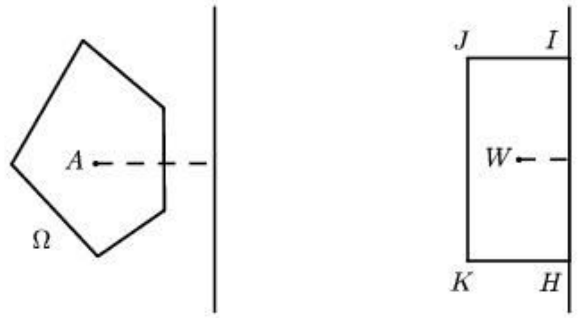
Aqui $\mathrm{Per}(\Omega)$ representa o perímetro da base do cilindro Ω enquanto que $\mathrm{Per}(\Phi)$ representa o perímetro da base do cilindro Φ e na última passagem levou-se em conta o fato de que se dois cilindros retos têm a mesma altura, então a razão entre as suas superfícies é igual a razão entre os perímetros de suas bases. Porém, como visto na seção anterior, esse resultado só foi obtido a partir da hipótese de que Ω e Φ são simétricas em torno de um eixo perpendicular ao eixo de rotação. Essa restrição pode ser removida do mesmo modo que antes e, dessa forma, obtemos

$$\frac{\mathrm{Super}\big(\mathrm{Rev}(\Omega)\big)}{\mathrm{Super}\big(\mathrm{Rev}(\Phi)\big)} = \frac{\mathrm{Per}(\Omega)}{\mathrm{Per}(\Phi)} \frac{\mathrm{Circ(A)}}{\mathrm{Circ(E)}} = \frac{\mathrm{Per}(\Omega)}{\mathrm{Per}(\Phi)} \frac{\mathrm{Raio(A)}}{\mathrm{Raio(E)}} \tag{31}$$

Portanto, demonstramos a 2ª Relação de Pappus: a razão entre as áreas das superfícies de dois sólidos de revolução é dada pela razão obtida por meio da multiplicação entre a razão dos perímetros das figuras que rotacionam em torno dos seus eixos de rotação e a razão entre as distâncias dos seus respectivos centros de gravidade ao eixo de rotação.[7]

A partir da 2ª Relação de Pappus é possível estabelecer uma fórmula, que será enunciada como um teorema, que relaciona diretamente a superfície de um sólido de revolução, o perímetro e o centro de gravidade da figura da qual foi obtido o sólido. Para tanto, considere o perímetro do retângulo HIJK, de altura H, com centro de gravidade W que dista $\frac{\mathrm{HK}}{2}$ do eixo de rotação, visto na seção anterior, e o perímetro de uma outra figura Ω, de centro de gravidade A qualquer, mostrados na figura 18.

Figura 18: Perímetros da figura plana Ω e do retângulo de vértices HIJK



Fonte: Rautenberg (2013, p. 29)

Sabemos que a superfície do sólido obtido da rotação de HIJK é a soma da área lateral com as áreas das bases, ou seja, $2\pi.\mathrm{HK}.\mathrm{HI}$ somado a $2\pi.(\mathrm{HK})^2$ e, além disso, o perímetro do retângulo HIJK é dado por $2\mathrm{HK} + 2\mathrm{HI}$. Agora podemos utilizar a 2ª Relação de Pappus entre as figuras Ω e HIJK, mostradas na figura 18. Dessa forma podemos estabelecer a seguinte igualdade:

$$\frac{\mathrm{Super}(\mathrm{Rev}(\Omega))}{2\pi\mathrm{HK.HI}+2\pi.(\mathrm{HK})^2} = \frac{\mathrm{Per}(\Omega)}{2\mathrm{HK}+2\mathrm{HI}} \frac{\mathrm{Circ}(\mathrm{A})}{2\pi.\frac{\mathrm{HK}}{2}}$$

Portanto, $\mathrm{Super}\big(\mathrm{Rev}(\Omega)\big) = \mathrm{Per}(\Omega)\mathrm{Circ}(\mathrm{A})$.

Dessa forma, demonstramos o seguinte teorema: Teorema 2) Se uma figura plana é rotacionada em torno de um eixo que não a intersecta, então a área da superfície gerada é dada pelo produto entre o perímetro da figura rotacionada e o comprimento da circunferência cujo raio é a distância entre o centro de gravidade desse perímetro e o eixo de rotação.

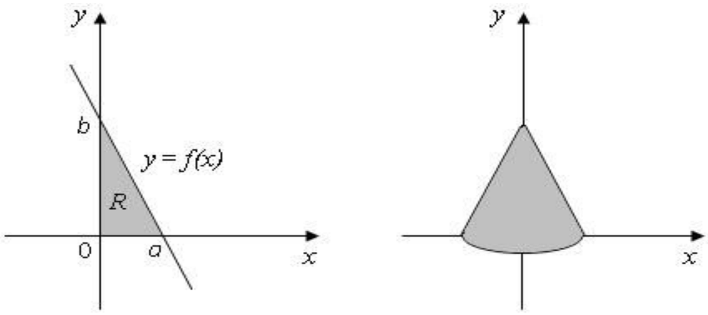
3 APLICAÇÕES

Mostraremos agora exemplos relacionados aos teoremas de Pappus. No primeiro deles obteremos a fórmula do volume do cone a partir da rotação de uma região triangular em torno de um eixo de revolução que contém um dos seus lados. Na sequência utilizaremos um dos teoremas no sentido inverso, ou seja, para determinar o centro de gravidade de um arco de uma curva do plano.

[7] Essa relação também aparece na obra *Pappi Alexandrini Collectio* - v.3, encontrada em (HULTSCH, 1878).

Exemplo 1) Determinar o volume do cone obtido pela rotação da região R limitada pela função $\mathrm{f(x)} = -\frac{\mathrm{bx}}{\mathrm{a}} + \mathrm{b}$, com $\mathrm{a} > 0, \mathrm{b} > 0$ e pelas retas $\mathrm{x} = 0$ e $\mathrm{y} = 0$ em torno do eixo y, conforme mostra a figura 19.

Figura 19: Cone de revolução



Fonte: Rautenberg (2013, p. 44)

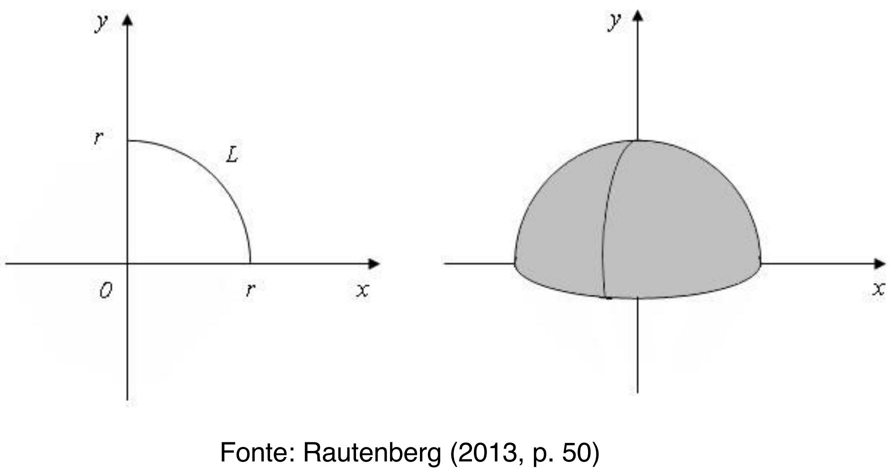
Solução: De acordo com o 1º teorema de Pappus, temos que esse volume procurado é dado pela expressão $\mathrm{Rev}(\Omega) = \mathrm{Área}(\Omega)\mathrm{Circ}(\mathrm{A})$, ou ainda $\mathrm{V} = 2\pi\mathrm{dA}$, onde d é a distância entre o centro de gravidade e o eixo y, e A representa a área da região R que será rotacionada. Lembrando que o centro de gravidade de um triângulo é dado pelo ponto de encontro das suas medianas, e utilizando o conceito de semelhança entre triângulos, obtemos $\mathrm{d} = \frac{\mathrm{a}}{3}$. Além disso, temos que a área desse triângulo é dada por $\mathrm{A} = \frac{\mathrm{ab}}{2}$.

Dessa forma, temos:

$$\mathrm{V} = 2\pi\mathrm{dA} = 2\pi\left(\frac{\mathrm{a}}{3}\right)\left(\frac{\mathrm{ab}}{2}\right) = \frac{\pi\mathrm{a}^2\mathrm{b}}{3}$$

Exemplo 2) Encontre o centro de gravidade do arco da função dada por $\mathrm{y} = \sqrt{\mathrm{r}^2 - \mathrm{x}^2}$, com $0 \leq \mathrm{x} \leq \mathrm{r}$, que é mostrado na figura 20.

Figura 20: Arco da função $\mathbf{y} = \sqrt{\mathbf{r}^2 - \mathbf{x}^2}$



Fonte: Rautenberg (2013, p. 50)

Solução: Utilizaremos o 2º teorema de Pappus, dado por $\mathrm{Super}(\mathrm{Rev}(\Omega)) = \mathrm{Per}(\Omega)\mathrm{Circ}(\mathrm{A})$, ou ainda, $\mathrm{A} = 2\pi\mathrm{dL}$, para determinar o centro de gravidade desse arco. Primeiramente note que o perímetro L desse arco é igual a $\frac{\pi\mathrm{r}}{2}$ e, além disso, quando o rotacionamos geramos uma superfície correspondente à metade da área de uma esfera, ou seja, de área $\mathrm{A} = 2\pi\mathrm{r}^2$. Portanto, podemos escrever

$$A = 2\pi dL \Rightarrow 2\pi r^2 = 2\pi d\left(\frac{\pi r}{2}\right) \Rightarrow d = \frac{2r}{\pi}$$

Quando rotacionamos esse mesmo arco em torno do eixo x encontramos uma superfície de mesma área e, portanto, também encontraremos $d = \frac{2r}{\pi}$. Como essas distâncias $d = \frac{2r}{\pi}$ encontradas são consideradas a partir do centro de gravidade aos eixos x e y, temos que o centro de gravidade desse arco será dado por $\left(\frac{2r}{\pi}, \frac{2r}{\pi}\right)$.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste artigo tratamos dos teoremas de Pappus relativos aos sólidos de revolução. Utilizando apenas conceitos de geometria, de centro de gravidade, além dos Princípios de Arquimedes e Cavalieri, foi possível apresentar as demonstrações desses importantes teoremas, ainda inéditas em português. Essas demonstrações foram obtidas a partir dos trabalhos de James Gregory, publicados no artigo do professor Andrew Leahy. Todas as construções dessas demonstrações merecem, no mínimo, a nossa atenção já que provam resultados importantes, utilizando conceitos anteriores ao desenvolvimento do Cálculo.

Relativamente extensas, é plenamente compreensível que as demonstrações em questão não apareçam em livros de Cálculo e, tampouco, em livros que tratam da História da Matemática de maneira mais ampla. Daí seguiu-se a estrutura desse artigo, ou seja, apresentamos a demonstração desses teoremas de modo a preencher essa eventual lacuna existente entre simples citações históricas desse tema e demonstrações que envolvem apenas elementos de Cálculo, tornando prático o acesso a todos que tenham interesse em conhecer esses teoremas.

Verificamos ainda, através de exemplos de aplicação, que os teoremas de Pappus também podem ser utilizados no sentido inverso, ou seja, para encontrar o centro de gravidade de figuras planas, quando conhecemos de antemão o volume ou a área da superfície do sólido gerado pela rotação, assim como as dimensões da figura que foi rotacionada. Além disso, alguns dos conceitos vistos podem ser aplicados em sala durante aulas de geometria espacial. Fórmulas de áreas de superfícies e volumes de sólidos de revolução, por exemplo, podem ser obtidas de forma alternativa a partir dos teoremas de Pappus.

REFERÊNCIAS

BULMER-THOMAS, I**. Guldin's Theorem – or Pappus's?** Chicago: The University of Chicago Press, 1984. p. 348-352. v. 75. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/231832i>. Acesso em: 8 mar. 2013.

BUSSARD, H. L. L. **Paul Guldin - dictionary of scientific biography.** 1. ed. New York: Scribner, 1970. Disponível em: <http://www.encyclopedia.com/doc/1G2-2830901775.htmli>. Acesso em: 05 jan. 2013.

EVES, H. **Introdução à história da matemática.** 1. ed. Campinas: Editora da UNICAMP, 2008.

GULDIN, P. **Centrobaryca.** 1. ed. Viena: Gregorii Gelbhaar, 1635. p.147. Disponível em: <http://echo.mpiwg-berlin.mpg.de/MPIWG:7C3STXR7i>. Acesso em: 10 jan. 2013.

HEATH, T. **A history of Greek mathematics - v. 2.** 1. ed. Oxford: The Clarendon Press, 1921. p.404. Disponível em: <http://archive.org/stream/ahistorygreekma00heatgoogi>. Acesso em: 05 jan. 2013.

HULTSCH, F. O**. Pappi Alexandrini Collectio - v. 3**. 1. ed. Berlim: Apud Weidmannos, 1878. p.683. Disponível em: <http://archive.org/stream/pappialexandrin01pappgoogi>. Acesso em: 20 dez. 2012.

LEAHY, A. **James Gregory and the Pappus – Guldin Theorem**. [S.I.], 2009. Disponível em: <http://mathdl.maa.org/mathDL>. Acesso em: 19 dez. 2012.

LIMA, E. L. et al. **A matemática do ensino médio - v. 2**. p.275. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

MANCOSU, P**. Philosophy of mathematics & manual practice in the seventeenth century.** New York: Oxford University Press, 1996. p.58 Disponível em: <ttp://books.google.com.br/booksi>. Acesso em: 21 jan. 2013.

RAUTENBERG, R. R. **Os teoremas de Pappus para os sólidos de revolução.** Curitiba: Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT).p.12. Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2013.

O MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS APLICADO AO AJUSTE DE CURVAS

THE METHOD OF THE MINIMAL SQUARES APPLIED TO THE ADJUSTMENT OF CURVES

FELIX, Francisca Edna Ferreira[1]

CORDEIRO JUNIOR, Reginaldo Amaral [2]

RESUMO

Este trabalho é resultado de um projeto de iniciação científica que tinha por objetivo realizar uma revisão bibliográfica sobre os fundamentos da Álgebra Linear e relacionar as suas definições e teoremas ao ajuste de curvas, uma aplicação denominada o Método dos Mínimos Quadrados (MMQ). Baseando-se em uma pesquisa de caráter teórico, tecemos um pouco sobre a descoberta e o desenvolvimento desse método e a sua aplicabilidade em uma empresa que busca relacionar o número de unidades produzidas com o custo por unidade, usando a aproximação por exponencial.

Palavras-chave: Álgebra linear. Ajuste de curvas. Método dos mínimos quadrados.

ABSTRACT

This work is the result of a project of scientific initiation that had as objective to carry out a bibliographical revision on the fundamentals of Linear Algebra and to relate its definitions and theorems to the adjustment of curves, an application denominated the Method of Minimum Square (MMQ). Based on a theoretical nature research, we have touched on the discovery and development of this method and its applicability in a company that seeks to relate the number of units produced to the cost per unit, using the exponential approximation.

Keywords: Linear algebra. Adjusting curves. Minimum squares method.

1 INTRODUÇÃO

O presente trabalho é resultado de um projeto de iniciação científica que tinha por objetivo relacionar os conteúdos que fundamentam a Álgebra Linear, com aplicações da Matemática, uma dessas aplicações é o Método dos Mínimos Quadrados (MMQ) para o ajuste de curvas. Esta proposta surgiu pelo fato de sabermos da vasta aplicabilidade da Álgebra Linear e de sua importância para a Matemática, pois como afirma Dorier (1994) apud Celestino (2000, p. 45) “É fato que a Álgebra Linear constitui uma parte importante no conteúdo matemático (...), sendo vista como uma disciplina fundamental por quase todos os matemáticos e por muitos cientistas que a utilizam como ferramenta" e culminou no meu Trabalho de Conclusão de Curso.

Além disso, desde a sua descoberta no século XIX até os dias atuais, o Método dos Mínimos Quadrados desempenha um relevante papel em diversas áreas, pois consiste em um processo que nos permite encontrar uma função que melhor descreve um certo conjunto de informações experimentais, possibilitando a obtenção de previsões para dados desconhecidos.

O Método dos Mínimos Quadrados é usado geralmente para ajustes lineares, mas em alguns casos pode ser aplicado em outras funções, tais como as polinomiais e exponenciais a qual

[1] Graduada em Licenciatura em Matemática pelo Instituto Federal da Paraíba (IFPB). Endereço eletrônico: edna.felix@academico.ifpb.edu.br

[2] Mestre em Matemática pela Universidade Federal da Paraíba (UFPB). Docente do Instituto Federal da Paraíba (IFPB), Cajazeiras, PB, Brasil. Endereço eletrônico: reginaldo.cordeiro@ifpb.edu.br.

será apresentada neste trabalho. A sua utilização nos permite, por exemplo, ajustar os dados de uma população em um determinado período, fazendo possíveis previsões sobre seu crescimento. Outro exemplo da sua aplicação aparece na administração, quando uma empresa pretende relacionar o custo médio com a quantidade de unidades produzidas em um dia.

No que diz respeito aos procedimentos metodológicos para construção do presente trabalho, nossa proposta foi realizar uma pesquisa bibliográfica acerca dos conteúdos da Álgebra Linear, pautada nos estudos de especialistas da área, tais como Boldrini et al(1980), Hoffman(1970), Pulino (2012), Biezeuner (2006), Silva (2007), Andrade (2006), entre outros. E, em seguida, relacionar estes conteúdos com uma aplicação. Neste sentido, este trabalho apresenta caráter teórico.

2 MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS

Dados são coletados a partir de observações e medições em diversas áreas, tais como estudos econômicos, sociais, ambientais e até mesmo na medicina. Entretanto, dados coletados dessa forma, geralmente estão sujeitos a erros, o que impede uma previsão para dados desconhecidos. Mas, nos dias atuais, informações de previsão são altamente necessárias.

Uma ferramenta que nos auxilia nessa busca por informações de previsão são os estudos a respeito de uma das grandes aplicações da Matemática, mais especificamente da Álgebra Linear, o Método dos Mínimos Quadrados. O mesmo consiste na determinação de parâmetros de uma função, na qual o seu gráfico melhor representa o comportamento de dados coletados experimentalmente. Entretanto, dados coletados dessa forma, dificilmente podem ser representados por uma única função. Então, para a determinação de tais parâmetros é necessário solucionar um sistema de equações que provêm do resultado da soma do produto interno das funções nos pontos x_i do gráfico.

2.1 Aspectos históricos

Um dos primeiros problemas ocasionados por erros de medidas obtidas experimentalmente que se tem registro foram debatidos pelos astrônomos, quando estes buscavam a determinação da posição dos corpos celestes.

Segundo Crato (1999), estes problemas foram sentidos por vários astrônomos como Hiparco (180-125 a.C), Eratóstenes (276-194 a.C) e Aristarco (310-230 a.C) quando repararam que suas medidas eram passíveis de falhas, pois admitiam ligeiras variações de momento para momento e de observador para observador. Porém, aceitavam aproximações para as medidas que eram obtidas sem se preocupar com os problemas estatísticos das suas mensurações, ou pelo menos, não escreveram sobre esses problemas.

Tycho Broche (1546-1061), astrônomo da era pré-telescópica, foi o primeiro ou pelo menos um dos primeiros a se preocupar com as medidas obtidas e o rigor das suas observações. Ele tirava várias medidas de um mesmo parâmetro, juntava as observações feitas, omitia erros grosseiros e assim obtinha médias que eram utilizadas para as suas estimativas.

> [...] desenvolveu um programa de medidas dos céus que ultrapassou em muito o rigor dos antigos. As suas observações sobre a posição dos astros, o movimento dos planetas e as distâncias serviram de base ao trabalho do seu colaborador Johannes Kepler (1571 - 1630), para o estabelecimento das célebres leis sobre as órbitas dos planetas. Sem as medidas rigorosas de Tycho Brache, é pouco provável

> que Kepler pudesse ter estabelecido as leis que levam seu nome (CRATO, 1999, p. 27).

O controle da precisão da medida desenvolvido por Tycho era novidade para a época, mas ainda estava longe dos métodos modernos que utilizam intervalos de confiança e desvios padrões. Mais tarde, iniciou-se um estudo matemático sistemático da combinação das observações, realizado por Roger Joseph Boscovich (1711 - 1787), Pierre Simon Laplace (1749 - 1827), Adrien - Marie Legendre (1752 - 1833) e Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855). Esses estudos ocuparam gerações que buscavam encontrar um método ideal de combinação de medidas pontuais obtidas em momentos distintos.

Foram apresentadas diversas soluções na virada do século XVIII para o XIX. Mas a que teve maior desenvolvimento teórico, eficácia e maior aplicação prática, foi o Método dos Mínimos Quadrados publicado por Legendre em 1805 na sua obra *Nouvelles Méthodes pour la Détermination des Orbites des Cométes* (Novos Métodos para Determinação das Órbitas dos Cometas) e por Gauss em 1809 na obra *Theoria Motus Corporum Coelestium* (Teoria do Movimento dos Corpos Celestes). Contudo, mesmo sendo Legendre o primeiro a publicar, é atribuído a Gauss a prioridade da criação do método, pois ele teria obtido os resultados entre 1794-1795.

Com as publicações feitas por Gauss e Legendre, o método tornou-se essencial nas análises de dados astronômicos o qual foi aderido por Laplace e outros matemáticos. Após 30 anos da sua primeira publicação, em 1839, Gauss generalizou o Método dos Mínimos Quadrados, melhorando suas bases teóricas e encontrando um modelo prático para a minimização de erros.

Após cerca de um século da descoberta do Método dos Mínimos Quadrados, começaram a surgir os primeiros relatos da sua utilização nas demais áreas que trabalham com análise de resultados, dados experimentais e combinações de medidas. Atualmente o método é essencial em diversas áreas, como relata Anton apud Marinelli (2002, p. 77):"O método de quadrados mínimos é muito utilizado em várias áreas, como na Física Experimental, Astronomia, Biologia, Administração, Estatística. Já existe até mesmo um modelo de quadrados mínimos para a audição humana".

Neste sentido, vale ressaltar a importância dessa aplicação da Álgebra Linear, nas mais diversas áreas do conhecimento, inclusive na Astronomia que motivou a sua descoberta e desenvolvimento.

3 FUNDAMENTAÇÃO MATEMÁTICA

Nesta seção apresentaremos alguns aspectos teóricos sobre espaços vetoriais e seus desdobramentos, a saber, combinação linear, produto interno e projeção ortogonal.

3.1 Espaço vetorial

A noção de Espaço Vetorial é um dos conceitos básicos da Álgebra Linear, sendo um conjunto que satisfaz as oito propriedades que veremos abaixo na sua definição formal.

Definição 3.1) Um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ é um conjunto V, não vazio, com duas operações: adição

$$+ : V \times V \to V,$$

e multiplicação por escalar,

$$\cdot : \mathbb{K} \times V \to V,$$

tais que, para quaisquer $u, v, w \in V$ e $a, b \in \mathbb{K}$, as seguintes propriedades são satisfeitas. Com relação à adição: 1) $u + v = v + u, u, v \in V$; 2) $(u + v) + w = u + (v + w), u, v, w \in V$; 3) existe um elemento $\mathbf{0}$ em V, tal que $u + \mathbf{0} = u, u \in V$; 4) para cada $u \in V$, existe $-u \in V$, tal que $u + (-u) = \mathbf{0}$. Com relação à multiplicação por escalar: 1) $(ab)u = a(bu), u, v \in V$; 2) $(a + b)u = au + bu, a, b \in \mathbb{K}$ e $\forall u \in V$; 3) $a(u + v) = au + av, a \in \mathbb{K}$ e $u, v \in V$; 4) $1 \cdot u = u, u \in V$.

Exemplo 3.1: conjunto $V = M_{m \times n}$ das matrizes de ordem $m \times n$ com soma e multiplicação por escalar usuais é um espaço vetorial.

Exemplo 3.2: O conjunto $V = P_n$ dos polinômios de grau menor ou igual a n e com coeficientes reais, munido das operações usuais

$$\begin{array}{ccc} P_n \times P_n & \to & P_n \\ (a + bx + \cdots + cx^n) + (d + ex + \cdots + fx^n) & \mapsto & ((a + d) + (b + e)x + \cdots + (c + fx^n) \end{array}$$

e

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times P_n & \to & P_n \\ \alpha(a + bx + \cdots + cx^n) & \mapsto & (\alpha a + \alpha bx + \cdots + \alpha cx^n) \end{array}$$

é um espaço vetorial.

3.2 Combinação linear

É uma característica de um espaço vetorial que consiste na obtenção de novos vetores a partir de vetores dados.

Definição 3.2: Sejam V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$, e $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{K}$. Então o vetor $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$ é um elemento de V que chamamos de combinação linear de $v_1, v_2, \cdots, v_n$.

Exemplo 3.3: Seja $v = 1 + 2x + x^2 \in \mathbb{P}^3$. Note que v pode ser escrito como combinação linear de $\{1, x, x^2\}$. Solução: De fato, temos que

$$1 + 2x + x^2 = 1 \cdot 1 + 2 \cdot x + 1 \cdot x^2.$$

3.3 Produto interno

Interessados no estudo de espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$, os quais nos permitam falar sobre comprimento de um vetor e de um ângulo entre dois vetores, apresentaremos uma generalização do conceito de produto escalar no $\mathbb{R}^n$ e faremos isso por meio de uma aplicação definida sobre pares de vetores que tomam valores escalares no corpo, denominada produto interno.

Definição 3.3: Seja V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$. Um produto interno sobre V é uma função que a cada par de vetores v_1 e v_2, associa um número, denotado por $\langle v_1, v_2 \rangle$, satisfazendo as seguintes propriedades: 1) $\langle u+v,w\rangle=\langle u,w\rangle+\langle v,w\rangle, u,v,w\in V$; 2) para $\alpha\in\mathbb{K}$; $\langle\alpha u,v\rangle=\alpha\langle u,v\rangle, u,v\in V$; 3) $\langle u,v\rangle=\overline{\langle v,u\rangle}, u,v\in V$; 4) $\langle u,u\rangle>0$ se $u\neq 0$

Exemplo 3.4: Seja V o espaço vetorial das funções reais contínuas. Sejam $f_1,f_2\in V$. Se

$$f:=\langle f_1,f_2\rangle=\sum_{i=1}^{n} f_1(x_i)\cdot f_2(x_i),$$

então f é um produto interno. Solução*:* De fato, sejam $f_1,f_2\in V$ e $\lambda\in\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\langle f_1+f_2,f_3\rangle&=\sum_{i=1}^{n}(f_1+f_2)(x_i)\cdot f_3(x_i)\\ &=\sum_{i=1}^{n}(f_1(x_i)+f_2(x_i))\cdot f_3(x_i)\\ &=\sum_{i=1}^{n}f_1(x_i)\cdot f_3(x_i)+f_2(x_i)\cdot f_3(x_i)\\ &=\sum_{i=1}^{n}f_1(x_i)\cdot f_3(x_i)+\sum_{i=1}^{n}f_2(x_i)\cdot f_3(x_i)\\ &=\langle f_1,f_3\rangle+\langle f_2,f_3\rangle.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle f_1,f_2\rangle&=\sum_{i=1}^{n}f_1(x_i)\cdot f_2(x_i)\\ &=\sum_{i=1}^{n}f_2(x_i)\cdot f_1(x_i)\\ &=\langle f_2,f_1\rangle.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle\lambda f_1,f_2\rangle&=\sum_{i=1}^{n}(\lambda f_1)(x_i)\cdot f_2(x_i)\\ &=\sum_{i=1}^{n}\lambda f_1(x_i)\cdot f_2(x_i)\\ &=\lambda\sum_{i=1}^{n}f_1(x_i)\cdot f_2(x_i)\\ &=\lambda\langle f_1,f_2\rangle.\end{aligned}$$

$$\langle f_1,f_1\rangle=\sum_{i=1}^{n}f_1(x_i)\cdot f_1(x_i)=\sum_{i=1}^{n}(f_1(x_i))^2>0.$$

$\langle f_1,f_1\rangle=0$ se $f_1(x_i)=0$.

Portanto, $f:=\langle f_1,f_2\rangle=\sum_{i=1}^{n}f_1(x_i)\cdot f_2(x_i),$ é um produto interno.

Definição 3.4: Seja V um espaço vetorial com produto interno sobre um corpo $\mathbb{K}$, definimos para cada $u\in V$ um número $\|u\|=\sqrt{\langle u,u\rangle}$. Este valor é chamado de norma de u e dizemos que V munido dessa norma é um espaço normado.

3.4 Ângulo entre dois vetores

Definição 3.5: Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ munido com produto interno. O ângulo entre dois vetores não nulos $u,v\in V$ é definido como sendo o valor de $\theta\in[0,\pi]$ que satisfaz a equação

$$\cos\theta=\frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\cdot\|v\|}.$$

Definição 3.6*:* Seja V um espaço vetorial, sobre um corpo $\mathbb{K}$, com produto interno. Dizemos que os vetores $u,v\in V$ são ortogonais se, e somente se, $\langle u,v\rangle=0$ e denotamos por $u\perp v$.

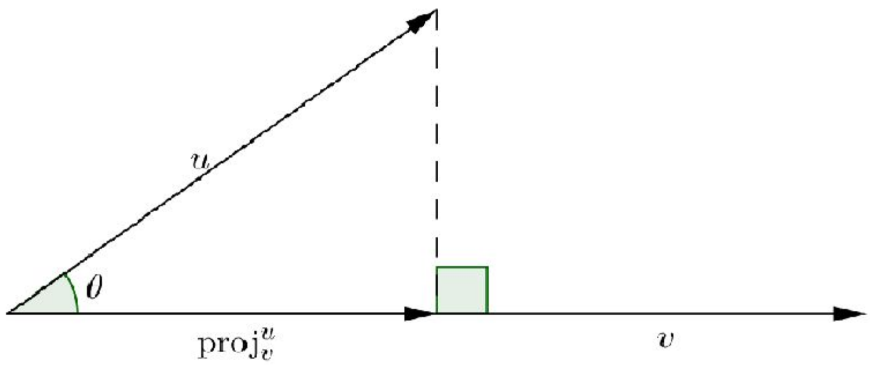
3.5 Projeção ortogonal

Em um espaço vetorial com produto interno podemos definir a projeção ortogonal de um vetor u sobre um vetor não nulo v por

$$\mathrm{proj}_v^u = \frac{\langle u,v\rangle}{\langle v,v\rangle}\cdot v$$

Ou seja, a projeção ortogonal de u sobre v é um múltiplo escalar de v.

Figura 1: Projeção ortogonal de u em direção a v.



Fonte: autores

Proposição 3.1) Seja V um espaço vetorial com produto interno e $v \in V$ um vetor não nulo, então $u - \mathrm{proj}_v^u$ é ortogonal a v, para todo $u \in V$. Demonstração: Sabemos que

$$\mathrm{proj}_v^u = \frac{\langle u,v\rangle}{\langle v,v\rangle}\cdot v.$$

Então

$$u - \mathrm{proj}_v^u = u - \frac{\langle u,v\rangle}{\langle v,v\rangle}\cdot v.$$

Tomando o produto interno com v, obtemos

$$\begin{aligned}\langle u - \mathrm{proj}_v^u, v\rangle &= \langle u - \frac{\langle u,v\rangle}{\langle v,v\rangle}\cdot v, v\rangle = \langle u,v\rangle - \frac{\langle u,v\rangle}{\langle v,v\rangle}\cdot\langle v,v\rangle \\ &= \langle u,v\rangle - \langle u,v\rangle = 0\end{aligned}.$$

Logo, $u - \mathrm{proj}_v^u$ é ortogonal a v, para todo $u \in V$.

Teorema 3.1) Seja V um espaço vetorial com produto interno. Seja W um subespaço de V. Então, para todo $w \in W$. $proj_w^u$ é a melhor aproximação de u em W, isto é,

$$\| u - \mathrm{proj}_w^u \| < \| u - w \|,$$

para qualquer w em W diferente de proj_w^u. Demonstração*:* Note que

$$u - w = (u - \text{proj}_w^u) + (\text{proj}_w^u - w).$$

Como W é um subespaço de V e $u, \text{proj}_w^u \in W$, então $\text{proj}_w^u - w \in W$. Pela Proposição 3.1, obtemos que $u - \text{proj}_w^u$ é ortogonal a todo vetor em W. Logo, $u - \text{proj}_w^u$ é ortogonal a $\text{proj}_w^u - w \in W$. Dessa forma, satisfazem o Teorema de Pitágoras, ou seja

$$\| u - w \|^2 = \| u - \text{proj}_w^u \|^2 + \| \text{proj}_w^u - w \|^2.$$

Portanto,

$$\| u - w \|^2 > \| u - \text{proj}_w^u \|^2.$$

Extraindo a raiz, temos

$$\| u - w \| > \| u - \text{proj}_w^u \|.$$

3.6 DESCRIÇÃO MATEMÁTICA DO MÉTODO

Quando buscamos encontrar uma função que melhor se ajuste aos dados obtidos através de um experimento, devemos levar em consideração dois itens fundamentais, como afirma Boldrini (1980): “Qualquer medida contém um erro (inerente ao aparelho de medição, falha do operador etc)”.

Pode já existir algum argumento teórico ou de bom senso que nos indique qual deve ser o aspecto analítico da função. Sendo assim, em muitas situações, conhece-se os pontos $(x_i, f(x_i))$, em que cada $f(x_i)$ é obtido experimentalmente, e deseja-se obter a expressão analítica de uma dada curva $y = g(x)$ que melhor se ajusta a esse conjunto de pontos.

Dessa forma, se temos os dados:

x	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n
$f(x)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$	$\cdots$	$f(x_n)$

e queremos encontrar a função $g(x)$ que seja a melhor aproximação de $f(x)$, então vamos supor que conhecemos os aspectos analíticos de duas funções $g_1(x)$ e $g_2(x)$, e que queremos “aproximar" a função $f(x)$ por uma combinação linear de g_1 e g_2, isto é, queremos encontrar constantes c_1 e c_2 tais que

$$g(x) = c_1 g_1(x) + c_2 g_2(x)$$

seja uma “boa aproximação" para $f(x)$.

Para tanto introduziremos a noção de distância entre funções. Primeiramente, definimos o seguinte produto interno no espaço vetorial das funções e a distância com relação ao produto interno, respectivamente.

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \sum_{i=1}^{n} f_1(x_i) \cdot f_2(x_i). \tag{1}$$

$$\| f_1 - f_2 \| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (f_1(x_i) - f_2(x_i))^2}. \tag{2}$$

Observação 3.1) Note que a expressão dentro do radical é exatamente a soma dos quadrados dos desvios que existem entre f_1 e f_2 em cada ponto x_i.

Assim, calculando a distância entre $f(x)$ e $g(x) = c_1 g_1(x) + c_2 g_2(x)$ obtemos

$$D(c_1, c_2) = \| f - c_1 g_1 - c_2 g_2 \| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - c_1 g_1(x_i) - c_2 g_2(x_i))^2}.$$

Como o procedimento consiste em encontrar a "melhor aproximação" então devemos minimizar a distância entre $f(x)$ e $g(x)$. Para isso, seguindo com procedimentos de minimização de função de várias variáveis, basta minimizarmos a soma dos quadrados dos desvios, uma vez que, encontrar os mínimos da função distância é equivalente a encontrar os mínimos da função distância ao quadrado, sendo assim, minimizaremos seguinte função

$$Q = \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - c_1 g_1(x_i) - c_2 g_2(x_i))^2.$$

Para tanto, precisamos encontrar os pontos críticos dados por $\frac{\partial Q}{\partial c_1} = 0$ e $\frac{\partial Q}{\partial c_2} = 0$. Mas,

$$\frac{\partial Q}{\partial c_1} = 2\sum_{i=1}^{n} ((f(x_i) - c_1 g_1(x_i) - c_2 g_2(x_i))(-g_1(x_i))$$

$$0 = \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - c_1 g_1(x_i) - c_2 g_2(x_i))(-g_1(x_i))$$

$$0 = -\sum_{i=1}^{n} f(x_i) g_1(x_i) + c_1 \sum_{i=1}^{n} g_1(x_i) g_1(x_i) + c_2 \sum_{i=1}^{n} g_2(x_i) g_1(x_i)$$

e

$$\frac{\partial Q}{\partial c_2} = 2\sum_{i=1}^{n} ((f(x_i) - c_1 g_1(x_i) - c_2 g_2(x_i))(-g_2(x_i))$$

$$0 = \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - c_1 g_1(x_i) - c_2 g_2(x_i))(-g_2(x_i))$$

$$0 = -\sum_{i=1}^{n} f(x_i) g_2(x_i) + c_1 \sum_{i=1}^{n} g_1(x_i) g_2(x_i) + c_2 \sum_{i=1}^{n} g_2(x_i) g_2(x_i)$$

E, portanto, c_1 e c_2 que tornam $g(x) = c_1 g_1(x) + c_2 g_2(x)$ a melhor aproximação de $f(x)$, é dada pela resolução do sistema

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)g_1(x_i) = c_1\sum_{i=1}^{n} g_1(x_i)g_1(x_i) + c_2\sum_{i=1}^{n} g_1(x_i)g_2(x_i) \\ \sum_{i=1}^{n} f(x_i)g_2(x_i) = c_1\sum_{i=1}^{n} g_2(x_i)g_1(x_i) + c_2\sum_{i=1}^{n} g_2(x_i)g_2(x_i) \end{cases}$$

ou, lembrando o produto interno (2) definido nesta seção obtemos

$$\begin{cases} \langle g_1, f\rangle = c_1\langle g_1, g_1\rangle + c_2\langle g_1, g_2\rangle \\ \langle g_2, f\rangle = c_1\langle g_2, g_1\rangle + c_2\langle g_2, g_2\rangle. \end{cases}$$

Uma outra maneira de obtermos esse sistema é utilizando o Teorema 3.1 da melhor aproximação, que garante que se $g(x)$ é a melhor aproximação de $f(x)$ no espaço vetorial V, sendo este o espaço das funções, então

$$g(x) = \mathrm{proj}_v^f.$$

Além disso, pela Proposição 3.1, $f-g$ é ortogonal a todo $v \in V$. Logo, $f-g$ é ortogonal a g_1 e g_2. Portanto, $\langle g_1, f-g\rangle = 0$ e $\langle g_2, f-g\rangle = 0$. Por outro lado,

$$\begin{aligned} \langle g_1, f-g\rangle &= \langle g_1, f-c_1g_1-c_2g_2\rangle \\ &= \langle g_1, f\rangle - c_1\langle g_1, g_1\rangle - c_2\langle g_1, g_2\rangle \end{aligned} \quad \text{e}$$

$$\begin{aligned} \langle g_2, f-g\rangle &= \langle g_2, f-c_1g_1-c_2g_2\rangle \\ &= \langle g_2, f\rangle - c_1\langle g_2, g_1\rangle - c_2\langle g_2, g_2\rangle \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{cases} \langle g_1, f\rangle - c_1\langle g_1, g_1\rangle - c_2\langle g_1, g_2\rangle = 0 \\ \langle g_2, f\rangle - c_1\langle g_2, g_1\rangle - c_2\langle g_2, g_2\rangle = 0 \end{cases} \quad \text{ou,}$$

$$\begin{cases} \langle g_1, f\rangle = c_1\langle g_1, g_1\rangle + c_2\langle g_1, g_2\rangle \\ \langle g_2, f\rangle = c_1\langle g_2, g_1\rangle + c_2\langle g_2, g_2\rangle. \end{cases}$$

Como conhecemos $g_1(x)$, $g_2(x)$ e $f(x)$ nos pontos x_i, resolvemos o sistema e encontramos os valores de c_1 e c_2. Esse procedimento é chamado método dos mínimos quadrados para o ajuste de curvas e podemos generalizar para o caso em que precisarmos encontrar $c_1, c_2, \cdots c_n$ tais que $g(x) = c_1g_1 + c_2g_2 + \cdots + c_ng_n$ seja a melhor aproximação de $f(x)$. Neste caso, os coeficientes $c_1, c_2, \cdots c_n$ devem satisfazer o seguinte sistema linear

$$\begin{cases} \langle g_1, f\rangle & = & c_1\langle g_1, g_1\rangle & + & c_2\langle g_1, g_2\rangle & + & \cdots & + & c_n\langle g_1, g_n\rangle \\ \vdots & = & \vdots & + & \vdots & + & \cdots & + & \vdots \\ \langle g_n, f\rangle & = & c_1\langle g_n, g_1\rangle & + & c_2\langle g_n, g_2\rangle & + & \cdots & + & c_n\langle g_n, g_n\rangle. \end{cases}$$

4 MÉTODO DOS MINÍMOS QUADRADOS E O AJUSTE DE CURVAS

O Método dos Mínimos Quadrados se destaca com a sua aplicação ao ajuste de curvas que consiste em um procedimento matemático que objetiva determinar a partir dos dados obtidos no experimento uma curva que os expresse matematicamente. Além disso, devemos determinar uma função que melhor se adapta a essa curva e muitas vezes, o grande desafio está em determinar esta função.

Para tanto, devemos observar o diagrama de dispersão para ver a forma geral dos pontos e seguir o modelo matemático mais coerente com a disposição dos pontos, como veremos a seguir.

É importante ressaltar que muitas vezes não é possível realizar o processo e encontrar a função manualmente e, quando isso acontece, precisamos utilizar recursos computacionais. Neste trabalho, utilizamos do Software Geogebra para a construção dos gráficos de dispersão, gráfico da curva que melhor se a adapta aos dados e na resolução dos sistemas de equações.

4.1 Aproximação exponencial

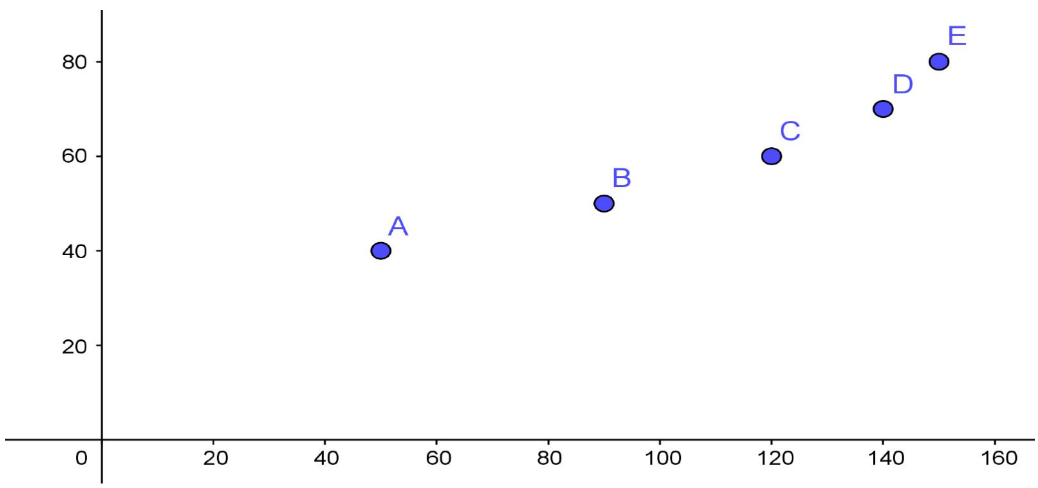
Determinada empresa apresenta a relação entre número de produtos e custo da produção de acordo com a seguinte tabela:

Nº de Produtos	Custo de Produção
50	$40
90	$50
120	$60
140	$70
150	$80

Esses dados são representados na figura 2.

O dono da empresa quer saber quanto será os custos, caso sejam produzidas 200 unidades em um dia.

Figura 2: Gráfico de dispersão Nº de Produtos X Custo da Produção



Fonte: Autores

Inicialmente devemos observar que os dados representados no diagrama de dispersão apresentam um crescimento exponencial. Logo, a função que melhor se ajustará aos dados é da forma $g(x) = ae^{bx}$. Aplicando o logaritmo neperiano, obtemos

$$g(x) = \ln g(x) = \ln a + bx.$$

Logo, vamos aproximar a seguinte tabela modificada:

Unidade Produzida	Custo de Produção em $\ln$
50	3,7
90	3,9
120	4,1
140	4,2
150	4,4

Chamando $c_1 = \ln a$, $c_2 = b$, $g_1 = 1$ e $g_2 = x$, temos

$$\ln g(x) = c_1 g_1(x) + c_2 g_2(x).$$

Fazendo o produto interno das funções nos pontos x_i da tabela, obtemos

$$\langle g_1, g_1 \rangle = 1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 1\cdot 1 = 5$$
$$\langle g_1, g_2 \rangle = 1\cdot 50 + 1\cdot 90 + 1\cdot 120 + 1\cdot 140 + 1\cdot 150 = 550$$
$$\langle g_2, g_1 \rangle = 50\cdot 1 + 90\cdot 1 + 120\cdot 1 + 140\cdot 1 + 150\cdot 1 = 550$$
$$\langle g_2, g_2 \rangle = 50\cdot 50 + 90\cdot 90 + 120\cdot 120 + 140\cdot 140 + 150\cdot 150 = 67.100$$
$$\langle g_1, f \rangle = 1\cdot 3{,}7 + 1\cdot 3{,}9 + 1\cdot 4{,}1 + 1\cdot 4{,}2 + 1\cdot 4{,}4 = 20{,}3$$
$$\langle g_2, f \rangle = 50\cdot 3{,}7 + 90\cdot 3{,}9 + 120\cdot 4{,}1 + 140\cdot 4{,}2 + 150\cdot 4{,}4 = 2.271$$

Daí,

$$\begin{cases} 5c_1 + 550c_2 = 20{,}3 \\ 550c_1 + 67.100c_2 = 2.271. \end{cases}$$

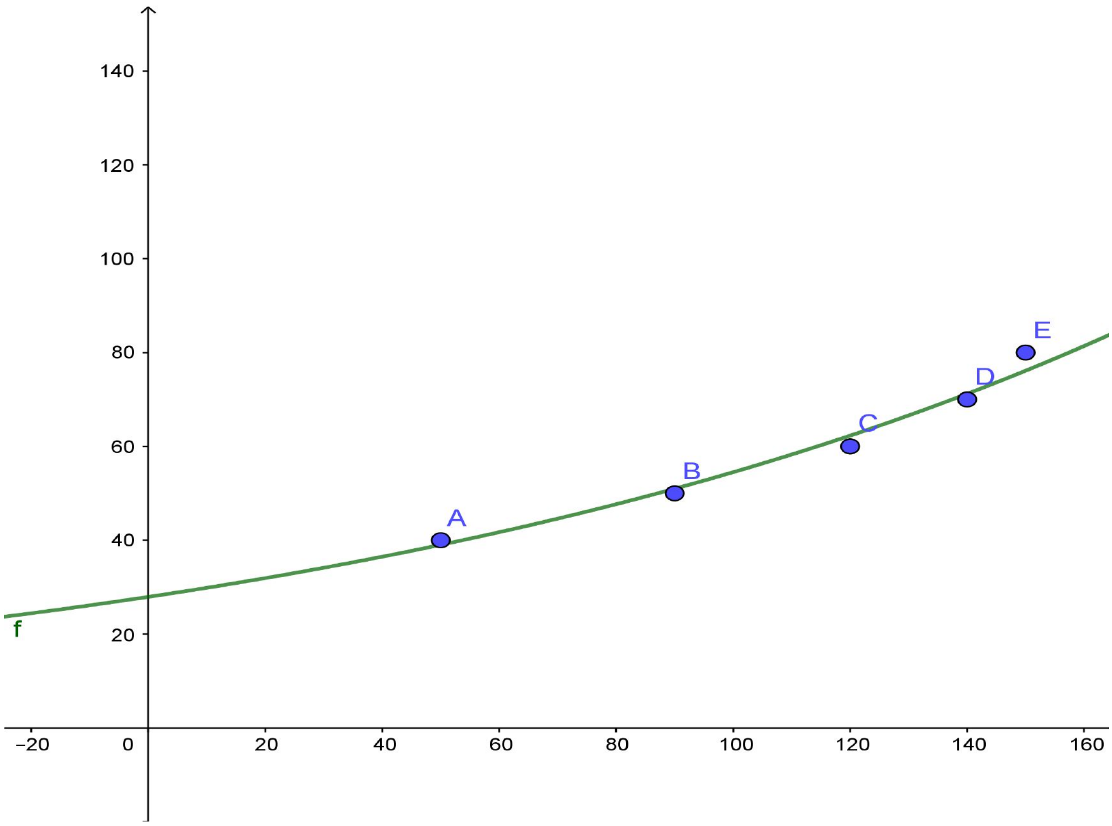
Resolvendo o sistema, encontramos $c_1 \cong 3{,}33$ e $c_2 \cong 0{,}01$. Mas, $a = e^{c_1} = e^{3{,}33} = 27{,}94$ e $b = c_2 = 0{,}01$. Logo, a curva que melhor se adapta aos dados da tabela é dada por $g(x) = 27{,}94e^{0{,}01x}$, como podemos observar no gráfico da Figura 3.

Dessa forma, para saber quanto será gasto com a fabricação de 200 unidades, basta encontrar $g(200)$. Assim,

$$g(200) = 27{,}94e^{0{,}01\cdot 200} = 206{,}45.$$

Portanto, os custos que a empresa terá para fabricar 200 unidades do produto será de 206,45 reais.

Figura 3: Curva que melhor se adapta aos dados do experimento



Fonte: Autoria própria.

5 CONCLUSÃO

Por meio deste trabalho, podemos observar como os conteúdos abordados pela Álgebra Linear fundamentam uma aplicação Matemática importante para diversas áreas. A realização desta pesquisa, possibilitou a autora um estudo mais aprofundado sobre a Álgebra Linear e como os seus conteúdos, que são vistos de forma tão axiomática, podem aparecer em situações do cotidiano, facilitando a compreensão dos mesmos.

Muitos livros foram pesquisados e assim, constatamos a existência de diversas aplicações do Método dos Mínimos Quadrados em diferentes áreas. Desta forma, vimos a possibilidade desse estudo ser aplicado ao ensino básico através da utilização da teoria de matrizes. Neste sentido, um estudo futuro pode ser voltado à administração, sobre a utilização do Método dos Mínimos Quadrados para o controle de estoque e lucratividade de uma empresa, ou ainda, o modelo de Mínimo Quadrado para audição humana.

REFERÊNCIAS

ANDRADE, P. **Elementos da Álgebra Linear**. Notas de aula, UFC, 2006. Disponível em: <https://www.passeidireto.com/arquivo/5802589/elementos-de-algebra-linear---placido-andrade>. Acesso em: 20.09.2018.

BIEZEUNER, R. J. **Álgebra Linear**. Notas de Aula, UFMG, 2006. Disponível em: http://www.mat.ufmg.br/~rodney/notas_de_aula/algebralinear.pdf. Acesso em: 20.09.2018.

BOLDRINI, J. L... [et al.], **Álgebra Linear**. São Paulo, 3. Ed. Editora HARBA ltda, 1980.

CELESTINO, M. R. **Ensino - aprendizagem da Álgebra Linear: as pesquisas brasileiras na década de 90**. Tese (Mestrado em Educação Matemática) - PUC-SP, São Paulo, 2000.

CRATO, N. **O papel do Mínimo Quadrado na descoberta dos planetas**. Disponível em: http://pascal.iseg.utl.pt/ncrato/papers/MinQdSPM.pdf. Acessado em: 20.09.2018.

HOFFMAN, K. **Álgebra Linear**. Traduzido por Adalberto P. Bergamarco. São Paulo, Editora Universidade de São Paulo e Polígono, 1970.

MARINELLI, M. F. **Método dos Mínimos Quadrados**. Trabalho de conclusão de curso, UFSC, Santa Catarina, 2002.

SILVA, A. de A. **Introdução à Álgebra Linear.**
João Pessoa, Editora Universitária/UFPB, 2007.

PULINO, P. **Álgebra Linear e suas aplicações**.
Notas de aula, Universidade Estadual de campinas, São Paulo, 2012. Disponível em: https://www.ime.unicamp.br/~pulino/ALESA/Texto/cap05.pdf. Acesso em: 20.09.2018.

A ABORDAGEM DA TRIGONOMETRIA NO LIVRO DIDÁTICO DO 9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

THE TRIGONOMETRY APPROACH IN THE TEACHING BOOK OF THE 9TH YEAR OF FUNDAMENTAL TEACHING

ALMEIDA, Jeferson José dos Santos[1]

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo caracterizar a didatização do conhecimento sobre trigonometria em duas coleções de matemática para o Ensino Fundamental (Anos Finais). Para isso, identificamos os desafios da abordagem da trigonometria no livro didático de matemática do 9º ano do Ensino Fundamental, bem como refletimos sobre a pertinência de novas perspectivas de abordagem do conteúdo. A pesquisa está ancorada nos pressupostos teóricos defendidos por Ausubel (1982), Boyer (2001), Costa (1997) e, também, nos PCN de matemática (BRASIL, 1997). O *corpus* do trabalho é constituído pelo livro *Matemática 9º ano:* eu gosto mais, de Marcos Miani, publicada pela editora IBEP, no ano de 2012, e o livro *Matemática 9º ano*, de Maymone e Santos, publicada pela editora Formando Cidadãos, no ano de 2013. A análise dos materiais revelou que o livro de autoria de Maymone e Santos (2013), apresenta uma linguagem objetiva e propõe atividades alinhadas com a realidade prática dos alunos. Porém, o livro de Miani (2012), não apresenta uma linguagem clara e objetiva, além de oferecer propostas de atividades sem vinculação prática e que não envolvem situações vivenciadas pelos alunos no seu dia a dia. Percebemos, também, que, dentre as perspectivas de análise por nós investigadas, as que oferecem melhores subsídios para o processo de ensino e aprendizagem de trigonometria no 9º ano do Ensino Fundamental são as que privilegiam a abordagem histórica, bem como a abordagem lúdica do conteúdo.

Palavras-chave: Trigonometria. Desafios. Perspectivas. Livro didático.

ABSTRACT

The present work aims to characterize the knowledge assimilation on trigonometry in two collections of mathematics for Elementary School (Final Years). To do this, we will identify the challenges of the trigonometry approach in the 9th grade mathematics textbook of the Elementary School, as well as reflect on the pertinence of new perspectives in approaching said content. The research is anchored in the theoretical assumptions defended by Ausubel (1982), Boyer (2001) and Costa (1997) and, also, the mathematical NCPs (BRASIL, 1997). The *corpus* of the work is constituted by the book, by Miani, *Matemática 9º ano: eu gusto mais*, published by IBEP in 2012, and the *Matemática 9º ano*, by Maymone and Santos, published by the publishing company Forming Citizens in the year 2013. The analysis of the materials revealed that the collection, Mathematics: 9th year Forming Citizens, by Maymone and Santos (2013), presents an objective language, and proposes activities aligned with the practical reality of the students. However, the 9th grade Mathematical Collection of the I Like More Collection, Miani (2012), does not present a clear and objective language, besides offering proposals of activities without practical linkage and that do not involve situations experienced by the students in their day to day. We also perceive that, among the perspectives of analysis investigated, those that offer the best subsidies for the teaching-learning process of trigonometry in the 9th year of Elementary School are those that favor the historical approach, as well as the playful approach to content.

Keywords: Trigonometry. Challenges. Perspectives. Textbook.

---

[1] Licenciado em Matemática pela Faculdade de Ciências e Tecnologia Professor Dirson Maciel de Barro (FADIMAB). Docente da Escola Técnica Aderico Alves de Vasconcelos (ETE), Goiana, PE, Brasil. Endereço eletrônico: jefersondossantos3011@gmail.com.

1 INTRODUÇÃO

O presente trabalho tem como objetivo caracterizar a didatização do conhecimento sobre trigonometria em duas coleções de Matemática para o Ensino Fundamental (Anos Finais). Para isso, identificamos os desafios da abordagem da trigonometria no livro didático de matemática do 9º ano do Ensino Fundamental, bem como refletimos sobre a pertinência de novas perspectivas de abordagem do referido conteúdo.

A pesquisa está ancorada nos pressupostos teóricos defendidos por Ausubel (1982), Boyer (2001) e Costa (1997), apresentando a parte histórica da trigonometria, e seus conceitos primitivos. Esta pesquisa também está relacionada com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de Matemática (BRASIL, 1997). Ainda, utilizamos as contribuições intelectuais de Gomes (2015) e Lima (2013), que sugerem uma perspectiva de ensino ancorada em fatos históricos, a partir da história da matemática. Utilizamos também as contribuições de Oliveira (2006), apresentando as dificuldades no processo de ensino e aprendizagem da trigonometria.

Para os PCN de Matemática (1997), Gomes (2015), Ausubel (1982) e Perius (2012), os saberes inerentes ao processo de ensino e aprendizagem de matemática devem ser mediados pelo professor de forma objetiva e clara, através de exercícios que relacionem o saber empírico à prática, privilegiando situações-problema do cotidiano do aluno. Entende-se como atividades do cotidiano do aluno aquelas que ele executa regularmente ou que ocorrem no meio social e cultural em que ele está inserido.

Além disso, sabemos que os livros didáticos constituem uma ferramenta de apoio pedagógico e que eles passam por uma análise criteriosa para que sejam adotados pelos estabelecimentos de ensino. Entretanto, mesmo após esses materiais passarem pelo processo de análise, ainda é possível encontrar abordagens fragmentadas de conteúdo ou, ainda, materiais, em que seus autores privilegiam demais apenas um aspecto do conteúdo em detrimento de outros também importantes no processo de mediação pedagógica.

Logo, o ensino da trigonometria deve ter uma conexão entre diversos conceitos e pensamentos matemáticos, havendo a necessidade de articular o referido conteúdo com aplicações dentro e fora da sala de aula, relacionando-o sempre ao cotidiano do aluno. Nesse sentido, vale destacar que é necessário que os alunos

> Saibam usar a Matemática para resolver problemas práticos do cotidiano; para modelar fenômenos em outras áreas do conhecimento; compreendam que a Matemática é uma ciência com características próprias, que se organiza via teoremas e demonstrações; percebam a Matemática como um conhecimento social e historicamente construído; saibam apreciar a importância da Matemática no desenvolvimento científico e tecnológico (BRASIL, 1997, p. 69).

Pressupondo que essa necessidade de resolver problemas práticos do cotidiano seja levada em consideração pelo professor, o aluno terá um melhor entendimento lógico sobre o conteúdo, pois ele pode relacionar o seu aprendizado com situações com as quais ele lida no seu dia a dia.

Portanto, evitar o uso excessivo de cálculos algébricos e dar maior ênfase a aplicações no dia a dia pode fazer com que os alunos encontrem sentido naquilo que aprendem. Com isso, os alunos talvez possam entender a relevância social e, até mesmo cultural, daquilo que está sendo mediado pelo professor. Em outros termos, o ensino da matemática deve ser objetivo e dinâmico, visando melhor entendimento lógico-matemático por parte do aluno, de modo que ele seja capaz de resolver situações-problema de seu dia a dia.

Segundo os PCN (BRASIL, 1997), é perceptível que, na maioria dos livros didáticos, a abordagem da trigonometria é insuficiente e pouco clara, muito embora haja investimento intelectual em abordagens históricas, que são importantes no processo de ensino e aprendizagem de matemática. Acrescente-se, ainda, que as atividades propostas em algumas coleções são de difícil entendimento, uma vez que não oferecem contextualização necessária para o entendimento de situações-problema.

Portanto, é necessário fazer escolhas acertadas no que se refere ao livro didático de matemática, tendo em vista que esse livro irá circular no ambiente escolar por pelo menos três anos e que é este material que deverá auxiliar o professor em seu ofício, muito embora saibamos que o livro didático não substitui a figura do docente. É necessário também, que seja observada a adequação da proposta ao público que irá utilizá-la: os alunos. Consoante a esse aspecto, a trigonometria pode ser apresentada de forma lúdica, fazendo com que o conhecimento chegue de forma rápida e clara ao interlocutor.

2 REVISÃO DE LITERATURA

2.1 Conceito de desafios e perspectivas

Para Oliveira (2002), os seres humanos estão em constante crescimento intelectual, prova disso é que sempre buscamos entender a natureza, suas propriedades e características. O autor relata que, logo após a descoberta do fogo, o ser humano não parou de evoluir. Nos dias atuais, buscamos meios para driblar a morte, as doenças e os desafios da vida, com objetivos de ter uma vivência plena e feliz.

Em contrapartida, Oliveira (2002) relata que a educação é a chave para a evolução humana, visto que as crianças serão os futuros pesquisadores e desenvolvedores da nova geração, denominada por ele de "pós-moderna". Porém, Oliveira (2002) retrata que problemas culturais, econômicos e, até mesmo, a globalização, viabilizaram as dificuldades no processo de ensino e aprendizagem, o que atinge diretamente a evolução da ciência. Essas dificuldades, para Oliveira (2002) e Dourado e Oliveira (2009), afetam diretamente a educação, tornando-se assim, desafios para o processo de ensino e aprendizagem de qualquer disciplina. Logo, desafios de aprendizagem são todas as dificuldades que afetam diretamente as pessoas no processo de ensino.

Bonito (2008) diz que perspectivas são modos pelos quais o docente pode guiar uma aula. Ou seja, diferentes maneiras pelas quais o professor pode mediar aquele conteúdo, porém usando outros recursos, seja ele um jogo, uma dinâmica, uma aula com ênfase em usar a tecnologia para entender determinado conteúdo, entre outras perspectivas. Bonito (2008) cita:

> As orientações da educação científica atual são, claramente, de natureza construtivista, diferenciando-se da anterior visão, que era centrada numa sistemática instrução baseada em curricular de "grandes ideias" [..]. O termo construtivismo é de natureza ampla e apresenta relações de dependência com a filosofia, o ensino e a aprendizagem, embora assente basicamente no contributo do aluno para o significado e para a aprendizagem por meio da atividade individual [..]. De acordo com a perspectiva construtivista da aprendizagem, o aluno chega ao significado selecionando informação e construindo o que sabe [...]. No sentido estrito, a concepção construtivista não deve ser considerada como uma teoria, mas antes como uma perspectiva explicativa que parte da consideração social e socializadora da educação escolar, integrando contributos diversos, cujo denominador comum forma um acordo à volta dos princípios construtivistas (BONITO, 2008, p. 30).

Fica evidente nessa afirmação de Bonito (2008) sua preocupação com o ensino construtivo, ensino que promove o aprender fazendo, em que o aluno é o construtor do seu próprio saber e o docente o direciona. Essa perspectiva, para Ausubel (1982), traz grandes benefícios para o processo de ensino e aprendizagem, visto que o aluno se torna mais independente, crítico e desenvolve o aprender coletivo.

2.2 Conceito e itinerário histórico da trigonometria

Guelli (2009) e Dante (2005) citam que a palavra *trigonometria* significa medida de três ângulos (*tri*: três; *gono*: ângulos; e *metria*: medida) e seus estudos se baseiam na medida de cada ângulo em um triângulo, que chamamos de razões trigonométricas. São três as razões trigonométricas mais conhecidas: seno, cosseno e tangente.

Entretanto, interessa saber que foram vários os processos de experimentação prática dos saberes epistemológicos inerentes à trigonometria para que hoje pudéssemos utilizar os procedimentos lógico-matemáticos advindos do estudo dela.

A trigonometria, para Boyer (2001), não foi obra de um só homem ou de um só povo. Seus postulados já auxiliavam povos em 1650 a.C. na construção de abrigos. Costa (1997), Fritzen (2011) e Boyer (2001) citam que os primeiros indícios de cálculos trigonométricos foram realizados por povos do Egito e da Babilônia. Os egípcios faziam cálculos de semelhanças de triângulos e razões de números para a construção de pirâmides. Já os babilônios usavam a trigonometria para o entendimento da astronomia.

Somente um pouco mais tarde, os gregos começaram a usar a trigonometria e, por volta de 1500 a.C, criaram o relógio do sol, usando o mesmo conceito dos egípcios, conhecido como Gnômom. Esse relógio consistia em determinar as horas do dia pela posição do sol. Ele era feito de vários materiais. Contudo, ele deveria estar localizado em uma superfície plana com uma haste levantada indicada para o norte e em um lugar aberto.

As razões trigonométricas começaram com os hindus, pois eles usavam uma tábua conhecida como Jiva, contendo as razões dos senos, para medir distâncias, comprimentos e profundidades. No entanto, esse sistema teria poucas provas existentes, já que para eles essa tábua foi escrita por um deus chamado Sunrya Siddhanta. Contudo, essa ideia foi o que fez com que muitos curiosos se aprofundassem mais nesse sistema. De acordo com Fritzen (2011), o estudo das razões trigonométricas começou a ter sentido com Hiparco, conhecido como o pai da trigonometria, e foi aperfeiçoado por Ptolomeu, que conseguiu achar cordas correspondentes a diversos ângulos, onde a razão era a metade da função do ângulo. Para Fritzen (2011), isso equivale à tabela dos senos.

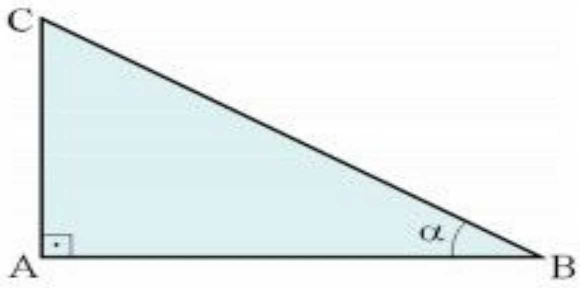
Para Costa (1997), a trigonometria só veio tomar forma no século XVI com vários matemáticos e suas teorias. Dentre eles, destacam-se Copérnico, Napier, Rhaeticus, Isaac Newton e John Newton. Porém, quem mais se destacou foi Euler, pois ele tomou o raio de um círculo como unidade, além de ter definido as funções que, antes de 1768, eram em números. Essa transição começou no século XVI e rendeu o início do cálculo infinitesimal, que foi desenvolvido com intuito de verificar as variações das taxas de grandezas e as acumulações de quantidades.

2.3 Conceitos-chave para o estudo da trigonometria no 9º ano do Ensino Fundamental

Ao realizar pesquisa sobre os conceitos-chave para o estudo da trigonometria, elencados pelos autores das principais coleções indicadas para escolha pelos professores de matemática do 9º ano do Ensino Fundamental, identificamos que, na maioria dos livros didáticos, foram abordados os seguintes itens: razões trigonométricas e ciclo trigonométrico (elementos da circunferência, comprimento da circunferência, arco da circunferência e relações métricas). Interessa saber que a articulação desses conceitos-chave e os apontamentos sobre a funcionalidade prática deles ao longo das unidades didáticas serão objeto de discussão na seção de caracterização das duas coleções adotadas por uma escola da rede particular de ensino da cidade de Itaquitinga-PE no ano de 2016.

As razões trigonométricas surgiram com a necessidade do homem relacionar ângulos com medidas. No entanto, essas razões passaram por um longo período de estudos e testes, até que, após um tempo, foi possível determinar essa relação em um triângulo retângulo.

Figura 1: Representação das razões trigonométricas no triângulo retângulo



Fonte: Marques (2014, p. 16)

Marques (2014) nos apresenta na figura acima, onde o autor destaca que a partir dos segmentos $C\hat{A}B$ é possível obter um ângulo de $90°$. Com isso, podemos concluir que se trata de um ângulo reto e classificar a figura acima como um triângulo retângulo**.** O autor também afirma que, a partir dos segmentos $A\hat{B}C$ e $A\hat{C}B$, é possível notar que eles são menores que $90°$, logo podemos afirmar que eles são ângulos agudos. A partir desse pressuposto, podemos denominar esses segmentos como catetos. O segmento CB é oposto ao ângulo $\hat{\mathrm{A}}$, além de ser o maior segmento do triângulo retângulo. Com essas características, esse segmento é denominado de hipotenusa**.** Nomeando os demais lados e tomando como referência o ângulo α, podemos obter o segmento AC como cateto oposto, pois o mesmo é oposto ao ângulo α. O segmento AB, por sua vez, é o cateto adjacente, pois ele complementa o ângulo α.

Além do já exposto, é preciso entendermos como é feito o cálculo das razões trigonométricas. Marques (2014) cita que o cálculo do seno é desenvolvido pela razão entre o cateto oposto e a hipotenusa. O cosseno por sua vez é a razão entre o cateto adjacente e a hipotenusa. A tangente é obtida pela razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente. Em outros termos, levando em consideração o ângulo α, obtemos as seguintes razões trigonométricas presentes no quadro 1.

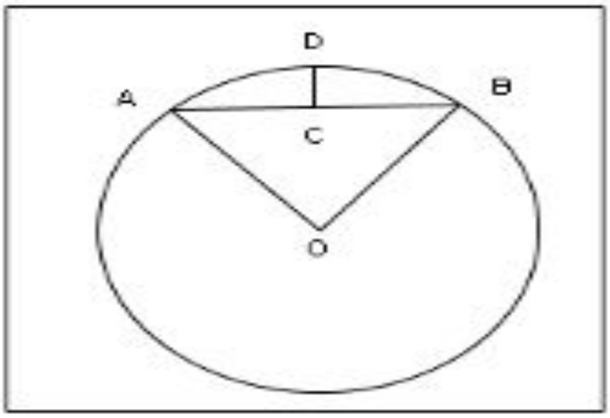
Consoante ao detalhamento dos principais tópicos abordados nos livros didáticos de matemática do 9º ano do Ensino Fundamental, é preciso discutir sobre o ciclo trigonométrico. Borges (2009) afirma que ele se inscreve numa circunferência orientada por um raio, cuja coordenada é cartesiana. Assim, devemos conhecer os elementos da circunferência para podemos entender os seguintes procedimentos lógico-matemáticos, conforme podemos observar na figura 2.

Quadro 1: Cálculo das razões trigonométricas

Seno	$\operatorname{sen}\alpha = \frac{AC}{BC}$
Cosseno	$\cos\alpha = \frac{AB}{BC}$
Tangente	$\operatorname{tg}\alpha = \frac{AC}{AB}$

Fonte: Marques (2014, p. 16-17)

Figura 2: Propriedades da circunferência



Fonte: Lorenzoni (2003, p. 55 apud BORGES, 2009, p. 21)

Borges (2009) ressalta em seu documento que o centro é o ponto comum para todos os lados da circunferência. O raio, segmentos OA e OB, é uma reta que se desenvolve no centro e tem seu destino em qualquer extremidade da circunferência. O diâmetro, por sua vez, é uma reta que vai de uma extremidade do ciclo até outra, cortando o centro. Logo, o diâmetro é igual a duas vezes o raio. Já a corda, o segmento AB, é uma reta que vai de uma extremidade a outra do ciclo, sem cortar o centro. Chamamos de flecha, o segmento CD, pois ela tem começo no centro da corda e seu destino em qualquer extremidade dependendo da corda.

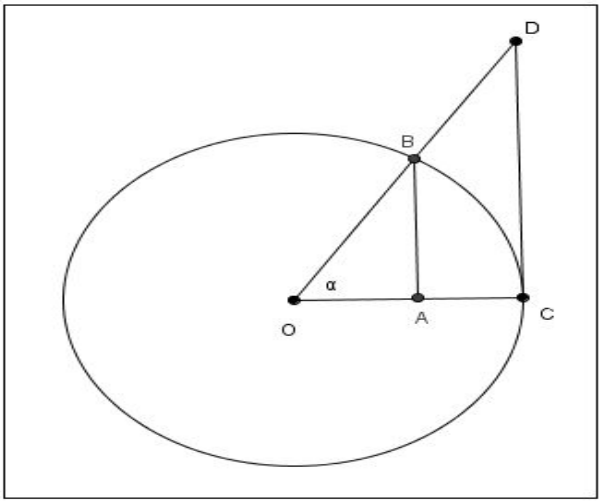
Partindo dessas propriedades da circunferência, é possível afirmar que o aluno possivelmente poderá entender de forma mais significativa os segmentos secante e tangente (Figura 3). Isso é detalhado em Borges (2009).

O segmento tangente no sistema é a reta CD. Podemos observar que esse segmento corta a circunferência em um único ponto e o ângulo formado é de 0°. A secante, mostrada na figura como o segmento OD, é uma reta contínua que corta o ciclo em dois pontos, sem passar pelo centro.

3 METODOLOGIA

Nossa pesquisa é qualitativa, porque pretendemos fazer uma caracterização da didatização da trigonometria no livro didático do 9° do Ensino Fundamental. Neste sentido, o nosso *corpus* é constituído pelos livros: *Matemática 9º ano*, de autoria de Maymone e Santos, publicada pela editora Formando Cidadãos no ano de 2013; e *Matemática 9º ano: eu gosto mais*, de Marcos Miani, publicada pela editora IBEP no ano de 2012. Escolhemos essas coleções, porque elas eram alvo de críticas que dividiam a coordenação pedagógica de uma escola da rede particular de ensino, localizada no município de Itaquitinga-PE, o que nos instigou a caracterizar as coleções adotadas na escola.

Figura 3: Segmentos secante e tangente



Fonte: Eves (2004, p. 266 apud BORGES, 2009, p. 22)

É válido ressaltar que a primeira coleção, *Matemática 9º ano: eu gosto mais* (MIANI, 2012), foi adotada pela escola até o ano de 2016. A segunda coleção, *Matemática 9º ano* (MAYMONE; SANTOS, 2013), foi adotada no ano seguinte. Entretanto, havia professores que defendiam ser a coleção de Miani (2012) superior à outra e vice-versa. Nessa perspectiva, decidimos caracterizar a abordagem da trigonometria nas duas coleções e, com os dados coletados, tecer comentários sobre os aspectos positivos e negativos de cada uma delas, tendo em vista a qualidade do material produzido.

Para fazer a análise de dados desta pesquisa, obedecemos às seguintes etapas: 1º fase – seleção das coleções; 2º fase – caracterização da didatização da trigonometria nas coleções selecionadas; 3º fase – reflexão crítica sobre o material coletado; 4º fase – apresentação de novas perspectivas para o ensino de trigonometria e reflexão sobre o potencial de cada uma delas no contexto escolar.

4 DISCUSSÃO DA PROBLEMÁTICA DO ENSINO DE TRIGONOMETRIA

4.1 Análise da abordagem do conteúdo no livro *Matemática 9º ano: eu gosto mais*

Miani (2012) inicia a abordagem do capítulo 7 do livro *Matemática 9º ano: eu gosto mais* sem explicitar os objetivos desejáveis para o estudo da trigonometria. Todavia, é perceptível que a proposta do autor é construir progressivamente a definição de cada uma das razões trigonométricas. Somente no final de cada reflexão é que ele expõe o conceito em definitivo. Em outros termos, Miani (2012) apresenta ao aluno uma pequena contextualização sobre as razões trigonométricas e qual a necessidade de elas existirem, mostrando sua forma prática e sua aplicabilidade em triângulos retângulos. O autor também elabora um pequeno resumo, colocando só as fórmulas para o cálculo das razões trigonométricas. Em seguida, Miani (2012) também propõe exercícios que estabelecem situações que obtêm relação com a rotina do aluno.

A exposição é ilustrada com exemplos precisos sobre a teoria, muito embora haja pouca relação dos exemplos apresentados com situações cotidianas. A abordagem prática, para Ausubel (1982), os PCN (BRASIL, 1997), e Gomes (2015), pode trazer benefícios significativos para o aluno, visto que ele pode absorver o conteúdo ensinado em sala e aplicá-lo em seu cotidiano. Além disso, é possível encontrar alguns textos que remetem à abordagem histórica do conteúdo. Essa abordagem histórica também pode resultar em um melhor desempenho em matemática, tendo em vista que Gomes (2015) e Boyer (2001) citam que esse tipo de metodologia faz com que o aluno reflita sobre o desenvolvimento do conteúdo e entenda o processo que originou a ideia matemática daquele mesmo conteúdo. Em outros termos, "através da História o estudante/professor passa a conhecer a Matemática como um saber que tem significado dentro de um contexto e que foi, e está sendo, construído pela necessidade de cada época" (GOMES, 2015, p. 2). Nessa mesma perspectiva, D'Ambrosio (1997) defende que:

> As ideias matemáticas comparecem em toda a evolução da humanidade, definindo estratégias de ação para lidar com o ambiente, criando e desenhando instrumentos para esse fim, e buscando explicações sobre os fatos e fenômenos da natureza e para a própria existência. Em todos os momentos da história e em todas as civilizações, as ideias matemáticas estão presentes em todas as formas de fazer e de saber (D'AMBROSIO, 1997, p. 97).

As atividades propostas, por sua vez, são constituídas por exercícios que instigam o raciocínio lógico-matemático dos alunos e que apresentam uma contextualização voltada ao dia a dia deles. Logo, esses exercícios trazem uma metodologia voltada à aplicação do conteúdo no cotidiano do aluno e percebemos que a exposição teórica não se encontra plenamente articulada com esse cotidiano. É válido destacar que, segundo Ausubel (1982), os PCN (BRASIL, 1997), Gomes (2005) e Azambuja (2013), esse tipo de metodologia pode ser benéfica para o processo de ensino e aprendizagem, pois o aluno pode entender o conteúdo e sua aplicabilidade. Lembremo-nos, ainda, que "a matemática no cotidiano é uma vertente dessa área do conhecimento considerada como agente potencializador do ensino e da aprendizagem, e ainda, como um elemento indispensável ao processo pedagógico" (AZAMBUJA, 2013, p. 8).

Dando continuidade à caracterização, Miani (2012) apresenta de forma descontextualizada a tabela de razões trigonométricas com valores de $1°$ a $89°$, o que pode causar estranhamento por parte dos alunos. Na página seguinte, o autor exibe exemplos envolvendo os valores mencionados na tabela de razões trigonométricas, sugerindo haver facilidade na resolução das questões utilizadas como exemplo. Todavia, é perceptível a descontextualização das situações-problema e a falta de reflexão sobre o conteúdo apresentado.

Entenda-se por descontextualização a ausência de qualquer reflexão sobre elementos do contexto do estudo sobre ângulos, nenhuma abordagem histórica, tampouco explicação sobre a necessidade daquela tabela. Isso pode ser um problema, visto que Gomes (2015) cita que a história da matemática pode ser usada como uma reflexão do conteúdo, pois a partir dela o professor pode mostrar a necessidade dos ângulos na Antiguidade e sua aplicabilidade nos dias atuais. Fazendo essa reflexão, é possível acessar a realidade do aluno e ilustrar a mediação do conteúdo com exemplos de situações-problema com as quais ele convive. Aqui merece destaque o fato de que a contextualização pode trazer um melhor entendimento matemático, pois, conforme Luccas e Batista (2008), ela pode os estimular a aprender, principalmente quando o contexto é diversificado, ou seja, que aborde outra perspectiva. A título de exemplificação, na figura 4 há a exposição teórica e os exemplos utilizados em Miani (2012):

Figura 4: Exposição sobre a aplicação das razões trigonométricas

Veja, a seguir, alguns exemplos de aplicação dessa tabela:

EXEMPLO 1

Qual é o valor de sen 42°?

Vamos encontrar, na tabela, o seno de 42°.

Na coluna Ângulo, localizamos 42°.

Na coluna seno, encontramos 0,6691.

Logo: **sen 42° = 0,6691** (valor aproximado).

EXEMPLO 2

Determine a medida do ângulo x, sendo cos x = 0,2250.

Nesse exemplo conhecemos o cosseno do ângulo e desejamos determinar o valor do ângulo.

Na coluna cosseno, localizamos o número 0,2250.

Logo: cos x = 0,225 ⟶ **x = 77°**

Na coluna ângulo, encontramos 77°.

EXEMPLO 3

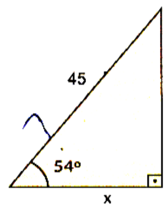
Qual é o valor de x no triângulo ao lado?

Veja como se usa a tabela para calcular o valor de x nesse triângulo retângulo.

A hipotenusa mede 45 mm.

O cateto adjacente ao ângulo de 54° é x.

$\cos 54° = \frac{x}{45} \longrightarrow x = 45 \cdot \cos 54° \longrightarrow x \doteq 45 \cdot 0{,}5878 \longrightarrow \mathbf{x = 26{,}451}$.



O cateto x mede 26,45 mm.

Fonte: Miani (2012, p. 145)

Logo após a apresentação dos exemplos, o autor traz uma lista de exercícios com questões que podem estimular os alunos a determinar medida de lagos, altura de muros, tamanho de escadas, altura de pipas e tamanho de torres. Além disso, o autor preocupa-se em ilustrar as questões com figuras geométricas, como losango, paralelogramo e retângulo. Essa estratégia dialoga com os PCN (BRASIL, 1997), Gomes (2015), Luccas e Batista (2008) e Azambuja (2013), que sugerem que as aulas de matemática tenham uma aplicabilidade no cotidiano do aluno, de modo que as questões propostas dialoguem com o dia a dia deles, pois, assim, a aprendizagem poderá ser efetivamente construída.

Miani (2012) também apresenta um boxe com uma breve história da trigonometria somente na página 149, conteúdo que deveria ter sido apresentado nas primeiras páginas do capítulo. É válido ressaltar que, no boxe, constam informações sobre o significado da palavra trigonometria e sua utilidade em nosso cotidiano. São essas informações que podem fazer com que aluno saiba qual a necessidade da trigonometria e como é possível utilizá-la na resolução de situações-problema.

Na sequência, o autor prossegue com o estudo da trigonometria com o conceito de razões trigonométricas. No entanto, a exposição dele dá especial enfoque aos ângulos de $30°$, $45°$ e $60°$, sem mencionar que eles são popularmente conhecidos como ângulos notáveis. Há apenas uma indução para essa compreensão, o que não acontece de forma explícita, como podemos observar no trecho: “As razões dos ângulos de $30°$, $45°$ e $60°$ são muito úteis para a resolução de diversos problemas e podem ser facilmente calculadas que seja necessário recorrer a tabela ou as construções geométricas” (MIANI, 2012, p, 150).

Nessa seção, o autor também conduz uma reflexão sobre os conceitos que serão abordados e sintetiza estas informações através de um quadro na página 151. É nesse ponto em que ele pode fazer com que o aluno entenda o porquê de cada ângulo apresentar determinado valor, o que, certamente, facilita a compreensão do leitor e evidencia o cuidado do autor nesse trecho, pois ele não impõe o conteúdo, mas sim, mostra como seu conceito é construído. Para Ribeiro (2007), as demonstrações matemáticas facilitam o processo de ensino e aprendizagem e podem fazer com que o aluno reflita criticamente sobre o que está sendo exposto.

Logo após essa contextualização sobre as razões trigonométricas com ângulos de $30°$, $45°$ e $60°$, o autor apresenta exercícios que trazem uma aplicabilidade envolvendo o cotidiano do aluno.

Miani (2012) ainda constrói uma reflexão sobre a utilização das razões trigonométricas em um triângulo qualquer, em que é perceptível a utilização de exemplo que envolve o cotidiano do aluno. Ele deixa claro que as relações estudadas já não são cabíveis nesse tipo de problema e que, para isso, é necessário estudar e aplicar outras relações.

Nesse sentido, na página seguinte, o autor apresenta novas relações trigonométricas, sendo elas a lei dos senos e a lei dos cossenos. Ele segue fazendo a apresentação de ambas de forma descontextualizada, sem apresentar reflexão sobre o conteúdo ou alguma abordagem histórica, quando poderia construir com seus alunos o conceito e a funcionalidade da lei dos senos e da lei dos cossenos, apresentando exemplos do cotidiano dos alunos e propondo, também, atividades que dialoguem com o universo de situações-problema com as quais os alunos lidam no seu dia a dia. Em outros termos, podemos observar que o autor se preocupa em apresentar a face prática do conteúdo, porém não apresenta o embasamento teórico necessário à construção coletiva dos saberes em situação didática, o que possivelmente dará margem a dificuldades de compreensão do que está sendo exposto.

No que se refere aos exercícios propostos, é conveniente destacar que eles são oferecidos de forma blocada, ou seja, o autor expõe o conteúdo em itens e subitens e, após a sua exposição, apresenta os exercícios. Contudo, é pertinente ressaltar que, em um universo de 34 exercícios, apenas oito são contextualizados. E, nessa altura da discussão, é salutar destacar que:

> É importante que a Matemática desempenhe, equilibrada e indissociavelmente, seu papel na formação de capacidades intelectuais, na estruturação do pensamento, na agilização do raciocínio dedutivo do aluno, na sua aplicação a problemas, situações da vida cotidiana e atividades do mundo do trabalho e no apoio à construção de conhecimentos em outras áreas curriculares (BRASIL, 1997, p. 25).

Por fim, Miani (2012) apresenta um boxe com informações sobre o astrolábio, uma espécie de bússola que os marinheiros usavam com o objetivo de saber a orientação espacial, com referência à posição do sol. Logo após, ele mostra os materiais que necessita para a realização desse experimento, além de expor como ele é feito. O autor finaliza esse experimento, ensinando como o astrolábio era utilizado e qual era a real finalidade dele para os marinheiros da época.

Para Meneghetti (2011), as experimentações matemáticas que o autor sugere, são de extrema relevância ao aluno, e ao processo de ensino e aprendizagem. Ainda segundo o autor, essas experimentações podem fazer com que o aluno tenha um melhor desempenho em resolução de problema. Meneghetti (2011) também afirma que, com o uso das experimentações matemáticas, “focaliza-se um dos experimentos e suas atividades com o objetivo de indicar as possibilidades de relacioná-las com abordagens alternativas do ensino de matemática, tais como a resolução de problemas e a modelagem matemática” (MENEGHETTI, 2011, p. 1).

4.2 Análise da abordagem do conteúdo no livro *Matemática 9º ano*

No livro de matemática da coleção *Matemática 9º ano*, publicada pela editora Formando Cidadãos no ano de 2013, Maymone e Santos iniciam a abordagem da trigonometria apoiando na abordagem histórica e na importância da trigonometria para a humanidade, o que para Boyer (2001), Gomes (2015) e, ainda, para os PCN (BRASIL, 1997) é de extrema importância, já que o aluno pode refletir sobre o conteúdo, antes de aprendê-lo.

Em seguida, Maymone e Santos (2013) iniciam a exposição das razões trigonométricas: seno, cosseno e tangente. Essa exposição é contextualizada e objetiva, pois os autores fazem uma reflexão do conteúdo e, em seguida, mostram a principal necessidade dessas razões. Esse tipo de abordagem, em que se propõe uma reflexão do conteúdo e uma ilustração de sua aplicabilidade, segundo os PCN (BRASIL, 1997), Gomes (2015) e Ausubel (1982), pode ser benéfica para o processo de ensino e aprendizagem, já que os alunos podem aprender o conteúdo mais rápido. Entretanto, os exemplos que fazem parte da exposição teórica não dialogam com situações do cotidiano do aluno.

Maymone e Santos (2013), logo após mostrar as razões trigonométricas, iniciam uma discussão sobre ângulos notáveis. Eles apresentam instruções e exemplos de cada ângulo citado. Além de abordar situações-problema que envolvem o dia a dia do aluno, os autores ainda propõem a construção de tabela com os ângulos notáveis e convidam os alunos a resolverem exercícios que se aproximam do cotidiano deles. Portanto, nessa seção, é possível observar que os autores se aproximam do que é desejável no processo de mediação de conteúdos matemáticos.

Os autores dão continuidade em seu capítulo com o subtema denominado Relação Fundamental da Trigonometria.

Merece destaque a apresentação de dois boxes em que os autores apresentam a prova dos valores dos ângulos notáveis e uma pequena mensagem aos seus leitores, com o objetivo de mostrar a importância da trigonometria para o crescimento profissional. O primeiro boxe tem maior destaque pela cor avermelhada, com o título denominado de “Importante”. Nesse boxe, são apresentados os ângulos notáveis de $30°$, $45°$ e $60°$ (Figura 5).

O segundo boxe traz uma citação que objetiva fazer com que os alunos reflitam sobre esse conteúdo apresentado e concluam que é necessário aprender trigonometria, pois eles podem aplicar esses conhecimentos em diversas situações do dia a dia e ter até mesmo um melhor desenvolvimento profissional, dependendo da carreira que seguir. Com isso, os autores ratificam a ideia de que a trigonometria poderá estar presente na vida profissional e pessoal dos alunos.

Adiante, os autores apresentam a tabela das razões trigonométricas dos ângulos agudos, de $1°$ a $89°$. Porém, já havia sido destacado quais são os ângulos notáveis e sua aplicação, o que pode colaborar para uma melhor compreensão dos problemas lógico-matemáticos envolvendo o conteúdo. Logo após a apresentação da tabela, são mostrados exemplos envolvendo situações com as quais os alunos podem se deparar na sua rotina.

Figura 5: Prova dos valores dos ângulos notáveis

1) Seno, cosseno e tangente dos ângulos de medidas 30°, 45° e 60° (conhecidos, por alguns autores, como **ângulos notáveis** por aparecerem com muita frequência, principalmente nos problemas de Física): para encontrá-los nos ângulos de 30° e 60°, usamos um triângulo equilátero e, para encontrá-los no ângulo de 45°, usamos um quadrado.

2) Existe uma outra forma de apresentar a prova trigonométrica num triângulo em função de seus lados, como mostraremos logo abaixo:

Considere o triângulo equilátero apresentado na figura ao lado. A Geometria Plana nos mostra que a altura *h* é perpendicular ao lado, e sua medida é igual a $h = \frac{L \times \sqrt{3}}{2}$. A altura também é mediana (divide-se ao meio) e bissetriz do ângulo interno. Assim, no triângulo retângulo *ACD*, temos a hipotenusa *L* e os catetos *h* e $\frac{L}{2}$. Calculando o seno, o cosseno e a tangente dos ângulos de 30° e 60° vem:

$$\text{sen } 30° = \frac{\frac{L}{2}}{L} = \frac{L}{2} \times \frac{1}{L} = \frac{1}{2}$$

$$\text{sen } 60° = \frac{h}{L} = \frac{\frac{L \times \sqrt{3}}{2}}{L} = \frac{L \times \sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{L} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 30° = \frac{L}{L} = \frac{\frac{L \times \sqrt{3}}{2}}{L} = \frac{L \times \sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{L} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{tg } 30° = \frac{\frac{L}{2}}{h} = \frac{\frac{L}{2}}{\frac{L \times \sqrt{3}}{2}} = \frac{L}{2} \times \frac{2}{L \times \sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cos 60° = \frac{\frac{L}{2}}{L} = \frac{L}{2} \times \frac{1}{L} = \frac{1}{2}$$

$$\text{tg } 60° = \frac{h}{\frac{L}{2}} = \frac{\frac{L \times \sqrt{3}}{2}}{\frac{L}{2}} = \frac{L \times \sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{L} = \sqrt{3}$$

Fonte: Maymone e Santos (2013, p. 172)

Em seguida, são propostos exercícios contextualizados (todos eles), que envolvem situações-problema concretas, como as que tratam da medição de rampas, de altura de avião, de bandeira e de poste. Conforme os PCN (BRASIL, 1997), Gomes (2015), Ausubel (1982) e Azambuja (2013), essa abordagem pode acarretar benefícios futuros para o processo de ensino e aprendizagem, tendo em vista que o aluno pode absorver os conteúdos mediados em sala e aplicá-los em sua rotina frequente.

Em seguida, Maymone e Santos (2013) discorrem sobre a lei dos senos. Eles começam esse estudo com uma pequena introdução, em que citam que, “em todo triângulo, os seus lados são proporcionais aos senos dos ângulos opostos a eles” (MAYMONE; SANTOS, 2013, p. 178). Em seguida, os autores da obra provam essa introdução (Figura 6).

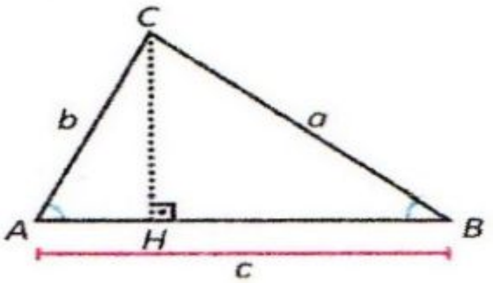
Figura 6: Lei dos Senos

Lei dos senos, ou teorema de Lamy

O teorema de Lamy afirma que, em todo triângulo, os seus lados são proporcionais aos senos dos ângulos opostos a eles. Esse teorema também é conhecido como **lei dos senos**.

Vamos demonstrar a lei dos senos:

Seja o triângulo ABC acutângulo e $\overline{CH}$ a altura relativa ao lado $\overline{AB}$.



$$\triangle CAH: \text{sen}\,\hat{A} = \frac{\overline{CH}}{b} \rightarrow \overline{CH} = b\,\text{sen}\,\hat{A}$$

$$\triangle CBH: \text{sen}\,\hat{B} = \frac{\overline{CH}}{a} \rightarrow \overline{CH} = a\,\text{sen}\,\hat{B}$$

$$\downarrow$$

$$b\,\text{sen}\,\hat{A} = a\,\text{sen}\,\hat{B} \rightarrow \frac{a}{\text{sen}\,\hat{A}} = \frac{b}{\text{sen}\,\hat{B}}$$

Procedendo de modo análogo: $\frac{b}{\text{sen}\,\hat{B}} = \frac{c}{\text{sen}\,\hat{C}}$.

Fonte: Maymone e Santos (2013, p. 178)

Maymone e Santos (2013), com um pequeno boxe no final da página, conseguem colocar em evidência a fórmula apresentada, deixando claro que a lei dos senos é eficaz em um triângulo qualquer. Para Nagafuchi e Batista (2008), esse tipo de abordagem se faz necessária, pois o aluno precisa saber provar a necessidade de fazer aquele determinado cálculo, para que o ensino de matemática não se torne vigorosamente mecânico.

Em seguida, os autores dão ênfase a exemplos práticos do dia a dia dos alunos. No entanto, eles mostram apenas um exemplo. Isso talvez não seja suficiente para o entendimento do conteúdo, tendo em vista que, adiante, os autores sugerem exercícios com situações-problema frequentes da rotina dos estudantes.

Considerando essa problemática, Gomes (2015) e os PCN (BRASIL, 1997) reiteram ser necessária uma reflexão do conteúdo exposto e, em seguida, uma exibição de aplicações dele. Com base nisso, podemos concluir que talvez haja dificuldade partindo dos alunos na resolução dos exercícios propostos, já que os mesmos podem não ter um entendimento suficiente.

Os autores ainda abordam a lei dos cossenos, com sua demonstração. Em seguida, os autores dão total atenção a exemplos que envolvem situações-problemas do cotidiano do aluno.

Por fim, Maymone e Santos (2013) apresentam uma lista de exercícios, que aborda todo conteúdo trabalhado ao longo do capítulo. A exposição dessa lista de exercícios nos remete à preocupação dos autores em revisar todo conteúdo estudado.

5 PERSPECTIVAS PARA O ENSINO DE TRIGONOMETRIA

Segundo os PCN (BRASIL, 1997), Strasburg, Sperotto e Meneghetti (2015) e Ausubel (1982), é importante que os educadores se adaptem às novas estratégias de mediação do saber, usando novas perspectivas em prol de uma aula diferente. Mas o que seriam essas novas perspectivas? Para os PCN (BRASIL, 1997) e para Gomes (2015), as novas perspectivas para o ensino da trigonometria consistem em atividades que abordem o conteúdo proposto, porém com outra metodologia, saindo do convencionalismo do quadro e giz. Dessa forma, fica claro que aulas práticas usando tecnologias, materiais concretos, história da matemática, entre outros, são novas perspectivas de ensino. Desse modo, apresentamos abaixo novas perspectivas de ensino de trigonometria que podem ajudar o professor em suas aulas, podendo dinamizá-las e torná-las mais atrativas.

Segundo Strasburg, Sperotto e Meneghetti (2015), uma aula com uso de *software* pode trazer grandes benefícios ao aluno e um melhor entendimento da trigonometria. Os autores citam o *software Geogebra* e todos os atributos desse programa como instrumentos importantes para desenvolver uma abordagem dinâmica sobre o ciclo trigonométrico. Segundo eles, a abordagem do conteúdo, por meio desse recurso, contribui para um melhor desenvolvimento do aluno com relação à trigonometria, em especial no que se refere ao ciclo trigonométrico.

Strasburg, Sperotto e Meneghetti (2015) também ressaltam que o conhecimento sobre as razões trigonométricas pode ser mediado através do *software Geogebra.* Todavia, na pesquisa realizada por eles, não foi desenvolvido todo o conteúdo de razões trigonométricas. Ao invés disso, foi dado um maior enfoque às razões que têm maior aplicabilidade na matemática, que são elas as razões seno, cosseno e tangente.

Por fim, Strasburg, Sperotto e Meneghetti (2015) apresentaram aos alunos algumas resoluções de situações-problema sobre o conteúdo com o auxílio do *software*. Logo depois, propuseram aos alunos exercícios de verificação da aprendizagem, os quais a grande maioria conseguiu responder sem muita dificuldade, o que caracteriza uma aprendizagem significativa. Porém, foi perceptível, na outra parte dos alunos, certa dificuldade em entender os pressupostos teóricos da trigonometria.

Ainda existem outros métodos de ensino de trigonometria em sala de aula como, por exemplo, o método de ensino por meio de jogos didáticos. Esses jogos baseiam-se nos conceitos básicos da trigonometria, tais como, as relações métricas e razões trigonométricas, que foram bases didáticas para a formulação desses jogos.

Marinho et al. (2015) formularam jogos, cujo princípio é melhorar o desempenho lógico-matemático nos conceitos básicos citados acima e na resolução de questões envolvendo a trigonometria básica. Interessa saber que esses jogos foram apresentados a professores dos anos finais do Ensino Fundamental, para que eles tivessem um olhar crítico sobre jogos na resolução de questões que envolvem o cotidiano do aluno. Também foi proposta uma lista de exercícios que os professores deveriam responder com o auxílio dos jogos apresentados. Além disso, os professores deveriam analisar e depois apresentar ao grupo se os alunos teriam dificuldade ou não para resolver as questões propostas.

A análise feita por Marinho et al. (2015) dos professores que participaram da oficina de jogos foi muito positiva, tendo em vista que todos os docentes responderam as questões e apresentaram o seu método de resolução de forma lúdica. Além disso, os professores afirmaram que seus alunos seriam capazes de responder as questões, usando o método sugerido pelo autor.

Outra perspectiva é relacionar fatos históricos da trigonometria para ensiná-la. Silveira e Balieiro Filho (2013) defendem essa perspectiva, mostrando que relacionar a história da trigonometria com o processo de ensino é uma forma valiosa para compreendê-la, visto que faz com que o conhecimento chegue mais fácil e claro para o aluno.

Gomes (2015) cita que esse meio de ensino vem sendo muito usado e impulsionado pelos educadores. Ele explica que o método pode trazer melhorias para a aprendizagem, porém deve-se analisar o nível da turma e se o facilitador que utiliza os fatos históricos tem ao seu favor, pelo menos, o hábito de leitura e o domínio o assunto. Por outro lado, alguns pesquisadores entendem que a história da matemática é uma “área de conhecimento matemático, campo de investigação da científica. Por isso, é ingênuo considerá-la com um simples instrumento metodológico” (GOMES, 2015, p. 14).

A perspectiva mencionada em Silva, Sá e Oliveira (2016) também pode trazer uma abordagem nova para o ensino de trigonometria. Essa abordagem propõe que a trigonometria seja apresentada em um geoplano, que é uma estrutura de madeira com pregos pequenos, separados pela distância de $1\ cm$, formando um quadrado ou retângulo com vários pregos e as figuras planas são criadas com elásticos.

Silva, Sá e Oliveira (2016) aplicam o conteúdo de razões trigonométricas com o auxílio do geoplano. No primeiro momento, os autores sugeriram que os alunos criassem um triângulo equilátero com auxílio de elásticos. No segundo momento, eles refletiram sobre os conceitos de razões trigonométricas, trazendo sua forma primitiva. Por último, demonstraram como é feito o cálculo dessas razões e propuseram exemplos envolvendo o cotidiano dos alunos.

Portanto, existem inúmeras maneiras para desenvolver a trigonometria e entender a sua funcionalidade no Ensino Fundamental, visando sempre um melhor entendimento dos alunos para que, assim, as aulas possam atender ao que sugerem os PCN (BRASIL, 1997), Gomes (2015), Azambuja (2013) e Ausubel (1982), ou seja, uma abordagem de ensino de trigonometria que privilegie uma aplicação no cotidiano, fazendo com que o aluno possa refletir entender e aplicar esse conteúdo no seu dia a dia.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Embora o professor encontre dificuldades na sala de aula, cabe a ele buscar novas perspectivas para melhorar o entendimento do conteúdo da trigonometria. Dentre essas perspectivas, podemos citar algumas, tais como: o uso de *softwares*, a perspectiva histórica e as aplicações cotidianas do conteúdo.

Segundo Ausubel (1982), Gomes (2015), Azambuja (2013) e ainda os PCN (BRASIL, 1997), o ensino de trigonometria deve estar alinhado com o cotidiano do aluno. Essa abordagem pode trazer benefícios para o processo de ensino e aprendizagem, pois o aluno pode relacionar o conteúdo mediado em sala de aula e aplicá-lo no seu dia a dia.

Com bases nos pressupostos teóricos de Ausubel (1982), Gomes (2015), Costa (1997) e outros teóricos tais como Ribeiro (2007), Meneghetti (2011), Luccas e Batista (2008), Azambuja (2013) e Nagafuchi e Batista, (2008), podemos dizer que o livro que melhor aborda o conteúdo de trigonometria é o de Maymone e Santos (2013), por expor a história da trigonometria, por abordar questões e exemplos relacionados ao dia a dia do aluno, por provar teoremas e fórmulas, e por ter uma linguagem objetiva e clara, podendo possivelmente fazer com que o processo de ensino e aprendizagem tenha êxito.

Por fim, a presente pesquisa não buscou encerrar a discussão a respeito do ensino de trigonometria a partir do livro didático, mas refletir sobre esse problema para, possivelmente, contribuir com o ensino da matemática.

REFERÊNCIAS

AUSUBEL, D. **A aprendizagem significativa**. São Paulo: Moraes, 1982.

AZAMBUJA, M. T. **O uso do cotidiano para o ensino de matemática em uma escola de Caçapava do Sul**. 2013. 32 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Ciências Exatas) – Universidade Federal do Pampa, Caçapava do Sul, 2013.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Ensino Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997.

BONITO, J. Perspectivas actuais sobre o ensino das ciências: clarificação de caminhos. **Terra e Didática**, v. 4, n. 1, p. 28-42, 2008.

BORGES, C. F. **Transição das razões trigonométricas do triângulo retângulo para o círculo trigonométrico**: uma sequência para o ensino. 2009. 150 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009.

BOYER, C. **História da Matemática**. São Paulo: Edgard Blucher, 2001.

COSTA, N. M. L. **A História da Trigonometria**. São Paulo: PUC, 1997.

DANTE, L. R. **Matemática**. São Paulo: Ática, 2005.

D'AMBROSIO, U. **A era da consciência**. São Paulo: Fundação Petrópolis, 1997.

DOURADO, L. F.; OLIVEIRA, J. F. A qualidade da educação: perspectivas e desafios. **Cadernos Cedes,** Campinas, v. 29, n. 78, p. 201-215, mai/ago, 2009.

FRITZEN, K. R. **Estudo do sistema conceitual de trigonometria no ensino fundamental**: uma leitura histórico-cultural. 2011. 97 f. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade do Extremo Sul Catarinense, Criciúma, 2011.

GOMES, S. C. Ensino de trigonometria numa abordagem histórica. **Holos**, Natal, v. 3, p. 193-203, 2015.

GOMES, E. B. **A história da matemática como metodologia de ensino da matemática**: perspectivas epistemológicas e evolução de conceitos. 2005. 120 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas) – Universidade Federal do Pará, Belém, 2005.

GUELLI, O**. Contando a história da matemática dando corda na trigonometria**. São Paulo: FGV, 2009.

LIMA, N. J. Aprendizagem significativa em trigonometria sob o ponto de vista de quem ensina e de quem aprende. In: CONGRESSO INTERNACIONAL DE ENSINO DA MATEMÁTICA, 6., 2013, Canoas. **Anais**... Canoas, 2013. p. 1-15.

LUCCAS, S.; BATISTA, I. L. A importância da contextualização e da descontextualização no ensino de matemática: uma análise epistemológica. In: ENCONTRO BRASILEIRO DE

ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 12., 2008, Rio Claro. **Anais**... Rio Claro, 2008. p. 1-17.

MARINHO, B. M. et al. Matemática lúdica e investigativa no ensino fundamental. In: ENCONTRO MINEIRO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 7., 2015, São João Del Rey. **Anais**... São João Del Rey, 2015. p. 1-8.

MARQUES, M. N. D. **O ensino de razões trigonométricas no triângulo retângulo.** 2014. 28 p. Relato de experiência (Curso de Licenciatura em Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2014.

MAYMONE, A.; SANTOS, J. **Matemática 9º ano**. Recife: Formando Cidadãos, 2013.

MENEGHETTI, R. C. G. Experimentoteca de matemática: discussões sobre possibilidades de sua utilização no processo de ensino e aprendizagem de matemática. **Práxis Educativa**, Ponta Grossa, v. 6, n. 1, p. 121-132, jan./jun. 2011.

MIANE, M. **Matemática 9º ano**: eu gosto mais. São Paulo: IBEP, 2012.

NAGAFUCHI, T.; BATISTA, I. L. O que é demonstração? Aspectos Filosóficos. In: ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 12., 2008, Rio Claro. **Anais**... Rio Claro, 2008. p. 1-16.

OLIVEIRA, F. C. **Dificuldades no processo ensino aprendizagem de trigonometria por meio de atividades**. 2006. 74 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2006.

OLIVEIRA, L. C. Educação nos tempos atuais: grandes desafios. **Revista psicopedagogia**, São Paulo, v. 20, n. 61, p. 67-71, 2003.

PERIUS, A. A. B. **A tecnologia aliada ao ensino de matemática**. 2012. 55 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Especialização em Mídias na Educação) – Universidade federal do Rio Grande do Sul, Cerro Largo, 2012.

RIBEIRO, R. G. **Técnicas para demonstrar teoremas**. Ouro Preto: Departamento de Ciências Exatas e Aplicadas, 2007.

SILVEIRA, J. S.; BALIEIRO FILHO, I. F. Uma proposta para o ensino de trigonometria por meio da história da matemática. **UNOPAR Científica Ciências Exatas e Tecnológicas**, Londrina, v. 12, n. 1, p. 51-60, nov. 2013.

SILVA, S. A. F.; SÁ, L. C.; OLIVEIRA, S. C. Ensino de razões trigonométricas no laboratório de matemática: uma experiência com utilização de geoplanos numa perspectiva investigativa. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 12., 2016, São Paulo. **Anais**... São Paulo, 2016, p. 1-12.

STRASBURG, E. B.; SPEROTTO, F. A.; MENEGHETTI, C. M. S. Atividades de Trigonometria para o ensino fundamental com o uso do software Geogebra. **Ciência e Natura**, Santa Maria, v. 37, p. 617-635, 2015.

A ABORDAGEM DA TRIGONOMETRIA NO LIVRO DIDÁTICO DO 9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

THE TRIGONOMETRY APPROACH IN THE TEACHING BOOK OF THE 9TH YEAR OF FUNDAMENTAL TEACHING

ALMEIDA, Jeferson José dos Santos[1]

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo caracterizar a didatização do conhecimento sobre trigonometria em duas coleções de matemática para o Ensino Fundamental (Anos Finais). Para isso, identificamos os desafios da abordagem da trigonometria no livro didático de matemática do 9º ano do Ensino Fundamental, bem como refletimos sobre a pertinência de novas perspectivas de abordagem do conteúdo. A pesquisa está ancorada nos pressupostos teóricos defendidos por Ausubel (1982), Boyer (2001), Costa (1997) e, também, nos PCN de matemática (BRASIL, 1997). O *corpus* do trabalho é constituído pelo livro *Matemática 9º ano:* eu gosto mais, de Marcos Miani, publicada pela editora IBEP, no ano de 2012, e o livro *Matemática 9º ano*, de Maymone e Santos, publicada pela editora Formando Cidadãos, no ano de 2013. A análise dos materiais revelou que o livro de autoria de Maymone e Santos (2013), apresenta uma linguagem objetiva e propõe atividades alinhadas com a realidade prática dos alunos. Porém, o livro de Miani (2012), não apresenta uma linguagem clara e objetiva, além de oferecer propostas de atividades sem vinculação prática e que não envolvem situações vivenciadas pelos alunos no seu dia a dia. Percebemos, também, que, dentre as perspectivas de análise por nós investigadas, as que oferecem melhores subsídios para o processo de ensino e aprendizagem de trigonometria no 9º ano do Ensino Fundamental são as que privilegiam a abordagem histórica, bem como a abordagem lúdica do conteúdo.

Palavras-chave: Trigonometria. Desafios. Perspectivas. Livro didático.

ABSTRACT

The present work aims to characterize the knowledge assimilation on trigonometry in two collections of mathematics for Elementary School (Final Years). To do this, we will identify the challenges of the trigonometry approach in the 9th grade mathematics textbook of the Elementary School, as well as reflect on the pertinence of new perspectives in approaching said content. The research is anchored in the theoretical assumptions defended by Ausubel (1982), Boyer (2001) and Costa (1997) and, also, the mathematical NCPs (BRASIL, 1997). The *corpus* of the work is constituted by the book, by Miani, *Matemática 9º ano: eu gusto mais*, published by IBEP in 2012, and the *Matemática 9º ano*, by Maymone and Santos, published by the publishing company Forming Citizens in the year 2013. The analysis of the materials revealed that the collection, Mathematics: 9th year Forming Citizens, by Maymone and Santos (2013), presents an objective language, and proposes activities aligned with the practical reality of the students. However, the 9th grade Mathematical Collection of the I Like More Collection, Miani (2012), does not present a clear and objective language, besides offering proposals of activities without practical linkage and that do not involve situations experienced by the students in their day to day. We also perceive that, among the perspectives of analysis investigated, those that offer the best subsidies for the teaching-learning process of trigonometry in the 9th year of Elementary School are those that favor the historical approach, as well as the playful approach to content.

Keywords: Trigonometry. Challenges. Perspectives. Textbook.

1 INTRODUÇÃO

[1] Licenciado em Matemática pela Faculdade de Ciências e Tecnologia Professor Dirson Maciel de Barro (FADIMAB). Docente da Escola Técnica Aderico Alves de Vasconcelos (ETE), Goiana, PE, Brasil. Endereço eletrônico: jefersondossantos3011@gmail.com.

O presente trabalho tem como objetivo caracterizar a didatização do conhecimento sobre trigonometria em duas coleções de Matemática para o Ensino Fundamental (Anos Finais). Para isso, identificamos os desafios da abordagem da trigonometria no livro didático de matemática do 9º ano do Ensino Fundamental, bem como refletimos sobre a pertinência de novas perspectivas de abordagem do referido conteúdo.

A pesquisa está ancorada nos pressupostos teóricos defendidos por Ausubel (1982), Boyer (2001) e Costa (1997), apresentando a parte histórica da trigonometria, e seus conceitos primitivos. Esta pesquisa também está relacionada com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de Matemática (BRASIL, 1997). Ainda, utilizamos as contribuições intelectuais de Gomes (2015) e Lima (2013), que sugerem uma perspectiva de ensino ancorada em fatos históricos, a partir da história da matemática. Utilizamos também as contribuições de Oliveira (2006), apresentando as dificuldades no processo de ensino e aprendizagem da trigonometria.

Para os PCN de Matemática (1997), Gomes (2015), Ausubel (1982) e Perius (2012), os saberes inerentes ao processo de ensino e aprendizagem de matemática devem ser mediados pelo professor de forma objetiva e clara, através de exercícios que relacionem o saber empírico à prática, privilegiando situações-problema do cotidiano do aluno. Entende-se como atividades do cotidiano do aluno aquelas que ele executa regularmente ou que ocorrem no meio social e cultural em que ele está inserido.

Além disso, sabemos que os livros didáticos constituem uma ferramenta de apoio pedagógico e que eles passam por uma análise criteriosa para que sejam adotados pelos estabelecimentos de ensino. Entretanto, mesmo após esses materiais passarem pelo processo de análise, ainda é possível encontrar abordagens fragmentadas de conteúdo ou, ainda, materiais, em que seus autores privilegiam demais apenas um aspecto do conteúdo em detrimento de outros também importantes no processo de mediação pedagógica.

Logo, o ensino da trigonometria deve ter uma conexão entre diversos conceitos e pensamentos matemáticos, havendo a necessidade de articular o referido conteúdo com aplicações dentro e fora da sala de aula, relacionando-o sempre ao cotidiano do aluno. Nesse sentido, vale destacar que é necessário que os alunos

> Saibam usar a Matemática para resolver problemas práticos do cotidiano; para modelar fenômenos em outras áreas do conhecimento; compreendam que a Matemática é uma ciência com características próprias, que se organiza via teoremas e demonstrações; percebam a Matemática como um conhecimento social e historicamente construído; saibam apreciar a importância da Matemática no desenvolvimento científico e tecnológico (BRASIL, 1997, p. 69).

Pressupondo que essa necessidade de resolver problemas práticos do cotidiano seja levada em consideração pelo professor, o aluno terá um melhor entendimento lógico sobre o conteúdo, pois ele pode relacionar o seu aprendizado com situações com as quais ele lida no seu dia a dia.

Portanto, evitar o uso excessivo de cálculos algébricos e dar maior ênfase a aplicações no dia a dia pode fazer com que os alunos encontrem sentido naquilo que aprendem. Com isso, os alunos talvez possam entender a relevância social e, até mesmo cultural, daquilo que está sendo mediado pelo professor. Em outros termos, o ensino da matemática deve ser objetivo e dinâmico, visando melhor entendimento lógico-matemático por parte do aluno, de modo que ele seja capaz de resolver situações-problema de seu dia a dia.

Segundo os PCN (BRASIL, 1997), é perceptível que, na maioria dos livros didáticos, a abordagem da trigonometria é insuficiente e pouco clara, muito embora haja investimento intelectual em abordagens históricas, que são importantes no processo de ensino e aprendizagem de matemática. Acrescente-se, ainda, que as atividades propostas em algumas coleções são de difícil entendimento, uma vez que não oferecem contextualização necessária para o entendimento de situações-problema.

Portanto, é necessário fazer escolhas acertadas no que se refere ao livro didático de matemática, tendo em vista que esse livro irá circular no ambiente escolar por pelo menos três anos e que é este material que deverá auxiliar o professor em seu ofício, muito embora saibamos que o livro didático não substitui a figura do docente. É necessário também, que seja observada a adequação da proposta ao público que irá utilizá-la: os alunos. Consoante a esse aspecto, a trigonometria pode ser apresentada de forma lúdica, fazendo com que o conhecimento chegue de forma rápida e clara ao interlocutor.

2 REVISÃO DE LITERATURA

2.1 Conceito de desafios e perspectivas

Para Oliveira (2002), os seres humanos estão em constante crescimento intelectual, prova disso é que sempre buscamos entender a natureza, suas propriedades e características. O autor relata que, logo após a descoberta do fogo, o ser humano não parou de evoluir. Nos dias atuais, buscamos meios para driblar a morte, as doenças e os desafios da vida, com objetivos de ter uma vivência plena e feliz.

Em contrapartida, Oliveira (2002) relata que a educação é a chave para a evolução humana, visto que as crianças serão os futuros pesquisadores e desenvolvedores da nova geração, denominada por ele de "pós-moderna". Porém, Oliveira (2002) retrata que problemas culturais, econômicos e, até mesmo, a globalização, viabilizaram as dificuldades no processo de ensino e aprendizagem, o que atinge diretamente a evolução da ciência. Essas dificuldades, para Oliveira (2002) e Dourado e Oliveira (2009), afetam diretamente a educação, tornando-se assim, desafios para o processo de ensino e aprendizagem de qualquer disciplina. Logo, desafios de aprendizagem são todas as dificuldades que afetam diretamente as pessoas no processo de ensino.

Bonito (2008) diz que perspectivas são modos pelos quais o docente pode guiar uma aula. Ou seja, diferentes maneiras pelas quais o professor pode mediar aquele conteúdo, porém usando outros recursos, seja ele um jogo, uma dinâmica, uma aula com ênfase em usar a tecnologia para entender determinado conteúdo, entre outras perspectivas. Bonito (2008) cita:

> As orientações da educação científica atual são, claramente, de natureza construtivista, diferenciando-se da anterior visão, que era centrada numa sistemática instrução baseada em curricular de "grandes ideias" [..]. O termo construtivismo é de natureza ampla e apresenta relações de dependência com a filosofia, o ensino e a aprendizagem, embora assente basicamente no contributo do aluno para o significado e para a aprendizagem por meio da atividade individual [..]. De acordo com a perspectiva construtivista da aprendizagem, o aluno chega ao significado selecionando informação e construindo o que sabe [...]. No sentido estrito, a concepção construtivista não deve ser considerada como uma teoria, mas antes como uma perspectiva explicativa que parte da consideração social e socializadora da educação escolar, integrando contributos diversos, cujo denominador comum forma um acordo à volta dos princípios construtivistas (BONITO, 2008, p. 30).

Fica evidente nessa afirmação de Bonito (2008) sua preocupação com o ensino construtivo, ensino que promove o aprender fazendo, em que o aluno é o construtor do seu próprio saber e o docente o direciona. Essa perspectiva, para Ausubel (1982), traz grandes benefícios para o processo de ensino e aprendizagem, visto que o aluno se torna mais independente, crítico e desenvolve o aprender coletivo.

2.2 Conceito e itinerário histórico da trigonometria

Guelli (2009) e Dante (2005) citam que a palavra *trigonometria* significa medida de três ângulos (*tri*: três; *gono*: ângulos; e *metria*: medida) e seus estudos se baseiam na medida de cada ângulo em um triângulo, que chamamos de razões trigonométricas. São três as razões trigonométricas mais conhecidas: seno, cosseno e tangente.

Entretanto, interessa saber que foram vários os processos de experimentação prática dos saberes epistemológicos inerentes à trigonometria para que hoje pudéssemos utilizar os procedimentos lógico-matemáticos advindos do estudo dela.

A trigonometria, para Boyer (2001), não foi obra de um só homem ou de um só povo. Seus postulados já auxiliavam povos em 1650 a.C. na construção de abrigos. Costa (1997), Fritzen (2011) e Boyer (2001) citam que os primeiros indícios de cálculos trigonométricos foram realizados por povos do Egito e da Babilônia. Os egípcios faziam cálculos de semelhanças de triângulos e razões de números para a construção de pirâmides. Já os babilônios usavam a trigonometria para o entendimento da astronomia.

Somente um pouco mais tarde, os gregos começaram a usar a trigonometria e, por volta de 1500 a.C, criaram o relógio do sol, usando o mesmo conceito dos egípcios, conhecido como Gnômom. Esse relógio consistia em determinar as horas do dia pela posição do sol. Ele era feito de vários materiais. Contudo, ele deveria estar localizado em uma superfície plana com uma haste levantada indicada para o norte e em um lugar aberto.

As razões trigonométricas começaram com os hindus, pois eles usavam uma tábua conhecida como Jiva, contendo as razões dos senos, para medir distâncias, comprimentos e profundidades. No entanto, esse sistema teria poucas provas existentes, já que para eles essa tábua foi escrita por um deus chamado Sunrya Siddhanta. Contudo, essa ideia foi o que fez com que muitos curiosos se aprofundassem mais nesse sistema. De acordo com Fritzen (2011), o estudo das razões trigonométricas começou a ter sentido com Hiparco, conhecido como o pai da trigonometria, e foi aperfeiçoado por Ptolomeu, que conseguiu achar cordas correspondentes a diversos ângulos, onde a razão era a metade da função do ângulo. Para Fritzen (2011), isso equivale à tabela dos senos.

Para Costa (1997), a trigonometria só veio tomar forma no século XVI com vários matemáticos e suas teorias. Dentre eles, destacam-se Copérnico, Napier, Rhaeticus, Isaac Newton e John Newton. Porém, quem mais se destacou foi Euler, pois ele tomou o raio de um círculo como unidade, além de ter definido as funções que, antes de 1768, eram em números. Essa transição começou no século XVI e rendeu o início do cálculo infinitesimal, que foi desenvolvido com intuito de verificar as variações das taxas de grandezas e as acumulações de quantidades.

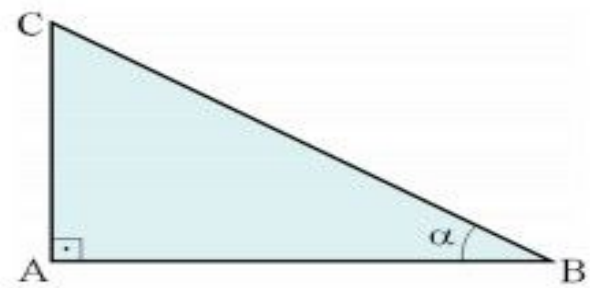
2.3 Conceitos-chave para o estudo da trigonometria no 9º ano do Ensino

Fundamental

Ao realizar pesquisa sobre os conceitos-chave para o estudo da trigonometria, elencados pelos autores das principais coleções indicadas para escolha pelos professores de matemática do 9º ano do Ensino Fundamental, identificamos que, na maioria dos livros didáticos, foram abordados os seguintes itens: razões trigonométricas e ciclo trigonométrico (elementos da circunferência, comprimento da circunferência, arco da circunferência e relações métricas). Interessa saber que a articulação desses conceitos-chave e os apontamentos sobre a funcionalidade prática deles ao longo das unidades didáticas serão objeto de discussão na seção de caracterização das duas coleções adotadas por uma escola da rede particular de ensino da cidade de Itaquitinga-PE no ano de 2016.

As razões trigonométricas surgiram com a necessidade do homem relacionar ângulos com medidas. No entanto, essas razões passaram por um longo período de estudos e testes, até que, após um tempo, foi possível determinar essa relação em um triângulo retângulo.

Figura 1: Representação das razões trigonométricas no triângulo retângulo



Fonte: Marques (2014, p. 16)

Marques (2014) nos apresenta na figura acima, onde o autor destaca que a partir dos segmentos $C\hat{A}B$ é possível obter um ângulo de $90°$. Com isso, podemos concluir que se trata de um ângulo reto e classificar a figura acima como um triângulo retângulo. O autor também afirma que, a partir dos segmentos $A\hat{B}C$ e $A\hat{C}B$, é possível notar que eles são menores que $90°$, logo podemos afirmar que eles são ângulos agudos. A partir desse pressuposto, podemos denominar esses segmentos como catetos. O segmento CB é oposto ao ângulo $\hat{A}$, além de ser o maior segmento do triângulo retângulo. Com essas características, esse segmento é denominado de hipotenusa. Nomeando os demais lados e tomando como referência o ângulo α, podemos obter o segmento AC como cateto oposto, pois o mesmo é oposto ao ângulo α. O segmento AB, por sua vez, é o cateto adjacente, pois ele complementa o ângulo α.

Além do já exposto, é preciso entendermos como é feito o cálculo das razões trigonométricas. Marques (2014) cita que o cálculo do seno é desenvolvido pela razão entre o cateto oposto e a hipotenusa. O cosseno por sua vez é a razão entre o cateto adjacente e a hipotenusa. A tangente é obtida pela razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente. Em outros termos, levando em consideração o ângulo α, obtemos as seguintes razões trigonométricas presentes no quadro 1.

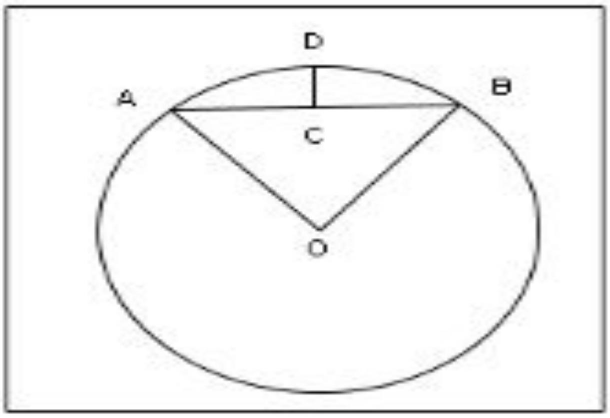
Consoante ao detalhamento dos principais tópicos abordados nos livros didáticos de matemática do 9º ano do Ensino Fundamental, é preciso discutir sobre o ciclo trigonométrico. Borges (2009) afirma que ele se inscreve numa circunferência orientada por um raio, cuja coordenada é cartesiana. Assim, devemos conhecer os elementos da circunferência para podemos entender os seguintes procedimentos lógico-matemáticos, conforme podemos observar na figura 2.

Quadro 1: Cálculo das razões trigonométricas

Seno	$\operatorname{sen}\alpha = \frac{AC}{BC}$
Cosseno	$\cos\alpha = \frac{AB}{BC}$
Tangente	$\operatorname{tg}\alpha = \frac{AC}{AB}$

Fonte: Marques (2014, p. 16-17)

Figura 2: Propriedades da circunferência



Fonte: Lorenzoni (2003, p. 55 apud BORGES, 2009, p. 21)

Borges (2009) ressalta em seu documento que o centro é o ponto comum para todos os lados da circunferência. O raio, segmentos OA e OB, é uma reta que se desenvolve no centro e tem seu destino em qualquer extremidade da circunferência. O diâmetro, por sua vez, é uma reta que vai de uma extremidade do ciclo até outra, cortando o centro. Logo, o diâmetro é igual a duas vezes o raio. Já a corda, o segmento AB, é uma reta que vai de uma extremidade a outra do ciclo, sem cortar o centro. Chamamos de flecha, o segmento CD, pois ela tem começo no centro da corda e seu destino em qualquer extremidade dependendo da corda.

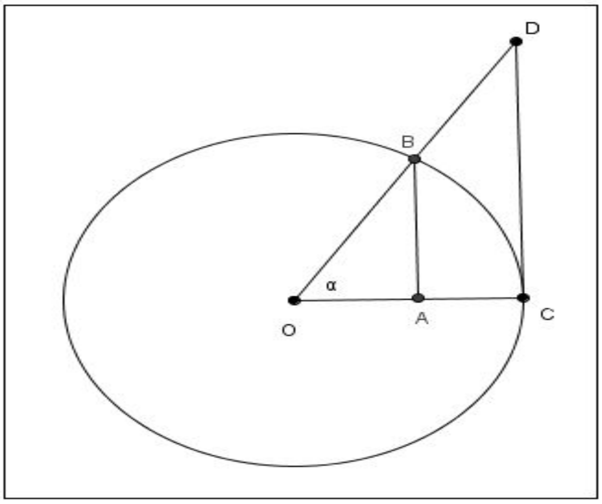
Partindo dessas propriedades da circunferência, é possível afirmar que o aluno possivelmente poderá entender de forma mais significativa os segmentos secante e tangente (Figura 3). Isso é detalhado em Borges (2009).

O segmento tangente no sistema é a reta CD. Podemos observar que esse segmento corta a circunferência em um único ponto e o ângulo formado é de 0°. A secante, mostrada na figura como o segmento OD, é uma reta contínua que corta o ciclo em dois pontos, sem passar pelo centro.

3 METODOLOGIA

Nossa pesquisa é qualitativa, porque pretendemos fazer uma caracterização da didatização da trigonometria no livro didático do 9º do Ensino Fundamental. Neste sentido, o nosso *corpus* é constituído pelos livros: *Matemática 9º ano*, de autoria de Maymone e Santos, publicada pela editora Formando Cidadãos no ano de 2013; e *Matemática 9º ano: eu gosto mais*, de Marcos Miani, publicada pela editora IBEP no ano de 2012. Escolhemos essas coleções, porque elas eram alvo de críticas que dividiam a coordenação pedagógica de uma escola da rede particular de ensino, localizada no município de Itaquitinga-PE, o que nos instigou a caracterizar as coleções adotadas na escola.

Figura 3: Segmentos secante e tangente



Fonte: Eves (2004, p. 266 apud BORGES, 2009, p. 22)

É válido ressaltar que a primeira coleção, *Matemática 9º ano: eu gosto mais* (MIANI, 2012), foi adotada pela escola até o ano de 2016. A segunda coleção, *Matemática 9º ano* (MAYMONE; SANTOS, 2013), foi adotada no ano seguinte. Entretanto, havia professores que defendiam ser a coleção de Miani (2012) superior à outra e vice-versa. Nessa perspectiva, decidimos caracterizar a abordagem da trigonometria nas duas coleções e, com os dados coletados, tecer comentários sobre os aspectos positivos e negativos de cada uma delas, tendo em vista a qualidade do material produzido.

Para fazer a análise de dados desta pesquisa, obedecemos às seguintes etapas: 1º fase – seleção das coleções; 2º fase – caracterização da didatização da trigonometria nas coleções selecionadas; 3º fase – reflexão crítica sobre o material coletado; 4º fase – apresentação de novas perspectivas para o ensino de trigonometria e reflexão sobre o potencial de cada uma delas no contexto escolar.

4 DISCUSSÃO DA PROBLEMÁTICA DO ENSINO DE TRIGONOMETRIA

4.1 Análise da abordagem do conteúdo no livro *Matemática 9º ano: eu gosto mais*

Miani (2012) inicia a abordagem do capítulo 7 do livro *Matemática 9º ano: eu gosto mais* sem explicitar os objetivos desejáveis para o estudo da trigonometria. Todavia, é perceptível que a proposta do autor é construir progressivamente a definição de cada uma das razões trigonométricas. Somente no final de cada reflexão é que ele expõe o conceito em definitivo. Em outros termos, Miani (2012) apresenta ao aluno uma pequena contextualização sobre as razões trigonométricas e qual a necessidade de elas existirem, mostrando sua forma prática e sua aplicabilidade em triângulos retângulos. O autor também elabora um pequeno resumo, colocando só as fórmulas para o cálculo das razões trigonométricas. Em seguida, Miani (2012) também propõe exercícios que estabelecem situações que obtêm relação com a rotina do aluno.

A exposição é ilustrada com exemplos precisos sobre a teoria, muito embora haja pouca relação dos exemplos apresentados com situações cotidianas. A abordagem prática, para Ausubel (1982), os PCN (BRASIL, 1997), e Gomes (2015), pode trazer benefícios significativos para o aluno, visto que ele pode absorver o conteúdo ensinado em sala e aplicá-lo em seu cotidiano. Além disso, é possível encontrar alguns textos que remetem à abordagem histórica do conteúdo. Essa abordagem histórica também pode resultar em um melhor desempenho em matemática, tendo em vista que Gomes (2015) e Boyer (2001) citam que esse tipo de metodologia faz com que o aluno reflita sobre o desenvolvimento do conteúdo e entenda o processo que originou a ideia matemática daquele mesmo conteúdo. Em outros termos, "através da História o estudante/professor passa a conhecer a Matemática como um saber que tem significado dentro de um contexto e que foi, e está sendo, construído pela necessidade de cada época" (GOMES, 2015, p. 2). Nessa mesma perspectiva, D'Ambrosio (1997) defende que:

> As ideias matemáticas comparecem em toda a evolução da humanidade, definindo estratégias de ação para lidar com o ambiente, criando e desenhando instrumentos para esse fim, e buscando explicações sobre os fatos e fenômenos da natureza e para a própria existência. Em todos os momentos da história e em todas as civilizações, as ideias matemáticas estão presentes em todas as formas de fazer e de saber (D'AMBROSIO, 1997, p. 97).

As atividades propostas, por sua vez, são constituídas por exercícios que instigam o raciocínio lógico-matemático dos alunos e que apresentam uma contextualização voltada ao dia a dia deles. Logo, esses exercícios trazem uma metodologia voltada à aplicação do conteúdo no cotidiano do aluno e percebemos que a exposição teórica não se encontra plenamente articulada com esse cotidiano. É válido destacar que, segundo Ausubel (1982), os PCN (BRASIL, 1997), Gomes (2005) e Azambuja (2013), esse tipo de metodologia pode ser benéfica para o processo de ensino e aprendizagem, pois o aluno pode entender o conteúdo e sua aplicabilidade. Lembremo-nos, ainda, que "a matemática no cotidiano é uma vertente dessa área do conhecimento considerada como agente potencializador do ensino e da aprendizagem, e ainda, como um elemento indispensável ao processo pedagógico" (AZAMBUJA, 2013, p. 8).

Dando continuidade à caracterização, Miani (2012) apresenta de forma descontextualizada a tabela de razões trigonométricas com valores de $1°$ a $89°$, o que pode causar estranhamento por parte dos alunos. Na página seguinte, o autor exibe exemplos envolvendo os valores mencionados na tabela de razões trigonométricas, sugerindo haver facilidade na resolução das questões utilizadas como exemplo. Todavia, é perceptível a descontextualização das situações-problema e a falta de reflexão sobre o conteúdo apresentado.

Entenda-se por descontextualização a ausência de qualquer reflexão sobre elementos do contexto do estudo sobre ângulos, nenhuma abordagem histórica, tampouco explicação sobre a necessidade daquela tabela. Isso pode ser um problema, visto que Gomes (2015) cita que a história da matemática pode ser usada como uma reflexão do conteúdo, pois a partir dela o professor pode mostrar a necessidade dos ângulos na Antiguidade e sua aplicabilidade nos dias atuais. Fazendo essa reflexão, é possível acessar a realidade do aluno e ilustrar a mediação do conteúdo com exemplos de situações-problema com as quais ele convive. Aqui merece destaque o fato de que a contextualização pode trazer um melhor entendimento matemático, pois, conforme Luccas e Batista (2008), ela pode os estimular a aprender, principalmente quando o contexto é diversificado, ou seja, que aborde outra perspectiva. A título de exemplificação, na figura 4 há a exposição teórica e os exemplos utilizados em Miani (2012):

Figura 4: Exposição sobre a aplicação das razões trigonométricas

Veja, a seguir, alguns exemplos de aplicação dessa tabela:

EXEMPLO 1

Qual é o valor de sen 42°?

Vamos encontrar, na tabela, o seno de 42°.

Na coluna Ângulo, localizamos 42°.

Na coluna seno, encontramos 0,6691.

Logo: **sen 42° = 0,6691** (valor aproximado).

EXEMPLO 2

Determine a medida do ângulo x, sendo cos x = 0,2250.

Nesse exemplo conhecemos o cosseno do ângulo e desejamos determinar o valor do ângulo.

Na coluna cosseno, localizamos o número 0,2250.

Logo: cos x = 0,225 → **x = 77°**

Na coluna ângulo, encontramos 77°.

EXEMPLO 3

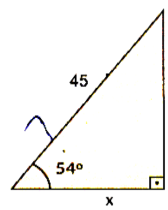
Qual é o valor de x no triângulo ao lado?

Veja como se usa a tabela para calcular o valor de x nesse triângulo retângulo.

A hipotenusa mede 45 mm.

O cateto adjacente ao ângulo de 54° é x.

$\cos 54° = \frac{x}{45} \rightarrow x = 45 \cdot \cos 54° \rightarrow x \simeq 45 \cdot 0{,}5878 \rightarrow \mathbf{x = 26{,}451}$.



O cateto x mede 26,45 mm.

Fonte: Miani (2012, p. 145)

Logo após a apresentação dos exemplos, o autor traz uma lista de exercícios com questões que podem estimular os alunos a determinar medida de lagos, altura de muros, tamanho de escadas, altura de pipas e tamanho de torres. Além disso, o autor preocupa-se em ilustrar as questões com figuras geométricas, como losango, paralelogramo e retângulo. Essa estratégia dialoga com os PCN (BRASIL, 1997), Gomes (2015), Luccas e Batista (2008) e Azambuja (2013), que sugerem que as aulas de matemática tenham uma aplicabilidade no cotidiano do aluno, de modo que as questões propostas dialoguem com o dia a dia deles, pois, assim, a aprendizagem poderá ser efetivamente construída.

Miani (2012) também apresenta um boxe com uma breve história da trigonometria somente na página 149, conteúdo que deveria ter sido apresentado nas primeiras páginas do capítulo. É válido ressaltar que, no boxe, constam informações sobre o significado da palavra trigonometria e sua utilidade em nosso cotidiano. São essas informações que podem fazer com que aluno saiba qual a necessidade da trigonometria e como é possível utilizá-la na resolução de situações-problema.

Na sequência, o autor prossegue com o estudo da trigonometria com o conceito de razões trigonométricas. No entanto, a exposição dele dá especial enfoque aos ângulos de $30°$, $45°$ e $60°$, sem mencionar que eles são popularmente conhecidos como ângulos notáveis. Há apenas uma indução para essa compreensão, o que não acontece de forma explícita, como podemos observar no trecho: "As razões dos ângulos de $30°$, $45°$ e $60°$ são muito úteis para a resolução de diversos problemas e podem ser facilmente calculadas que seja necessário recorrer a tabela ou as construções geométricas" (MIANI, 2012, p, 150).

Nessa seção, o autor também conduz uma reflexão sobre os conceitos que serão abordados e sintetiza estas informações através de um quadro na página 151. É nesse ponto em que ele pode fazer com que o aluno entenda o porquê de cada ângulo apresentar determinado valor, o que, certamente, facilita a compreensão do leitor e evidencia o cuidado do autor nesse trecho, pois ele não impõe o conteúdo, mas sim, mostra como seu conceito é construído. Para Ribeiro (2007), as demonstrações matemáticas facilitam o processo de ensino e aprendizagem e podem fazer com que o aluno reflita criticamente sobre o que está sendo exposto.

Logo após essa contextualização sobre as razões trigonométricas com ângulos de $30°$, $45°$ e $60°$, o autor apresenta exercícios que trazem uma aplicabilidade envolvendo o cotidiano do aluno.

Miani (2012) ainda constrói uma reflexão sobre a utilização das razões trigonométricas em um triângulo qualquer, em que é perceptível a utilização de exemplo que envolve o cotidiano do aluno. Ele deixa claro que as relações estudadas já não são cabíveis nesse tipo de problema e que, para isso, é necessário estudar e aplicar outras relações.

Nesse sentido, na página seguinte, o autor apresenta novas relações trigonométricas, sendo elas a lei dos senos e a lei dos cossenos. Ele segue fazendo a apresentação de ambas de forma descontextualizada, sem apresentar reflexão sobre o conteúdo ou alguma abordagem histórica, quando poderia construir com seus alunos o conceito e a funcionalidade da lei dos senos e da lei dos cossenos, apresentando exemplos do cotidiano dos alunos e propondo, também, atividades que dialoguem com o universo de situações-problema com as quais os alunos lidam no seu dia a dia. Em outros termos, podemos observar que o autor se preocupa em apresentar a face prática do conteúdo, porém não apresenta o embasamento teórico necessário à construção coletiva dos saberes em situação didática, o que possivelmente dará margem a dificuldades de compreensão do que está sendo exposto.

No que se refere aos exercícios propostos, é conveniente destacar que eles são oferecidos de forma blocada, ou seja, o autor expõe o conteúdo em itens e subitens e, após a sua exposição, apresenta os exercícios. Contudo, é pertinente ressaltar que, em um universo de 34 exercícios, apenas oito são contextualizados. E, nessa altura da discussão, é salutar destacar que:

> É importante que a Matemática desempenhe, equilibrada e indissociavelmente, seu papel na formação de capacidades intelectuais, na estruturação do pensamento, na agilização do raciocínio dedutivo do aluno, na sua aplicação a problemas, situações da vida cotidiana e atividades do mundo do trabalho e no apoio à construção de conhecimentos em outras áreas curriculares (BRASIL, 1997, p. 25).

Por fim, Miani (2012) apresenta um boxe com informações sobre o astrolábio**,** uma espécie de bússola que os marinheiros usavam com o objetivo de saber a orientação espacial, com referência à posição do sol. Logo após, ele mostra os materiais que necessita para a realização desse experimento, além de expor como ele é feito. O autor finaliza esse experimento, ensinando como o astrolábio era utilizado e qual era a real finalidade dele para os marinheiros da época.

Para Meneghetti (2011), as experimentações matemáticas que o autor sugere, são de extrema relevância ao aluno, e ao processo de ensino e aprendizagem. Ainda segundo o autor, essas experimentações podem fazer com que o aluno tenha um melhor desempenho em resolução de problema. Meneghetti (2011) também afirma que, com o uso das experimentações matemáticas, “focaliza-se um dos experimentos e suas atividades com o objetivo de indicar as possibilidades de relacioná-las com abordagens alternativas do ensino de matemática, tais como a resolução de problemas e a modelagem matemática" (MENEGHETTI, 2011, p. 1).

4.2 Análise da abordagem do conteúdo no livro *Matemática 9º ano*

No livro de matemática da coleção *Matemática 9º ano*, publicada pela editora Formando Cidadãos no ano de 2013, Maymone e Santos iniciam a abordagem da trigonometria apoiando na abordagem histórica e na importância da trigonometria para a humanidade, o que para Boyer (2001), Gomes (2015) e, ainda, para os PCN (BRASIL, 1997) é de extrema importância, já que o aluno pode refletir sobre o conteúdo, antes de aprendê-lo.

Em seguida, Maymone e Santos (2013) iniciam a exposição das razões trigonométricas: seno, cosseno e tangente. Essa exposição é contextualizada e objetiva, pois os autores fazem uma reflexão do conteúdo e, em seguida, mostram a principal necessidade dessas razões. Esse tipo de abordagem, em que se propõe uma reflexão do conteúdo e uma ilustração de sua aplicabilidade, segundo os PCN (BRASIL, 1997), Gomes (2015) e Ausubel (1982), pode ser benéfica para o processo de ensino e aprendizagem, já que os alunos podem aprender o conteúdo mais rápido. Entretanto, os exemplos que fazem parte da exposição teórica não dialogam com situações do cotidiano do aluno.

Maymone e Santos (2013), logo após mostrar as razões trigonométricas, iniciam uma discussão sobre ângulos notáveis. Eles apresentam instruções e exemplos de cada ângulo citado. Além de abordar situações-problema que envolvem o dia a dia do aluno, os autores ainda propõem a construção de tabela com os ângulos notáveis e convidam os alunos a resolverem exercícios que se aproximam do cotidiano deles. Portanto, nessa seção, é possível observar que os autores se aproximam do que é desejável no processo de mediação de conteúdos matemáticos.

Os autores dão continuidade em seu capítulo com o subtema denominado Relação Fundamental da Trigonometria.

Merece destaque a apresentação de dois boxes em que os autores apresentam a prova dos valores dos ângulos notáveis e uma pequena mensagem aos seus leitores, com o objetivo de mostrar a importância da trigonometria para o crescimento profissional. O primeiro boxe tem maior destaque pela cor avermelhada, com o título denominado de "Importante". Nesse boxe, são apresentados os ângulos notáveis de $30°$, $45°$ e $60°$ (Figura 5).

O segundo boxe traz uma citação que objetiva fazer com que os alunos reflitam sobre esse conteúdo apresentado e concluam que é necessário aprender trigonometria, pois eles podem aplicar esses conhecimentos em diversas situações do dia a dia e ter até mesmo um melhor desenvolvimento profissional, dependendo da carreira que seguir. Com isso, os autores ratificam a ideia de que a trigonometria poderá estar presente na vida profissional e pessoal dos alunos.

Adiante, os autores apresentam a tabela das razões trigonométricas dos ângulos agudos, de $1°$ a $89°$. Porém, já havia sido destacado quais são os ângulos notáveis e sua aplicação, o que pode colaborar para uma melhor compreensão dos problemas lógico-matemáticos envolvendo o conteúdo. Logo após a apresentação da tabela, são mostrados exemplos envolvendo situações com as quais os alunos podem se deparar na sua rotina.

Figura 5: Prova dos valores dos ângulos notáveis

1) Seno, cosseno e tangente dos ângulos de medidas 30°, 45° e 60° (conhecidos, por alguns autores, como **ângulos notáveis** por aparecerem com muita frequência, principalmente nos problemas de Física): para encontrá-los nos ângulos de 30° e 60°, usamos um triângulo equilátero e, para encontrá-los no ângulo de 45°, usamos um quadrado.

2) Existe uma outra forma de apresentar a prova trigonométrica num triângulo em função de seus lados, como mostraremos logo abaixo:

Considere o triângulo equilátero apresentado na figura ao lado. A Geometria Plana nos mostra que a altura h é perpendicular ao lado, e sua medida é igual a $h = \frac{L \times \sqrt{3}}{2}$. A altura também é mediana (divide-se ao meio) e bissetriz do ângulo interno. Assim, no triângulo retângulo ACD, temos a hipotenusa L e os catetos h e $\frac{L}{2}$. Calculando o seno, o cosseno e a tangente dos ângulos de 30° e 60° vem:

$$\text{sen } 30^\circ = \frac{\frac{L}{2}}{L} = \frac{L}{2} \times \frac{1}{L} = \frac{1}{2}$$

$$\text{sen } 60^\circ = \frac{h}{L} = \frac{\frac{L \times \sqrt{3}}{2}}{L} = \frac{L \times \sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{L} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{L}{L} = \frac{\frac{L \times \sqrt{3}}{2}}{L} = \frac{L \times \sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{L} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{tg } 30^\circ = \frac{\frac{L}{2}}{h} = \frac{\frac{L}{2}}{\frac{L \times \sqrt{3}}{2}} = \frac{L}{2} \times \frac{2}{L \times \sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{\frac{L}{2}}{L} = \frac{L}{2} \times \frac{1}{L} = \frac{1}{2}$$

$$\text{tg } 60^\circ = \frac{h}{\frac{L}{2}} = \frac{\frac{L \times \sqrt{3}}{2}}{\frac{L}{2}} = \frac{L \times \sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{L} = \sqrt{3}$$

Fonte: Maymone e Santos (2013, p. 172)

Em seguida, são propostos exercícios contextualizados (todos eles), que envolvem situações-problema concretas, como as que tratam da medição de rampas, de altura de avião, de bandeira e de poste. Conforme os PCN (BRASIL, 1997), Gomes (2015), Ausubel (1982) e Azambuja (2013), essa abordagem pode acarretar benefícios futuros para o processo de ensino e aprendizagem, tendo em vista que o aluno pode absorver os conteúdos mediados em sala e aplicá-los em sua rotina frequente.

Em seguida, Maymone e Santos (2013) discorrem sobre a lei dos senos. Eles começam esse estudo com uma pequena introdução, em que citam que, "em todo triângulo, os seus lados são proporcionais aos senos dos ângulos opostos a eles" (MAYMONE; SANTOS, 2013, p. 178). Em seguida, os autores da obra provam essa introdução (Figura 6).

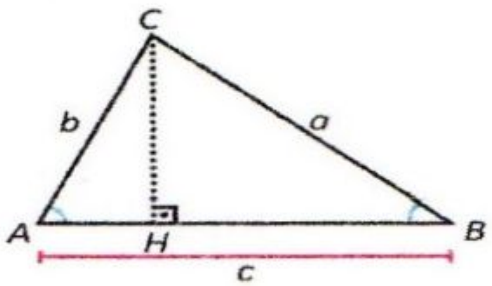
Figura 6: Lei dos Senos

Lei dos senos, ou teorema de Lamy

O teorema de Lamy afirma que, em todo triângulo, os seus lados são proporcionais aos senos dos ângulos opostos a eles. Esse teorema também é conhecido como **lei dos senos**.

Vamos demonstrar a lei dos senos:

Seja o triângulo *ABC* acutângulo e $\overline{CH}$ a altura relativa ao lado $\overline{AB}$.



$$\underbrace{\begin{array}{l}\triangle CAH : \text{sen}\,\hat{A} = \dfrac{\overline{CH}}{b} \longrightarrow \overline{CH} = b\ \text{sen}\,\hat{A} \\[2ex] \triangle CBH : \text{sen}\,\hat{B} = \dfrac{\overline{CH}}{a} \longrightarrow \overline{CH} = a\ \text{sen}\,\hat{B}\end{array}}$$

$$\downarrow$$

$$b\ \text{sen}\,\hat{A} = a\ \text{sen}\,\hat{B} \longrightarrow \frac{a}{\text{sen}\,\hat{A}} = \frac{b}{\text{sen}\,\hat{B}}$$

Procedendo de modo análogo: $\dfrac{b}{\text{sen}\,\hat{B}} = \dfrac{c}{\text{sen}\,\hat{C}}$.

Fonte: Maymone e Santos (2013, p. 178)

Maymone e Santos (2013), com um pequeno boxe no final da página, conseguem colocar em evidência a fórmula apresentada, deixando claro que a lei dos senos é eficaz em um triângulo qualquer. Para Nagafuchi e Batista (2008), esse tipo de abordagem se faz necessária, pois o aluno precisa saber provar a necessidade de fazer aquele determinado cálculo, para que o ensino de matemática não se torne vigorosamente mecânico.

Em seguida, os autores dão ênfase a exemplos práticos do dia a dia dos alunos. No entanto, eles mostram apenas um exemplo. Isso talvez não seja suficiente para o entendimento do conteúdo, tendo em vista que, adiante, os autores sugerem exercícios com situações-problema frequentes da rotina dos estudantes.

Considerando essa problemática, Gomes (2015) e os PCN (BRASIL, 1997) reiteram ser necessária uma reflexão do conteúdo exposto e, em seguida, uma exibição de aplicações dele. Com base nisso, podemos concluir que talvez haja dificuldade partindo dos alunos na resolução dos exercícios propostos, já que os mesmos podem não ter um entendimento suficiente.

Os autores ainda abordam a lei dos cossenos, com sua demonstração. Em seguida, os autores dão total atenção a exemplos que envolvem situações-problemas do cotidiano do aluno.

Por fim, Maymone e Santos (2013) apresentam uma lista de exercícios, que aborda todo conteúdo trabalhado ao longo do capítulo. A exposição dessa lista de exercícios nos remete à preocupação dos autores em revisar todo conteúdo estudado.

5 PERSPECTIVAS PARA O ENSINO DE TRIGONOMETRIA

Segundo os PCN (BRASIL, 1997), Strasburg, Sperotto e Meneghetti (2015) e Ausubel (1982), é importante que os educadores se adaptem às novas estratégias de mediação do saber, usando novas perspectivas em prol de uma aula diferente. Mas o que seriam essas novas perspectivas? Para os PCN (BRASIL, 1997) e para Gomes (2015), as novas perspectivas para o ensino da trigonometria consistem em atividades que abordem o conteúdo proposto, porém com outra metodologia, saindo do convencionalismo do quadro e giz. Dessa forma, fica claro que aulas práticas usando tecnologias, materiais concretos, história da matemática, entre outros, são novas perspectivas de ensino. Desse modo, apresentamos abaixo novas perspectivas de ensino de trigonometria que podem ajudar o professor em suas aulas, podendo dinamizá-las e torná-las mais atrativas.

Segundo Strasburg, Sperotto e Meneghetti (2015), uma aula com uso de *software* pode trazer grandes benefícios ao aluno e um melhor entendimento da trigonometria. Os autores citam o *software Geogebra* e todos os atributos desse programa como instrumentos importantes para desenvolver uma abordagem dinâmica sobre o ciclo trigonométrico. Segundo eles, a abordagem do conteúdo, por meio desse recurso, contribui para um melhor desenvolvimento do aluno com relação à trigonometria, em especial no que se refere ao ciclo trigonométrico.

Strasburg, Sperotto e Meneghetti (2015) também ressaltam que o conhecimento sobre as razões trigonométricas pode ser mediado através do *software Geogebra.* Todavia, na pesquisa realizada por eles, não foi desenvolvido todo o conteúdo de razões trigonométricas. Ao invés disso, foi dado um maior enfoque às razões que têm maior aplicabilidade na matemática, que são elas as razões seno, cosseno e tangente.

Por fim, Strasburg, Sperotto e Meneghetti (2015) apresentaram aos alunos algumas resoluções de situações-problema sobre o conteúdo com o auxílio do *software*. Logo depois, propuseram aos alunos exercícios de verificação da aprendizagem, os quais a grande maioria conseguiu responder sem muita dificuldade, o que caracteriza uma aprendizagem significativa. Porém, foi perceptível, na outra parte dos alunos, certa dificuldade em entender os pressupostos teóricos da trigonometria.

Ainda existem outros métodos de ensino de trigonometria em sala de aula como, por exemplo, o método de ensino por meio de jogos didáticos. Esses jogos baseiam-se nos conceitos básicos da trigonometria, tais como, as relações métricas e razões trigonométricas, que foram bases didáticas para a formulação desses jogos.

Marinho et al. (2015) formularam jogos, cujo princípio é melhorar o desempenho lógico-matemático nos conceitos básicos citados acima e na resolução de questões envolvendo a trigonometria básica. Interessa saber que esses jogos foram apresentados a professores dos anos finais do Ensino Fundamental, para que eles tivessem um olhar crítico sobre jogos na resolução de questões que envolvem o cotidiano do aluno. Também foi proposta uma lista de exercícios que os professores deveriam responder com o auxílio dos jogos apresentados. Além disso, os professores deveriam analisar e depois apresentar ao grupo se os alunos teriam dificuldade ou não para resolver as questões propostas.

A análise feita por Marinho et al. (2015) dos professores que participaram da oficina de jogos foi muito positiva, tendo em vista que todos os docentes responderam as questões e apresentaram o seu método de resolução de forma lúdica. Além disso, os professores afirmaram que seus alunos seriam capazes de responder as questões, usando o método sugerido pelo autor.

Outra perspectiva é relacionar fatos históricos da trigonometria para ensiná-la. Silveira e Balieiro Filho (2013) defendem essa perspectiva, mostrando que relacionar a história da trigonometria com o processo de ensino é uma forma valiosa para compreendê-la, visto que faz com que o conhecimento chegue mais fácil e claro para o aluno.

Gomes (2015) cita que esse meio de ensino vem sendo muito usado e impulsionado pelos educadores. Ele explica que o método pode trazer melhorias para a aprendizagem, porém deve-se analisar o nível da turma e se o facilitador que utiliza os fatos históricos tem ao seu favor, pelo menos, o hábito de leitura e o domínio o assunto. Por outro lado, alguns pesquisadores entendem que a história da matemática é uma "área de conhecimento matemático, campo de investigação da científica. Por isso, é ingênuo considerá-la com um simples instrumento metodológico" (GOMES, 2015, p. 14).

A perspectiva mencionada em Silva, Sá e Oliveira (2016) também pode trazer uma abordagem nova para o ensino de trigonometria. Essa abordagem propõe que a trigonometria seja apresentada em um geoplano, que é uma estrutura de madeira com pregos pequenos, separados pela distância de $1\ cm$, formando um quadrado ou retângulo com vários pregos e as figuras planas são criadas com elásticos.

Silva, Sá e Oliveira (2016) aplicam o conteúdo de razões trigonométricas com o auxílio do geoplano. No primeiro momento, os autores sugeriram que os alunos criassem um triângulo equilátero com auxílio de elásticos. No segundo momento, eles refletiram sobre os conceitos de razões trigonométricas, trazendo sua forma primitiva. Por último, demonstraram como é feito o cálculo dessas razões e propuseram exemplos envolvendo o cotidiano dos alunos.

Portanto, existem inúmeras maneiras para desenvolver a trigonometria e entender a sua funcionalidade no Ensino Fundamental, visando sempre um melhor entendimento dos alunos para que, assim, as aulas possam atender ao que sugerem os PCN (BRASIL, 1997), Gomes (2015), Azambuja (2013) e Ausubel (1982), ou seja, uma abordagem de ensino de trigonometria que privilegie uma aplicação no cotidiano, fazendo com que o aluno possa refletir entender e aplicar esse conteúdo no seu dia a dia.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Embora o professor encontre dificuldades na sala de aula, cabe a ele buscar novas perspectivas para melhorar o entendimento do conteúdo da trigonometria. Dentre essas perspectivas, podemos citar algumas, tais como: o uso de *softwares*, a perspectiva histórica e as aplicações cotidianas do conteúdo.

Segundo Ausubel (1982), Gomes (2015), Azambuja (2013) e ainda os PCN (BRASIL, 1997), o ensino de trigonometria deve estar alinhado com o cotidiano do aluno. Essa abordagem pode trazer benefícios para o processo de ensino e aprendizagem, pois o aluno pode relacionar o conteúdo mediado em sala de aula e aplicá-lo no seu dia a dia.

Com bases nos pressupostos teóricos de Ausubel (1982), Gomes (2015), Costa (1997) e outros teóricos tais como Ribeiro (2007), Meneghetti (2011), Luccas e Batista (2008), Azambuja (2013) e Nagafuchi e Batista, (2008), podemos dizer que o livro que melhor aborda o conteúdo de trigonometria é o de Maymone e Santos (2013), por expor a história da trigonometria, por abordar questões e exemplos relacionados ao dia a dia do aluno, por provar teoremas e fórmulas, e por ter uma linguagem objetiva e clara, podendo possivelmente fazer com que o processo de ensino e aprendizagem tenha êxito.

Por fim, a presente pesquisa não buscou encerrar a discussão a respeito do ensino de trigonometria a partir do livro didático, mas refletir sobre esse problema para, possivelmente, contribuir com o ensino da matemática.

REFERÊNCIAS

AUSUBEL, D. **A aprendizagem significativa**. São Paulo: Moraes, 1982.

AZAMBUJA, M. T. **O uso do cotidiano para o ensino de matemática em uma escola de Caçapava do Sul**. 2013. 32 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Ciências Exatas) – Universidade Federal do Pampa, Caçapava do Sul, 2013.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Ensino Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997.

BONITO, J. Perspectivas actuais sobre o ensino das ciências: clarificação de caminhos. **Terra e Didática**, v. 4, n. 1, p. 28-42, 2008.

BORGES, C. F. **Transição das razões trigonométricas do triângulo retângulo para o círculo trigonométrico**: uma sequência para o ensino. 2009. 150 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009.

BOYER, C. **História da Matemática**. São Paulo: Edgard Blucher, 2001.

COSTA, N. M. L. **A História da Trigonometria**. São Paulo: PUC, 1997.

DANTE, L. R. **Matemática**. São Paulo: Ática, 2005.

D'AMBROSIO, U. **A era da consciência**. São Paulo: Fundação Petrópolis, 1997.

DOURADO, L. F.; OLIVEIRA, J. F. A qualidade da educação: perspectivas e desafios. **Cadernos Cedes,** Campinas, v. 29, n. 78, p. 201-215, mai/ago, 2009.

FRITZEN, K. R. **Estudo do sistema conceitual de trigonometria no ensino fundamental**: uma leitura histórico-cultural. 2011. 97 f. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade do Extremo Sul Catarinense, Criciúma, 2011.

GOMES, S. C. Ensino de trigonometria numa abordagem histórica. **Holos**, Natal, v. 3, p. 193-203, 2015.

GOMES, E. B. **A história da matemática como metodologia de ensino da matemática**: perspectivas epistemológicas e evolução de conceitos. 2005. 120 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas) – Universidade Federal do Pará, Belém, 2005.

GUELLI, O**. Contando a história da matemática dando corda na trigonometria**. São Paulo: FGV, 2009.

LIMA, N. J. Aprendizagem significativa em trigonometria sob o ponto de vista de quem ensina e de quem aprende. In: CONGRESSO INTERNACIONAL DE ENSINO DA MATEMÁTICA, 6., 2013, Canoas. **Anais**... Canoas, 2013. p. 1-15.

LUCCAS, S.; BATISTA, I. L. A importância da contextualização e da descontextualização no ensino de matemática: uma análise epistemológica. In: ENCONTRO BRASILEIRO DE

ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 12., 2008, Rio Claro. **Anais**... Rio Claro, 2008. p. 1-17.

MARINHO, B. M. et al. Matemática lúdica e investigativa no ensino fundamental. In: ENCONTRO MINEIRO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 7., 2015, São João Del Rey. **Anais**... São João Del Rey, 2015. p. 1-8.

MARQUES, M. N. D. **O ensino de razões trigonométricas no triângulo retângulo.** 2014. 28 p. Relato de experiência (Curso de Licenciatura em Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2014.

MAYMONE, A.; SANTOS, J. **Matemática 9º ano**. Recife: Formando Cidadãos, 2013.

MENEGHETTI, R. C. G. Experimentoteca de matemática: discussões sobre possibilidades de sua utilização no processo de ensino e aprendizagem de matemática. **Práxis Educativa**, Ponta Grossa, v. 6, n. 1, p. 121-132, jan./jun. 2011.

MIANE, M. **Matemática 9º ano**: eu gosto mais. São Paulo: IBEP, 2012.

NAGAFUCHI, T.; BATISTA, I. L. O que é demonstração? Aspectos Filosóficos. In: ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 12., 2008, Rio Claro. **Anais**... Rio Claro, 2008. p. 1-16.

OLIVEIRA, F. C. **Dificuldades no processo ensino aprendizagem de trigonometria por meio de atividades**. 2006. 74 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2006.

OLIVEIRA, L. C. Educação nos tempos atuais: grandes desafios. **Revista psicopedagogia**, São Paulo, v. 20, n. 61, p. 67-71, 2003.

PERIUS, A. A. B. **A tecnologia aliada ao ensino de matemática**. 2012. 55 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Especialização em Mídias na Educação) – Universidade federal do Rio Grande do Sul, Cerro Largo, 2012.

RIBEIRO, R. G. **Técnicas para demonstrar teoremas**. Ouro Preto: Departamento de Ciências Exatas e Aplicadas, 2007.

SILVEIRA, J. S.; BALIEIRO FILHO, I. F. Uma proposta para o ensino de trigonometria por meio da história da matemática. **UNOPAR Científica Ciências Exatas e Tecnológicas**, Londrina, v. 12, n. 1, p. 51-60, nov. 2013.

SILVA, S. A. F.; SÁ, L. C.; OLIVEIRA, S. C. Ensino de razões trigonométricas no laboratório de matemática: uma experiência com utilização de geoplanos numa perspectiva investigativa. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 12., 2016, São Paulo. **Anais**... São Paulo, 2016, p. 1-12.

STRASBURG, E. B.; SPEROTTO, F. A.; MENEGHETTI, C. M. S. Atividades de Trigonometria para o ensino fundamental com o uso do software Geogebra. **Ciência e Natura**, Santa Maria, v. 37, p. 617-635, 2015.

ENSINO DA MATEMÁTICA POR MEIO DA CONTAÇÃO DE HISTÓRIAS

MATHEMATICS TEACHING BY HISTORY ACCOUNT

ARAUJO, Wellington Rabello[1]

MONTEIRO, Gisele de Lourdes[2]

MONDINI, Fabiane [3]

PAULO, Rosa Monteiro [4]

RESUMO

O texto apresenta o relato de uma experiência desenvolvida pelos bolsistas do PIBID-UNESP-Guaratinguetá (Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência) em colaboração com uma escola parceira. Nessa experiência destacamos a introdução do recurso didático-pedagógico "contação de história" na disciplina de matemática. Essa proposta foi desenvolvida em uma turma de 9º ano do Ensino Fundamental II. Neste texto apresentamos a contação de história como uma possibilidade de promover o ensino e a aprendizagem de matemática, pois ela favorece um ambiente enriquecedor, motivador, imaginativo, participativo e capaz de chamar a atenção dos alunos fazendo-os atuar como protagonistas de seu próprio conhecimento.

Palavras-chave: Malba Tahan. Quatro Quatros. Expressões Matemáticas. Vitae.

ABSTRACT

The text presents the report of an experience developed. In this experience, we highlight the introduction of the didactic-pedagogical resource storytelling in the mathematics discipline. The realization of this proposal was developed in a class of 9th grade of Elementary School II. In this text, we present the storytelling as a possibility to promote the teaching and the learning of mathematics, because it favors an enriching, motivating, imaginative, participative environment that is capable of attracting students' attention, thus, the student becomes the protagonist of their own knowledge.

Keywords: Malba Tahan. Four Fours. Mathematical Expressions.

1 INTRODUÇÃO

Este texto relata uma experiência em aulas de matemática realizada pelos bolsistas PIBID-UNESP-Guaratinguetá (Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência), em parceira com uma escola pública municipal. O objetivo desses encontros foi apresentar e trabalhar com a contação de história como recurso didático-pedagógico no processo de ensino e aprendizagem da matemática.

As atividades foram divididas em três encontros e desenvolvidas com os alunos de uma turma de 9º ano do Ensino Fundamental II. No primeiro encontro apresentamos a obra 'O Homem

[1] Mestre em Educação pela Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP). Docente da Universidade Virtual do Estado de São Paulo (UNIVESP), São Paulo, SP, Brasil. Endereço eletrônico: wrabelloa@gmail.com.

[2] Licenciada em Matemática pela Universidade Estadual Paulista (UNESP). Discente do Programa de Pós-graduação em Educação Matemática da Universidade Estadual Paulista (UNESP), Rio Claro, SP, Brasil. Endereço-eletrônico: gisemonteiro@yahoo.com.br.

[3] Doutora em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista (UNESP). Docente da Universidade Estadual Paulista (UNESP), Guaratinguetá, SP, Brasil. Endereço-eletrônico: fabiane.mondini@unesp.br.

[4] Doutora em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista (UNESP). Docente da Universidade Estadual Paulista (UNESP), Guaratinguetá, SP, Brasil. Endereço-eletrônico: rosamonteiropaulo@gmail.com.

que Calculava', de Malba Tahan, assim como os personagens e o local onde se passava a trama. Por fim, foi contada a história sobre os quatro quatros e solicitamos a participação dos estudantes para obterem os algarismos de zero a dez, por meio de operações matemáticas envolvendo os quatro quatros.

No segundo encontro, na continuidade da atividade proposta, foi contada novamente a história do homem que calculava e sugeriu-se que os alunos encontrassem expressões matemáticas que, por meio de operações aritméticas, resultassem nos algarismos de onze a trinta. Para isso, foi necessário apresentar as ideias de Terminal (?) e de Fatorial (!) para dar continuidade ao exercício, uma vez que, a partir do algarismo dezenove, eram necessárias outras operações, indo além das elementares (adição, subtração, divisão, multiplicação, potenciação e radiciação) para conseguir escrever os números com quatro quatros.

No terceiro e último encontro, foi realizada uma discussão sobre as possibilidades de escrita matemática (expressões aritméticas), suas regras e convenções. A partir dessa experiência foi elaborado este texto com o objetivo de apresentar uma discussão sobre as possibilidades de, por meio da contação de história, promover o ensino e a aprendizagem matemática.

2 CONTAÇÃO DE HISTÓRIA: UM RECURSO DIDÁTICO PARA A AULA DE MATEMÁTICA

A história está presente no cotidiano de todas as pessoas e de diferentes maneiras, assim ela pode atuar como agente informativo, comunicativo, recreativo, cultural, ou ainda, segundo Tahan (1966, p. 24), "como veículo de verdades eternas, como meio de conservação de tradições, ou da difusão de ideias novas".

Histórias utilizam recursos simples e criativos, ou seja, basta uma história interessante, um narrador ou contador de histórias e os ouvintes. Desta forma, ao contar uma história, a pessoa que a narra consegue a atenção do leitor de maneira inesperada, fazendo com que o ouvinte interaja, criando cenários, personagens, mundos, formas e figuras em sua imaginação.

> A criança e o adulto, o rico e o pobre, o sábio e o ignorante, todos, enfim, ouvem com prazer às histórias – uma vez que essas histórias sejam interessantes, tenham vida e possam cativar a atenção. A história narrada, lida, filmada ou dramatizada, circula em todos os meridianos, vive em todos os climas, não existe povo algum que não se orgulhe de suas histórias, de suas lendas e seus contos característicos (TAHAN, 1966, p.16).

As aulas desenvolvidas junto à escola parceira tinham por objetivo possibilitar uma aprendizagem, respeitando as características individuais de cada um, desenvolvendo a autoconfiança e aproximando a matemática do cotidiano em que o aluno vive. Nesse cenário, a contação de história foi um recurso didático e pedagógico capaz de potencializar o desenvolvimento da imaginação e da criatividade dos estudantes devido a sua simplicidade, flexibilidade e fácil manuseio.

Desse modo, é possível afirmar que a contação de história contribui com a aprendizagem, possibilitando ao aluno o desenvolvimento de competências e habilidades relativas ao raciocínio matemático (ou às tarefas investigativas que exigem um pensar matemático). Para Gasperi e Pacheco (2007) a história como metodologia possibilita ao aluno pensar sobre o que está aprendendo e, nesse movimento, desenvolve seu conhecimento.

D'Ambrosio (1996), ao falar sobre a história da Ciência Matemática, afirma que ela pode despertar a curiosidade e o interesse pela matemática, motivando, dessa maneira, o estudo dessa ciência. Também é de grande valia para os professores dessa área, pois o fato de contar histórias no ensino da matemática faz com que a aprendizagem dos alunos assuma aspectos críticos e reflexivos, na medida em que a interpretação e a análise podem tornar mais atrativa a disciplina, apresentando desafios e novidades em relação ao ensino e aprendizagem de matemática. As narrativas sobre a matemática têm a potencialidade de criar um ambiente educacional com essas características, com o intuito de desenvolver competências e habilidades matemáticas.

3 O CASO DOS QUATRO QUATROS: DA HISTÓRIA À MATEMÁTICA

O caso dos quatro quatros é um conto que está presente no livro "O homem que calculava", do escritor Malba Tahan. O livro apresenta a narração das proezas e aventuras matemáticas do calculista persa Beremiz Samir (o homem que calculava) por seu amigo e companheiro de jornada Hank-Tade-Maiá, que fica impressionado com a facilidade e esperteza de Beremiz ao calcular e solucionar problemas considerados impossíveis.

Malba Tahan é o pseudônimo do professor Júlio César de Mello e Souza, nascido em 6 de maio de 1895, no Rio do Janeiro, e falecido no dia 18 de junho de 1974, em Recife, devido a um ataque cardíaco. Para seu pseudônimo, o professor Mello e Souza cria uma própria biografia. Para Lorenzato (2004), as ideias de Malba Tahan são precursoras para um modo de ensino e a aprendizagem matemática, pois a didática proposta em seus livros é inovadora. No livro "O homem que calculava" (o mais famoso e conhecido livro do autor) encontram-se interligações didáticas entre o imaginar e o fazer. Segundo Oliveira (2007), o foco do livro é também preparar, formar e capacitar professores que se disponham a trabalhar em suas aulas com o recurso didático da contação de histórias.

O caso dos quatro quatros é uma narrativa específica que ocorre no mercado de Bagdá, onde Beremiz Samir (o homem que calculava) fica surpreso e fascinado com uma peculiaridade presente na tenda de um mercador: os quatro quatros. Essa história possibilita ao professor tratar conteúdos que envolvem operações matemáticas, como por exemplo: adição, subtração, multiplicação, divisão, radiciação, potenciação, fatorial, terminal. Possibilita também o estudo da técnica ou algoritmo usual para resolver as expressões aritméticas expressando-se por meio da linguagem matemática.

4 A TURMA

As atividades foram realizadas com cerca de 20 alunos de uma turma de 9º ano do Ensino Fundamental, em uma escola da rede pública estadual de São Paulo, parceira do PIBID-MATEMÁTICA/FEG. A escola atende alunos do Ensino Fundamental II e Ensino Médio e está situada na periferia do munícipio. Seus índices, apontados por avaliações externas como o SARESP, mostram algumas dificuldades dos alunos relativas a conteúdos de matemática. Tais constatações foram confirmadas no relato da professora de matemática da turma, que destacou a dificuldade dos estudantes em ler, escrever e interpretar ideias matemáticas.

As ações do PIBID envolvem o acompanhamento das aulas pelos bolsistas – que são alunos do curso de Licenciatura em Matemática – e a elaboração de atividades para o desenvolvimento de projetos com os alunos da escola parceira.

A contação de história aqui descrita é uma dessas atividades, que foi planejada em colaboração com a professora, objetivando superar dificuldades dos alunos por ela apontadas. Durante o desenvolvimento das práticas com os alunos, tanto os bolsistas (os dois primeiros autores desse texto), quanto a professora de matemática da turma, participaram ativamente.

Para que fosse possível analisar o envolvimento dos alunos com a atividade, as aulas foram gravadas. A filmagem foi transcrita e o texto veio a constituir os dados que subsidiaram o que é descrito neste artigo.

5 OS ENCONTROS

No primeiro encontro ocorreu a apresentação do livro, o início da contação da história e a apresentação do objetivo da tarefa, que era representar os números de zero a dez por meio de operações matemáticas, de modo que houvesse quatro repetições do algarismo quatro. O bolsista do PIBID, usando recursos de mídia (projetor multimídia e *notebook*), contou a história e exemplificou a tarefa com os números zero e um. Ele solicitou a participação dos estudantes dando início ao diálogo que expôs possíveis soluções vistas pelos alunos.

Os estudantes relataram que gostavam de histórias, contudo nunca leram ou ouviram histórias de Malba Tahan ou com características matemáticas. Assim, deu-se o início à participação dos estudantes na atividade: discutindo soluções e respostas para o problema, como por exemplo, as situações abaixo que expõem modos dos alunos expressarem os números dois e dez.

> $2 = \frac{4}{4} + \frac{4}{4}$ e ao expor seu raciocínio, diz “ao dividir quatro por quatro e somar o resultado da divisão de quatro por quatro, o valor encontrado é dois”. Nesse outro exemplo, a aluna L utiliza a expressão $4 + \sqrt{4} + \sqrt{4} + \sqrt{4}$ para representar o algarismo dez, e ao descrever sua expressão ela menciona “que quatro mais raiz de quatro mais raiz de quatro mais raiz de quatro resulta em dez”, ainda neste exemplo outro aluno representa o dez com a seguinte expressão o $4 + 4 + 4 - \sqrt{4}$ e justifica seu raciocínio dessa forma “quatro mais quatro mais quatro menos raiz quadrada de quatro têm-se dez” (ARAUJO, 2015, p. 45-50).

Também há exemplos em que os alunos expressaram corretamente o seu raciocínio por meio da língua materna, contudo apresentaram certa dificuldade com o uso das convenções matemáticas para resolver expressões aritméticas. Por exemplo, ao escrever o número quatro seguindo as regras estabelecidas, o aluno D usou a expressão $4 \times 4 - 4 + 4$ e, ao relatar seu pensamento em língua materna, descreveu “quatro menos quatro resulta em zero e ao multiplicar por quatro continua sendo zero, logo, ao somar quatro com zero temos quatro”. Neste caso, o raciocínio do aluno está correto, ou seja, se fosse possível efetuar primeiro a operação subtração ele obteria o resultado esperado. Porém, a expressão matemática exige uma ordem nas operações, o que obriga a fazer primeiro a multiplicação e, portanto, a solução proposta pelo aluno não é válida. Essa foi uma oportunidade de discussão com os alunos.

No segundo encontro o professor da turma e os bolsistas retomaram a leitura da história sobre os quatro quatros para continuar a atividade. Coletivamente, foi escrita a expressão matemática para o número onze. Posteriormente, os estudantes representaram os números de doze a trinta por meio de operações matemáticas, sempre obedecendo a regra de uso dos quatro quatros.

A partir do algarismo dezenove foi necessário que os bolsistas apresentassem novas operações matemáticas: o Terminal (?) e o Fatorial (!), uma vez que elas permitem escrever diversos números ímpares maiores que 19 seguindo a regra exigida: envolver quatro vezes o número quatro. A partir de então, os estudantes passaram a utilizar esses conceitos nas expressões aritméticas. Vejamos alguns exemplos:

> O aluno R apresenta a seguinte solução para o algarismo dezenove: o $4?+4?-(4 \div 4)$ e descreve "quatro terminal mais quatro terminal menos o quociente de quatro por quatro". Os alunos R e S representam o número vinte e três pela expressão: $4! - 4^{4-4}$ e dão a descrição "quatro fatorial menos quatro elevado a diferença de quatro por quatro" (ARAUJO, 2015, p. 55-56).

Na continuidade da aula, o aluno A representa o algarismo vinte e oito com sentença matemática: $(4+4) \times 4 - 4$. Outros estudantes utilizam a mesma sentença, mas sem o uso dos parênteses: $4 + 4 \times 4 - 4$. Ao relatar, afirmam que "somar quatro com quatro resulta em oito e oito vezes quatro é igual a trinta e dois, menos quatro temos o número vinte e oito". Nota-se que o estudante A utiliza corretamente a convenção matemática, empregando os parênteses para obter o algarismo desejado. Já os demais cometem o mesmo erro observado na descrição do aluno D, anteriormente citado. Isso exigiu uma intervenção do professor para esclarecer o significado da convenção matemática e da ordem das operações nas expressões aritméticas que, visivelmente, não havia sido compreendida pelos alunos.

No terceiro encontro o bolsista conversou com os alunos sobre a atividade desenvolvida, pedindo-lhes que falassem sobre os aspectos positivos e negativos, as dificuldades e os êxitos. O que se destacou desse diálogo, após a análise do que foi descrito, foi a dificuldade manifestada pelos alunos relativa à ordem das operações nas expressões numéricas. As atividades desenvolvidas permitiram aos alunos compreender que é preciso

> primeiro resolver as operações de natureza multiplicativa (multiplicações e divisões) para só depois efetuar as operações de natureza aditiva (adições e subtrações), de dentro para fora, ou seja, primeiro o que está dentro dos parênteses, depois dos colchetes e em seguida das chaves (LOPES, 2014, p. 1).

Ainda se mostra, no diálogo, que os alunos viram a atividade de contação de história como sendo significativa, pois afirmam que foi

> [...] uma experiência pra lá de boa, uma aula totalmente diferente de todas que já tive, [...] pude testar meus conhecimentos através de contas que eu não conhecia. [...] Descobri que Matemática junto com história é igual a conhecimento. [...] aprendemos coisas diferentes em aulas diferenciadas. Além da aula ser bem divertida, interessante e educativa [...]. Foi legal, pois tivemos a participação de todos os alunos. [...] os números ímpares são mais difíceis para achar, mas utilizando novas operações Matemáticas e parênteses, os números ímpares tornam-se mais fáceis de serem encontrados (ARAUJO, 2015, p. 63).

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A experiência vivida e analisada mostrou que a contação de história colabora para o desenvolvimento de competências e habilidades exigidas para a resolução de expressões numéricas. Enquanto estratégia de trabalho na sala de aula foi possível perceber que a contação de história faz com que os alunos sejam interessados, motivados, criativos e participativos.

O raciocínio apresentado pela maioria dos estudantes foi correto. O desenvolvimento das atividades permitiu identificar as dificuldades dos alunos, dando possibilidade ao professor da turma de intervir e, no contexto da contação de história, mostrar a relevância da convenção matemática. Além disso, a apresentação das operações terminal e fatorial fez sentido ao aluno em decorrência da contextualização permitida pela história.

A contação de história traz para as aulas de matemática "as brincadeiras de faz de conta, valores e conceitos, colabora na formação da personalidade da criança, propicia o envolvimento social e afetivo e explora a cultura e a diversidade [...]" (SOUZA; BERNARDINO, 2011, p. 236-238). A experiência relatada neste texto também possibilitou o desenvolvimento da imaginação e favorece a colaboração entre os alunos, levando-os a expressarem o seu pensar. Essa expressão torna possível trabalhar com a oralidade e a escrita aproximando-os de um fazer matemático rigoroso e dando-lhes possibilidade de falar sobre suas compreensões.

REFERÊNCIAS

ARAUJO, W. R. **O caso dos quatro quatros como uma possibilidade pedagógica para o desenvolvimento de competências e habilidades matemáticas**. 2015. 85p. Trabalho de Graduação (Graduação em Licenciatura em Matemática) - Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá. Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2015.

CASTRO, A. S.; SOUZA, G. M. C. Contos e encantos na literatura de Malba Tahan no Ensino Fundamental. Revista. **Aleph Infâncias.** Rio de Janeiro: UFRRJ, ano 5, nº 16, p.111-123, novembro de 2011.

D'AMBROSIO, U. História da Matemática e Educação. In: **Cadernos CEDES 40**. História e Educação Matemática. 1. Ed. Campinas, SP: Papirus, 1996.

LOPES, A. J. **Sobre a ordem das operações aritméticas.** Lista Sbem. Disponível em <sbem-l@listas.rc.unesp.br>. Acesso em: 11 Mar. 2014.

LORENZATO, S. Malba Tahan, um precursor. **Revista em Educação Matemática.** São Paulo: Sociedade Brasileira de Educação Matemática – SBEM, ano 11, nº16. Mai. 2004. p.63-66.

SOUZA, L. O.; BERNARDINO, A. D. A contação de histórias como estratégia pedagógica na educação infantil e ensino fundamental. Revista de Educação. **Educere ET Educare**. Cascavel: Unioeste Campus de Cascavel, ano 6, nº 12, p.235 – 249, Dez. 2011.

OLIVEIRA, C. C. **A sombra do arco-íris: um estudo histórico/mito crítico do discurso pedagógico do discurso de Malba Tahan**. 2007. 171p. Tese (Doutorado em ensino de Ciências e Matemática). Faculdade de Educação, USP, São Paulo. 2007.

GASPERI, W. N. H.; PACHECO, E. R. A história da matemática como instrumento para a interdisciplinaridade na educação básica. **Revista e PDE**: Programa de Desenvolvimento Educacional da Secretaria da Educação do Estado do Paraná. Paraná, ano 3, nº 5, p. 10- 23, agosto de 2007.

TAHAN, M. **A arte de ler e contar histórias**. 5 ed. Rio de Janeiro: Conquista. 1966. 250p.

TAHAN, M. **O Homem que Calculava**. 72 ed. Rio de Janeiro: Record, 2008. 300p.

PEREIRA, D. E. **Correspondências Científicas como uma Relação Didática entre História e Ensino de Matemática:** o exemplo das cartas de Euler a uma princesa da Alemanha. 2014. 281 p. Tese (Programa de Pós-Graduação em Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2014. Tese orientada por Iran Abreu Mendes.

Por: CARNEIRO, Luís Felipe Gonçalves[1]
ANDRADE, Mirian Maria[2]

Neste texto, pretendemos compartilhar nossas impressões da tese de Pereira (2014), intitulada *Correspondências científicas como uma relação didática entre História e ensino de Matemática: o exemplo das cartas de Euler a uma princesa da Alemanha*. A tese foi desenvolvida no Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, sob a orientação do professor doutor Iran Abreu Mendes.

Inicialmente, é necessário afirmar que a autora (PEREIRA, 2014) utiliza o gênero carta para relatar sua pesquisa. Portanto, não há capítulos na tese. Em vez de uma introdução, encontramos uma Carta de Apresentação na qual ela (PEREIRA, 2014) expõe a organização do trabalho. Deste modo, a autora o estrutura utilizando cartas, que estão organizadas em blocos de correspondências.

Na Carta de Apresentação, Pereira (2014) evidencia que a opção pelo gênero escolhido para a escrita da tese foi inspirada pelas próprias cartas da obra *Lettres à une Princesse d'Alemagne sur divers sujets de physique et de philosophie*, de Leonhard Euler, o objeto de estudo da pesquisadora, e se apoia na Pedagogia da Correspondência de Paulo Freire. Neste texto, por questões de praticidade, vamos nos referir à obra de Euler somente por *Lettres.* São apresentados, também, os cinco blocos de correspondências que estruturam a tese. As primeiras correspondências trazem a questão central da pesquisa, seus objetivos e os procedimentos metodológicos empregados. O segundo bloco de correspondências discute a vida e a obra de Euler (1707 - 1783). O terceiro bloco trata da necessidade de comunicação do ser humano e da relevância das cartas ao mesmo tempo em que busca contextualizar historicamente a Europa do século XVIII e evidenciar algumas críticas feitas à obra de Euler, fechando com as considerações da autora sobre tal obra. O quarto bloco de correspondências traz a tradução do primeiro tomo da obra de Euler. As correspondências finais apresentam uma leitura didática das cartas de Euler à Princesa da Alemanha e um levantamento de possibilidades de usos pedagógicos de algumas cartas com base nas sugestões dos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (PCN).

Tendo a visão geral do trabalho, compreendemos que a pesquisadora (PEREIRA, 2014) conseguiu, no decorrer da tese, desenvolver muito bem sua proposta de escrevê-la no gênero carta. Se Pereira (2014) entendia que a carta "pode ser uma ferramenta pedagógica pelo fato de convidar o leitor ao diálogo, à resposta, à continuidade e à troca de experiências" (PEREIRA, 2014, p. 16), consideramos que a autora conseguiu incorporar essa compreensão ao seu trabalho. O leitor é conduzido, desde a Carta de Apresentação, para a leitura de cada uma das cartas seguintes da tese.

[1] Licenciado em Matemática pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Mestrando em Ensino de Matemática pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), Cornélio Procópio, PR, Brasil. Endereço eletrônico: luiscarneiro@alunos.utfpr.edu.br.
[2] Doutora em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista (UNESP). Docente da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), Cornélio Procópio, PR, Brasil. Endereço eletrônico: miriangoncalez@utfpr.edu.br.

É importante mencionar, ainda, que as correspondências são escritas hipoteticamente em estações do ano, que tinham como objetivo representar os inícios e termines dos ciclos da pesquisa. A Carta de Apresentação, por exemplo, é escrita na cidade de Natal, Rio Grande do Norte, na primavera de 2012, e inicia-se com os seguintes cumprimentos: *Prezado Senhor*, *Prezada Senhora*. Pereira (2014, p.17) justifica essa escolha afirmando que:

> Cada bloco de correspondência foi hipoteticamente escrito em uma das estações do ano, remetendo-os a ciclos ou etapas da pesquisa, que precisavam ficar bem definidas, como as estações climáticas assim o são durante o período de 365 dias.

Ainda na Carta de Apresentação, Pereira (2014) descreve brevemente sua trajetória profissional e apresenta a fonte de estudo que propiciou o desenvolvimento da tese: a obra *Lettres à une Princesse d'Alemagne sur divers sujets de physique et de philosophie*, de Euler (1768), cujo título em português, seria *Cartas a uma Princesa da Alemanha sobre diversos temas de física e de filosofia*.

O livro, de acordo com Pereira (2014), reúne um conjunto de cartas destinadas à Princesa Anhalt-Dessau, sobrinha de Frederico II, rei da Prússia de 1740 a 1786. Euler publica *Lettres* entre 1768 e 1772, após trocar Berlim por São Petersburgo. Assim que publicada, *Lettres* passa a circular por toda a Europa. Pereira (2014) ressalta que entre a realeza europeia do século XVIII era comum a escolha de tutores, especialmente para as damas da realeza, já que as universidades e comunidades científicas eram espaços reservados somente aos homens, salvo raras exceções.

O primeiro bloco de correspondências é organizado em três cartas: Carta I, Carta II e Carta III. Na Carta I, Pereira (2014) expõe a temática da pesquisa, que é o estudo dos limites e potencialidades do uso de fontes históricas para o ensino de Matemática; define o objetivo geral desta, que é identificar tais limites e potencialidades nas cartas de Euler, e os objetivos específicos, entre os quais está a tradução da *Lettres*; identifica os conteúdos matemáticos nela contidos, os relaciona com os PCN de Matemática e indica perspectivas de uso da *Lettres* a partir dos princípios teóricos da História da Matemática.

Nas Cartas II e III, Pereria (2014) descreve os procedimentos metodológicos adotados e esclarece que foi feita a escrita de um Diário de Pesquisa para registrar, organizar e planejar os rumos da pesquisa. A tradução da *Lettres* foi realizada com o auxílio das versões passadas para o espanhol e para o inglês, além da versão original, escrita em francês. A autora (PEREIRA, 2014) relata a necessidade de realizar um estudo de História Geral para melhor compreender o contexto em que *Lettres* foi escrita. Na Carta II, Pereira (2014) marca o fim da primavera na tese e na Carta III inicia o verão, nesta são resgatadas as referências que sustentam o uso de diários de pesquisa.

O bloco de correspondências seguinte, nomeado como Correspondências II, traz seis cartas que abordam a vida e obra de Euler. No entanto, a partir das nossas leituras, percebemos que nessas correspondências há também certa contextualização do momento histórico europeu, já que não é possível deixar de estabelecer uma conexão entre o momento histórico e a narrativa da vida do matemático.

Pereira (2014) começa a narrar a vida de Euler pelo fim, a partir do seu falecimento em São Petersburgo. Euler se destacou pela sua genialidade ainda em vida, mas sua relevância ultrapassa vários séculos e ainda hoje não foi diminuída. A autora (PEREIRA, 2014) divide a vida de Euler em quatro grandes períodos: os primeiros vinte anos em Basel (1707-1727), a juventude em São Petersburgo (1727-1741), a vida adulta em Berlim (1741-1766) e os últimos anos em São Petersburgo (1766-1783).

Pereira (2014) discorre sobre cada período da vida de Euler e que aqui serão brevemente discutidos. A pesquisadora (PEREIRA, 2014) relata, na tese, que Euler nasceu em Basel, na

Suíça, e teve como instrutor Johann I Bernoulli, pela amizade de seu pai com a família Bernoulli. Euler estudava Teologia, contudo tomou outros rumos depois de Johann descobrir seu talento para a Matemática e, posteriormente, Daniel e Niklaus II Bernoulli sugerirem sua contratação para a Academia de Ciências de São Petersburgo à czarina Catarina I.

No Império Russo, na época um dos centros científicos da Europa, Euler se casou duas vezes, teve filhas e ganhou notoriedade como matemático após a publicação de alguns trabalhos importantes. Tal notoriedade lhe rendeu um convite de Frederico II para integrar a Academia de Ciências da Prússia, o qual acabou aceitando devido às turbulentas disputas pelo trono russo após a morte de Catarina I. Em Berlim, foi importante na modernização da Academia e desenvolveu diversos estudos sobre temas como artilharia, navegação e movimentos da Lua e dos planetas. É dessa época a *Lettres*, referência fundamental da tese de Pereira (2014). Devido a divergências com outros acadêmicos e a sua não nomeação para a direção da Academia por Frederico II, o matemático retornou a São Petersburgo após convite de Catarina II.

De novo em São Petersburgo, Euler, recebido com muito prestígio e honrarias, não reduziu a intensidade de sua produção científica. O matemático passou a ter sua saúde debilitada, ficou cego devido a experiências em estudos de Ótica e faleceu aos 77 anos, deixando um importante legado para a Física, a Matemática e outros campos de estudo. Esse legado é traduzido pelo impressionante número de 866 livros e artigos publicados, entre os quais *Introdução Completa à Álgebra*, o livro de Matemática mais impresso no mundo depois de *Os Elementos*, de Euclides.

Consideramos esse bloco de correspondências, sobre a vida de Euler, parte muito importante do trabalho de Pereira (2014). A autora começa a narrá-la a partir da nota de seu falecimento, a qual traz características bastante conhecidas sobre o matemático, como o fato de ter sofrido com a cegueira no fim da vida e de ser reconhecido por sua intensa produção científica. No entanto, é a visão completa da sua vida, desde seus primeiros anos em Basel aos últimos na Rússia, tomando-se consciência dos desafios que enfrentou e dos feitos que realizou, que humaniza o personagem e permite ao leitor conhecer o autor da referência principal da tese.

Em Correspondências III, Pereira (2014) escreve mais três cartas, nas quais aborda as críticas e comentários que a *Lettres* de Euler recebeu. Na Carta X, que inaugura o outono na tese de Pereira (2014), a autora faz algumas considerações sobre a importância da comunicação, tanto falada quanto escrita, para a humanidade. Pereira (2014) fala sobre a invenção da escrita e do papel como acontecimentos históricos importantes, mas compreendemos que as considerações sobre a relevância das cartas como instrumento de propagação de conhecimentos e de instrução de jovens, popularizadas no século XVIII, constituem a ideia central da Carta X.

O terceiro bloco de correspondências, ao trazer as críticas e elogios feitos a *Lettres* por matemáticos e filósofos, identificando quem faz a crítica e qual sua relação com Euler, é desenvolvido com cuidado pela autora. Esse bloco de correspondências, bem como o anterior, é essencial para compreender o trabalho de Pereira (2014).

Nas Cartas XI e XII, discorre sobre as críticas feitas à *Lettres*, tanto positivas quanto negativas. Segundo Pereira (2014), a *Lettres* foi uma publicação diferente dos livros científicos da época porque era rica em ideias, mas também leve e com o intuito de dialogar com um leitor que ainda está começando a construir seus conhecimentos científicos.

> Essa obra, que nada tem em comum com as demais produções de Euler deve ter se constituído em um repouso para seu espírito, destinando-se a iniciar nas altas competências da física uma pessoa desprovida de conhecimentos em qualquer das ciências (LA PENHA, 1984, apud PEREIRA, 2014, p. 59).

Entre os estudiosos da época, Voltaire, Lagrange e D'Alembert não aprovaram a *Lettres*, sendo que Lagrange e D'Alembert, este último desafeto de Euler, trocaram correspondências ironizando a obra; por outro lado, Condorcet tece elogios à obra. De acordo com Guilherme de La

Penha, referência que sustenta Pereira (2014), a intenção de Euler com a *Lettres* era direcioná-la ao público geral. A autora (PEREIRA, 2014) da tese define o sucesso de Euler com as seguintes palavras: [...] se os critérios para mensurar a penetrabilidade das Cartas de Euler for a quantidade de traduções e o número de edições sucessivas, pode-se considerar que seus propósitos foram alcançados (PEREIRA, 2014, p. 61).

No bloco Correspondências IV, a autora se propõe a traduzir para o português o primeiro tomo da *Lettres* de Euler, composto por 79 cartas. A obra se inicia com a Carta I: Sobre a extensão, na qual Euler trata das unidades de medida a partir de um diálogo com a Princesa. Nas seguintes cartas, Euler evolui para outros temas e mantém o mesmo estilo de escrita e diálogo.

Depois da tradução da obra de Euler, Pereira (2014) inicia as Correspondências V, composta por mais três cartas. Neste momento, a autora (PEREIRA, 2014) dialoga especificamente com os professores de Matemática, com o objetivo de identificar possibilidades de usos da *Lettres* em sala de aula. Dessa forma, a partir da Carta XIII, que começa o inverno na tese, iniciando uma nova etapa da pesquisa, a autora troca os cumprimentos *Prezado Senhor, Prezada Senhora* por *Prezado Professor, Prezada Professora*.

Na Carta XIII, a autora relata que discutirá o potencial pedagógico da *Lettres* sob os princípios teóricos da História da Matemática. Pereira (2014) destaca que o uso de fontes históricas, como a obra de Euler, no ensino é proveitosa, porém é necessário realizar uma revitalização das informações produzidas há muitos anos. A autora (PEREIRA, 2014) ressalta que essa revitalização também é importante e necessária para possibilitar o exercício da transversalidade em sala de aula, especialmente ao se considerar que um dos objetivos da tese é relacionar os conteúdos matemáticos da obra de Euler com os PCN de Matemática.

Na Carta XIV, Pereira (2014) afirma que escolheu agrupar as cartas de Euler por aproximação dos seus temas. Desta forma, a autora (PEREIRA, 2014) identifica, nas Cartas I e II de Euler, respectivamente intituladas *Sobre a extensão* e *Sobre a velocidade*, 14 conteúdos que podem ser trabalhados, tais como sistema métrico, cálculo de distâncias e proporcionalidade.

Desse modo, Pereira (2014) propõe uma contextualização para uma possível atividade de Matemática que se desenvolva com início na Carta I de Euler. Nesta contextualização, a autora (PEREIRA, 2014) escreve sobre o surgimento do sistema métrico, que se dá com base em estudos científicos na França, mas também é afetado por questões políticas, sendo, inclusive, influenciado por ideias da França revolucionária do final do século XVIII.

Com essa contextualização, são propostos três blocos de atividades. O primeiro dos blocos sugere atividades de medição de distâncias sob o contexto das Grandes Navegações. O segundo bloco utiliza o sistema de medidas vigente nos Estados Unidos e no Império Britânico para propor atividades de conversão de medidas. O terceiro bloco cita o caso do alqueire, medida utilizada por fazendeiros e agricultores no Brasil e que varia conforme a região, e traz, novamente, atividades de conversão de medidas.

Após esta etapa, são destacados os conteúdos das demais cartas de Euler, como as Cartas III a VIII, que tratam de teoria musical e permitem o ensino de conteúdos como logaritmo e séries numéricas. Contudo, são sugeridas atividades somente para as duas primeiras cartas, enquanto que nas demais apenas são evidenciados seus temas.

Nesse bloco de correspondências, a pesquisadora buscou visualizar o potencial pedagógico de algumas cartas da obra de Euler a partir de sugestões dos PCN e com base em estudos sobre a História da Matemática. Pereira (2014) identifica os conteúdos possíveis de serem trabalhados em cada uma das cartas e sugere três blocos de atividades, sobre conversão de medidas, para as primeiras cartas. Entendemos que as atividades apresentadas são bastante proveitosas, entretanto também tivemos a percepção de que as cartas de Euler apareceram pouco, ficando com o papel de uma leitura para iniciar as atividades com os alunos.

Na Correspondência Final, composta pela carta as atuais e futuras gerações de docentes, Pereira (2014) tece suas últimas considerações sobre o trabalho desenvolvido. Cabe destacar que essa última carta inaugura uma nova primavera na tese. Ou seja, há o começo de outra etapa da pesquisa. Essa metáfora das estações do ano, de acordo com Pereira (2014), representa (re)começos e (re)términos de ciclos da pesquisa. A pesquisadora conclui que a possibilidade de utilizar a *Lettres* de Euler e seus conteúdos matemáticos na Educação Básica é viável, sendo possível, inclusive, articular esses conteúdos com as propostas dos PCN. Além disso, a multidisciplinaridade da *Lettres* corrobora as orientações didáticas para o ensino de Matemática. Pereira (2014) também conclui que, apesar da atualidade da obra de Euler, é recomendável que seja realizado um tratamento didático para o uso em sala de aula.

Concluímos que a tese de Pereira (2014) é interessante e relevante para estudos em História da Matemática porque disponibiliza uma versão em português da obra de Euler e possibilita sua leitura a partir da compreensão do contexto histórico e das intenções do autor ao produzi-la. Também era um objetivo do trabalho refletir sobre o potencial pedagógico das cartas escritas pelo matemático. Para tanto, a autora identifica os conteúdos matemáticos possíveis de serem trabalhados em cada uma das cartas e convida, na carta final da tese, os professores da Educação Básica a pensar em atividades que possam ser desenvolvidas a partir da *Lettres.*