HIPÁTIA

Υπατία

REVISTA BRASILEIRA DE HISTÓRIA, EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA

ISSN 2526-2386

v.3, n.2, dezembro 2018

Instituto Federal de São Paulo

HIPÁTIA

Υπατία

INSTITUTO FEDERAL
São Paulo

UTFPR
UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

HIPÁTIA

Υπατία

REVISTA BRASILEIRA DE HISTÓRIA, EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA

v.3, n.2, dezembro 2018

Instituto Federal de São Paulo

HIPÁTIA	**São Paulo (SP)**	**v. 3**	**n. 2**	**p. 1-65**	**dez. 2018**

LINHA EDITORIAL

A HIPÁTIA - Revista Brasileira de História, Educação e Matemática, conforme sugere seu nome, aceita trabalhos de História da Matemática, Educação Matemática e de Matemática (pura e aplicada). A revista foi oficialmente criada em 8 de março de 2016. Duas concepções principais nos norteiam: ajudar a ampliar o espaço da mulher na ciência no Brasil; abrir um espaço para jovens pesquisadores (mestres, doutorandos ou doutores que tenham obtido título há, no máximo, cinco anos). Isso significa que procuramos dentro da composição de nosso Conselho Editorial, Conselho Científico e em nossas edições, obter uma maioria de pesquisadores ou de trabalhos cujos autores atendam a pelo menos um desses quesitos. É salutar destacar que, no entanto, contribuições de outros pesquisadores continuam sendo de grande valia. A revista é composta por cinco seções : **1) Ensaios**, na qual são aceitos textos discursivos de caráter crítico **2) Artigos**, na qual são aceitos trabalhos completos ou com resultados parciais consistentes; **3) Iniciação Científica**, na qual são aceitos trabalhos concluídos decorrentes de pesquisas em nível de graduação (iniciação científica, trabalho de conclusão de curso, monografias resultantes de trabalhos orientados por docentes etc.); **4) Relatos de Experiência**, na qual são publicados textos que descrevam precisamente uma dada experiência que possa contribuir de forma relevante para as áreas da HIPÁTIA; **5) Resenhas**, na qual são aceitas resenhas de livros, dissertações e teses, ou outros formatos de interesse publicados preferencialmente há não mais que sete anos.

SUMÁRIO

EDITORIAL

S. César **Otero-Garcia**
Editor-chefe

Línlya
Editor-chefe

No último dia de 2018, como têm sido desde o primeiro número, publicamos mais uma edição da revista Hipátia. Neste dia, diferentemente dos anos anteriores, não há no coração dos brasileiros apenas os sentimentos comuns que costumam estar presentes nesta época do ano: alegria, amor, ansiedade, comoção... neste dia, por toda conjuntura política do país, além desses sentimentos, muitos brasileiros também estão sentindo medo, tristeza, apreensão e até pavor. Esses sentimentos que podemos chamar de ruins têm diversos motivos para estarem hoje presentes em muitos brasileiros; um deles em especial é de interesse desta revista e ele tem a ver com a religião.

Já é de amplo conhecimento – ou talvez não tão amplo assim – que misturar política com religião pode trazer consequências, digamos, complicadas (eufemismo) para a sociedade. O exemplo histórico mais emblemático talvez seja a forte presença política da Igreja Católica na Idade Média. Naquela época, muitos "hereges" foram perseguidos, muitas "bruxas" foram queimadas. De todas as consequências desse "casamento", a destruição de obras consideradas profanas certamente é uma das que mais causaria a Hipátia, a figura histórica, tristeza: em sua época, fato semelhante ocorrera, tendo sido algumas obras salvas por ela própria. No filme Alexandria (Ágora) temos retratada a cena da destruição do templo *Serapeum* e da biblioteca que existia junto dele. A parte possivelmente mais comovente desse trecho do filme é a que mostra o desespero e a tristeza de Hipátia ao tentar escolher quais livros ela salvaria da destruição.

A Idade Média e o fim do século IV e começo do V não guardam apenas a semelhança da destruição de livros, já que em ambas as épocas a religião tinha total relação com tal fato. No século IV, o Império Romano deixou de ser um Estado totalmente pagão para se tornar um estado misto, pagão e cristão. Desse conflito de crenças e do papel político do bispo da igreja de Alexandria, o patriarca Cirilo, resultou, dentre tantas questões, a destruição mencionada logo antes e, também, a morte da própria Hipátia, que foi esfolada viva por um grupo de cristãos. O motivo dessa trágica morte, grosso modo, tem relação com o fato de Hipátia ser uma pagã num Estado cada vez mais cristão, o Império Romano.

Embora possamos estar tão distantes da Idade Média e, mais ainda, dos séculos IV e V, no ínterim dessas épocas e ainda hoje, em maior ou menor grau, a religião continuou/continua a exercer um forte papel político em muitos lugares do mundo. No Brasil, em especial, essa interferência têm se intensificado nos últimos anos. A Frente Parlamentar Evangélica, que inicioua legislatura de 2010 com 73 congressistas, em 2019 contará com 84, segundo o Departamento Intersindical de Assessoria Parlamentar (Diap). Essa frente, chamada informalmente de Bancada Evangélica, foi responsável ainda pela indicação de diversos ministros no novo governo e também pelo veto a alguns nomes. Aliás, o presidente eleito tinha como slogan em sua campanha “Brasil acima de tudo, Deus acima de todos”.

Se estamos ou não galgando os passos para nos tornarmos um estado teocrático em que cenas como as vistas em outras épocas se repetirão, só o tempo dirá. A revista Hipátia, até por conta da biografia da figura histórica que emprestou seu nome a ela, espera, no entanto, que o Brasil se torne *de fato* o estado laico que (ainda) preconiza sua constituição em seu artigo 5º. *De fato* porque, embora mais numerosas nos últimos tempos, não é de hoje que é possível notar contradições nessa suposta laicidade, como o ensino religioso em escolas públicas brasileiras, por exemplo.

A laicidade do Estado juntamente com a livre manifestação do pensamento, são princípios muito importantes para um periódico científico. Esses princípios, via de regra, garantem que assuntos religiosos não interferirão na ciência produzida pelo país, tampouco, por consequência, nos veículos que a divulgam. Graças a eles que pode-se falar de evolução das espécies, da Terra esférica, do modelo heliocêntrico, de doação de órgãos, de métodos contraceptivos, de feminismo e de tantos outros assuntos que esbarram aqui ou ali em uma ou outra religião, mas que são fundamentais para o progresso da Ciência e das relações humanas.

Tudo isso posto abre esta edição da Hipátia o artigo de história da matemática *Uma Contextualização Histórica para o Modelo Clássico de Malthus*, que tem como um de seus panos de fundo o período histórico do Iluminismo, que foi um movimento intelectual e filosófico que defendia ideais centrados na razão, que incluíam a liberdade, o progresso, o governo constitucional e, ora vejam, a separação Igreja-Estado. Na sequência temos um artigo de educação matemática, um trabalho de iniciação científica de matemática e um relato de experiência: *Invariantes Operatórios e Níveis de Generalidade Manifestados por Estudantes dos Anos Iniciais do Ensino* Fundamental; *Programa On-line para o Estudo de Sistemas Lineares via Fatoração Lu*; e Laboratório *de Ensino de Matemática na Formação de Professores*. Finalizamos a edição com as resenhas das teses de doutoramento *O processo constitutivo da Resolução de Problemas como uma temática da pesquisa em educação matemática* e *Os Signos Peirceanos e os Registros de Representação Semiótica*.

São Paulo (SP), 31 de dezembro de 2018.

UMA CONTEXTUALIZAÇÃO HISTÓRICA PARA O MODELO CLÁSSICO DE MALTHUS

A HISTORICAL CONTEXT OF THE CLASSICAL MALTHUSIAN MODEL

BIFFI, Lorena Carolina Rosa[1]
DA SILVA, Breno Gabriel[2]
TRIVIZOLI, Lucieli M.[3]

RESUMO

Neste artigo, por meio de uma contextualização histórica, pretendemos revelar as circunstâncias que levaram o economista Thomas Malthus a levantar hipóteses polêmicas para descrever a projeção populacional da humanidade. Deste modo, para estruturar nossa busca nos baseamos no modelo de Mendes e Chaquiam (2016) que propõe a estruturação de um diagrama para o levantamento das informações históricas. Por meio do diagrama, elencamos personagens, situações e contextos relevantes relacionados ao personagem principal, que foi Thomas Malthus. Nascido na Inglaterra em 1766, Malthus foi um economista e sacerdote anglicano que elaborou uma obra intitulada Ensaio sobre a população, na qual enunciava que a população cresceria em uma progressão geométrica e os meios de subsistência em uma progressão aritmética. O economista acreditava que, se não houvesse um controle da população e dos meios de subsistência, o futuro da humanidade estaria ameaçado. A partir da construção desse diagrama, com vistas a justificar o que levou esse economista a levantar suas hipóteses, iremos entender a situação política, econômica e social no período vivenciado por Malthus, expor outros estudiosos contemporâneos a ele ou que, de certa forma, trouxeram contribuições para o desenvolvimento da ciência nos séculos XVIII e XIX – tais como: Lagrange, Legendre, Gauss, Condorcet, Adam Smith, e Darwin –, a relevância desse modelo para a época, e seu impacto em outras áreas, como na biologia.

Palavras-chave: Iluminismo. Projeção populacional. História da Matemática. Progressões.

ABSTRACT

Through historical contextualization, in this paper we intend to reveal the circumstances that led a famous economist to raise controversial hypotheses to describe the population projection of humanity. Thus, in order to structure our search we base ourselves on the Mendes & Chaquiam' model (2016), through which we cast relevant characters in the context of the main character, who was Thomas Malthus. Born in England in 1766, Malthus was an Anglican economist and priest who produced a work entitled *An Essay on the Principle of Population* in which he states: "Population, when uncontrolled, grows in a geometric progression. Livelihoods grow only in arithmetic progression". The economist believed that if there were no control over population and livelihoods, the future of humanity would be threatened. From the construction of this diagram, with a view to justifying what led this economist to raise his hypotheses, we will understand the political, economic and social situation in the period experienced by Malthus, expose contemporary mathematicians or other

[1] Mestre em Educação para a Ciência e Matemática pela Universidade Estadual de Maringá (UEM), Maringá, PR. Endereço eletrônico: trabalhoslorena@gmail.com.
[2] Licenciado em Matemática pela Universidade Estadual de Maringá (UEM), Maringá, PR. Mestrando do Programa de Pós-Graduação em Bioestatística da Universidade Estadual de Maringá (UEM), Maringá, PR. Endereço eletrônico: omatematico.breno@gmail.com.
[3] Doutora em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista (UNESP), Rio Claro, SP. Docente do Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Maringá (UEM), Maringá, PR. Endereço eletrônico: lmtrivizoli@uem.br.

people that contributed to the development of science in the eighteenth and nineteenth centuries – such as Lagrange, Legendre, Gauss, Condorcet, Adam Smith, and Darwin–, the relevance of this model to the time, and its impact on other areas such as biology.

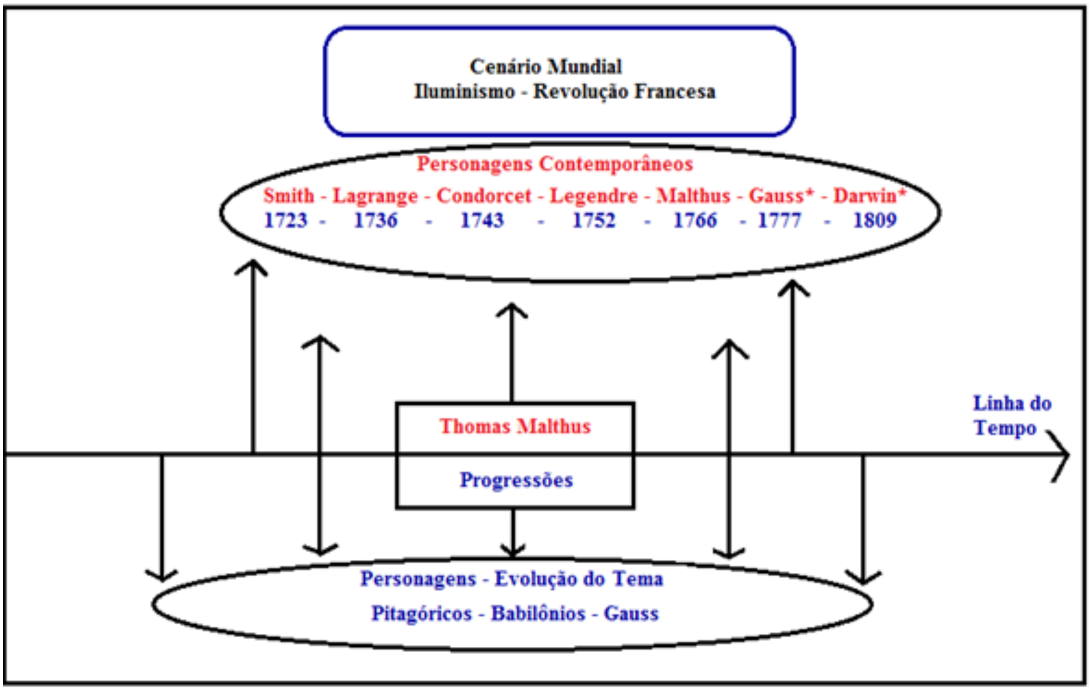
Keywords: Enlightenment. Population Projection. History of Mathematics. Progressions.

1 INTRODUÇÃO

Muito do desenvolvimento matemático deu-se em decorrência de necessidades humanas, assim como a resolução de questões do dia a dia que utilizava a Matemática como ferramenta para a abordagem de problemas que não necessariamente eram específicos dessa área. A natureza dos fenômenos ou situações do mundo real, muitas vezes, podem ser caracterizadas por meio de um modelo matemático. Nesse sentido, a utilização de modelos matemáticos no estudo das populações tem sido um recurso muito importante para a sociedade. Um exemplo disso é o problema conhecido como Modelo de Malthus que tratou da relação entre produção alimentícia e crescimento populacional, apresentado em 1798, pelo economista inglês Thomas Malthus, como um dos clássicos para crescimento populacional.

O uso de modelos matemáticos clássicos, como o de Malthus, pode servir para orientar a criação de novos trabalhos com Modelagem Matemática no processo de ensino e aprendizagem. Bassanezi (2013) relata que o modelo matemático apresentado por Malthus sofreu várias modificações que propiciaram a evolução dos modelos para crescimento populacional.

Figura 1: Malthus e seus contemporâneos



Fonte: autores

Com o objetivo de explorar os aspectos envolvidos na criação do Modelo de Malthus, assim como expor as perspectivas consideradas por ele e o contexto histórico no qual estava inserido, apresentaremos neste texto uma abordagem histórica baseada no diagrama proposto por Mendes e Chaquiam (2016). Nesse sentido, apresentaremos Malthus, que será o personagem principal de nossa escrita, acompanhado de outros nomes importantes para o desenvolvimento do tema matemático que será explorado, a saber, as estimativas para o crescimento da produção de alimentos e da população mundial, assim como a relação entre ambas.

Focaremos aqui, de maneira análoga a Alves (2002), no embate entre as ideias de Malthus e Condorcet quanto ao crescimento populacional, ocorrido no período que ficou conhecido como Iluminismo. Entretanto, outros nomes serão abordados como: Lagrange, Legendre, Gauss, Adam Smith, e Darwin. Para situar o desenvolvimento do estudo das progressões, apresentaremos brevemente o desenvolvimento histórico deste conceito.

Barbosa (2003) afirma que, por meio da Modelagem Matemática, é possível potencializar nos estudantes aptidões para perceber exemplos de usos da Matemática na sociedade, assim como a constatação de que a Matemática tem um caráter cultural. Entendemos que, associada a essa potencialização, a História da Matemática pode ajudar a construir as relações de determinado conceito matemático com o cotidiano em certo momento histórico, relações entre a história da humanidade e a Matemática.

> A história deve ser o fio condutor que direciona as explicações dadas aos porquês da Matemática. Assim pode promover uma aprendizagem significativa, pois propicia ao estudante entender que o conhecimento matemático é construído historicamente a partir de situações concretas e necessidades reais (PARANÁ, 2008, p. 66).

Assim, este texto se volta para uma proposta de contextualização do momento histórico em que o Modelo de Malthus foi construído, a caracterização desse modelo do ponto de vista da Modelagem Matemática, os fatores considerados por ele e seus contemporâneos, a situação social daquele período etc. Como dito, esses aspectos a serem considerados se baseiam nas etapas propostas por Mendes e Chaquiam (2016), que apresentaremos adiante.

2 O MODELO DE MALTHUS

O inglês Thomas Robert Malthus (1766-1834) elaborou um ensaio com um modelo que estimava o crescimento da população mundial, em 1798. Para criar o modelo, Malthus considerou algumas hipóteses, como: "[...] os casais sempre vão ter muitos filhos, pois o sexo dentro do casamento é uma obrigação matrimonial dos cônjuges e tem um objetivo generativo" (ALVES, 2002, p. 18). Segundo Malthus há um fundo de subsistência que só depende do trabalho agrícola e, a partir do valor desse fundo, é definida a condição para se ter mais ou menos filhos. Para ele, quando a produção agrícola é maior, aumenta o valor monetário do fundo, o que acarreta um "estímulo ao crescimento populacional", assim os trabalhadores poderiam oficializar a união mais jovens, quando a taxa de fertilidade é maior, consequentemente o número de filhos por casal também aumentaria. De maneira análoga, caso o valor do fundo diminua, há um desestímulo ao casamento precoce e, assim, uma diminuição na taxa de crescimento populacional.

De acordo com Biembengut e Hein (2003 apud BUENO, 2011), a Modelagem Matemática possui três momentos principais: interação, na qual é feita a identificação do problema a ser estudado, assim como a motivação para fazê-lo. Nessa etapa, são coletados os dados a serem examinados na etapa seguinte. Na matematização, os dados são organizados, para então criar o modelo e buscar a solução (BUENO, 2011). A etapa seguinte é a validação, na qual "esse processo de validação é o que garante a sua aplicabilidade ou não. Caso o modelo não responda de forma condizente à pergunta inicial (pergunta geradora), deve-se retomar os dados da matematização para melhorar ou reelaborar o modelo" (BIEMBENGUT; HEIN, 2003, p. 15 apud BUENO, 2011, p. 24).

Baseados nesses momentos, podemos caracterizar o Modelo de Malthus do ponto de vista da Modelagem Matemática. Na etapa de interação, entendemos que ele considerou como problema a necessidade de uma forma de prever o crescimento populacional e o da produção alimentícia. A partir disso, Malthus coletou e organizou os dados, entre eles o “[...] crescimento da população dos Estados Unidos da América” (ALVES, 2002, p. 17), que naquele período tinha uma grande produção alimentícia, o que levava a um alto índice de natalidade.

Já na matematização, por meio dos dados americanos coletados, qualificamos que Malthus mostrou que a população dobrava a cada 25 anos, ou seja, se comportava como uma progressão geométrica. Malthus considerava, ainda, que na Inglaterra a produção agrícola crescia, no máximo, em uma progressão aritmética (ALVES, 2002).

Ao utilizar as equações diferenciais como ferramenta para estimar sobre o crescimento populacional, pode-se encontrar, de acordo com Magalhães e Leite (2012), a equação diferencial que descreve o Modelo de Malthus, representada por meio de um problema de valor inicial da seguinte maneira:

$$\frac{dP}{dt} = \begin{cases} \frac{dP}{dt} = \beta P(t) \\ P(0) = P_0 \end{cases}$$

em que β é a taxa de crescimento populacional e P uma determinada população. A solução analítica desta equação diferencial é dada por:

$$P(t) = P_0 e^{\beta t}$$

Logo, verifica-se que o Modelo de Malthus estima que o crescimento populacional é exponencial.

Estudando a teoria de Malthus, percebemos que uma das etapas mais importantes para a verificação da eficácia do modelo criado, a validação, não foi executada, o que pode ter contribuído para imprecisões na previsão do crescimento populacional e alimentício proposto pelo seu modelo, já que não considerava, por exemplo, segundo Alves (2002), o sexo fora do casamento e o uso de métodos contraceptivos. A seguir, apontaremos fatores considerados ou não por Malthus que poderiam enriquecer o modelo e aproximá-lo de projeções reais.

3 PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS E ARITMÉTICAS AO LONGO DA HISTÓRIA

As progressões, que em geral são trabalhadas no Ensino Médio e abordadas por meio de fórmulas prontas, têm seus primeiros indícios entre os Babilônios. Mesmo datando de tanto tempo, a formalização e generalização só ocorreu por volta do século XIX. Sendo assim, quando Malthus elaborou seu modelo, as noções de progressões ainda eram bastante intuitivas.

Eves (2004) traz que uma tábula que se encontra no Louvre, com data aproximada de 300 a.C., apresenta os seguintes dizeres: $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^8 + 2^9 = 2^9 + 2^9 - 1$, o que remete às progressões geométricas (veja que os termos que estão sendo somados no primeiro membro são todos potências de 2).

Cajori (2007 apud MILANI, 2011) aponta que no Papiro de Rhind (ou Ahmes), que data de cerca de 1.650 a.C., também são encontrados problemas que remetem a progressões aritméticas e geométricas, sendo um deles o seguinte: "Divida 100 pães entre cinco pessoas; um sétimo do que recebem as três primeiras é o que recebem as duas últimas. Qual é a diferença?" (CAJORI, 2007, p. 40 apud MILANI, 2011, p. 21).

Outro problema que remete às progressões geométricas presente no Papiro de Rhind é apresentado por Eves (2004). No problema 79 desse documento, aparece o seguinte conjunto de números: 7, 49, 343, 2401, 16807. Esses valores apareciam lado a lado das seguintes palavras: Casas, Gatos, Ratos, Espigas de Trigo, Hecates de Grãos, respectivamente. Essa listagem teve algumas interpretações ao longo dos anos, sendo a do historiador Moritz Cantor, apresentada em 1907, a considerada mais aceitável: "Uma relação de bens consistia em sete casas; cada casa tinha sete gatos; cada gato comeu sete ratos; cada rato comeu sete espigas de trigo; e cada espiga de trigo produzia sete hecates de grãos. Casas, gatos, ratos, espigas de trigo e hecates de grãos: quanto havia disso tudo?" (EVES, 2004, p. 76).

Com essa interpretação da lista presente no papiro, é possível perceber que o problema tratava de obter a soma dos termos de uma progressão geométrica de cinco termos cujo primeiro termo e a razão são sete.

O matemático Carl Friedrich Gauss (1777-1855) é, muitas vezes, associado a uma conhecida história:

> [...] segundo a qual o professor de Carl na escola pública, quando ele tinha dez anos de idade, teria passado à classe, para mantê-la ocupada, a tarefa de somar os números de 1 a 100. Quase que imediatamente Carl colocou sua lousa sobre a escrivaninha do irritado professor. Quando as lousas foram finalmente viradas, o professor surpreso verificou que Carl tinha sido o único a acertar a resposta correta, 5050, mas sem fazê-la acompanhar nenhum cálculo. Carl havia mentalmente calculado a soma da progressão aritmética $1+2+3+\ldots+98+99+100$ observando que $100+1=101$, $99+2=101$, $98+3=101$ e assim por diante com os cinquenta pares possíveis dessa maneira, sendo a soma portanto $50 \times 101 = 5050$ (EVES, 2004, p. 519).

Pode-se perceber também a presença de sequências nos números figurados apresentados pelos estudiosos da Escola Pitagórica (séculos VI e V a.C.). Para obter o enésimo número triangular, era calculada a soma de uma progressão aritmética.

4 CENÁRIO MUNDIAL: ILUMINISMO E REVOLUÇÃO FRANCESA

4.1 Iluminismo

Também conhecido como "Século das Luzes" ou "ilustração", o período compreendido pelo século XVIII foi o ápice de uma efervescência de ideias. Para os iluministas, a prevalência da religião, de preconceitos e de superstições era o que impedia a humanidade de progredir, ao passo que o predomínio da razão humana levaria ao progresso. Para Kant (1985, p. 25 apud ALVES, 2006, p. 49), "a ilustração é a saída do homem de sua menoridade, da qual é o próprio culpado. A menoridade é a incapacidade de se servir de seu entendimento sem a direção de outrem".

Já em referência a Souza (1994), Alves (2002) afirma que o século XVIII foi um período de pensamentos otimistas, de tentativa de solução de problemas por meio da Razão, como percebemos a partir das ideias de Condorcet, acompanhados de momentos de ceticismo e pensamentos pessimistas, como as projeções de Malthus. Ainda de acordo com Alves (2002), muitas vezes a proposta de Malthus foi discutida desvinculada do contexto do qual fez parte, o que leva a interpretações que são utilizadas como justificativas por conservadores que são contra o progresso e a justiça.

Os estudiosos que apoiavam o Iluminismo eram contra o Absolutismo[4], o Mercantilismo[5] e possuíam uma visão otimista acerca do desenvolvimento humano, do aumento populacional e da produção alimentícia. Entre esses estudiosos, podemos citar Adam Smith (1723-1790), que defendia que “os avanços tecnológicos aumentariam o bem-estar. Assim, haveria uma relação inversa entre crescimento do bem-estar (renda) e mortalidade; e uma relação direta entre bem-estar e natalidade” (ALVES, 2006, p. 2), ou seja, Smith elencou alguns aspectos que considerava importantes para o desenvolvimento populacional.

4.2 Revolução Francesa

No final do século XVIII, devido às injustiças que estavam ocorrendo na França, tais como o pagamento altíssimo de impostos para o sustento da elite, ocorreu a Revolução Francesa (1789), movimento social e político que marcou o início de uma sociedade moderna, cujos ideais eram Liberdade, Igualdade e Fraternidade (GRESPAN, 2008).

Nesse período, a França era caracterizada como um país totalmente agrário e a sociedade francesa era dividida em três classes: o Clero (Primeiro Estado), a Nobreza (Segundo Estado) e o Terceiro Estado (população que não estava inserida nas duas classes anteriores, seriam os burgueses[6], camponeses, artesãos e o proletariado). Governados por um regime absolutista, os franceses não podiam votar nem opinar sobre a maneira como o país era administrado, e caso isso ocorresse, o cidadão era preso ou condenado à guilhotina (GRESPAN, 2008).

Movidos por uma concepção de que enquanto existisse desigualdade social a população não iria melhorar o seu estado atual, os iluministas influenciaram o Terceiro Estado, que se levantou contra as condições impostas pelo governo daquela época (GRESPAN, 2008). Nesse contexto, podemos destacar que Condorcet “[...] influenciou a Revolução Francesa, assim como a Revolução o influenciou, portanto, ele fazia parte de um grupo de pensadores iluministas europeus que defendiam uma sociedade de cidadãos ao invés de uma sociedade de súditos” (KLEIN, 2017, p. 124). Condorcet foi um importante militante na Revolução Francesa, participou ativamente de movimentos contra questões sociais que desfavoreciam o Terceiro Estado, lutando por mudanças no futuro da humanidade.

5 A MATEMÁTICA NO SÉCULO XVIII

Devido aos trabalhos de Newton e Leibniz referentes ao cálculo infinitesimal no século XVII, vários matemáticos no século XVIII contribuíram para o avanço da Matemática utilizando o cálculo infinitesimal em aplicações e até mesmo em outras áreas (SANCHEZ, 2007). Com o advento de diversos matemáticos nesse período, iremos expor algumas contribuições de três matemáticos em especial: Lagrange, Euler e Laplace. Ainda nessa época, ocorreu também uma importante contribuição para essa ciência: a discussão da universalização do sistema de pesos e medidas, que discutiremos ainda nesta seção.

---

[4] Sistema político em que o poder era concentrado no estado, na qual controlava a economia, justiça, política e até mesmo a religião (GRESPAN, 2008).

[5] Política econômica dos reinos europeus absolutistas, na qual o estado participava ativamente (GRESPAN, 2008).

[6] Neste período o termo “burguês” era destinado a grandes comerciantes, banqueiros, advogados, médicos que tinham poder econômico, mas não tinham liberdade econômica, direitos políticos e ascensão social (GRESPAN, 2008).

Iniciando a nossa explanação acerca das contribuições de matemáticos do século XVIII, podemos destacar Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), que nesse período tem a iniciativa de trazer rigor matemático, tornando-se um contraexemplo dos matemáticos de sua época:

> Seu objetivo principal na matemática – e na sua vida, aparentemente – não era adicionar mais uma aplicação do cálculo de Newton e Leibniz (como fazia a maioria dos matemáticos de seu tempo) a lista, mas sim, revisar seus fundamentos e oferecer uma explicação mais rigorosa do porquê e de como o cálculo funciona (SANCHEZ, 2007, p. 1).

Além de introduzir o formalismo em suas produções, Lagrange trouxe inúmeras contribuições para outras áreas da matemática, dentre elas podemos destacar: a introdução do cálculo variacional na mecânica, o estudo da teoria das equações diferenciais, na qual desenvolveu um método de resolução denominado “variação de parâmetros”, o estabelecimento de alguns dos fundamentos de teoria dos grupos e a inserção do sistema de coordenadas esféricas (SANCHEZ, 2007).

Com inúmeras produções e admirado até a atualidade pela quantidade de material produzido após ter se tornado cego, Leonhard Paul Euler (1707-1783) se destaca como um dos maiores matemáticos do século XVIII. De acordo com Gayo e Wilhelm (2015), Euler não só demonstrou novos teoremas, mas procurou utilizar elegância em suas demonstrações. As áreas que apresentam suas maiores contribuições são a Análise Matemática e o Cálculo Diferencial e Integral.

Não se restringindo apenas à Análise Matemática e ao Cálculo Diferencial, Euler procurou investigar diversas outras, e “suas obras eram bem variadas, entre elas se poderiam encontrar temas de Cálculo, Álgebra, Geometria além de Física e Astronomia” (GAYO; WILHELM, 2015, p. 344), dando até mesmo contribuições importantes para a criação de uma área da Matemática[7].

Nesse contexto, destaca-se também Pierre-Simon Laplace (1749-1827), considerado um dos matemáticos mais respeitáveis da França nos séculos XVIII e XIX, por trazer contribuições a diversos ramos da ciência. Com uma carreira acadêmica recheada de produções, podemos destacar dentre elas (SILVA, 2010, p. 50):

> Estudos sobre o Cálculo Integral às diferenças infinitamente pequenas e às diferenças finitas (1771), Teoria do movimento e da figura elíptica dos planetas (1784), os cinco volumes do Tratado de Mecânica Celeste: Vol. I e II (1799), Vol. III (1802), Vol. IV (1805), Vol. V (1823-1825), Exposição sobre o sistema do mundo (1796), Teoria Analítica das Probabilidades (1812), Ensaio filosófico sobre as probabilidades (1914), Resumo da História e da Astronomia (1821).

Um fato que se remete a Laplace é que, por apresentar inúmeros trabalhos ao decorrer de sua carreira acadêmica, ele foi convidado a participar da comissão de unificação de pesos e medidas[8], na qual sugeriu a palavra “metro” como nome a ser utilizado e que segue até os dias atuais para uma unidade de medida (SILVA, 2010).

O contexto no qual a sugestão do “metro”, trazida por Laplace, veio à tona refere-se ao final do século XVIII, em 1790, quando se iniciou a discussão sobre a reformulação para a

---

[7] Com o intuito de solucionar o problema das sete pontes de Koenigsber, Euler desenvolveu conceitos e ideias que mais tarde se tornaram a base para a Topologia (GAYO; WILHELM, 2015).

[8] Evento que ocorreu para o estabelecimento de um sistema métrico único de pesos e medidas para a França (SILVA, 2010).

unificação do sistema de pesos e medidas, na França, proposta por Talleyrand[9]. Com a crise política estabelecida no final do século XVIII no país em questão, os matemáticos se esforçaram para que essa reformulação acontecesse (BOYER, 2010).

Comissões foram formadas pela Academia de Ciências de Paris para as discussões sobre a reformulação do sistema de pesos e medidas (SILVA, 2010), e podemos destacar alguns de seus membros, tais como: Condorcet, Laplace, Legendre e Lagrange. Dentre os temas discutidos nessas comissões, destaca-se a recomendação de adoção de um sistema decimal e a aceitação de uma maneira para descrever o comprimento (BOYER, 2010). Devido aos estudos de Legendre e outros matemáticos sobre o comprimento de um meridiano terrestre, a comissão decidiu que “o metro foi definido como a décima milionésima parte da distância entre o equador e o pólo” (BOYER, 2010, p. 325), e a palavra “metro” foi uma sugestão de Laplace, como já foi dito anteriormente.

Nesse período, de acordo com Silva (2010), a Academia de Ciências de Paris nomeou novamente Legendre, Cassini e Méchain, que já haviam sido nomeados em 1787, “[...] para realizar as medidas geodésicas de Greenwich a Paris, foram novamente convocados para fazer parte da comissão constituída para realizar os cálculos finais para o estabelecimento do sistema métrico único” (SILVA, 2010, p. 27).

Em 1799, a comissão encerrou as discussões e definiu o sistema métrico como temos até os dias atuais, enfatizando que este feito “é um dos resultados matemáticos mais tangíveis da Revolução, mas em termos do desenvolvimento da matemática não se compara em significado com outras contribuições” (BOYER, 2010, p. 326).

Outro membro dessas comissões a ser destacado é Jean-Antonio Nicholas Caritat – Marquês de Condorcet – (1743-1794), um matemático idealista que defendia fortemente a justiça, lutava por uma reforma que levasse ao fim da desigualdade, defendia a educação pública gratuita, e tinha uma visão perfeccionista do ser humano. Condorcet teria cometido suicídio na prisão, decretada por contrariar os extremistas que assumiram o poder durante a Revolução. Nesse mesmo período, temos Malthus, que é o personagem principal de nossa discussão, cujo famoso modelo será abordado na próxima seção a partir do contexto histórico e dos demais personagens contemporâneos a ele.

5.1 Malthus e seus comtemporâneos

A fim de traçar um panorama sobre o contexto do qual Malthus fez parte e os fatores considerados por ele ao traçar seu modelo, escolhemos alguns personagens históricos que de alguma forma, direta ou indireta, se relacionam com a proposta e o período de Malthus. Um deles é Condorcet, visto que, de acordo com Alves (2002), Malthus escreveu seu Ensaio Sobre a População contestando as ideias de Condorcet e de Smith, outro personagem que será abordado.

Condorcet foi um importante matemático e se relacionou com outros matemáticos conhecidos, entre os quais Lagrange, que, juntamente com Condorcet, foi membro da Académie des Sciences. Ambos foram indicados para elaborar a proposta de reforma dos pesos e medidas, juntamente a Legendre. Além disso, discorreremos sobre Gauss devido ao seu papel na formalização dos conceitos de progressões, que só ocorreu depois da elaboração do Modelo de Malthus.

[9] Importante político, diplomata e estadista francês que participou de importantes acontecimentos do século XVIII e início do século XIX (WEISE, 2010).

Assim, apresentaremos informações biográficas, de produção e do contexto de Lagrange, Legendre, Gauss, Condorcet e Smith. Por fim, apresentaremos as informações de Malthus.

Joseph-Louis Lagrange nasceu em janeiro de 1736, em Turim (OLIVEIRA, 2013). Sua primeira publicação, uma carta a Euler escrita em latim, ocorreu em 1754. Euler recomendou a Lagrange que continuasse seus estudos e ele prontamente seguiu. A partir de suas aulas, estabeleceu uma comunidade de estudos com seus alunos “[...] que veio a se tornar o embrião de uma sociedade científica” (OLIVEIRA, 2013, p. 50). Em 1784, esse grupo se tornou a Academia Real de Ciências de Turim (HOEFER, 1874, apud OLIVEIRA, 2013).

Em 1766 foi convidado por Frederico-o-Grande, então rei, para ir para Berlim, onde ficou até que o monarca morresse, em 1786. Foi nesse período que escreveu sua conhecida obra Mécanique analytique (1788), que figura ao lado de Théorie des fonctions analytiques (1788) e Leçons sur le calcul des fonctions (1801) como suas maiores obras. Também participou da reforma dos sistemas de pesos e medidas (STRUIK, 1992).

Struik (1992), em referência a Mécanique analytique, afirma que a maneira como Lagrange utilizou o Cálculo das Variações levou à unificação de diversos princípios da estatística e da dinâmica. Ainda segundo esse autor, “[...] o livro de Lagrange foi um triunfo da análise pura” (p. 218) e sua maneira de trabalhar, sem o uso de figuras, se valendo apenas de operações algébricas para justificar os resultados, o caracterizou “[...] como o primeiro verdadeiro analista” (STRUIK, 1992, p. 218).

Pertencendo a uma geração de grandes matemáticos do século XVIII, Adrien-Marie Legendre nasceu em 18 de setembro de 1752 na cidade de Paris. Legendre iniciou seus estudos no Colégio Mazarin e “[..] foi nessa escola que ele começou a se interessar por literatura antiga e por livros científicos, especialmente os de Matemática” (SILVA, 2010, p. 21). Mais tarde, com 18 anos de idade, concluiu e defendeu sua tese na área da Matemática e Física (SILVA, 2010).

Com uma carreira acadêmica admirável, Legendre trouxe inúmeras contribuições: publicou um tratado de Mecânica em 1774; foi professor da Escola Militar de Paris, onde permaneceu até 1780; participou na Academia de Berlim de 1766 a 1787; recebeu o Grande Prêmio da Academia de Ciências de Berlim por sua produção intitulada Trajetórias de projéteis em meios resistentes, em 1782; a mesma academia publicou seu trabalho Figura de Planetas (1782); tornou-se membro adjunto (colaborador) e logo depois associado (efetivo) da Academia de Ciências de Paris em 1783; publicou o primeiro trabalho da Academia de Paris sobre Teoria dos Números intitulado Estudos sobre a Análise Indeterminada em 1785; entre outras (SILVA, 2010).

Em sua trajetória acadêmica, Legendre obteve contato com vários outros matemáticos desse período, no qual:

> Algumas relações foram conflitantes, com episódios envolvendo Laplace e Gauss, sobre apropriação de trabalhos em Mecânica Celeste e Teoria dos Números. No caso de Gauss, tais querelas perduram por muito tempo, como percebemos não somente em suas cartas a Jacobi, como também nos prefácios de suas obras (SILVA, 2010, p. 42).

Vislumbra-se nesse período a competição por desenvolver teorias ou descobrir algo novo dentro da Matemática, dentre algum desses impasses vivenciados por Legendre que era considerado severamente rigoroso na análise de trabalhos. Destacamos um episódio envolvendo Gauss, que Legendre relata em uma carta enviada a Jacobi:

> “Como ousou M. Gauss lhe dizer que a maioria de vossos teoremas já lhe era conhecida e descoberta por ele em 1808?”. [...] Esse excesso de insolência não deveria vir da parte de um homem de muito mérito pessoal que não necessita se apropriar de trabalho dos outros. [...] Mas foi esse mesmo homem que em 1801 se atribuiu a descoberta da lei da reciprocidade publicada em 1785 assim como quis em 1801 se apossar do meu método de mínimos quadrados publicado em 1805 (JACOBI, 1998, p. 398-399 apud SILVA, 2010, p. 56).

Diante desse episódio, Legendre, em outra carta destinada a Jacobi, o aconselha: “Não comentais com ninguém vossas descobertas antes de publicá-las, para que quando o invasor Sr. G. afirmar tê-las descoberto bem antes de vós, ele seja desmascarado e motivo de escárnio dos colegas” (JACOBI, 1998, p. 427 apud SILVA, 2010, p. 56).

Embora existindo várias controvérsias sobre essas discussões e o local exato de seu nascimento, Legendre foi um importante matemático do século XVIII e trouxe inúmeras contribuições para diversas áreas da Matemática, como foi descrito anteriormente, focalizando na teoria dos números, tema que produziu até o final de sua vida (SILVA, 2010).

Um dos principais nomes quando se fala em progressões aritméticas é o de Carl Friedrich Gauss. De acordo com Eves (2004), era uma criança prodígio. Ingressou aos quinze anos no colégio e aos dezoito na universidade, escolhendo a carreira matemática quando estava prestes a completar dezenove anos. Foi responsável por expor a possibilidade de se construir um polígono regular de dezessete lados utilizando apenas régua e compasso. Quando apresentou esse resultado, Gauss passou a escrever um diário com suas realizações, entre elas a percepção de que algumas funções elípticas tinham periodicidade dupla. Essa anotação data de quando o matemático tinha apenas dezoito anos, sendo posteriormente generalizada por ele, mas não publicada (EVES, 2004).

Em sua tese de doutorado, escrita quando ele tinha vinte anos, apresentou a demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra, que outros importantes matemáticos (Newton e Euler, entre eles) já haviam tentado demonstrar sem sucesso. Posteriormente, publicou mais três demonstrações para esse teorema. Considerado seu trabalho mais importante, *Disquisitiones arithmeticae* traz seu resultado acerca do polígono regular de dezessete lados, uma demonstração de sua lei da reciprocidade (EVES, 2004).

A fim de delimitar a órbita descrita por planetas, Gauss desenvolveu um método que ficou conhecido como Método de Gauss e que ainda hoje é utilizado para estimar a órbita de satélites. Seu método fez um enorme sucesso, já que com poucas observações ao planetoide Ceres, foi capaz de prever em que posição ele voltaria a aparecer, o que ocorreu com uma variação de posição bastante pequena em relação à prevista por ele (BOYER, 2010).

Boyer (2010) aponta que a Matemática produzida por Gauss serviu como ponto de partida para importantes áreas de pesquisa da matemática moderna, como a geometria diferencial, e em geral seus alunos acabavam por tornarem-se astrônomos, e não matemáticos. De acordo com Eves (2004), Gauss era extremamente perfeccionista, só aceitando publicar seus estudos quando estivessem completos, concisos, acabados e convincentes.

Marquês de Condorcet foi um matemático, pensador, filósofo e um importante militante na Revolução Francesa, que nasceu em Ribemont, região da Picardia em 1743. Seu pai, cavaleiro de Condorcet faleceu poucos dias após seu nascimento e sua mãe extremamente religiosa o influenciou a estudar em colégios jesuítas onde obteve destaque nas ciências exatas e mais tarde ganhou reputação como matemático.

Condorcet deixou contribuições matemáticas e a nível social. De acordo com Boyer (2010), suas principais obras foram: *Decalcul intégral* (1765) e *Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix* (1785). Condorcet tornou-se ainda integrante e presidente da Assembleia Legislativa pós-Revolução e como membro da *Académie des Sciences* participou, juntamente com Legendre, Lagrange e outros, do famoso Comitê de Pesos e Medidas entre os anos 1790 e 1799.

Diante do caos estabelecido na França no período no qual vivenciava e movido por suas concepções iluministas, Condorcet foi o único dos personagens anteriores que “[..] teve um papel de antecipação nos acontecimentos que levaram a 1789” (BOYER, 2010, p. 324) e é considerado como “[..] aquele que mais fez para que se chegasse a Revolução foi o único a perder a vida por causa dela [...]” (BOYER, 2010, p. 324). Ainda, escreveu um documento intitulado “Relatório e projeto de decreto sobre a organização geral da Instrução Pública”, cujo objetivo era:

> [...] o desenvolvimento de um caminho para a minimização das desigualdades, exceto àquelas naturais inerentes aos indivíduos, referentes às aptidões e aos talentos humanos. Nesse sentido, a educação no âmbito da instrução[10] pública proposta pela comissão da Assembleia Legislativa francesa, que foi principalmente escrita por Condorcet propunha uma instrução pública, gratuita, laica e universal que atendesse as demandas sociais de ambos os sexos (homens e mulheres) de diferentes realidades sociais, abrangendo as diferentes etapas da vida, desde a escolarização elementar até o grau superior (KLEIN, 2017, p. 123).

De imediato, este material não foi aceito, pois não era um interesse político daquele momento, visto que além dos diversos problemas existentes com a população francesa, o país “[...] havia declarado guerra à Áustria, fato que trunca mais uma vez, nos primeiros anos da Revolução, a aprovação de um projeto de reforma do ensino” (FERRARO, 2009, p. 318 apud KLEIN, 2017, p. 124).

No período de 1793 a 1794, no qual estava refugiado, Condorcet elaborou uma de suas principais produções, o livro intitulado *Esboço de um quadro histórico dos progressos do espírito humano*, “marcado por um profundo otimismo e por uma fé inquebrantável no progresso humano [...]” (ALVES, 2002, p. 9). A obra é dividida em dez capítulos, sendo que nos nove primeiros Condorcet descreve desde o período dos primórdios da humanidade até o final do século XVIII, enquanto o décimo capítulo apresenta questões sobre o futuro da humanidade, que versam sobre o progresso obtido por ações no presente momento (ALVES, 2002).

Condorcet acreditava que o destino da humanidade era descrito em três pilares: “1) destruição da desigualdade entre as nações; 2) progressos da igualdade em um mesmo povo; 3) aperfeiçoamento real do ser humano” (CONDORCET, 1793-1794, p. 176 apud ALVES, 2002, p. 12). O matemático lutou para cessar as desigualdades no período em que viveu:

> [...] foi um ardoroso defensor do voto feminino durante a Revolução Francesa e combateu as diversas desigualdades de gênero. Defendeu a criação de um sistema de aposentadorias e pensões, o progresso da ciência, o avanço tecnológico, a produtividade agrícola e do trabalho, além de combater as guerras (ALVES, 2002, p. 13).

De forma contrária ao idealismo de Malthus, o matemático Condorcet afirmava “[...] que a natureza e o mundo social (cultura) podem ser transformados através da ação racional dos

[10] Termo que é substituído por escolarização (KLEIN, 2017).

homens e mulheres, visando a se construir um mundo mais justo, feliz e rico" (ALVES, 2002, p. 9-10). Para ele, se a população crescesse de tal maneira que esse crescimento fosse superior ao crescimento da produção alimentícia, isso não seria um fator racional implicado pelos seres humanos (ALVES, 2002).

Outro estudioso que se tornou conhecido devido a suas projeções econômicas foi Adam Smith. Escocês nascido em 1723 na cidade de Kirkycaldy (FERNANDEZ, 2012), lecionou na universidade de Glasgow de 1751 a 1764, na qual publicou, em 1759, *Um tratado de filosofia social e moral* e, em 1776, a que se tornou a obra mais importante de sua produção, intitulada na versão brasileira *A riqueza das nações* (HUNT; LAUTZENHEISER, 2013).

Smith teria sido o primeiro a elaborar um modelo que abordava o funcionamento do capitalismo, ao observar um crescimento acelerado na população a partir do desenvolvimento causado pela Revolução Industrial, com o número de habitantes de Manchester passando de 17000 habitantes em 1760 para 237000 em 1831, atingindo o total de 400000 em 1851. Essas informações teriam chamado a atenção de Smith, levando-o a escrever *A riqueza das nações* e a trazer suas projeções para o desenvolvimento econômico das cidades (HUNT; LAUTZENHEISER, 2013).

Observando o desenvolvimento das manufaturas e o potencial delas, Smith foi o primeiro grande economista a apresentar a separação entre os lucros vindos da atividade industrial, salários e aluguéis, e os vindos das rendas comerciais, e relacionar as categorias dessa primeira forma de lucro com as classes sociais dos capitalistas, donos de terras e trabalhadores, respectivamente (HUNT; LAUTZENHEISER, 2013).

Em sua teoria econômica, afirma que, por mais egoísta que um sujeito possa ser e por mais que tome atitudes visando benefício próprio ou da classe na qual está inserido, essas atitudes são tomadas em resposta às "leis da natureza" ou por "divina providência", que possuem o que Smith chamou de "mão invisível" – termo que, de acordo com Fernandez (2012), aparece apenas três vezes em toda sua obra, mas após sua morte passou a ser utilizado incessantemente.

Em seu modelo econômico, Smith divide o capitalismo em indústria e agricultura, e a produção de mercadorias dependeria da terra, do trabalho e do capital, com os proprietários de terra, trabalhadores e capitalistas representando essas facetas do processo de produção. Cada uma dessas classes representaria um tipo de remuneração: aluguéis, salários e lucros respectivamente. A partir dessa divisão, Adam Smith defendia que o capitalismo atingiria o seu auge quando não houvesse mais intervenções do governo sobre a economia, e se o governo simplesmente parasse de intervir junto à economia, o desenvolvimento econômico aconteceria naturalmente (HUNT; LAUTZENHEISER, 2013).

Nesse sentido, Smith defendia que o governo deveria ter três funções, a saber: a de proteger a sociedade de invasões de outras sociedades; a de administrar a justiça; a de administrar órgãos públicos cujos baixos rendimentos não despertem interesse, mas que são necessárias à sociedade (HUNT; LAUTZENHEISER, 2013). Sendo assim, perceberemos que Malthus se opõe a essas ideias, principalmente em termos de intervenção do estado na variação salarial.

Nascido na Inglaterra em 1766, o economista e sacerdote anglicano Thomas Robert Malthus se tornou e ainda é mundialmente conhecido em decorrência de seu modelo de crescimento populacional e sua relação com o crescimento da produção alimentícia. Em 1798, em resposta a Condorcet e a outros estudiosos do período, escreveu seu *Ensaio sobre a população*, no qual apresenta seu modelo e suas justificativas para tal.

Conforme já foi retratado, o cenário em que Malthus estava inserido se encontrava imerso no desenvolvimento da maquinaria em substituição à manufatura, com milhares de trabalhadores perdendo seus empregos, por meio da substituição do homem por mulheres e crianças no mercado de trabalho, já que estes eram vistos como mão-de-obra mais barata, o que ocasionou o aumento do desemprego, da mortalidade infantil, trazendo, consequentemente, mudanças na vida dos trabalhadores (DAMIANI, 2004).

Nesse contexto, Malthus, cujas referências religiosas tiveram grande importância na elaboração de sua teoria, publicou, em 1798, anonimamente a primeira edição de seu ensaio, que posteriormente passou por reedição. Ele ancora sua teoria em dois postulados: “Primeiro: Que o alimento é necessário para a existência do homem. Segundo: Que a paixão entre os sexos é necessária e que permanecerá aproximadamente em seu atual estágio” (MALTHUS, 1996, p. 246). A partir daí, por meio de suas referências, elabora seu modelo.

Assim, Malthus apresentou a seguinte constatação:

> [...] adotando meus postulados como certos, afirmo que o poder de crescimento da população é indefinidamente maior do que o poder que tem a terra de produzir meios de subsistência para o homem. A população, quando não controlada, cresce numa progressão geométrica. Os meios de subsistência crescem apenas numa progressão aritmética. Um pequeno conhecimento de números demonstrará a enormidade do primeiro poder em comparação com o segundo. (MALTHUS, 1996, p. 246)

Nessa citação ele argumentava que o ritmo de crescimento alimentício não era capaz de acompanhar o crescimento populacional, e justificava suas considerações, algo que apresentaremos mais adiante.

Em contrapartida ao que defendeu Condorcet, Malthus afirmava que a causa da miséria não era a desigualdade social, mas que a miséria era um “[...] obstáculo positivo, que atuou ao longo de toda a história humana, para reequilibrar a desproporção natural entre a multiplicação dos homens – o crescimento populacional – e a produção dos meios de subsistência – a produção de alimentos” (DAMIANI, 2004, p. 13). Ou seja, com a eliminação da miséria, haveria uma explosão populacional.

Malthus tinha motivos específicos para considerar a miséria um fator importante para a manutenção da relação entre produção alimentícia e crescimento populacional; para compreendermos esses motivos, é necessário esclarecer seus posicionamentos políticos e econômicos.

De acordo com Alves (2002), Malthus foi professor de economia política e ele argumentava que os trabalhadores deveriam receber uma quantia estritamente necessária para que pudessem continuar trabalhando, sem terem filhos em excesso, tendo apenas a quantidade de filhos necessária para substituir a geração anterior, sem aumentá-la.

Assim, salvos os encargos da produção e os gastos com salários, Malthus chamou a renda excedente de renda da terra, que ficava sob a posse dos latifundiários. Assim, “[...] Malthus considerava que o salário de subsistência seria aquele capaz de garantir o equilíbrio homeostático entre população e meios de subsistência” (ALVES, 2000), o que se opõe aos ideais defendidos por Condorcet.

Malthus afirmava que quando havia um aumento na produção de alimentos, as pessoas tendiam a se casar mais jovens, e em consequência disso terem mais filhos, visto que ele, em decorrência de suas raízes religiosas, defendia o princípio bíblico “crescei e multiplicai-vos”, ou seja, assumia que o casamento deveria ser constantemente “celebrado”, e que não deveria ser feito uso de métodos contraceptivos (ALVES, 2000).

Com o aumento e antecipação dos casamentos, Malthus apontou que haveria aumento populacional, o que levaria a redução de salários, necessidade de mais alimentos, mais empregos, mas que a capacidade da terra de produzir seria limitada. Assim, haveria escassez alimentícia, o que levaria as pessoas a postergar seus casamentos, tendo então menos filhos, levando a uma sobra de empregos e aumento de salários, e assim ciclicamente (ALVES, 2002). Ou ainda, “[...] os pobres vivem um perpétuo movimento oscilatório entre progresso e retrocesso da felicidade humana” (DAMIANI, 2004, p. 14).

A partir de todas essas considerações, Alves (2002, p. 21) aponta que “o modelo econômico/demográfico de Malthus visava a defender a inflexibilidade do salário de subsistência em benefício da renda da terra”, uma vez que Malthus era declaradamente um defensor dos latifundiários – o que o levava a defender os fechamentos às exportações. Contrariamente a Condorcet, Malthus acreditava que não seria o fim da desigualdade social que levaria ao progresso, e sim “[...] as dificuldades da vida material e a luta pela sobrevivência” (ALVES, 2002, p. 23).

5.2 A importância do trabalho de Malthus para Charles Darwin

Diferente dos personagens descritos anteriormente, Charles Darwin, um personagem posterior a Malthus, é fundamental para nosso texto, pelo fato de que a produção de Malthus norteou o seu trabalho sobre a Teoria do Evolucionismo. Em Shrewsbury, Inglaterra, no ano de 1809 nasceu o naturalista britânico Charles Darwin, reconhecido mundialmente por apresentar uma justificativa sobre a evolução dos seres vivos (HART-DAVIS, 2014).

No ano de 1831, em uma viagem pelo mundo a bordo do navio de pesquisa *HMS Beagle*, Darwin ampliava seus conhecimentos sobre a vida terrestre. Em cada território que o navio ancorava, o naturalista “[...] observava todos os aspectos da natureza” (HART-DAVIS, 2014, p. 146). Nessa viagem, Darwin iniciou seus estudos sobre as modificações nas espécies de seres vivos. Durante a sua expedição nas ilhas de Galápagos, ele pode observar características distintas em uma mesma espécie de pássaros localizados nessas ilhas (HART-DAVIS, 2014), na qual Darwin relata: “Ao ver essa gradação e diversidade na estrutura em um pequeno grupo de pássaros e a escassez de pássaros desse arquipélago, pode-se realmente imaginar que uma espécie tenha sido modificada para finalidades diferentes” (DARWIN, 1839, p. 551 apud HART-DAVIS, 2014, p. 146).

Essa não foi a única observação de Darwin em sua viagem, ainda nas ilhas de Galápagos. O naturalista pôde observar as características presentes nas tartarugas gigantes que habitavam essas ilhas, concluindo diferenças no formato de seus cascos de uma ilha para outra (HART-DAVIS, 2014). Aponta ainda que:

> Em outubro de 1838, isto é, quinze meses depois de ter começado minha investigação sistemática, li por diversão “Malthus sobre a população”, e estando preparado para apreciar a luta pela existência, através de longa e continuada observação dos hábitos de animais e plantas, ocorreu-me que sob circunstâncias favoráveis, as espécies seriam preservadas, e sob circunstâncias desfavoráveis, seriam destruídas. O resultado disso seria a formação de novas espécies. Aqui encontrei finalmente uma teoria com a qual trabalhar. (DARWIN, 1999, p. 44, tradução nossa)

Assim, o naturalista desenvolveu um dos maiores avanços científicos de todos os tempos, a teoria da evolução por seleção natural (HART-DAVIS, 2014), na qual o cientista conclui "[...] que havia uma evolução dos seres vivos que ocorre através de um processo lento e gradual, através do acúmulo de pequenas modificações sobre as quais atua a Seleção Natural" (CARMO; MARTINS, 2006, p. 337) e, assim, Darwin afirma: "a esta preservação das diferenças e variações individuais favoráveis, e a destruição das prejudiciais eu chamei de Seleção Natural ou Sobrevivência do mais apto" (DARWIN, 1875, p. 40 apud CARMO; MARTINS, 2006. p. 337).

A sua teoria se baseava em duas hipóteses: na primeira, Darwin afirmava que nascem mais seres vivos de uma determinada espécie do que o número que consegue sobreviver a desafios decorrentes da vida animal, tais como: períodos climáticos, escassez alimentar e até mesmo a extinção de caça e caçador. A segunda hipótese consiste na existência de uma variação entre indivíduos de uma mesma espécie (HART-DAVIS, 2014):

> Para a evolução, essas variações precisam atender dois critérios. Um: devem ter algum efeito na luta pela sobrevivência e procriação, ou seja, precisam ajudar a conferir o sucesso reprodutivo. Dois: devem ser herdadas ou repassadas à progênie, em que passariam a mesma vantagem evolutiva (HART-DAVIS, 2014, p. 148).

Outro fator importante que poderia ocasionar a modificação dos seres vivos seria a seleção sexual. Em seu livro *Origin*, o naturalista explica que a seleção sexual está associada em batalhas de indivíduos da mesma espécie, em geral os machos, que lutam pela disputa de seres do sexo oposto (CARMO; MARTINS, 2006). Darwin esclarece que:

> Esta forma de seleção não depende da luta pela existência em relação a outros seres orgânicos ou às condições externas, mas à luta entre indivíduos de um mesmo sexo, geralmente os machos, pela posse do outro sexo. O resultado não é a morte do competidor mal sucedido, mais deixar poucos descendentes ou nenhum (DARWIN, 1875, p. 43 apud CARMO, MARTINS, 2006, p. 340).

Antes de Darwin, existiram cientistas que desenvolveram teorias que mais tarde, mostraram-se contrárias aos seus ideais. Nessa corrente, podemos destacar o naturalista francês Georges Cuvier que, por meio dos seus estudos em fósseis:

> [...] reconheceu que certos fósseis, como os de mamutes ou de preguiças-gigantes, eram restos de animais extintos. Ele conciliou isso à sua crença religiosa, invocando catástrofes como o Grande dilúvio descrito na Bíblia. Cada desastre varria uma categoria inteira de seres vivos; Deus então reabastecia a Terra com novas espécies. (HART-DAVIS, 2014, p. 145).

Cuvier, em sua teoria intitulada de "catastrofismo" (HART-DAVIS, 2014), afirmava que, no intervalo entre estes desastres, os seres vivos permaneciam fixos e imutáveis.

Com diversas produções no decorrer de sua vida, tais como *A viagem de Beagle* (1839), *A origem das espécies por meio da seleção natural* (1859), *A descendência do homem e seleção em relação ao sexo* (1871), Charles Darwin é considerado um precursor nos estudos em relação aos avanços da genética. Sua teoria sobre o evolucionismo das espécies permanece como sendo a principal fonte para o entendimento de estudos em relação à área descrita anteriormente (HART-DAVIS, 2014).

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Acreditamos que um dos principais fatores que levaram a imprecisões no Modelo de Malthus foi que o economista não considerou como hipótese alguns fatores como a união patrimonial não implicar necessariamente no fato de os casais terem filhos (poderia ocorrer a utilização de métodos contraceptivos, por exemplo) e a possibilidade da geração de filhos fora do casamento. Para criar um modelo que previsse o crescimento populacional e alimentício, ele tomou como hipótese dados de países de continentes distintos e, mesmo justificando que no período de sua pesquisa a Inglaterra era o país europeu com a maior produção alimentícia, observamos que suas amostras não descreviam um modelo aceitável e o que nos chama mais atenção é a ausência de uma das etapas ao utilizar a Modelagem Matemática, a etapa de verificação, que é fundamental para a validação do modelo.

Por fim, este trabalho apresentou uma discussão do contexto histórico, cultural, e político de um dos problemas clássicos de modelos matemáticos. Uma outra maneira de se trabalhar com modelos matemáticos, é por meio da Modelagem Matemática. Sugerimos que essa abordagem ocorra por meio da análise de um modelo que foi criado, observação das etapas, verificação de que nem todo modelo descreve de fato o que pretende ser investigado, podendo ter falhas, e posteriormente propor aos alunos que criem um modelo que descreva, por exemplo, a estimativa populacional de um bairro, de uma cidade etc.

REFERÊNCIAS

ALVES, J. E. D. **A Polêmica Malthus versus Condorcet reavaliada à luz da transição demográfica**. Rio de Janeiro: Escola Nacional de Ciências Estatísticas, 2002.

ALVES, J. E. D. **Mitos e realidade da dinâmica populacional**. 2000. Disponível em: <https://www.passeidireto.com/arquivo/982735/mitos_e_realidade_da_dinamica_populacional_je_diniz_alves_-_ufop>. Acesso em: 19 out. 2017.

ALVES, J. E. D. População, bem estar e tecnologia: debate histórico e perspectivas. **Multiciência**, Campinas, n. 6, p. 1-24, mai. 2006.

BARBOSA, J. C. **Modelagem Matemática na sala de aula**. Perspectiva, Erechim. v. 27, n. 98, p. 65-74, jun. 2003.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-Aprendizagem com Modelagem Matemática**: uma nova estratégia. São Paulo: Contexto, 2013.

BOYER, C. B. **História da Matemática.** Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: Blucher, 2010.

BUENO, V. C. **Modelagem Matemática**: quatro maneiras de compreendê-la. Ouro Preto: Universidade Federal de Ouro Preto, 2011.

CARMO, V. A.; MARTINS, L. A. P. Charles Darwin, Alfred Russel Wallace e a seleção natural: um estudo comparativo. **Filosofia e História da Biologia**, Campinas, v. 1, p. 335-350, 2006.

DAMIANI, A. L. **População e Geografia**. São Paulo: Contexto, 2004.

DARWIN, C.; DARWIN, F. **The life and letters of Charles Darwin**: volume I. Champaign: Project Gutenberg, 1999. 2 v. Disponível em: <http://www.dominiopublico.gov.br/pesquisa/DetalheObraForm.do?select_action=&co_obra=12967>. Acesso em: 28 nov. 2018.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Campinas: Unicamp, 2004.

FERNANDEZ, E. P. **Adam Smith visto por Roberto Campos**: a (re)criação do mito e as necessidades do capitalismo. 2012. 197 f. Dissertação (Mestrado em Ciências Sociais) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2012.

GAYO, J.; WILHELM, R. O problema que tornou Euler famoso. **Ciência e Natura**, Santa Maria, v. 37, p. 342-355, 2015.

GRESPAN, J. **Revolução Francesa e Iluminismo**. São Paulo: Contexto, 2008.

HART-DAVIS, A. **O livro da ciência**. São Paulo: Globo Livros, 2014.

HUNT, E. K.; LAUTZENHEISER, M. **História do Pensamento Econômico**: uma perspectiva crítica. Rio de Janeiro: Elsevier, 2013.

KLEIN, A. Q. R. S. Condorcet e a instrução pública: por uma escolarização gratuita, laica e universal. **Revista Espaço Acadêmico**, Maringá, v. 16, n. 188, p. 120-131, jan. 2017.

MAGALHÃES, M. L. A.; LEITE, N. M. G. Equações Diferenciais Aplicadas à Dinâmica Populacional. In: CONGRESSO DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL NORDESTE, 1., 2012, Januária. **Anais...** Januária, 2012, p. 351-353.

MALTHUS, T. R. **Princípios de economia política e considerações sobre sua aplicação prática**: Ensaio sobre a população. São Paulo: Nova Cultural, 1996.

MENDES, I. A.; CHAQUIAM, M. **História nas aulas de Matemática**: fundamentos e sugestões didáticas para professores. Belém: SBHMAT, 2016.

MILANI, W. N. **A resolução de problemas como ferramenta para a aprendizagem de progressões aritméticas e geométricas no ensino médio**. 2011. 129 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2012.

OLIVEIRA, J. L. R. **Elaboração de atividades didáticas para o ensino de matemática a partir de livros antigos**: o exemplo de Leçons Élémentaires de Lagrange. 2013. 133 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e da Terra) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2013.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação do Paraná. **Diretrizes Curriculares da Educação Básica. Matemática**. 2008.

SANCHEZ, D. F. **Joseph Louis Lagrange e o desenvolvimento da Mecânica Clássica**. Itajubá: Unifei, 2007.

SILVA, M. A. R. R. **Adrien-Marie Legendre (1752-1833) e suas obras em teoria dos números**. 2010. 256 f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2010.

SOUZA, C. E. B. O pensamento iluminista e a idéia republicana. In: MITRE, A. F. **Ensaios de teoria e filosofia política em homenagem ao prof. Carlos Eduardo Baesse de Souza**. Belo Horizonte: DCP/UFMG, 1994. p. 14-32.

STRUIK, D. J. **História Concisa das Matemáticas.** Gradiva, 1992.

WEISE, A. S. **Talleyrand: Controvertido ayer, hoy y siempre**. EL DEBER, 2010. Disponível em: <http://www.ceid.edu.ar/biblioteca/2010/agustin_saavedra_weise_talleyrand_controvertido_ayer_hoy_y_siempre.pdf>. Acesso em: 09 jul. 2017.

INVARIANTES OPERATÓRIOS E NÍVEIS DE GENERALIDADE MANIFESTADOS POR ESTUDANTES DOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL[1]

OPERATORY INVARIANTS AND LEVELS OF GENERALITY MANIFESTED BY STUDENTS OF THE EARLY YEARS OF ELEMENTARY SCHOOL

BONI, Keila Tatiana[2]

SAVIOLI, Ângela Marta Pereira das Dores[3]

RESUMO

Considerando que o pensamento aritmético e o pensamento algébrico estão associados, este artigo apresenta uma análise de invariantes operatórios e níveis de generalidade manifestados por estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental em procedimentos de cálculos aritméticos ao se envolverem com uma tarefa considerada como potencialmente algébrica. A fundamentação teórica pautou-se em pressupostos da Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 1996; 1997; 2009; 2017) e de Níveis de Generalidade (RADFORD, 2006). As informações submetidas a procedimentos analíticos foram coletadas a partir da áudio-gravação da experiência, diários de campo e registros escritos dos estudantes participantes. A partir de manifestações dos estudantes em seus procedimentos de cálculos e linguagem natural oral, conclui-se que eles apresentaram indícios de invariantes operatórios do tipo teoremas-em-ação e se encontravam em um nível de transição entre generalidade aritmética e generalidade algébrica.

Palavras-chave: Educação Matemática. Pensamento Algébrico. Invariantes Operatórios. Generalização.

ABSTRACT

Considering that arithmetic has an algebraic character, this article presents an analysis of operative invariants and levels of generality manifested by students of the 5th grade of elementary school in arithmetic calculation procedures when they are involved with a task considered as potentially algebraic. The theoretical foundation was based on the assumptions of the Theory of Conceptual Fields (VERGNAUD, 1996; 1997; 2009; 2017) and Levels of Generality (RADFORD, 2006). The information submitted to analytical procedures was collected from the audio-recording of the experience, field diaries and written records of the participating students. From the students' statements in their calculation procedures and oral natural language, it was concluded that they presented indications of operative invariants of the theorem-in-action type and were at a level of transition between arithmetic generality and algebraic generality.

Keywords: Mathematics Education. Algebraic Thinking. Invariants Operative. Generalization.

1 INTRODUÇÃO

Este artigo relata resultados de uma pesquisa que teve por objetivo investigar invariantes operatórios e níveis de generalidade manifestados por estudantes do 5º ano do Ensino

---

[1] Este artigo é resultado da pesquisa de mestrado de um dos autores (BONI, 2014), que contou com o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) – Programa Observatório da Educação.

[2] Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL), Londrina, PR. Doutoranda em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL), Londrina, PR. Endereço eletrônico: keilaboni@hotmail.com.

[3] Doutora em Matemática pela Universidade de São Paulo (USP), São Paulo, SP. Docente do Programa em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina (UEL), Londrina, PR. Endereço eletrônico: angelamarta@uel.br.

Fundamental em seus procedimentos de cálculos aritméticos[4] ao se envolverem com uma tarefa considerada como potencialmente algébrica.

O contexto da investigação se deu em uma escola municipal de Apucarana – PR, que era participante do Projeto Educação Matemática de Professores que Ensinam Matemática, promovido pela Universidade Estadual de Londrina (UEL) e pelo Programa Observatório da Educação. Durante contato com professoras dessa escola que lecionam a disciplina de Matemática, perceberam-se algumas dúvidas e dificuldades em conduzirem seus alunos à aprendizagem nessa disciplina com compreensão de procedimentos de cálculos aritméticos.

Vários autores (BLANTON; KAPUT, 2005; KIERAN, 2004; PIMENTEL; VALE, 2009; entre outros) defendem a ideia de o pensamento algébrico começar a ser trabalhado mais cedo, já nos anos iniciais, integrado ao desenvolvimento do pensamento aritmético. Outros autores (MESTRE; OLIVEIRA, 2012; PIMENTEL; VALE, 2009; FUJII; STEPHENS, 2008; entre outros) defendem, ainda, que a aritmética possui um caráter potencialmente algébrico, uma vez que conceitos aritméticos podem ser generalizados.

Nessa perspectiva, foi proposta a seis estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental uma tarefa considerada como potencialmente algébrica, tendo em vista investigar nos procedimentos de cálculos aritméticos, por eles manifestados, indícios de invariantes operatórios do tipo teoremas-em-ação, por meio dos quais buscou-se inferir os níveis de generalidade em que tais estudantes se encontravam.

2 PRESSUPOSTOS TEÓRICOS: DA ARITMÉTICA À ÁLGEBRA

Com o objetivo de investigar invariantes operatórios e níveis de generalidades de estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental, nos baseamos, sobretudo, em três estudos: na Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 1996, 1997, 2009), no caráter potencialmente algébrico da aritmética, focando na aritmética generalizada (BLANTON; KAPUT, 2005), e nos Níveis de Generalidade (RADFORD, 2006).

Na Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud são evidenciados elementos que auxiliam na compreensão do processo de aprendizagem de conceitos. Essa teoria está pautada na construção conceitual, ou seja, aborda a respeito das rupturas e filiações na formação do conhecimento, não apenas matemático, mas de diversas áreas.

De acordo com Vergnaud (1996), a formação de um conceito depende de um conjunto de: a) situações que são referentes a um mesmo conceito; b) invariantes operatórios, que podem ser identificados e utilizados pelos estudantes ao se envolverem com situações, constituindo, assim, o significado do conceito; c) formas linguísticas e não linguísticas para representar simbolicamente um conceito, constituindo, assim, o significante do conceito.

Na investigação realizada, uma tarefa foi proposta a estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental, configurando o que Vergnaud (1996) chama de *situação*. Para o autor, uma situação é entendida como o contexto no qual o estudante está inserido e pode ser classificada em dois tipos: para a qual o estudante possui um repertório de esquemas eficientes para tratar uma situação familiar e para a qual ele não possui esquemas eficientes, sendo necessário que faça a mobilização de diversos esquemas ou, até mesmo, construa outros novos, sendo este

[4] Consideramos como procedimentos de cálculos aritméticos os processos e as maneiras pelas quais os estudantes buscam solucionar problemas matemáticos, recorrendo a conhecimentos aritméticos.

último tipo essencial para o chamado processo de conceitualização. Entende-se *esquema* como a "organização invariante do comportamento para uma determinada classe de situação" (VERGNAUD, 1997, p. 12). De acordo com esse autor, são nos esquemas que devem ser pesquisados os elementos cognitivos que fazem com que a ação do sujeito seja operatória.

Os esquemas são constituídos por conhecimentos, denominados por Vergnaud (1996) como *conhecimentos-em-ação* ou *invariantes operatórios*, sendo estes constituídos por *conceitos-em-ação* e *teoremas-em-ação*. O teorema-em-ação corresponde a uma proposição que é tida como verdadeira sobre o real, enquanto que o conceito-em-ação corresponde a um objeto, um predicado, ou ainda, a uma categoria de pensamento que é tida como relevante ou pertinente para determinada situação.

Para diferenciar teorema-em-ação de conceito-em-ação, consideremos a expressão algébrica $(\mathrm{x}+\mathrm{y})^2=\mathrm{x}^2+2\mathrm{xy}+\mathrm{y}^2$, utilizada por um estudante dos anos finais do Ensino Fundamental em suas resoluções. Tal expressão, manifestada nas ações do estudante, durante tratamento de diversas situações de uma mesma classe, se constitui como uma proposição ou um teorema-em-ação tido como verdadeiro para quaisquer valores de x e de y pertencentes ao conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$). Nesse caso, os sinais das operações e as variáveis x e y, de maneira isolada, são conceitos que não podem ser considerados como verdadeiros ou falsos, mas apenas como pertinentes ou não para a situação.

Na Teoria dos Campos Conceituais defende-se que há um "relacionamento entre o conhecimento implícito presente no raciocínio aritmético das crianças e o conhecimento explícito, requerido para se entender o uso da álgebra" (COMÉRIO, 2007, p. 38). Nesse direcionamento, inferimos que, de certa forma, Vergnaud chegou a delinear algo de inerente entre o movimento da aritmética para a álgebra.

É a respeito da identificação de regularidades e relações em objetos matemáticos que encontramos estudos que defendem o caráter potencialmente algébrico da aritmética e, consequentemente, a abordagem do pensamento algébrico mais cedo, já nos anos iniciais do Ensino Fundamental, integrado ao ensino de conceitos aritméticos.

Tal abordagem nos anos iniciais compreende

> [...] o desenvolvimento de formas de pensar no âmbito das atividades para as quais a linguagem simbólica pode ser usada como uma ferramenta, mas que não são exclusivas para álgebra e com as quais podem se envolver sem usar qualquer linguagem simbólica, tais como analisar relações entre quantidades, observar a estrutura, estudar variações, generalizar, resolver problemas, modelar, justificar, provar e prever (KIERAN, 2004, p. 149, tradução nossa).

A partir do que expõe Kieran, as autoras Pimentel & Vale (2009) e Mestre & Oliveira (2012) defendem que a base do desenvolvimento do pensamento algébrico é a capacidade de generalização, o que pode começar a ser desenvolvida a partir da aritmética. Em concordância com essa defesa, Fujii e Stephens (2008) abordam sobre o *pensamento quase-variável,* que diz respeito a expressões numéricas generalizáveis, ou seja, que revelam a relação matemática subjacente que é satisfeita independentemente dos números considerados, permitindo a evidenciação e discussão da generalização algébrica antes do conhecimento da representação simbólica. Nesses tipos de expressões, é possível explorar os padrões de variação que podem ser representados por expressões algébricas como, por exemplo, a expressão numérica $10-15+15=10$ que, mais tarde, poderá ser representada de maneira geral como $\mathrm{x}-\mathrm{y}+\mathrm{y}=\mathrm{x}$.

Nesse mesmo direcionamento, Blanton e Kaput (2005) apresentam a *aritmética generalizada* como aquela que permite aos estudantes evidenciarem relações, regularidades e propriedades nas operações e nos sistemas numéricos de objetos particulares, bem como perceberem que tais características são invariantes, sendo possível generalizar essa apreensão a outros objetos matemáticos.

Contudo, Radford (2006), ainda que concorde com a ideia de que há algo inerentemente aritmético na álgebra, assim como existe algo inerentemente algébrico na aritmética, adverte que nem toda generalização pode ser classificada como aritmética ou algébrica, assim como existem níveis diferentes de generalização. No quadro 1 apresentamos os níveis de generalidade elencados por Radford (2006), os quais podem ser atingidos e manifestados por estudantes durante envolvimento com situações matemáticas.

Quadro 1: Níveis de generalidade

Indução Ingênua	Generalização			
Adivinhação (tentativa e erro)	Aritmética	Algébrica		
		Factual	Contextual	Simbólica

Fonte: Radford (2006, p. 15, tradução nossa)

A *indução ingênua* corresponde a estratégias de tentativa e erro e de adivinhação, portanto não é considerada como um tipo de generalização que pode acarretar no desenvolvimento do pensamento algébrico, pois tais estratégias não são pautadas na percepção de características comuns em objetos matemáticos.

A *generalização aritmética* é diferente da algébrica porque nesta é preciso que algo comum seja notado em objetos matemáticos, que esse algo comum seja generalizado e que essa generalização seja cristalizada em um esquema. Contudo, essa última característica não é evidenciada na *generalização aritmética.*

Quanto à *generalização algébrica*, esta é dividida em *factual, contextual e simbólica*, que correspondem a diferentes níveis de complexidade que são atingidos conforme ocorrências de contrações semióticas[5]. Na *factual*, os mecanismos de percepção de regularidades envolvem coordenação rítmica de recursos semióticos e a indeterminação permanece implícita. Na *contextual*, há a exclusão de vários meios semióticos, que são compensados por uma concentração de significados em um número reduzido de símbolos, tornando a indeterminação explícita, em geral, por meio de palavras. Já na *simbólica*, a indeterminação é explicitada por meio de símbolos (linguagem algébrica).

3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

O contexto da investigação foi uma escola municipal de Apucarana – PR, que era integrante de um projeto do Programa Observatório da Educação.

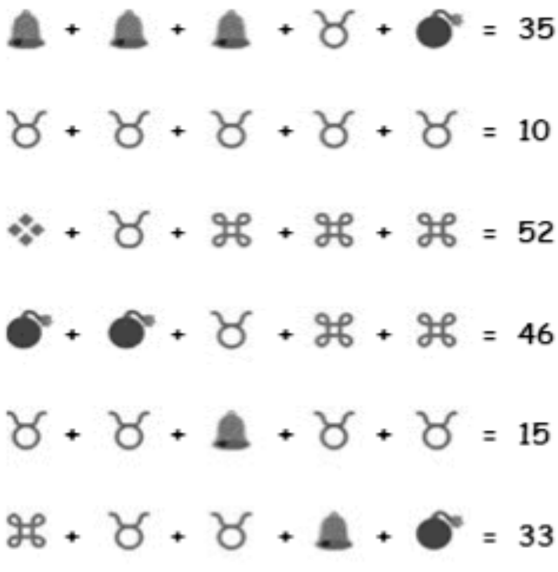
[5] Segundo Radford (2006), o processo de produção de sentido dos estudantes ao se envolverem com tarefas matemáticas ocorre por meio de diversificados meios semióticos de objetivação (símbolos, gestos, gráficos, fórmulas, tabelas, desenhos, etc.), que vão sendo contraídos à medida que níveis mais profundos de generalidade vão sendo atingidos, uma vez que os significados vão sendo concentrados. É essa minimização de meios semióticos que Radford (2006) chama de *contração semiótica*.

Tendo em vista constituir os participantes de pesquisa, foi solicitado para a professora de uma turma de 5º ano, que selecionasse seis estudantes, os quais foram organizados em díades. O critério adotado para selecioná-los, segundo a professora, foi a facilidade para se expressarem oralmente. A fim de garantir o anonimato dos seis estudantes que participaram da pesquisa[6], eles serão referidos como E1, E2, ..., E6, e as díades formadas por D1, D2 e D3. Destacamos a opção em organizar os estudantes em díades ao considerarmos algumas das ideias vygotskianas que embasaram a Teoria dos Campos Conceituais, que são elas a relevância atribuída à linguagem natural e à interação social para o processo de aprendizagem.

Aos estudantes foi aplicado um total de sete tarefas, porém, neste texto, apresentaremos apenas uma delas. Os motivos que nos levaram a optar pela apresentação dessa única tarefa foram: i) o espaço de que dispomos para apresentação da pesquisa realizada, sendo necessário delimitar essa apresentação; ii) porque consideramos que a apresentação dessa única tarefa seria o suficiente para elucidarmos como atendemos aos objetivos pretendidos para a pesquisa.

A tarefa (Figura 1) aplicada aos estudantes, e que selecionamos para apresentação no presente trabalho, encontra-se em um livro didático do 8º ano (ANDRINI; VASCONCELLOS, 2012), em um capítulo que aborda cálculo algébrico. Na tarefa proposta há seis equações. No 8º ano, os estudantes, em geral, já tiveram contato com símbolos alfanuméricos para representar as incógnitas, ao contrário dos estudantes do 5º ano, etapa escolar em que se encontram os participantes da pesquisa.

Figura 1: Tarefa proposta às díades. Comando da questão: quanto vale cada um dos desenhos dessas somas? Explique como pensou.



Fonte: Andrini e Vasconcellos (2012, p. 73)

Tendo proposto a tarefa para cada díade de estudantes, estes tiveram que conversar entre si buscando compreendê-la, bem como delimitar estratégias de resolução. Durante todo esse processo, que durou 50 minutos, suas conversas foram registradas pelo gravador de voz e, quando conversavam muito baixo entre si ou apresentavam resolução de maneira escrita sem mencionar em

[6] As abordagens e os instrumentos metodológicos utilizados obedeceram aos procedimentos éticos estabelecidos para a pesquisa científica em Ciências Humanas.

linguagem natural e oral como a obtiveram, a testemunha que acompanhava a díade questionava-os e anotava informações que julgava pertinentes para a pesquisa em seu diário de campo.

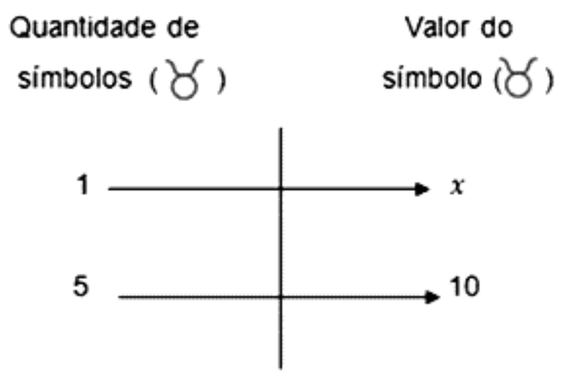
As testemunhas eram dois estudantes de mestrado, participantes do projeto do Programa Observatório da Educação, que auxiliaram os pesquisadores no momento de coleta de informações. A presença das testemunhas se fez necessária para conduzir os estudantes a explicitarem oralmente os procedimentos que adotaram para solucionar a tarefa proposta. Vale ressaltar que em nenhum momento as tarefas foram explicadas para os estudantes, o que caracterizaria uma intervenção direta das testemunhas.

Nesse sentido, consideramos a tarefa proposta com o que Vergnaud denomina de *situação*, pois, para solucioná-la, o estudante "não dispõe de todas as competências necessárias, o que o obriga a um tempo de reflexão, a hesitações, a tentativas abortadas, conduzindo-o quer ao êxito, quer ao fracasso" (VERGNAUD, 1996, p. 156).

4 ANÁLISE DOS DADOS

As díades D1 e D3, compostas pelos estudantes E1 e E2 e pelos estudantes E5 e E6, respectivamente, manifestaram estratégias de resolução semelhantes: iniciaram pela segunda equação da tarefa, justificando que nesta havia apenas figuras iguais. Para resolver essa equação, cada díade operou no campo multiplicativo, utilizando a ideia de razão (do princípio multiplicativo), a partir de um esquema que representa a correspondência entre duas espécies de quantidades. Na figura 2 apresentamos, como exemplo, o esquema da díade D1, que foi acompanhado, durante a realização da tarefa proposta, pela testemunha T1.

Figura 2: Esquema da díade D1 para a segunda equação da tarefa. Transcrição de gravações de voz (linguagem natural de D1): E1: O segundo é mais fácil, então a gente vai fazer primeiro. T1: Por que é mais fácil? E1: Porque todos os desenhos são os mesmos. T1: E o que vocês vão fazer? E1: 10 vezes… é 10 dividido por 5.



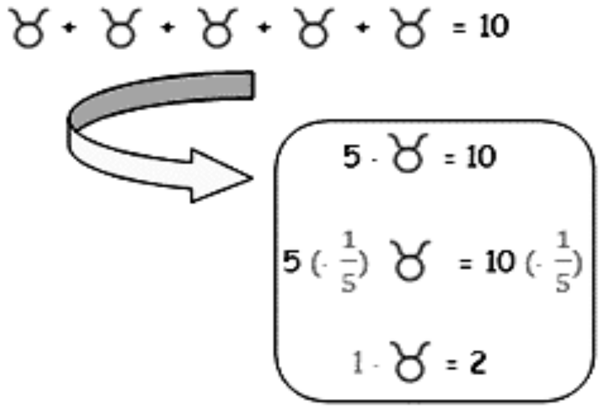
Fonte: autoras

Para construir os possíveis esquemas de resolução para cada díade e para cada equação da tarefa, buscamos compreender seus tratamentos, ou seja, os procedimentos de cálculos aritméticos manifestados pelos estudantes. Por meio do esboço desses esquemas e tratamentos é que inferimos invariantes operatórios, do tipo *teoremas-em-ação*.

Tal inferência fundamenta-se em características de aritmética generalizada (BLANTON; KAPUT, 2005), que correspondem: à exploração de propriedades das operações com números inteiros (comutatividade, associatividade, elemento neutro, entre outros); à exploração do sinal de igualdade como expressão de uma relação entre quantidades; ao tratamento algébrico de número, utilizando-o como incógnita e considerando que símbolos iguais correspondem a valores iguais, mesmo em expressões diferentes; e à resolução de sentenças com números desconhecidos em equações, envolvendo mais de uma incógnita ou a mesma incógnita repetida algumas vezes.

A título de exemplo, para a segunda equação o tratamento que esboçamos, de acordo com a interpretação que realizamos a partir de manifestações das díades D1 e D3, é apresentado na Figura 3.

Figura 3: Tratamento das díades D1 e D3 para a segunda equação da tarefa



Fonte: autoras

Por meio desse esboço pudemos inferir as seguintes características: a) o reconhecimento da adição reiterada, ou seja, soma de n parcelas iguais, como uma multiplicação do fator que se repete n vezes; b) a utilização do inverso multiplicativo de 5; e c) o elemento neutro da multiplicação.

A primeira característica está relacionada ao reconhecimento de que a soma de cinco símbolos iguais equivale a uma multiplicação de cinco vezes esse símbolo que se repete. A segunda foi inferida a partir da manifestação dos estudantes sobre a relação existente entre os cinco símbolos iguais com o valor dez, tendo manifestado que tal relação pode ser descoberta por meio de uma divisão. A terceira característica está atrelada à explicitação da relação evidenciada na segunda unidade de análise: um único símbolo equivale a dois, ou seja, a relação é que dez representa o dobro de cinco.

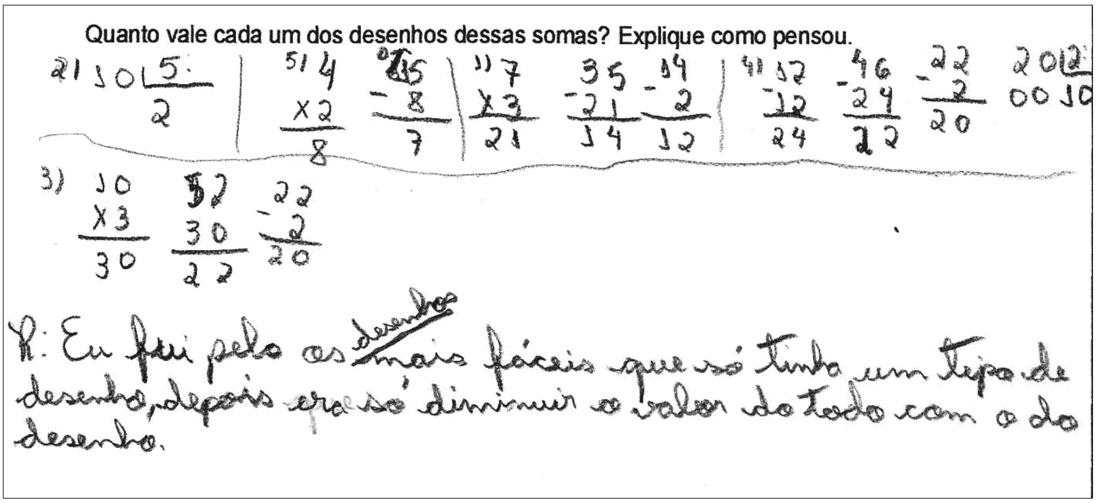
Vale ressaltar que em nenhum momento afirma-se que as características que inferidas são manifestadas pelos estudantes de maneira consciente. As interpretações e inferências são pautadas em analogias entre a maneira como os estudantes lidaram com a tarefa e com a maneira que esta poderia ter sido resolvida por uma pessoa que tem conhecimento a respeito de propriedades dos números e operações e de equações do primeiro grau.

Assim, evidencia-se que para determinar o valor do símbolo ♉, a díade D1 evocou um esquema cujo tratamento é análogo ao de uma equação do primeiro grau do tipo ax=b, porém, sem expressar simbolicamente.

Vale destacar que embora as díades D1 e D3 tenham apresentado oralmente tratamento para a segunda equação, em seguida ambas apresentaram registros com cálculos aritméticos (figura 4).

As manifestações em linguagem natural oral e os registros escritos apresentados pelos estudantes das díades D1 e D3, não apenas para essa segunda equação da tarefa, mas para todas as demais, evidencia o caráter potencialmente algébrico da aritmética o qual dificilmente poderia ter sido entendido apenas pelo registro escrito, mas que pôde ser explicitado por meio da linguagem natural oral, o que nos confirma a essencialidade desta representação semiótica[7] para a exteriorização de indícios da matemática dos estudantes.

Figura 4: Registro do estudante E1



Fonte: autoras

Quanto à resolução das demais equações, tanto D1 quanto D3 operaram sobre aquelas que, sucessivamente, continham menor quantidade de símbolos desconhecidos. Dessa forma, a ordem das equações em que operaram foi: a segunda, a quinta, a primeira, a quarta e a terceira. A sexta expressão não foi utilizada pela díade D1, uma vez que já haviam determinado o valor de todos os símbolos por meio das equações resolvidas. A díade D3, ao invés de utilizar a quarta expressão, utilizou a sexta, tendo sido a quarta expressão resolvida apenas para confirmar os resultados obtidos.

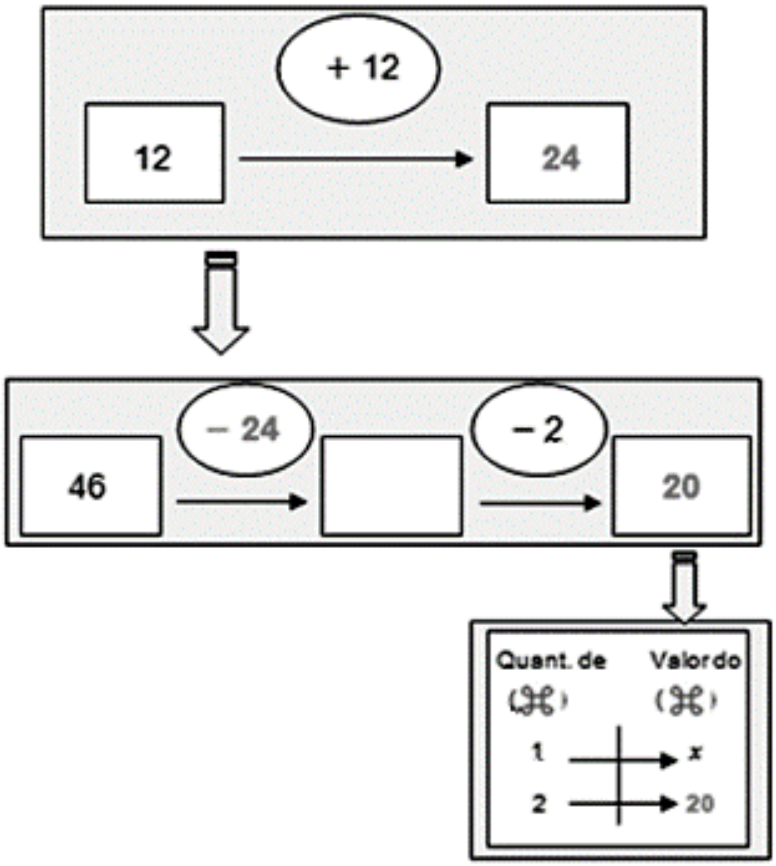
Para exemplificar, na figura 5 apresentamos o tratamento da díade D1 que esboçamos para a quarta expressão da tarefa proposta.

De acordo com o esboço apresentado, que representa o tratamento da díade D1 ao operarem sobre a quarta expressão (conforme ilustra a figura 5), tendo em vista obter o valor do símbolo ⌘, a díade D1 fez uso de um processo misto, envolvendo relações aditivas e multiplicativas. A partir do que manifestaram oralmente, infere-se a formação sucessiva de três esquemas, os quais são destacados dentro de um quadro preenchido na cor cinza e com flechas preenchidas dessa mesma cor que indicam a ordem em que foram desenvolvidos esses esquemas. Dentro de cada um desses esquemas, evidenciamos valores em negrito sublinhados, pois são valores que correspondem a resultados naturais de cálculos de números que se tornaram valores que constituíram *cálculos relacionais*[8] (VERGNAUD, 2009) em outro esquema.

No primeiro esquema a díade D1 operou no campo aditivo, transformando uma medida inicial em uma final (cálculo numérico), sendo esta correspondente ao valor das duas bombinhas. Na sequência, o resultado da soma das duas bombinhas (24) tornou-se um número relacional (-24) que foi subtraído do resultado total apresentado na quarta equação (46). Do resultado obtido, subtraiu-se o valor de um símbolo ♉ (−2).

[7] Representações semióticas "são produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representação, os quais têm suas dificuldades próprias de significado e de funcionamento" (DUVAL, 2012, p. 269).
[8] Segundo Vergnaud (2009), os cálculos relacionais são aqueles que envolvem operações de pensamento necessárias para compreender os relacionamentos envolvidos na operação.

Figura 5: Esquema da díade D1 para a quarta equação da tarefa. Transcrições de gravações de voz (linguagem natural de D1): E1: E agora vamos fazer… E2: A última. E1: Não, a linha quatro. T1: Dá para fazer qualquer uma das duas? E1: Dá, porque aqui o que sobrar... o resultado tem que dividir por dois, daí dá para descobrir. Mas a última tem mais desenhos do que aqui. E2: É, então, é melhor fazer a quarta. E1: Tem que fazer 12 mais 12... Agora, a gente faz o 24... é o 46 menos o 24. Dá 22. Agora a gente faz 22 menos o 2. E2: Agora a gente tem que fazer 20 dividido por 2. E vai dar 10.



Fonte: autoras

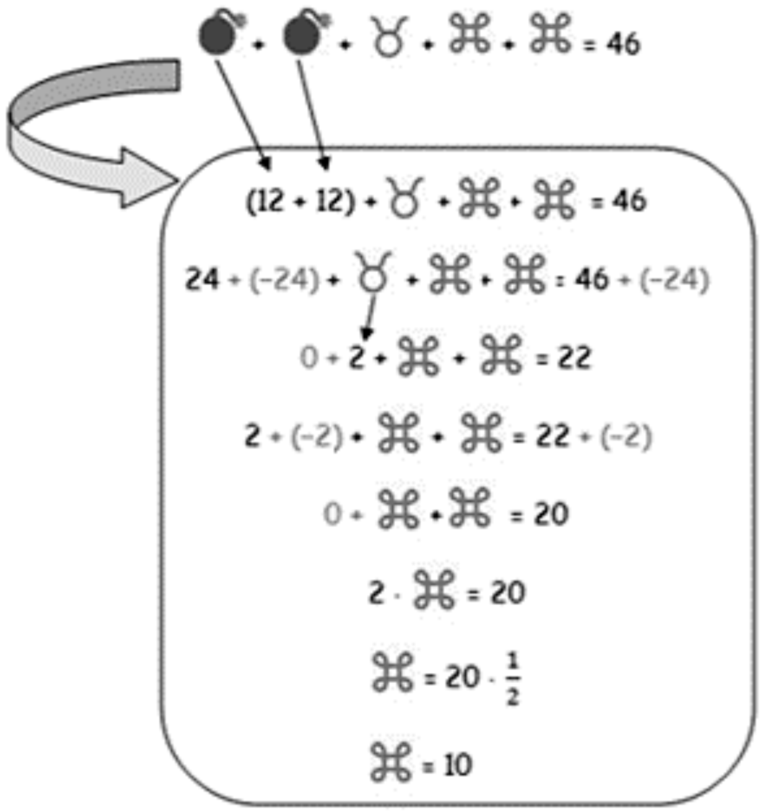
Assim, sucessivamente, duas transformações foram realizadas: uma sobre a medida inicial, obtendo uma intermediária, e uma sobre esta, obtendo uma medida final. Na sequência, o resultado obtido correspondia a dois símbolos ⌘. Logo, a díade D1 operou no campo multiplicativo ao realizar um isomorfismo de medidas, em que se conhecendo o valor de dois símbolos ⌘, obtiveram o valor desse símbolo unitário a partir de uma divisão.

Para melhor compreensão do tratamento manifestado pela díade D1 para a quarta expressão, esboçamos o esquema representado na figura 6.

Percebe-se a partir da figura 6 um processo análogo ao tratamento de uma equação do primeiro grau do tipo $ax + b = c$. Quanto às características identificadas: *adição pelo elemento oposto* no segundo e no quarto passo do tratamento que esboçamos (–24 e –2), *elemento neutro da adição* no terceiro e no quinto passo, *adição reiterada como multiplicação* na passagem do quinto para o sexto passo e utilização do *inverso multiplicativo* de 2 no sétimo passo.

Quanto à díade D2, composta pelos estudantes E3 e E4, assim como D1 e D3, iniciou a operação na segunda equação. Porém, pela fala de E4 "*Porque somando a segunda fileira dá pra ver que é dois cada um, porque são cinco desenhos e o resultado é 10*", inferimos que houve a explicitação de um valor que pôde ser resgatado da memória, o que nos levou a considerar que os estudantes da díade D2 não consideraram o sinal de igualdade (=) como uma relação entre quantidades, mas como indicador do resultado de operações, o que foi verificado, do mesmo modo, no tratamento das demais equações da tarefa.

Figura 6: Tratamento da díade D1 para a quarta equação da tarefa



Fonte: autoras

Em seguida, diferente do que fizeram as díades D1 e D3, a díade D2 não operou com as equações que, sucessivamente, continham menor quantidade de símbolos desconhecidos (com exceção de que iniciaram pela segunda equação), mas iniciaram suas operações na ordem em que cada equação é apresentada na tarefa.

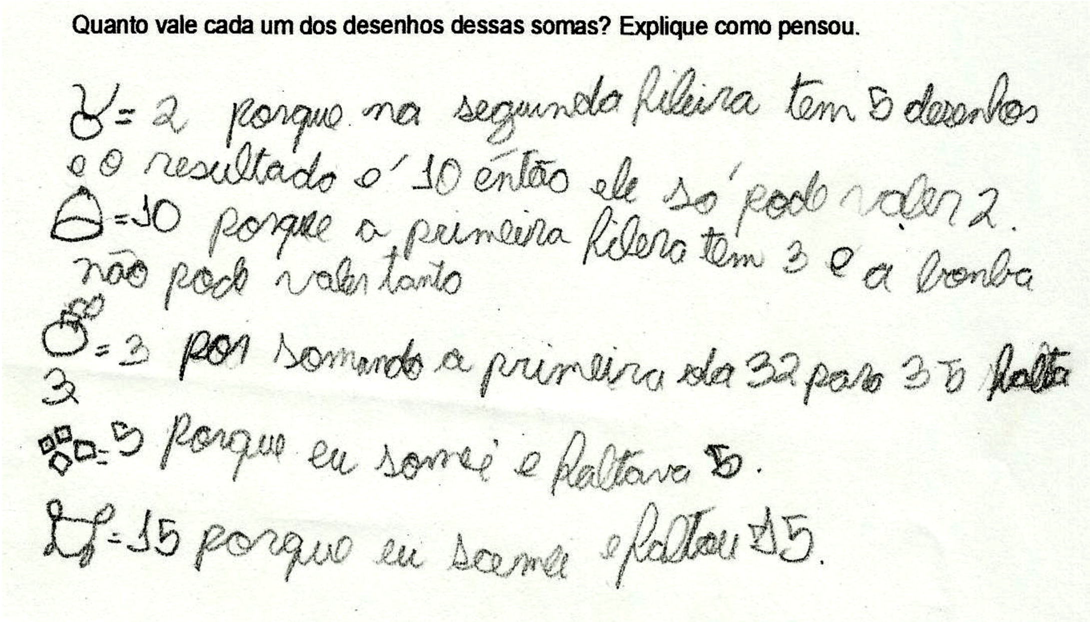
Assim, após realizarem a operação na segunda equação, o próximo passo foi operar na primeira, fazendo uso da estratégia de tentativa e erro (pois há dois símbolos desconhecidos), o que podemos evidenciar no registro escrito dos estudantes da díade D2 (figura 7).

Diante do exposto, que nos auxiliou no esboço de esquemas, evidenciamos a característica: *reconhecem que equações do primeiro grau só são possíveis de serem resolvidas quando envolvem apenas uma incógnita*, uma vez que reconheceram que nessa situação existem vários resultados possíveis, pois duas incógnitas são desconhecidas.

Além disso, apesar da estratégia de tentativa e erro, inferimos, por meio dessa resolução, indícios de características algébricas, pois a díade D2 manifestou um pensamento considerado como *pensamento quase-variável* (FUJII; STEPHENS, 2008), conforme ilustra a figura 8.

Conforme ilustrado na figura 8, os estudantes da díade D2 atribuíram um valor arbitrário para os símbolos iguais (sinos) e, tendo obtido o resultado de uma soma parcial, os estudantes determinaram o valor que acrescido a essa soma resultaria em trinta e cinco. Por exemplo: $5 + 5 + 5 + 2 + ? = 35$.

Figura 7: Registo do estudante E4. Transcrições de gravações de voz (linguagem natural de D2): E4: Esse daqui é 10, eu acho. E3: É, eu também acho. E4: E esse daqui deve valer 3, porque 30, 32, 35. [A bomba] não vai valer tanto assim, porque se for cinco, aqui vai dar 17 e aqui vai dar... um monte. E3: Vai ter que dar 18! T2: Qual vocês fizeram agora? E4: Esse. Nós achamos que é 10. T2: Vocês acham que é? Será que não tem outro jeito de saber se é 10 mesmo ou não? E3: Tem como valer 12 esse sino aqui. Ah, tem um monte de jeito!


Quanto vale cada um dos desenhos dessas somas? Explique como pensou.

= 2 porque na segunda fileira tem 5 desenhos e o resultado é 10 então ele só pode valer 2.

=10 porque a primeira filera tem 3 e a bomba não pode valer tanto

= 3 por somando a primeira da 32 para 35 falta 3

= 5 porque eu somei e faltava 5.

= 15 porque eu somei e faltou 15.

Fonte: autoras

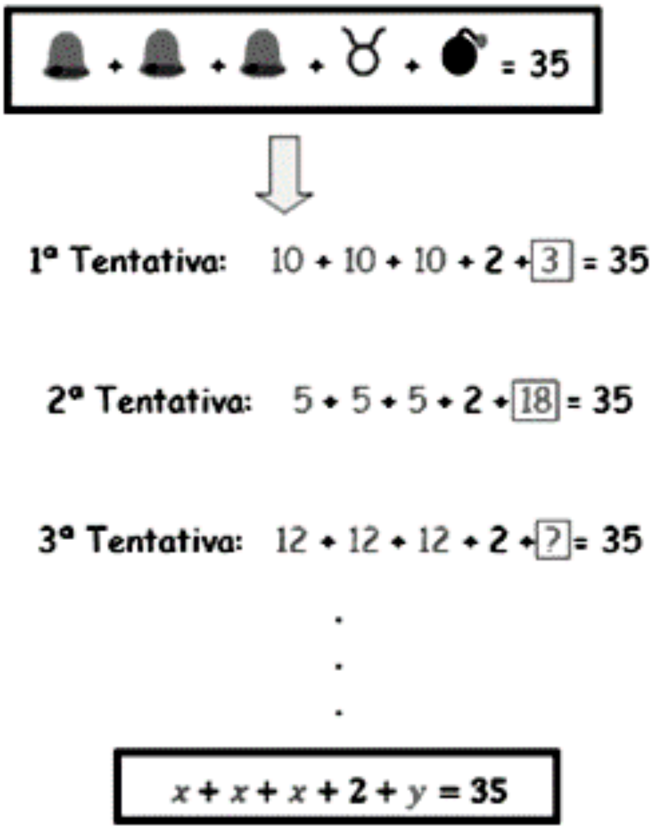
Assim, evidenciamos regularidades e generalizações, pois: a) *consideram que símbolos iguais correspondem a valores iguais em uma mesma equação* (sinos); b) *consideram o sinal de "=" como representante de uma relação entre quantidades* ao atribuírem valores arbitrários aos símbolos desconhecidos, tendo em vista a obtenção do valor trinta e cinco, reconhecendo, inclusive, que existem valores que não podem ser atribuídos porque a bombinha ("*Não vai valer tanto assim*", fala de E4); e c) *reconhecem que equações do primeiro grau só são possíveis de serem resolvidas quando envolvem apenas uma incógnita*, uma vez que percebem, pela estratégia de tentativa e erro, que existem diversos valores que podem ser atribuídos aos símbolos sino e bombinha de modo a obter o valor trinta e cinco.

As próximas operações da díade D2 envolveram a sexta, a terceira e a quarta equações. Contudo, chegaram a um determinado ponto em que perceberam que a estratégia de tentativa e erro era equivocada para resolver a tarefa proposta, desistindo de finalizá-la.

Diante do que expusemos até então, podemos sintetizar que o processo analítico ocorreu a partir do esboço de esquemas e de tratamentos de cada equação da tarefa e de cada díade, os quais são oriundos de interpretações realizadas sobre o *corpus* da pesquisa (gravações de voz, diários de campo e registros dos estudantes), por meio dos quais inferimos invariantes operatórios nos pautando em estudos a respeito de aritmética generalizada. Nesse processo, destacamos cinco características (quadro 2).

Vale destacar que as características elencadas são inferências dos pesquisadores a partir das manifestações dos estudantes, uma vez que boa parte dos invariantes operatórios são implícitos, subjacentes à ação do sujeito, sendo possível ao observador externo ter acesso, apenas, a indícios. Além disso, apesar da referência às propriedades de operações que, em geral não são estudadas na etapa escolar em que a pesquisa foi realizada, várias dessas propriedades "são utilizadas espontaneamente por alguns alunos sem que estas nunca lhes tenham sido ensinadas [...]. São tipicamente os teoremas-em-ação" (VERGNAUD, 2017, p. 41).

Figura 8 : Tratamento da díade D2 para a primeira equação da tarefa



Fonte: autoras

As características que elencamos a partir da exploração e primeiras interpretações foram organizadas em duas categorias: Invariantes Operatórios (*IO*) e Níveis de Generalidade (*NG*).

I) Categoria *IO* (*Invariantes Operatórios*): esta categoria compreende as características relacionadas aos números, operações e procedimentos de cálculos aritméticos em geral, que foram manifestados constantemente pelos estudantes e que, por isso, podem ser considerados como invariantes operatórios do tipo *teorema-em-ação*, teoremas esses que não necessariamente são os científicos, mas podem ser teoremas equivocados que os estudantes utilizaram durante envolvimento com a tarefa, considerando-o como verdadeiro para aquela situação. Nesse sentido, consideramos que esta categoria compreende *todas as características* que foram elencadas.

II) Categoria *NG* (*Níveis de Generalidade*): nesta categoria são compreendidas as características relacionadas aos números, operações e procedimentos de cálculos aritméticos em geral, que foram manifestados pelos estudantes por diferentes meios semióticos, permitindo inferir o nível de generalidade em que cada estudante se encontrava durante envolvimento com a tarefa. Esta categoria compreende quatro subcategorias: *indução ingênua*; *generalidade aritmética*; *transição entre generalidade aritmética e generalidade algébrica*; *e generalidade algébrica factual*.

Na figura 9 evidenciamos que as características elencadas representavam *teoremas-em-ação*, ou seja, poderiam ser todas consideradas como invariantes operatórios (Categoria IO).

Ainda, por meio da análise destes invariantes operatórios e da maneira e frequência com que estes foram utilizados, foi possível inferir a respeito do nível de generalidade em que se encontrava cada díade de estudantes durante seu envolvimento com a tarefa (subcategorias da Categoria NG).

Quadro 2: Síntese das características

CARACTERÍSTICAS
I) Utilizam a adição de *n* parcelas iguais (adição reiterada), sem manifestar estabelecimento de correspondência entre esta e uma multiplicação do fator que se repete *n* vezes.
II) Utilizam o elemento oposto de *n* na adição para balancear equações do primeiro grau quando a incógnita é somada por *n*.
III) Utilizam o elemento neutro da adição (0), obtido após aplicação do elemento oposto de *n* em ambos os lados da igualdade.
IV) Consideram que símbolos iguais correspondem a valores iguais em uma mesma equação.
V) Reconhecem que equações do primeiro grau só são possíveis de serem resolvidas quando envolvem apenas uma incógnita.

Fonte: autoras

Com referência a esse último aspecto, inferimos que as díades D1 e D3, que apresentaram procedimentos análogos de resolução da tarefa, manifestaram transitarem da generalização aritmética para a generalização algébrica em nível elementar, operando, no máximo, em nível *factual* durante a tarefa proposta.

Quanto à díade D2, ao considerarmos que estes estudantes recorreram diversas vezes à atribuição de valores para símbolos por meio da estratégia de tentativa e erro, podemos inferir que eles manifestaram o nível de indução ingênua (RARDFORD, 2006).

Todavia, inferimos também que a díade D2 manifestou, durante envolvimento com a tarefa proposta, um nível de generalidade superior: a generalidade aritmética. Assim justificamos por várias características (BLANTON; KAPUT, 2005) manifestadas: exploração de algumas propriedades e relações de números naturais (realização de sobre contagens por meio de múltiplos); exploração de algumas propriedades e relações de operações com números naturais (associatividade); e tratamento algébrico dos símbolos envolvidos nas equações da tarefa proposta (pensamento quase-variável).

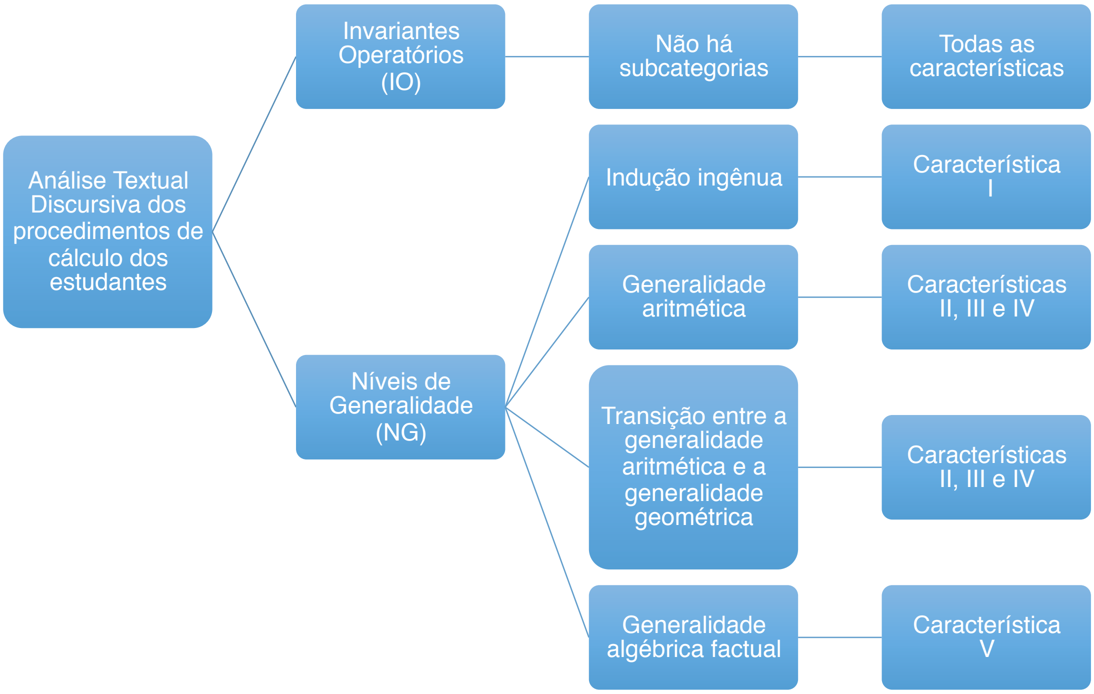
Constata-se que, apesar das diferenças entre níveis de generalidade, as díades D1, D2 e D3 manifestaram um aspecto em comum: todas apresentaram a característica IV que permitiu manifestar o nível de generalidade aritmética e a transição entre este nível e o algébrico.

Além disso, evidenciam-se características que estão contidas, simultaneamente, em duas subcategorias: na subcategoria generalidade aritmética e na subcategoria transição entre generalidade aritmética e generalidade algébrica.

Destaca-se a ocorrência de características repetidas nas subcategorias generalidade aritmética e transição entre generalidade aritmética e generalidade algébrica por dois motivos:

porque nestas é que foi evidenciado o maior número de características e, segundo, porque são nessas duas subcategorias que se concentram características comuns entre as díades D1, D2 e D3.

Figura 9: Categorias, subcategorias e características



Fonte: autoras

Entende-se que as repetições ocorreram por não ser possível afirmar se o estudante manifestou generalizações exclusivamente para as equações da tarefa aplicada, ou se, para outra tarefa semelhante, evidenciaria as mesmas manifestações. Assim, pondera-se que os estudantes podem se encontrar em um nível de transição entre generalizações ou ainda se encontrar em determinado nível de generalização inferior.

Portanto, comparando essas observações deduziu-se que, apesar das particularidades de cada díade, é possível perceber a manifestação de invariantes operatórios a partir das características evidenciadas e que indicam que as díades, possivelmente, podem se encontrar em um momento de transição entre generalidade aritmética e algébrica (de acordo com o que as díades manifestaram a partir do envolvimento com a tarefa proposta).

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Retomando o objetivo da pesquisa – *investigar invariantes operatórios e níveis de generalidade manifestados por estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental em seus procedimentos de cálculos aritméticos durante envolvimento com uma tarefa que consideramos como potencialmente algébrica* –, concluímos que os participantes da pesquisa foram capazes de se envolver com tarefas potencialmente algébricas utilizando procedimentos de cálculos aritméticos, sendo que nestes é possível evidenciar a mobilização de esquemas e, portanto, identificar invariantes operatórios do tipo *teoremas-em-ação*, que explicitam aspectos de nível de generalidade atingidos por cada díade de estudantes.

Nessa perspectiva, conclui-se que os estudantes da pesquisa manifestaram indícios de estarem em um nível de transição entre generalidade aritmética e generalidade algébrica. Tal conclusão está pautada na evidenciação de características invariantes relacionadas aos números e às operações envolvidas na tarefa proposta. Vale ressaltar que as inferências dizem respeito às manifestações para a tarefa aplicada, no entanto, seria necessária a aplicação de outras atividades para que fosse possível generalizar tais inferências.

É esse processo de evidenciação, manifestado pelos estudantes em seus procedimentos de cálculos aritméticos e por meio de representações semióticas, sobretudo, por meio da linguagem natural oral, que consideramos como *generalização*, a qual pode atingir diversos níveis, do mais elementar ao mais abstrato.

Assim, defendemos que propor situações envolvendo tarefas potencialmente algébricas em sala de aula pode contribuir para que o professor dos anos iniciais do Ensino Fundamental repense sua prática, considerando a possibilidade e relevância de desenvolver o pensamento algébrico mais cedo, a partir da valorização de cálculos aritméticos manifestados pelos estudantes, contribuindo para a aprendizagem em álgebra. Além de repensar a prática, é preciso que os professores que ensinam matemática nos anos iniciais sejam capacitados para desenvolver um trabalho em sala de aula que vise o desenvolvimento do pensamento algébrico dos estudantes, sobretudo daqueles que apresentam dificuldades de aprendizagem em Matemática.

Ainda, os resultados da presente pesquisa contribuem com a Educação Matemática nos anos iniciais no que tange à valorização da interação social entre os estudantes, bem como da linguagem natural oral, como meio profícuo para a manifestação da "matemática dos estudantes". Tal manifestação é essencial para que o professor possa inferir o nível de desenvolvimento matemático dos estudantes.

REFERÊNCIAS

ANDRINI, A.; VASCONCELLOS, M. J. **Praticando matemática**: edição renovada. 3. ed. São Paulo: Editora do Brasil, 2012. 58 p.

BLANTON, M. L.; KAPUT, J. Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. **Journal of Research in Mathematics Education**, v. 36, n. 5, p. 412-446, 2005.

COMÉRIO, M. S. **Interação social e solução de problemas aritméticos nas séries iniciais do ensino fundamental**. 2007. 257 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP. 2007.

DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Tradução de Méricles Thadeu Moretti. **Revemat**, v. 7, n. 2, p. 266-297, 2012.

FUJII, T.; STEPHENS, M. Using number sentences to introduce the idea of variable. In: GREENES, Carole; RUBENSTEIN, Rheta (Eds.). **Algebra and algebraic thinking in school mathematics – seventieth yearbook**. Reston: NCTM, p. 127-140, 2008.

KIERAN, C. Algebraic thinking in the early grades: What is it? **The Mathematics Educator**, v. 8, n. 1, p. 139-151, 2004.

MESTRE, C.; OLIVEIRA, H. A mobilização da capacidade de generalização através da exploração de estratégias de cálculo: um estudo com alunos do 4º ano. **Revista Interacções**, Lisboa, n. 20, p. 9-36, 2012.

PIMENTEL, T.; VALE, I. A descoberta de padrões no desenvolvimento do cálculo mental: uma experiência com professores do 1º ciclo. In: ENCONTRO DE INVESTIGAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 19, 2009, Vila Real, Portugal. **Anais**... Vila Real, Portugal: SPCE, 2009.

RADFORD, L. Algebraic thinking and the generalization of patterns: A semiotic perspective. In: ALATORRE, S.; CORTINA, J.; SÁIZ, M.; MÉNDEZ, A. (Eds.). ANNUAL MEETING OF THE NORTH AMERICAN CHAPTER OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF

MATHEMATICS EDUCATION, 28, 2006, Mérida, Yucatán, México. **Proceedings...** Mérida, Yucatán, México: UPN, 2006. v. 1, p. 2-21.

VERGNAUD, G. A teoria dos campos conceituais. In: BRUN, Jean. **Didática das matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. 280 p.

VERGNAUD, G. The nature of mathematical concepts. In: Nunes, T.; Bryant, P. (Ed.).

Learning and teaching mathematics: an international perspective. Hove, UK: Psychology Press, 1997, p. 5-28.

VERGNAUD, G. **A criança, a matemática e a realidade**: problemas do ensino da matemática na escola elementar. Tradução de Maria Lucia Faria Moro. Curitiba: Editora da UFPR, 2009. 322 p.

VERGNAUD, G. O que é aprender? Por que Teoria dos Campos Conceituais? In: GROSSI, E. P. (Org.). **O que é aprender? O iceberg da conceitualização Teoria dos Campos Conceituais TCC**. Porto Alegre: GEEMPA, 2017. p. 15-53.

PROGRAMA *ON-LINE* PARA O ESTUDO DE SISTEMAS LINEARES VIA FATORAÇÃO LU

ON-LINE SOFTWARE FOR LINEAR SYSTEMS STUDY VIA LU FACTORIZATION

PARRA, Isabela Cássia Dominical[1]

NIRSCHL, Gustavo Cabrelli[2]

RESUMO

Vários programas de computador apresentam somente o resultado final ou alguns passos dos cálculos efetuados. Pretendendo principalmente mostrar os cálculos internamente programados e a teoria envolvida, foi desenvolvido um programa de computador hospedado em uma página de internet para a resolução de sistemas lineares por meio do método de fatoração LU com pivoteamento parcial, possibilitando a geração de arquivo PDF contendo toda a resolução. O relatório permite não somente o estudo teórico do método como a visualização passo a passo de todos os cálculos para sistemas lineares possíveis e determinados de qualquer ordem. A página visa não só ao aprendizado e ao estudo do método, mas também ao estudo do cálculo numérico, uma vez que é apresentado o algoritmo principal. A interface da página é simplificada, contendo somente as informações necessárias para realização dos cálculos, sendo que a resolução passo a passo encontra-se no relatório em PDF gerado. O programa aqui apresentado, assim como outros, foi criado como projeto de Iniciação Científica pelo grupo de pesquisa NEVE – Núcleo de Engenharia Virtual e Experimental.

Palavras-chave: Resolução passo a passo. Sistemas Lineares. Método de Fatoração LU.

ABSTRACT

Many software only show the final result or a few steps of the calculations. Intending mainly show calculations internally programmed and the theory involved, a software hosted on a web page has been developed for solving linear systems using LU factorization method with partial pivoting, allowing the generation of PDF file containing the complete resolution. The report not only allows the theoretical study of the method as the display step by step all calculations for possible and determined linear systems in either order. The main aims not only to study the method, but also to study the numerical calculation, because it is shown the main algorithm. The web page interface is simplified, containing only the information needed to perform the calculations, and the resolution step by step is in the PDF report generated. The software presented here, as well as others, was created as a project of Scientific Initiation by the research group NEVE - Virtual and Experimental Engineering Center.

Keywords: Resolution step by step. Linear Systems. LU Factorization method.

1 INTRODUÇÃO

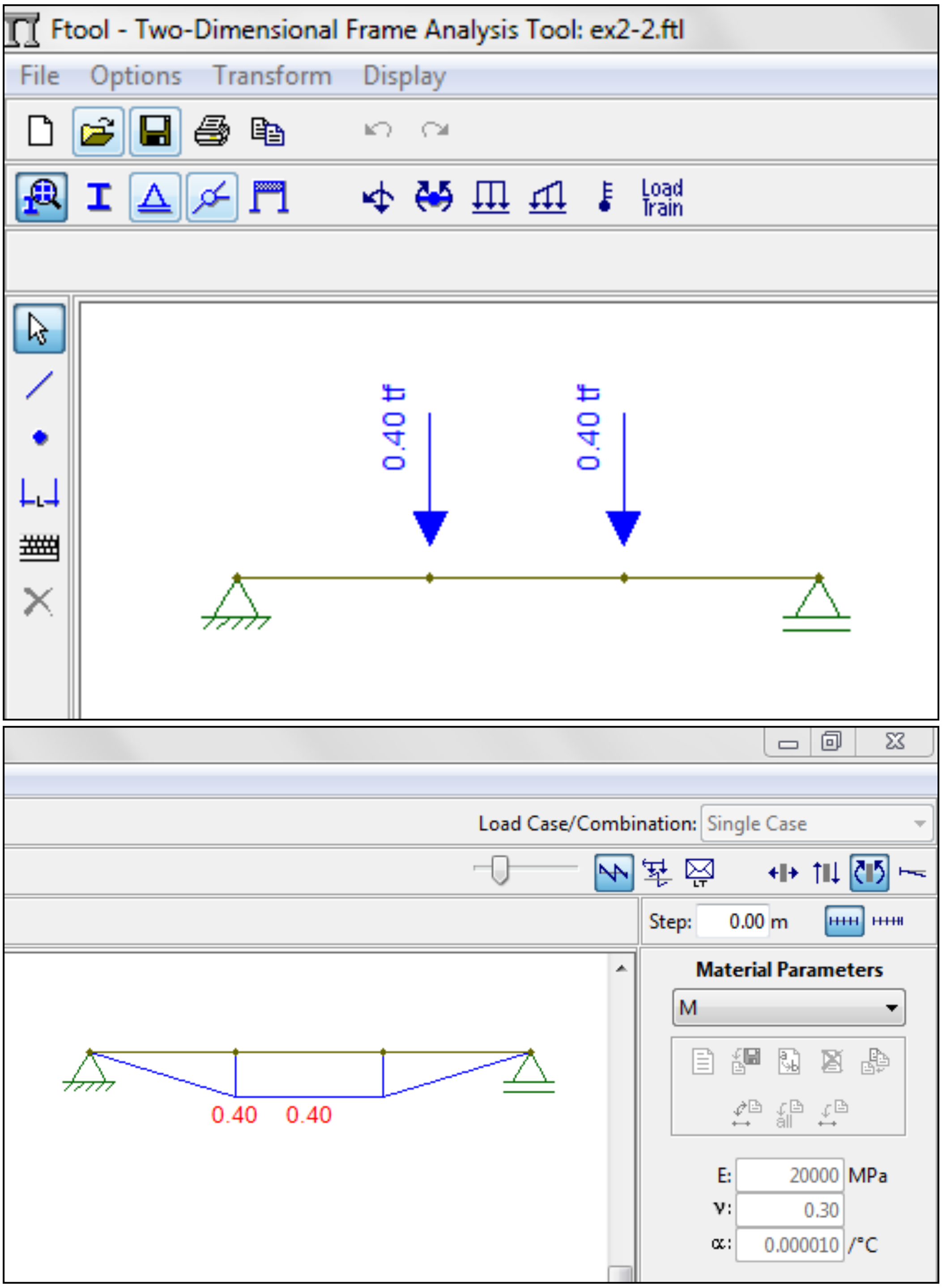
A maioria dos programas de computador voltados para área da Engenharia realiza cálculos mostrando somente a solução final na tela. Como exemplo, cita-se o Ftool (2015), para análise de estruturas lineares, em que são apresentados somente os diagramas dos resultados, mas não os cálculos envolvidos, o que pode dificultar o entendimento pormenorizado da resolução e a procura por eventuais erros, quando se faz necessária. A Figura 1 mostra um exemplo do referido programa.

[1] Discente do curso de Engenharia Civil do Instituto Federal de São Paulo (IFSP), Votuporanga, SP. Endereço eletrônico: isabelacassia19@gmail.com.

[2] Mestre em Engenharia Civil pela Universidade de São Paulo (USP), São Carlos, SP. Docente do Instituto Federal de São Paulo (IFSP), Votuporanga, SP. Endereço eletrônico: nirschl@gmail.com.

Visando a contribuir nesta questão, foi criado um programa de computador hospedado em uma página da internet que resolve sistemas lineares pelo método de Fatoração LU, contendo um relatório explicativo com todos os cálculos passo a passo.

Figura 1: Exemplo de entrada de dados (acima) e a resposta (abaixo) da análise da estrutura (diagrama de momentos fletores) dada pelo programa de computador Ftool (2015)



Fonte: autores

Esse programa de computador faz parte de um projeto de Iniciação Científica de graduação de Engenharia Civil, cujo escopo é criar programas de computador que seguem o objetivo de auxiliar alunos, profissionais e até mesmo professores no estudo aprofundado da resolução de problemas de Engenharia via Cálculo Numérico, como sistemas lineares, interpolação e aproximação de dados e integração e derivação numéricas. O programa de computador referente a este artigo já está disponível para uso *on-line* (http://vtp.ifsp.edu.br/nev/Sistema-lu/sistemalu.php?) e faz parte das pesquisas de um grupo cadastrado no CNPq, chamado NEVE (http://dgp.cnpq.br/dgp/espelhogrupo/2216017360594646).

O Sistema Linear por Fatoração LU é um programa de computador disponibilizado como página de internet e foi criado por meio da linguagem HTML/Javascript. Para a elaboração do relatório em pdf, foi usada a biblioteca *pdfmake*.

2 APRESENTAÇÃO TÉORICA

O Método da Fatoração LU é um método derivado do Método da Eliminação de Gauss que apresenta a vantagem do escalonamento ser feito independentemente do vetor dos termos autônomos. Um exemplo prático desta vantagem pode ser encontrado na Engenharia Civil. Para calcular os deslocamentos x dos nós de uma estrutura, um dos procedimentos é via Método dos Elementos Finitos, resolvendo um sistema linear da forma $Ax = b$, em que A é a matriz de rigidez, fixa para a estrutura, e o vetor b contém as ações externas, naturalmente variáveis. Sendo assim, pelo Método da Fatoração LU, é possível escalonar uma só vez a matriz A e utilizá-la para quaisquer vetores b.

De acordo com Ruggiero (1996), no Método da Fatoração LU, para resolver um sistema linear $Ax = b$, realiza-se a fatoração $A = LU$, sendo que o sistema fica $(LU)x = b$. Se $y = Ux$, resolver o sistema é equivalente a resolver $Ly = b$ e, depois, $Ux = y$.

LU é um termo que vem do inglês *lower* e *upper*, já que o método se baseia na decomposição da matriz A na forma $A = LU$, onde L é uma matriz triangular inferior (todos os elementos acima da diagonal são nulos) com elementos da diagonal principal iguais a 1 e U é uma matriz superior (todos os elementos abaixo da diagonal são nulos).

Para encontrar L e U, faz-se o escalonamento da matriz A, levando em consideração o pivoteamento parcial, ou seja, fazendo a troca de linhas de forma que o pivô seja o maior valor em módulo da coluna. Antes de resolver o sistema $Ly = b$, as mesmas trocas de linhas realizadas na matriz A têm que ser feitas no vetor b. A matriz A escalonada é a própria matriz U e a matriz L contém os multiplicadores da matriz A escalonada abaixo da diagonal, também com as devidas trocas de linhas realizadas.

Abaixo segue o esquema da resolução de uma matriz $3x3$ genérica:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$ → matriz A referente ao sistema $Ax = b$

Escalonando a matriz A, têm-se:

a) Primeira coluna

Coeficientes: $$m_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} \ e \ m_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}}$$

Linha 2: $$a'_{22} = a_{22} - m_{21} * a_{12}$$
$$a'_{23} = a_{23} - m_{21} * a_{13}$$

Linha 3: $$a'_{32} = a_{32} - m_{31} * a_{12}$$
$$a'_{33} = a_{33} - m_{31} * a_{13}$$

b) Segunda coluna

Coeficientes: $$m_{32} = \frac{a'_{32}}{a'_{22}}$$

Linha 3: $$a''_{33} = a'_{33} - m_{32} * a'_{23}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0b_1 \\ m_{21} & 1 & 0b_2 \\ m_{31} & m_{32} & 1b_3 \end{bmatrix}$$ →matriz aumentada referente ao sistema $Ly = b$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\, y_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} y_2 \\ 0 & 0 & a''_{33} y_3 \end{bmatrix}$$ →matriz aumentada referente ao sistema $Ux = y$

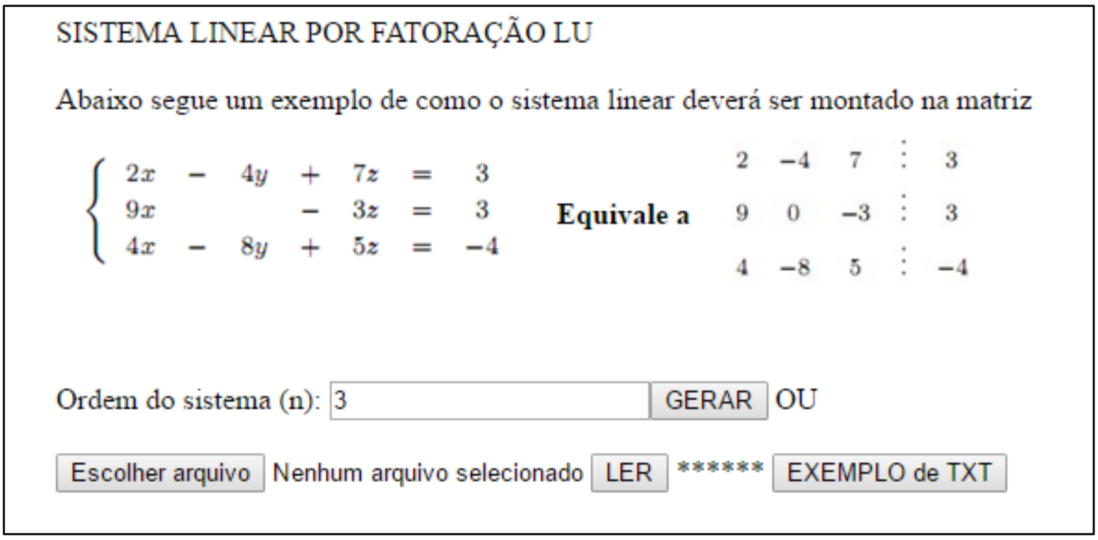
Para achar os valores de x, é necessário que se resolva o sistema $Ly = b$, encontrando, assim, os valores de y e, depois, por retro substituição, que se resolva o sistema $Ux = y$.

Vale destacar que, no exemplo genérico anterior, não houve pivoteamento parcial.

3 RESULTADOS

O programa de computador já está disponível como página de internet[3]. Na figura 2, aparece exatamente como disponibilizado *on-line*, com a figura de um exemplo de um sistema para o usuário entender como funciona a entrada de dados. A partir disso, para iniciar os cálculos, têm-se duas opções: ou gerar o sistema na própria página, a partir da ordem digitada (botão *GERAR*), e digitar os valores (figura 3) de cada elemento ou criar um arquivo TXT, seguindo o padrão apresentado ao se clicar no botão *EXEMPLO de TXT* .

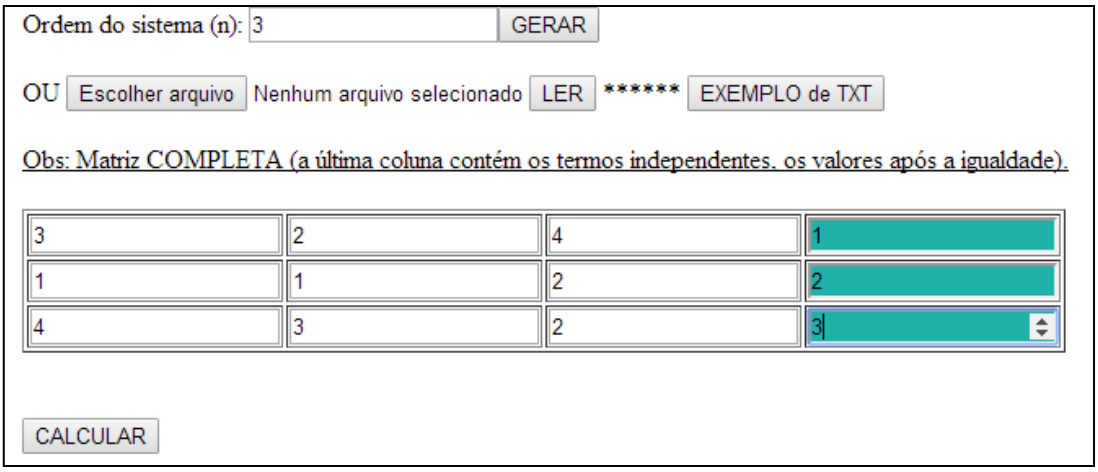
Figura 2: Programa de computador criado e hospedado em página de internet



Fonte: autores

[3] http://vtp.ifsp.edu.br/nev/Sistema-lu/sistemalu.php?

Figura 3: Exemplo de sistema gerado com ordem 3, cujos valores têm que ser digitados

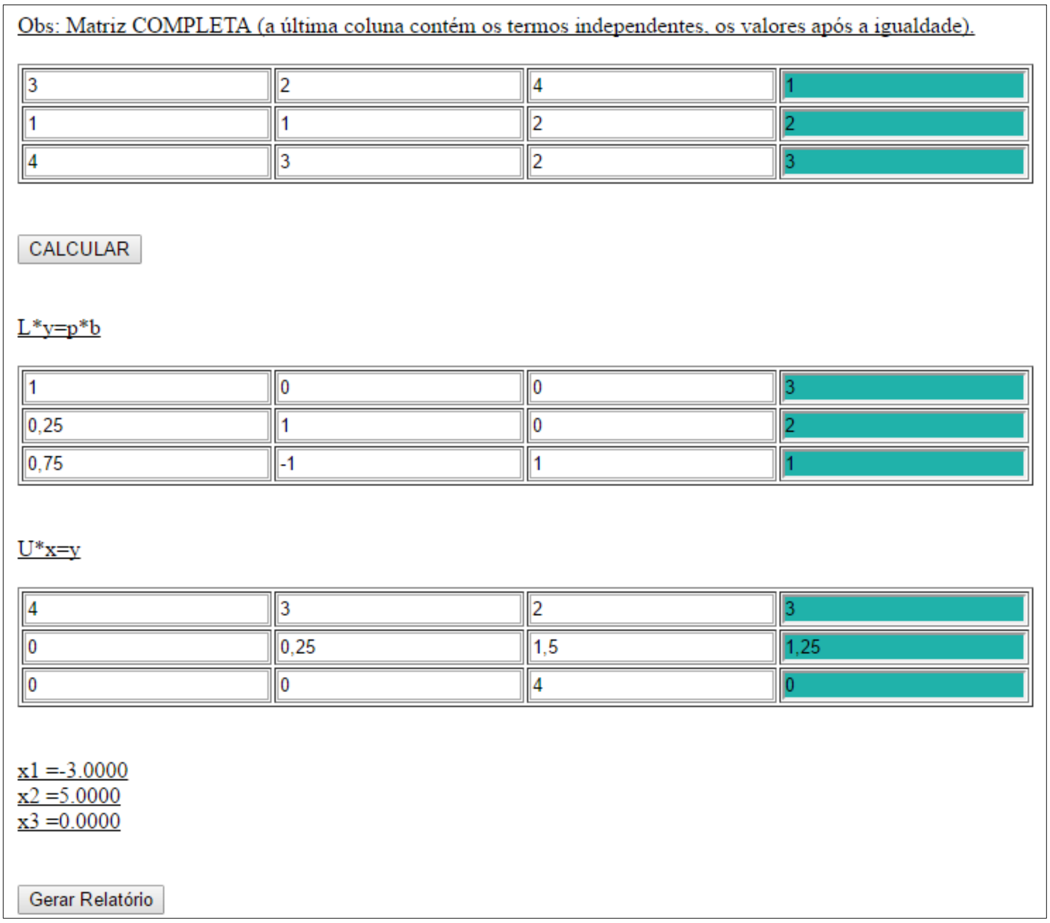


Fonte: autores

Depois de ler ou digitar o sistema, clica-se no botão *CALCULAR* (figura 3), aparecendo os sistemas triangulares equivalentes e a solução final. A figura 5 apresenta um exemplo para um sistema de ordem 3.

Por fim, como principal característica do programa criado, pode-se gerar o relatório, clicando no botão *GERAR RELATÓRIO* ao fim da página, conforme a figura 4. O relatório é em pdf e contém a resolução detalhada. As figuras 5 e 6 mostram uma adaptação do relatório gerado para a matriz exemplificada na figura 4.

Figura 4: Exemplo da resolução de um sistema de ordem 3



Fonte: autores

Figura 5: Relatório gerado com o exemplo dos dados da figura 4

Ordem da Matriz =3

Matriz Completa:

3.000	2.000	4.000	*1.000*
1.000	1.000	2.000	*2.000*
4.000	3.000	2.000	*3.000*

Para a resolução do sistema linear pelo método da fatoração LU, o escalonamento é feito independentemente do vetor dos termos independentes. Este método fatora o sistema linear Ax=B em Ly=B e em Ux=y.A matriz A (matriz dos coeficientes) irá se decompor em A=L*U. Onde:
- L é uma matriz triangular inferior em que todos os elementos acima da diagonal são nulos, os elementos da diagonal principal são iguais a 1 e os elementos abaixo da diagonal principal são os valores dos multiplicadores (m), resultantes do escalonamento da matriz A.
- U é a matriz triangular superior que resultou do escalonamento com pivoteamento parcial da matriz A.

Abaixo segue a resolução:

A ordem inicial das linhas (vetor p) é:

1
2
3

A matriz L inicial é a matriz identidade:

1.000	0.000	0.000
0.000	1.000	0.000
0.000	0.000	1.000

O Pivô é:
4.000

A nova ordem das linhas será (vetor p atualizado):

3
2
1

A matriz "A" com a troca de linhas fica:

4.000	3.000	2.000
1.000	1.000	2.000
3.000	2.000	4.000

A matriz L com a troca de linhas abaixo da diagonal fica:

1.000	0.000	0.000
0.000	1.000	0.000
0.000	0.000	1.000

m[2,1]=a'[2,1]/a'[1,1]=1.0000/4.0000=0.2500
a'[2,1]=a[2,1]-m[2,1]*a'[1,1]=1.0000-(0.2500)*(4.0000)=0.0000
a'[2,2]=a[2,2]-m[2,1]*a'[1,2]=1.0000-(0.2500)*(3.0000)=0.2500
a'[2,3]=a[2,3]-m[2,1]*a[1,3]=2.0000-(0.2500)*(2.0000)=1.5000

m[3,1]=a'[3,1]/a'[1,1]=3.0000/4.0000=0.7500
a'[3,1]=a[3,1]-m[3,1]*a'[1,1]=3.0000-(0.7500)*(4.0000)=0.0000
a'[3,2]=a[3,2]-m[3,1]*a'[1,2]=2.0000-(0.7500)*(3.0000)=-0.2500
a'[3,3]=a[3,3]-m[3,1]*a[1,3]=4.0000-(0.7500)*(2.0000)=2.5000

A matriz "A" escalonada até aqui fica:

4.000	3.000	2.000
0.000	0.2500	1.500
0.000	-0.2500	2.500

A matriz L atualizada fica:

1.000	0.000	0.000
0.2500	1.000	0.000
0.7500	0.000	1.000

O Pivô é:
0.2500

A nova ordem das linhas será (vetor p atualizado):

3
2
1

A matriz "A" com a troca de linhas fica:

4.000	3.000	2.000
0.000	0.2500	1.500
0.000	-0.2500	2.500

A matriz L com a troca de linhas abaixo da diagonal fica:

1.000	0.000	0.000
0.2500	1.000	0.000
0.7500	0.000	1.000

m[3,2]=a'[3,2]/a'[2,2]=-0.2500/0.2500=-1.0000
a'[3,1]=a[3,1]-m[3,2]*a'[2,1]=0.000-(-1.0000)*(0.000)=0.000
a'[3,2]=a[3,2]-m[3,2]*a'[2,2]=0.000-(-1.0000)*(0.000)=0.000
a'[3,3]=a[3,3]-m[3,2]*a[2,3]=2.5000-(-1.0000)*(1.5000)=4.0000

A matriz "A" escalonada até aqui fica:

4.000	3.000	2.000
0.000	0.2500	1.500
0.000	0.000	4.000

A matriz L atualizada fica:

1.000	0.000	0.000
0.2500	1.000	0.000
0.7500	-1.000	1.000

O vetor b com a troca de linhas determinada pelo vetor p fica:

3.000
2.000
1.000

Então, o sistema triangular inferior a resolver
(L*y=b ; b com as linhas trocadas) fica:

1.000	0.000	0.000	*3.000*
0.2500	1.000	0.000	*2.000*
0.7500	-1.000	1.000	*1.000*

Com o triângulo inferior formado pode se encontrar os valores de y:
soma=0
y1=(b[1]-(soma))/L[11]=(3.0000-(0.0000))/1.0000=3.0000
soma=0
soma=soma+L[2,1]*y[1]=0.0000+(0.2500*3.0000)=0.7500
y2=(b[2]-(soma))/L[22]=(2.0000-(0.7500))/1.0000=1.2500
soma=0
soma=soma+L[3,1]*y[1]=0.0000+(0.7500*3.0000)=2.2500
soma=soma+L[3,2]*y[2]=2.2500+(-1.0000*1.2500)=1.0000
y3=(b[3]-(soma))/L[33]=(1.0000-(1.0000))/1.0000=0.0000

Que resulta em y = :

3.000
1.250
0.000

Fonte: autores

Figura 6: Relatório gerado com o exemplo dos dados da figura 4 (parte 2)

E o sistema triangular superior a resolver (U*x=y) fica:

4.000	3.000	2.000	*3.000*
0.000	0.2500	1.500	*1.250*
0.000	0.000	4.000	*0.000*

Com o triângulo superior formado pode se encontrar os valores de x:

x3=(y[3]/a'[33])=0.0000/4.0000=0.0000
soma=0
soma=soma+a[2,3]*x[3]=0.0000+(1.5000*0.0000)=0.0000
x2=(y[2]-(soma))/a'[22]=(1.2500-(0.0000))/0.2500=5.0000
soma=0
soma=soma+a[1,2]*x[2]=0.0000+(3.0000*5.0000)=15.0000
soma=soma+a[1,3]*x[3]=15.0000+(2.0000*0.0000)=15.0000
x1=(y[1]-(soma))/a'[11]=(3.0000-(15.0000))/4.0000=-3.0000

Resultando na solução final do sistema, x = :

-3.000
5.000
0.000

```
Dado n, A[n,n] e b[n,1]
Para i=1 até i=n faça
p[i]=i
Fim do laço
Para k=1 até k=n-1 faça //para cada coluna
    pv=|a[k,k]| //pv é o pivô
    r=k //r é o n° da linha que está o pivô
    Para i=k+1 até i=n faça //para cada linha
        Se |a[i,k]|>pv então //encontra o maior pivô em módulo
        pv=|a[i,k]|
          r=i
        Fim do condicional
    Fim do laço
    Se pv=0 então
    "Todos os pivôs são nulos." PARE.
    Se r for diferente de k, faça
    Troque a linha k com a linha r
    atemp=p(k)
    p(k)=p(r)
    p(r)=aux
      Para c=1 até c=n faça //coluna 1 a n+1
        atemp=a[k,c]; //variável temporária
        a[k,c]=a[r,c];
        a[r,c]=atemp;
      Fim do Laço
    Fim do condicional
    Para i=k+1 até i=n faça //para cada linha, menos a anterior
    m[i,k]=a[[i,k]/a[k,k]
    a[i,k]=m[i,k]
        Para j=k+1 até j=n faça //para cada coluna, a partir da k
        a[i,j]=a[i,j]-m[i,k]*a[k,j]
        Fim do laço
    Fim do laço
Fim do laço
//c=Pb
Para i=1 até i=n faça
 r=p(i)
 c[i]=b[r]
Fim do laço
//Ly=c
y[1]=c[1]
Para i=2 até i=n faça
soma=0
    Para j=1 até j=i-1 faça
    soma=soma+a[i,j]*x[j]
    Fim do laço
y[i]=c[i]-soma
Fim do laço
//Ux=y
x[n]=y[n]/a[n,n]
Para i=n-1 até i=1 faça
soma=0
    Para j=i+1 até j=n faça
    soma=soma+a[i,j]*x[j]
    Fim do laço
x[i]=(y[i]-soma)/a[i,i]
Fim do laço
```

Fonte: Elaborado pelos autores

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O avanço das tecnologias está levando os profissionais da engenharia a simplesmente usarem os programas de computador, nem sempre compreendendo todos os cálculos realizados internamente. Neste contexto, a característica principal do programa aqui apresentado, o relatório PDF, contribui significativamente para o estudo, por parte de estudantes, professores e profissionais, da resolução de sistema linear de qualquer ordem via fatoração LU, pois apresenta a resolução detalhada de todos os cálculos realizados. Conforme anteriormente citado, este projeto faz parte de um grupo de pesquisa do CNPq (chamado NEVE) e possui outras páginas com programas de computador na área de Cálculo Numérico e Engenharia Civil (http://vtp.ifsp.edu.br/nev). Nesta linha de pesquisa, objetivando detalhar os cálculos envolvidos em programas de computador, estão em andamento outras iniciações científicas com aplicações na área de Estruturas de Engenharia Civil.

REFERÊNCIAS

FTOOL. Ftool para Windows, versão 3.01. PUC-Rio, 2015. Disponível em <http://www.alis-sol.com.br/ftool/>. Acesso em 03 de março de 2017.

QUADROS, Régis S. de; BORTOLI, Álvaro L. de. **Fundamentos de Cálculo Numérico para Engenheiros.** Porto Alegre, 2009. Disponível em: <http://www.inf.ufrgs.br/~rlflupchinski/files/20112/NUMERICO/numerico-bortoli.pdf >. Acesso em: outubro de 2014.

RUGGIERO, M.A.G; LOPES, V.L.R. **Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais.**2.ed. São Paulo: Makron Books, 1996.

SWOKOWSKI. **Cálculo com Geometria Analítica.** São Paulo. Makron Books, 1995.

LABORATÓRIO DE ENSINO DE MATEMÁTICA NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES: PERSPECTIVAS E EXPERIÊNCIAS DA UFT E DA UFCA

LABORATORY OF TEACHING OF MATHEMATICS IN TEACHER TRAINING: PERSPECTIVES AND EXPERIENCES OF UFT AND UFCA

KHIDIR, Kaled Sulaiman[1]

GONÇALVES, Paulo Gonçalo Farias[2]

RODRIGUES, Rochelande Felipe[3]

RESUMO

A partir de reformulações curriculares dos cursos de licenciaturas em matemática no Brasil, uma nova postura educacional vem sendo apresentada, na qual a preocupação com a formação inicial do professor tem um olhar mais cuidadoso. Entre as inúmeras propostas desenvolvidas, surge o Laboratório de Ensino de Matemática como espaço promissor para auxiliar na relação entre o futuro docente, o aluno e o saber. Diante disso, o presente trabalho tem o intuito de apresentar duas propostas de uso do laboratório na formação de professores, segundo as experiências da Universidade Federal do Tocantins (UFT) e da Universidade Federal do Cariri (UFCA). Surgindo como ambiente para desenvolvimento de estudos e pesquisas relacionados ao ensino e aprendizagem de Matemática, o Laboratório de Educação Matemática da UFT congrega projetos e atividades voltadas para criação, elaboração, análise de resultados e propostas de novas situações didáticas. Ao nascer dentro de uma Licenciatura Interdisciplinar, a perspectiva laboratorial em construção na UFCA promove a articulação do ensino de Matemática com o de outras áreas das Ciências da Natureza, a partir dos eixos que fundamentam a UFCA (ensino, pesquisa, extensão e cultura). O desafio do Laboratório de Ensino de Matemática no âmbito da formação de professores é promover e tornar as inovações advindas das investigações empreendidas pela Educação Matemática acessíveis aos futuros professores, de modo que essas possam permear a prática desses profissionais e contribuir para uma mudança no paradigma atual em relação ao ensino e à aprendizagem de Matemática.

Palavras-chave: Formação docente. Recursos didáticos. Metodologias para o ensino de matemática.

ABSTRACT

Based on curricular reformulations of mathematics degree courses in Brazil, a new educational stance has been presented, in which the concern with the initial teacher training has a more careful look. Among the numerous proposals developed, the Mathematics Teaching Lab emerges as a promising space to assist in the relationship between the future teacher, the student, and the knowledge. Therefore, this work intends to present two proposals for the use of the lab in teacher training, according to the experiences of the Federal University of Tocantis (UFT) and the Federal University of Cariri (UFCA). Arising as an environment for the development of studies and research related to Mathematics teaching and learning, the UFT Mathematics Education Lab brings together projects and activities aimed at creating, elaborating, and analyzing results and proposing new didactic situations. When born within an interdisciplinary degree, the lab perspective in development at the UFCA promotes the articulations of Mathematics teaching with other Natural Sciences

[1] Mestre em Educação pela Pontifícia Católica de Goiás (PUC-GO), Goiânia, GO. Professor Adjunto da Universidade Federal do Tocantins (UFT), Arraias, TO. Endereço eletrônico: kaled@uft.edu.br.

[2] Mestre em Ensino de Ciências Naturais e Matemática pela Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN), Natal, RN. Professor da Universidade Federal do Cariri (UFCA), Brejo Santo, CE. Endereço eletrônico: paulo.goncalo@ufca.edu.br.

[3] Mestre em Ensino das Ciências pela Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE), Recife, PE. Professor da Universidade Federal do Cariri (UFCA), Brejo Santo, CE. Endereço Eletrônico: felipemtm@gmail.com.

fields, from the axes that underpin the UFCA (teaching, research, extension, and culture). The challenge of the Mathematics Teaching Lab in the field of teacher training is to promote and make innovations that come from the research undertaken by Mathematics Education accessible to future teachers, so that these researches may permeate the practice of these professionals and contribute to a change in the current paradigm related to the teaching and learning of mathematics.

Keywords: Teacher training. Didactic resources. Mathematics teaching methodologies.

1 INTRODUÇÃO

Com as reformulações curriculares dos cursos de Licenciatura em Matemática no Brasil, uma nova postura educacional vem sendo apresentada, de modo que a preocupação com a formação inicial do professor tem um olhar mais cuidadoso.

Entre as inúmeras propostas desenvolvidas para a formação inicial de professores, surge o Laboratório de Ensino de Matemática como espaço promissor para auxiliar na relação entre o futuro docente, o aluno e o saber. Segundo Rêgo e Rêgo (2006, p. 41), a implantação dos Laboratórios de Ensino de Matemática nas instituições superiores pode "[...] incentivar a melhoria da formação inicial e continuada de educadores de matemática, promovendo a integração das ações de ensino, pesquisa e extensão".

Tendo em vista que a escassez ou mesmo inexistência de recursos didáticos para o ensino e aprendizagem de Matemática é uma realidade comum enfrentada por muitos educadores matemáticos de diferentes níveis de ensino, a estruturação dos Laboratórios de Ensino de Matemática visa suprir lacunas formativas que discutam como e quando ensinar Matemática a partir de experiências de elaboração, construção e estudo de recursos didáticos.

Mesmo quando o professor dispõe de alguns recursos didáticos em seu ambiente de trabalho, devido à insuficiência de espaços para discussão sobre eles no âmbito de sua formação inicial, os materiais disponíveis têm pouca utilização ou são subutilizados, dando maior ênfase à simples manipulação sem uma preocupação clara com os aspectos didáticos e os conceitos matemáticos a serem construídos.

Diante desse quadro, o presente trabalho tem o intuito de apresentar duas propostas de uso do laboratório na formação de professores, segundo as experiências da Universidade Federal do Tocantins (UFT) e da Universidade Federal do Cariri (UFCA).

2 O LABORATÓRIO DE ENSINO DE MATEMÁTICA

Discutindo sobre o Laboratório de Ensino de Matemática enquanto um espaço físico, Lorenzato (2006, p.7) o compreende como:

> [...] uma sala-ambiente para estruturar, organizar, planejar e fazer acontecer o pensar matemático, é um espaço para facilitar tanto ao aluno como ao professor, questionar, conjecturar, procurar, experimentar, analisar e concluir, enfim, aprender e principalmente aprender a aprender.

Partindo dessa perspectiva do autor, o Laboratório de Ensino de Matemática no âmbito da formação inicial de professores seria um espaço físico tanto para o armazenamento de recursos didáticos quanto para agregar ações voltadas para a criação, experimentação e avaliação de situações didáticas.

Considerando o desafio dos futuros professores de assimilar a perspectiva laboratorial em sua prática docente, podemos compreender o Laboratório de Ensino de Matemática ainda como

“[...] um ambiente voltado para pesquisa, produção e experimentação de recursos didáticos direcionados para o ensino e aprendizagem de Matemática dos diversos níveis de ensino” (FREITAS; GONÇALVES, 2012, p.2).

Nessa conceituação, a referência ao ambiente evidencia que a perspectiva laboratorial possa se tornar uma prática comum para os professores, independente do espaço (sala-ambiente, aula de campo, internet) para a qual as atividades serão desenvolvidas. Além disso, concebe o recurso didático como todo tipo de dispositivo que venha a auxiliar o docente durante o processo de ensino e aprendizagem, como os livros, os materiais concretos, os *softwares*, as tendências didático-pedagógicas da Educação Matemática, entre outros.

A implementação de um Laboratório de Ensino de Matemática parte do pressuposto de que, assim como em outras profissões (como a de médico, de mecânico etc.), o professor precisa ter ao seu dispor um ambiente equipado com instrumentos (recursos didáticos) acessíveis a qualquer tempo durante o processo de ensino e aprendizagem (LORENZATO, 2006). Do contrário, por melhor que seja sua formação, terá muitas dificuldades na prática de seu ofício, principalmente quando se deparar com situações em que o aluno tiver dificuldades de compreensão de determinados conceitos.

Para Certeau (1994, p. 201 apud Cedro, 2004, p.45) “[...] lugar é a ordem (seja qual for) segundo a qual se distribuem elementos nas relações de coexistência (...). Um lugar é portanto uma configuração instantânea de posições. Implica uma indicação de estabilidade”. Já “o espaço é um lugar praticado”. Exemplos: a rua geometricamente definida por um urbanismo é transformada em espaço pelo pedestre; a leitura é o espaço produzido pela prática do lugar constituído por um sistema de signos – um escritor; a escola, o lugar socialmente destinado à educação, transforma-se em um espaço por meio das ações da comunidade envolvida na atividade educativa. (CERTEAU, 1994 *apud* CEDRO, 2004, p. 45).

A organização da escola deve ser feita de forma que não haja descontinuidade entre a aprendizagem e a vida fora da escola. E é nesse sentido que o Laboratório se configura com um espaço de aprendizagem, ou seja, como um lugar da realização da aprendizagem dos sujeitos orientados pela ação intencional de quem ensina.

Nas próximas seções, discutiremos sobre o processo, concluído e em andamento, de implantação dos Laboratórios de Ensino de Matemática, na Universidade Federal do Tocantins e na Universidade Federal do Cariri, destacando as perspectivas adotadas e as ações que vêm sendo desenvolvidas e planejadas para esses espaços.

3 LABORATÓRIO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA DA UFT

Nosso propósito neste relato é citar alguns momentos históricos da constituição do Laboratório de Educação Matemática (LEMAT) no Campus Arraias-TO da Universidade Federal do Tocantins (UFT). Buscaremos apresentar e descrever fatos que julgamos importantes para a composição e institucionalização desse Laboratório, bem como as ações desenvolvidas e em andamento.

Iniciamos pelo resgate histórico do Curso de Matemática de Arraias, no qual Khidir, Rodrigues e Silva (2013) analisaram a implantação do LEMAT e como se deu a transformação desse lugar (uma sala do campus) num espaço de formação de professores de matemática (um Laboratório).

O ano de 2008 foi o tempo de escrevermos o projeto do LEMAT e de aglutinar docentes e discentes do Curso de Matemática em torno dos objetivos a saber:

- Intervir de forma objetiva na formação didática do futuro professor e do licenciando;
- Potencializar estudos sobre a formação do professor e suas implicações no processo de ensino e aprendizagem;
- Produzir e utilizar material didático-pedagógico para o desenvolvimento de atividades para o ensino e a aprendizagem da Matemática;
- Possibilitar a vivência de práticas de Ensino da Matemática, tendo como parâmetro a estruturação didática do processo de ensino e seus elementos constitutivos;
- Proporcionar situações para que os licenciandos compreendam conceitos matemáticos e suas metodologias de ensino.

Em 2009, um grupo de professores começou a desenvolver projetos de naturezas de ensino, de pesquisa e extensão vinculados ao LEMAT. Esses projetos tinham docentes e discentes da Universidade e desenvolviam ações que tivessem como fins a educação básica. O fio condutor da organização das equipes foi a existência de sujeitos (professores e alunos) da UFT e das escolas parceiras.

Nessa competência, surgiu o Clube de Matemática, projeto para o qual os idealizadores selecionaram os melhores alunos de 6º e 7º ano de uma determinada escola e com eles utilizaram metodologias diferenciadas. Os encontros aconteciam nas dependências da escola e tiveram início em abril de 2009, ou seja, um semestre antes do LEMAT ser efetivamente implantado.

Em 2010, observou-se a necessidade de ampliação do projeto e então foram convidados alunos dos 6º e 7º anos de todas as escolas do município de Arraias. Face a essas mudanças, houve a necessidade de um espaço maior para os encontros, logo, o Clube passou a acontecer nas dependências do LEMAT.

A opção por trabalhar com alunos de bom desempenho justifica-se ao observarmos os objetivos do Clube:

- Formar um grupo de estudos de matemática;
- Avançar no estudo de matemática de acordo com a capacidade do aluno, não o limitando aos conteúdos propostos para série em que se encontra;
- Despertar o interesse do aluno em estudar matemática, por meio de exercícios de lógica, jogos e aplicações dos conteúdos no cotidiano;
- Preparar o aluno para obtenção de bons resultados em provas e olimpíadas de matemática.

Segundo os idealizadores do Clube, ao longo dos três primeiros anos, mais de 100 alunos do 5º, 6º e 7º anos das Escolas de Arraias participaram do projeto, bem como licenciandos em Matemática participaram como monitores (ALMEIDA; RODRIGUES; MONTIJO, 2013).

Retornando a 2009, o Programa de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID) iniciou suas atividades em todo o país. Na UFT, Câmpus Arraias, o programa iniciou pela área de Matemática. Quando da elaboração do subprojeto de PIBID de Matemática, o LEMAT estava sendo gestado e era também uma das metas, como pode ser observado na transcrição do plano de trabalho:

> A abordagem adotada será bastante diferente das aulas tradicionais, os bolsistas montarão oficinas na escola. A proposta é que cada tópico de estudo (conteúdos do currículo do Ensino Médio) seja trabalhado através de uma metodologia de ensino diferente: jogos, resolução de problemas, uso de softwares matemáticos gratuitos e calculadoras, dobraduras, teatro, e outras, e que seja confeccionado, pelos bolsistas e alunos envolvidos no projeto os materiais necessários para as

> oficinas. O material confeccionado dará início à criação e implantação do Laboratório de Ensino de Matemática do Curso de Matemática de Arraias, uma vez que existe a necessidade de um Laboratório de Ensino de Matemática para suprir as demandas do curso e das escolas da região (UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS, 2008, p.3).

Observando a descrição anterior e retomando o fato de o Clube de Matemática ter iniciado suas atividades um semestre antes da efetiva implantação do LEMAT, é factível perceber uma articulação afinada com vistas a subsidiar a criação deste. Ou seja, houve uma construção coletiva da comunidade acadêmica do Curso de Matemática que se deu por meio do empenho, dedicação e muita força de vontade, tanto dos docentes quanto dos discentes.

O LEMAT começou a funcionar como um ambiente de estudos e pesquisas para os docentes e discentes do Curso de Matemática; nele, também os professores das disciplinas de metodologias e práticas de ensino desenvolvem suas aulas e atividades práticas. Nesse espaço, criam-se situações problemas, elaboram-se oficinas, analisam-se resultados e propõem-se novas situações didáticas, na busca de oferecer aos licenciandos condições de vivenciar a prática do seu ofício no decorrer de sua formação profissional.

Ainda em 2010, o Colegiado do Curso de Matemática fez um estudo do Projeto Pedagógico do Curso (PPC) e propôs uma reformulação deste para sanar algumas lacunas no que tange à natureza do curso, com o objetivo de adequá-lo às necessidades e demandas da formação de professores, bem como à legislação vigente. Nessa reformulação, o LEMAT é instituído como Laboratório do Curso e passa a compor o PPC de Matemática. Há que ser registrar que, até então, o LEMAT era um programa de extensão cadastrado na Pró-reitoria de Extensão e Cultura (PROEX) da UFT.

Nas discussões que promoveram a reformulação do PPC de Matemática, houve uma proposição da inclusão das disciplinas de Laboratório de Ensino de Matemática I e II (LEM I e LEM II) na matriz do Curso. Essas disciplinas nasceram das experiências vividas no LEMAT e como proposta de formação de professores de Matemática. Dentre alguns referenciais teóricos, Sérgio Lorenzato (2006, p. 02) ajudou-nos a perceber que "[...] o Laboratório de Ensino Matemática na Formação de professores, realça importância, consequentemente, a necessidade da sua presença nas instituições que desejam oferecer uma formação Matemática e didática de qualidade aos alunos".

As disciplinas criadas têm 60 horas cada uma e compõem o currículo obrigatório que o graduando deve cursar.

Avançando as discussões sobre teoria e prática na formação do professor, o Colegiado propõe que além de disciplinas de LEM, este seja instituído como um Laboratório para subsidiar, preferencialmente, as atividades práticas de todas as disciplinas do Curso de Matemática, de forma que esse novo espaço fique vinculado ao já existente LEMAT.

Em outubro de 2010, o PPC de Matemática foi aprovado pelo Conselho Superior da UFT e como consequência o Curso passa a contar com 2 Laboratórios de Educação/Ensino: o LEMAT como espaço de articulação de ensino, pesquisa e extensão; e o LEM como local privilegiado de ensino.

Além do que já foi exposto até agora, o LEMAT dá suporte a vários projetos como o *Formação Contínua de Professores de Matemática*, o *Aprendendo Matemática,* entre outros. Para conhecer mais sobre os projetos/programas, consultar Khidir, Rodrigues e Silva (2013).

Os projetos/programas desenvolvidos no LEMAT atendem alunos e professores de Matemática das unidades escolares que oferecem Educação Básica, além de docentes e discentes dos Cursos de licenciaturas do CUA/UFT. O LEMAT é um ambiente para estudos e reflexões acerca da problemática em que se insere o processo de ensino e aprendizagem de Matemática.

Os materiais e atividades produzidos pelo Laboratório e todos os seus projetos/programa ficam à disposição dos professores e acadêmicos da UFT como sugestões e exemplos de metodologias e recursos didáticos, centrados no apoio ao desenvolvimento de processos mentais básicos de conceitos matemáticos, os quais são essenciais para a formação dos licenciandos.

A partir de 2011, o LEMAT começou a ser fomentado pelo Programa de Consolidação das Licenciaturas (Prodocência), ação da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES). Com esses recursos, foram adquiridos para o Laboratório equipamentos e materiais de consumo para subsidiar todas as ações vinculadas ao espaço. Além disso, esses recursos subsidiaram a participação em eventos acadêmico-científicos de alunos e professores do Curso de Matemática.

Observamos que o LEMAT e suas conquistas têm um papel importante na formação inicial do futuro licenciado em Matemática do Campus de Arraias, proporcionando a ele uma relação próxima com a docência e deixando-o mais preparado para os desafios do ensino e da aprendizagem.

4 A PERSPECTIVA LABORATORIAL DA UFCA

A partir do disposto da Lei N° 12.826 em seu artigo 4°, § 1°, a Universidade Federal do Cariri cria em 05 de junho de 2013 o Campus de Brejo Santo-CE, denominado Instituto de Formação de Educadores (IFE).

Consequentemente, a Resolução Nº 12A/2013 do Conselho Superior *Pró Tempore* da Universidade Federal do Cariri (CONSUP), de 14 de Novembro de 2013, cria a Licenciatura Interdisciplinar em Ciências Naturais e as Licenciatura em Matemática, Licenciatura em Química, Licenciatura em Biologia e Licenciatura em Física.

Adotando uma dinâmica de formação interdisciplinar, o ingresso dos discentes dá-se a partir da Licenciatura Interdisciplinar, com duração prevista de 06 semestres letivos. Após a conclusão dessa Licenciatura, os licenciados reingressam em um segundo ciclo de formação, optando por uma das licenciaturas específicas (Matemática, Física, Química e Biologia), com duração prevista para 03 semestres letivos.

Logo após iniciar suas atividades, a partir do segundo semestre de 2014, o colegiado do curso de Licenciatura Interdisciplinar em Ciências Naturais iniciou um processo de reformulação do Projeto Pedagógico do Curso (PPC), que se estendeu até meados do primeiro semestre de 2015. Após as modificações propostas, o curso passou a se chamar Licenciatura Interdisciplinar em Ciências Naturais e Matemática.

No que se refere ao Laboratório de Ensino de Matemática, o Instituto de Formação de Educadores instituiu um espaço denominado Laboratório de Matemática e Tecnologias (L@BMATEC).

Tendo em vista que esse espaço vem funcionando em um local provisório, e ainda que parte de seus recursos ainda está em fase de aquisição, o L@BMATEC tem sido usado para congregar: atividades típicas de um laboratório de informática; atividades de ensino com número reduzido de alunos; grupos de pesquisa e de estudo; e atividades de monitoria acadêmica pelos bolsistas.

Além do espaço físico, a partir do processo de reelaboração do PPC do curso, as discussões relacionadas aos laboratórios foram aprofundadas na busca de uma concepção que contemplasse as áreas de Matemática, Física, Biologia e Química, visando promover uma ação interdisciplinar. A seguir, apresentamos um trecho do PPC do curso que expõe a finalidade dos Laboratórios:

> A atividade de Laboratório de Prática Pedagógica é o espaço privilegiado em que podem ser sistematizadas e tornadas conscientes todas as condições de uma aprendizagem que tenha sido efetivada ao longo da semana de trabalho, propiciando a articulação entre os conteúdos específicos e pedagógicos, por meio de formas de recontextualização didática dos conteúdos do Ensino Superior para o Ensino Médio, aliadas a reflexões sobre esses conteúdos. Visa o desenvolvimento de atividades de natureza prática mediante a organização de oficinas de ensino e aprendizagem, desenvolvidas por professores e alunos objetivando a elaboração de material didático, a compreensão e a avaliação de seu adequado uso pedagógico para cada fase da Educação Básica (UNIVERSIDADE FEDERAL DO CARIRI, 2015, p. 38).

A partir da noção de Laboratório delineada, foram criadas três disciplinas, denominadas Laboratório de Prática Pedagógica I (LPP I), Laboratório de Prática Pedagógica II (LPP II) e Laboratório de Prática Pedagógica III (LPP III), com carga horária de 96 horas cada. Os Laboratórios de Práticas Pedagógicas possuem enfoques distintos, como mostra a citação abaixo:

> O LPP I dará ênfase à pesquisa, inserindo o licenciando em todo o processo de construção e análise de dados de pesquisa relatada na literatura especializada da área. O LPP II se organizará sob a forma de oficinas em parceria com professores da Educação Básica, contemplando assim a Extensão. Para o LPP III será oportunizado aos alunos a vivência de sala de aula, utilizando para isso atividades planejadas, tendo como instrumento materiais desenvolvidos no LPP II e orientadas junto às escolas ou outras instâncias educativas. Além disso, serão organizadas e desenvolvidas de mostras de materiais e experiências correlacionadas na perspectiva da divulgação científica, contempla no assim a Cultura (UNIVERSIDADE FEDERAL DO CARIRI, 2015, p. 39).

Observamos que apesar da condução do LPP I e LPP II terem objetivos diferentes, ambos são complementares na busca por uma formação que permeie os eixos em que se fundam a UFCA, a saber: ensino, pesquisa, extensão e cultura.

Para uma análise mais detalhada, vamos discutir as ementas das disciplinas de Laboratório de Práticas Pedagógicas I, II e III, para termos uma ideia fiel da proposta.

A disciplina LPP I ressalta a análise de propostas para o ensino de Ciências e Matemática no Ensino fundamental, com uma investigação inicial dos fundamentos teóricos e metodológicos, tentando relacionar com os paradigmas no ensino das Ciências e Matemática. Assim, busca-se, ao final da disciplina, a construção ou reprodução de experimentações ligadas a TIC's, recursos audiovisuais, resolução de problemas, modelos, modelagem, atividades lúdicas e textos paradidáticos. Observamos que a disciplina busca iniciar uma consolidação teórica e prática das propostas de intervenção, partindo da ideia do que são propostas metodológicas para o ensino de Ciências e Matemática, compreendendo os seus paradigmas, a fim de aplicar e analisar as suas experimentações didáticas.

Continuando nossa discussão, a LPP II destaca em sua ementa o planejamento e o desenvolvimento de projetos de pesquisas interdisciplinares e a produção de materiais didáticos para o ensino-aprendizagem das Ciências Naturais e Matemática, tendo como temática os temas transversais para o Ensino Fundamental. Como se pode notar, o discente no LPP I inicia uma atividade de fundamentação teórica e metodológica dos procedimentos de ensino, para que no LPP II possa planejar e desenvolver projetos de pesquisas interdisciplinares, em que os recursos didáticos elaborados pelos discentes tornam-se objetos de pesquisa.

Por último, a disciplina de LPP III, que destaca a construção e validação de sequências de ensino e aprendizagem, tomando por base os projetos e materiais didáticos desenvolvidos na disciplina de LPP II. Essas construções são apresentadas em atividades acadêmicas, de extensão e cultura, promovidas e organizadas pelos próprios discentes e docentes. Observamos que essa última disciplina proporciona ao discente aplicar, testar e analisar o recurso construído, buscando relacionar com as teorias estudadas a sua evolução no processo de ensino e aprendizagem dos conceitos abordados nas Ciências Naturais e Matemática.

As disciplinas de Laboratório de Práticas Pedagógicas seguem caminhos diferentes, mas interligados por um objetivo comum: proporcionar uma formação teórica e metodológica consistente para a aplicação das intervenções propostas, em que o ensino, a pesquisa, a extensão e a cultura são elementos essenciais. O L@BMATEC tem um papel importante para a conquista dos objetivos dos Laboratórios de Práticas Pedagógicas, pois vem sendo construído para se tornar um espaço físico dotado de diferentes recursos didáticos, visando, por meio dessa diversidade, enriquecer os experimentos pedagógicos desenvolvidos com os futuros professores.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Surgidos para auxiliar na relação entre professor, alunos e o saber, os Laboratórios de Ensino de Matemática se constituem como espaços promissores nas discussões que permeiam a Educação Matemática. Tais espaços de ensino e aprendizagem tornam-se cada vez mais necessários nos cursos de formação de professores, por se constituírem como ambientes para construção e materialização de ideias a serem testadas e aperfeiçoadas pelos futuros licenciados. O presente relato de experiência apresentou dois casos de implementação desses espaços no âmbito de cursos de formação inicial de professores que ensinam matemática.

O Laboratório da UFT desenvolve um trabalho articulado com diferentes disciplinas do curso de Licenciatura em Matemática, assim como outras disciplinas de cursos diferentes como Pedagogia e Educação do Campo. Contudo, uma das maiores contribuições para a formação do professor repousa na articulação dos conhecimentos didático-matemáticos com a realidade da Educação Básica, ou seja, o local de trabalho deste profissional em formação.

O Laboratório da UFCA, em fase de estruturação, ao nascer dentro de uma Licenciatura Interdisciplinar, tem o desafio de trabalhar de modo articulado com outras disciplinas das áreas das Ciências da Natureza (Física, Química, Biologia). O caminho proposto por seus idealizadores é organizar suas ações de modo que elas não se restrinjam ao seu espaço físico, mas que se estruturem em função dos eixos que fundamentam a Universidade Federal do Cariri, a saber: Ensino, Pesquisa, Extensão e Cultura.

Um caminho a ser trilhado é o da implantação dos Laboratórios de Ensino de Matemática nas escolas de Educação Básica. As investigações dos resultados das atividades de ensino de Matemática desenvolvidas nos Laboratórios têm sido positivas. Nesse sentido, esses espaços devem estar em nossas escolas.

No âmbito da formação de professores, o desafio do Laboratório de Ensino de Matemática é promover e tornar as inovações advindas das investigações empreendidas pela Educação Matemática acessíveis aos futuros professores, de modo que essas possam permear a prática desses profissionais e contribuir para uma mudança no paradigma atual em relação ao ensino e à aprendizagem de Matemática.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, G. D.; RODRIGUES, A.; MONTIJO, C. H. M. Clube de Matemática: uma experiência no ensino fundamental com alunos que possuem facilidade em Matemática. In: RODRIGUES, R. F.; KHIDIR, K. S.; CARVALHO, R. A. de. (Org.). **Construção de Saberes em Laboratórios**: ensino e pesquisa mediados pela extensão. Goiânia: Gráfica e Editora América, 2013.

CEDRO, W. L. **O Espaço de Aprendizagem e a Atividade de Ensino**: o clube de matemática. 2004. 171f. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade de São Paulo, Faculdade de Educação, São Paulo, 2004.

FREITAS, A. L. de; GONÇALVES, P. G. F. A formação do professor de Matemática em um Laboratório de Ensino de Geometria: A experiência da FAFIDAM. In: SIMPÓSIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 3, 2012. Fortaleza. **Anais...** Fortaleza: Faculdade 7 de Setembro, 2012. p. 1-11.

KHIDIR, K. S.; RODRIGUES, R. F.; SILVA, W. M. da. Laboratório de Educação Matemática: um espaço de aprendizagens. In: RODRIGUES, R. F.; KHIDIR, K. S.; CARVALHO, R. A. de. (Org.). **Construção de Saberes em Laboratórios**: ensino e pesquisa mediados pela extensão. Goiânia: Gráfica e Editora América, 2013.

LORENZATO, S. (Org.). **O Laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores.** Campinas, Autores Associados, 2006.

RÊGO, R. M.; RÊGO, R. G. Desenvolvimento e uso de materiais didáticos no ensino de matemática. In: LORENZATO, S. **Laboratório de Ensino de Matemática na formação de professores**. Campinas: Autores Associados, 2006. p.39-56.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CARIRI. **Projeto Pedagógico de Curso**: Licenciatura Interdisciplinar em Ciências Naturais e Matemática. Brejo Santo: UFCA, 2015.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS. Pró-reitoria de Graduação. Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID). **Subprojeto de Licenciatura em Matemática**. Arraias: UFT, 2008.

MORAIS, R. dos S. **O processo constitutivo da Resolução de Problemas como uma temática da pesquisa em educação matemática:** um inventário a partir de documentos dos ICMEs. 2015. 471f. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Rio Claro, 2015. Tese orientada pela Prof.ª Drª Lourdes de La Rosa Onuchic.

ANDREATTA, Cidimar[1]
ALLEVATO, Norma Suely Gomes[2]

A autora da tese aqui resenhada, Rosilda dos Santos Morais, é doutora em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" (Unesp), câmpus Rio Claro, e defendeu sua tese no ano de 2015, sob orientação da Professora Doutora Lourdes de la Rosa Onuchic. Atualmente, Rosilda é professora na Universidade Federal de São Paulo (Unifesp), câmpus Diadema, e pesquisadora do Grupo de Pesquisa em História da Educação Matemática (GHEMAT), também da Unifesp.

Morais (2015) investigou o processo de inclusão da Resolução de Problemas (RP) como uma temática de pesquisa em Educação Matemática em onze edições do Congresso Internacional de Educação Matemática (ICME), realizadas no período de 1969 a 2008, que vai do ICME I ao ICME XI, sendo tal investigação o fio condutor da pesquisa. Outras questões que permearam a tese foram tecidas e historiadas ao longo da pesquisa. São elas: "quais são as origens da RP? Qual foi o contexto em que ela emergiu? Quem foram seus principais personagens? Como a Resolução de Problemas, como metodologia, se propagou pelo mundo?" (MORAIS, 2015, p. 13).

A tese em questão está estruturada em sete capítulos, assim denominados: (1) Introdução; (2) A problemática da pesquisa; (3) Situando a pesquisa; (4) Historiar; (5) O cenário investigado: percorrendo rastros; (6) A arte de inventariar; (7) Referências Bibliográficas.

Na introdução, a autora faz uma retrospectiva de sua trajetória enquanto professora e pesquisadora, passando pelo curso de Mestrado na Universidade Federal de São Carlos (UFSCar) até chegar ao curso de Doutorado do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Unesp, em Rio Claro. Destaca que foi se interessando pela História da Educação Matemática após a conclusão do curso de Mestrado, quando iniciou sua participação no Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas (GTERP), na mesma universidade.

No capítulo denominado "A problemática da pesquisa", o texto apresenta a trajetória da autora da tese em relação ao trabalho com a RP, algumas interrogações iniciais sobre o trabalho com as fontes de consulta para a pesquisa e encerra discorrendo sobre as dificuldades com relação a essas fontes produzidas nas edições do ICME analisadas, que são todas registradas em língua inglesa, idioma oficial do evento. Outra dificuldade apontada pela autora da tese relaciona-

[1] Mestre em Educação em Ciências e Matemática pelo Instituto Federal do Espírito Santo (IFES), Vitória, ES. Doutorando do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Cruzeiro do Sul (UNICSUL), São Paulo, SP. Endereço eletrônico: cidimarcol@gmail.com.
[2] Doutora em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (UNESP), Rio Claro, SP. Professora e Pesquisadora da Universidade Cruzeiro do Sul (UNICSUL), São Paulo, SP. Endereço eletrônico: normallev@gmail.com.

se à junção de todos os materiais produzidos nos ICMEs, dado o volume de produções acumuladas ao longo de quatro décadas.

No capítulo intitulado “Situando a Pesquisa”, foi realizado um levantamento de pesquisas sobre RP, fora do âmbito dos ICMEs, que vai da passagem do século XIX para o século XX, período em que as discussões apoiaram-se na perspectiva de que todas as pessoas deveriam saber Matemática e, assim, estariam preparadas para atender as demandas sociais e profissionais daquele tempo.

Morais (2015) explorou nesse capítulo, algumas abordagens teóricas como a de Edward Lee Thorndike, sobre o treinamento da mente; a de Willian A. Brownel, contrário a perspectiva comportamental e defensor de uma teoria significativa; e a de George Polya[3], específica sobre RP. A autora também fez uma explanação da abordagem da RP em alguns países como Japão, Inglaterra, China, Austrália, Estados Unidos da América (EUA), Alemanha e Portugal. Destacou que no Brasil, no ano de 1987, pela primeira vez foi citada, de forma incipiente, a RP como uma preocupação metodológica. Esse registro foi observado em um documento de versão preliminar da Proposta Curricular de Matemática do Estado de São Paulo. Ainda no Brasil, as contribuições de pesquisa no campo da RP foram iniciadas e idealizadas pela Professora Doutora Lourdes de la Rosa Onuchic, com forte apoio e contribuições de outros pesquisadores associados ao GTERP.

Até esta etapa da tese resenhada, percebe-se uma ampla variedade de pesquisas nacionais e internacionais sobre RP, registradas em livros, artigos e documentos oficiais, que retratam convergências nos pontos de vista dos pesquisadores, mas sugerem um movimento ainda discreto da RP. Em seguida, a autora da tese desenvolveu um capítulo denominado “Historiar”, em que apresentou aspectos teóricos da pesquisa no contexto da História da Educação Matemática, ou da História e Educação Matemática.

No capítulo “O cenário investigado: percorrendo rastros” consta um amplo e extenso inventário das pesquisas apresentadas nos ICMEs, do ICME I ao ICME XI, que indicam a RP como temática da pesquisa em Educação Matemática. Foi utilizado o termo “tatear” para expressar a forma como a autora fez uma primeira classificação dos documentos desses ICMEs, buscando pela expressão Resolução de Problemas nos títulos, resumos e nas palavras-chave dos trabalhos. O principal lócus de consulta da pesquisadora foram os *proceedings*, documento mais denso do evento com aspectos mais gerais das pesquisas apresentadas.

Podemos inferir que tal capítulo vai ao encontro da problemática central de pesquisa da autora, que foi verificar como se deu o processo de inclusão da RP como uma temática da pesquisa em Educação Matemática, pois identificou os movimentos da RP nos ICMEs em quatro fases distintas.

Nessa perspectiva, doravante delinearemos a presente resenha a partir dessas quatro fases. Na fase (1), segundo Morais (2015), a RP não foi tema de discussão no ICME I, realizado na França, em 1969. Por esse motivo, não faremos referência a essa edição. Foi no ICME II, caracterizado pela autora como fase (2), que a RP emergiu. Tal ICME foi realizado na Inglaterra, em 1972, não sendo percebida pela autora a presença de pesquisas brasileiras nos *proceedings*.

Os ICMES III, IV e V foram associados por Morais (2015) à fase (3), pois, segundo a autora da tese, as pesquisas envolvendo a RP nesses ICMEs expressam uma natureza da RP em seus aspectos: incipiente (relacionado a pesquisas de sala de aula); de continuidade (aproximação e conexão com outras áreas da Educação Matemática); de reafirmação (acesso aos

[3] George Polya é considerado, atualmente, o “pai” da Resolução de Problemas na Educação Matemática.

resultados das pesquisas pelos professores de Matemática de sala de aula); e de novas concepções (emersão de temáticas que envolvam a RP com naturezas diferentes).

O ICME III foi realizado na Alemanha, no ano de 1976, e contou com a participação de 21 pesquisadores brasileiros. As pesquisas apresentadas relacionadas à RP foram: *Problem Solving Project, Teaching Strategies, and Conceptual Development of Mathematics*, do *Georgia Center for the Study of Learning and Teaching Mathematics*, dos EUA.

O ICME IV, realizado nos EUA em 1980, teve como Presidente Honorário o Professor George Polya, que não pôde comparecer por problemas de saúde. Somente o Grupo de Trabalho *School Mathematics Instruction, Including Pre-School, Primary and Secondary* concentrou nove pesquisas sobre RP. Nesse Grupo de Trabalho, é importante destacar o trabalho da pesquisadora brasileira Beatriz D'Ambrosio, que apresentou a pesquisa intitulada *Case Study: Problem Solving*, realizada com estudantes de um terceiro ano do Ensino Fundamental que apresentavam dificuldades na aprendizagem de Matemática.

Com relação ao ICME V, realizado na Austrália em 1984, Morais (2015) destaca que os títulos das sessões plenárias não são alusivos à RP, porém os trabalhos nos grupos que construíram as sessões apresentaram pesquisas envolvendo essa temática.

Os demais ICMEs (VI, VII, VIII, IX, X e XI) foram relacionados por Morais (2015) à fase (4), pois, segundo ela, as pesquisas apresentadas nesses ICMEs envolvem todos os aspectos da fase anterior (fase 3), com exceção da incipiente, além de identificar o surgimento de dois novos aspectos relacionados à RP no currículo e à maturidade das pesquisas.

A seguir, abordaremos considerações em relação ao último ICME, XI, analisado pela autora da tese, tendo em vista que o mesmo foi realizado pela primeira vez em um país da América Latina, no México, no ano de 2008.

Na época de elaboração da tese, os *proceedings* do ICME XI ainda não haviam sido publicados, assim, a autora analisou somente o livro extra produzido pelo *Topic Study Groups* (TSG) 19, que abordou especificamente a RP. Foi significativo o número de trabalhos apresentados nesse TSG, mas nesta resenha teceremos considerações apenas sobre um deles, por tratar-se de uma pesquisa brasileira intitulada *Teaching mathematics in the classroom through problem solving,* de autoria das professoras doutoras Norma Suely Gomes Allevato e Lourdes de La Rosa Onuchic. Essa pesquisa abordou a perspectiva do "Ensino-Aprendizagem-Avaliação" de Matemática através da RP, considerando-a como uma metodologia de ensino com fundamentação e orientações para implantação na sala de aula.

O capítulo da tese "O cenário investigado: percorrendo rastros" apresenta uma densa e extensa pesquisa bibliográfica delineada em 288 páginas, demonstrando um trabalho grandioso da autora de busca à exaustão, e expressiva dedicação ao tema investigado.

No capítulo final, intitulado "A arte de inventariar", foi realizada uma análise das etapas da pesquisa, justificando as informações trazidas e abordadas ao longo da tese, principalmente aquelas referentes à análise dos *proceedings* dos ICMEs.

A identificação em fases do movimento da RP enquanto temática de pesquisa nos ICMEs, realizada por Rosilda dos Santos Morais, possibilitou fazermos uma abordagem das questões problematizadoras de pesquisa elencadas no início desta resenha.

As primeiras questões trazidas pela autora da tese estiveram relacionadas às origens da RP e ao seu contexto de emersão. Percebemos que tais questões são abordadas no capítulo "Situando a Pesquisa", quando é realizada uma retomada teórica e histórica da RP no Brasil e no mundo, pontuando o ICME II, edição do evento que contou com um de seus principais nomes, o matemático George Polya, como contexto de emersão da RP.

As demais questões problematizadoras estão relacionadas aos principais personagens da RP, assim como ao fio condutor da pesquisa, que foi identificar como a RP enquanto metodologia se propagou pelo mundo. Em se tratando dos personagens, percebemos que eles são diversos, a maior parte oriunda dos EUA, talvez pelo fato de as pesquisas envolvendo RP terem se iniciado nesse país. No que se refere à propagação da RP pelo mundo, foi possível identificar que, em alguns momentos, a temática RP aparece com mais frequência.

Nos últimos ICMEs (X e XI) analisados por Morais (2015), percebemos um crescimento no número de pesquisas envolvendo RP e muitas delas estavam associadas às tecnologias e aos recursos multimídia. Percebemos a influência e a relação da tecnologia nas pesquisas quando, no ICME X, foi realizado o evento Satélite *Promath,* na Finlândia.

Ao considerarmos os critérios de análise e julgamento de pesquisas sugeridos por Kilpatrick (1996), propomos uma relação entre eles e a tese em questão. Tais critérios estão relacionados à Relevância; Validade; Objetividade; Originalidade; Rigor e Precisão; Prognóstico; Reprodutibilidade e Relacionamento das pesquisas; elementos de fundamental importância na seleção de problemas e métodos.

Percebemos que a pesquisa delineada na tese atende tais critérios, dada a relevância da temática discutida na tese, a RP, além de sua originalidade. Quanto ao critério de Relacionamento, percebemos as conexões entre a pesquisa com outras áreas e demandas sociais do ensino da Matemática, principalmente em relação a recursos e metodologias da Educação Matemática.

Em relação aos critérios de Rigor e Precisão, identificamos o que consideramos como lacunas na pesquisa de Morais (2015), possivelmente decorrentes da dificuldade de localização dos *proceedings* e relatórios dos eventos, o que talvez tenha limitado seu olhar investigativo para a RP em alguns casos, como o do ICME XI.

Com relação ao extenso trabalho de mapeamento realizado pela autora, é importante ressaltar a relevância de trabalhos dessa natureza, que buscam analisar e investigar trabalhos científicos já publicados, demonstrando as convergências e divergências entre eles dentro de um contexto e temática de pesquisa específicos. No Brasil, podemos citar como referência trabalhos de mapeamento realizado pelo professor e pesquisador Dario Fiorentini (2002, 2016).

Ressalta-se que a pesquisa de Morais (2015) serve de alerta para o fato de que é preciso pensar e entender a RP como uma temática em Educação Matemática que está em movimento, em constante evolução e que não se distancia ou se desvincula de outras temáticas exploradas na prática e na pesquisa nessa área, mostrando-se também preocupadas em promover um ensino de Matemática significativo para o aluno, contrapondo-se a um ensino de Matemática "hermético", tradicional e atrelado apenas a axiomas e teoremas.

A tese construída por Rosilda dos Santos Morais constituiu-se em uma valiosíssima fonte de consulta para pesquisadores, professores e estudantes envolvidos com a temática da RP, por se tratar de um mapeamento do maior evento internacional da área de Educação Matemática, que leva em conta *proceedings*, cuja obtenção ou acesso não são fáceis. Possibilita, ademais, ao leitor conhecer a estrutura e forma de organização dos ICMEs, além de entender sua importância na ação de congregar e expor o movimento da pesquisa mundial na área.

REFERÊNCIAS

FIORENTINI, D. Mapeamento e balanços dos trabalhos do GT-19 (Educação Matemática) no período de 1998 a 2001. In: REUNIÃO ANUAL DA ASSOCIAÇÃO NACIONAL DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA EM EDUCAÇÃO, 25., 2002, Caxambu, p. 1-17. Disponível em http://www.ufrrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_25/mapeamento.pdf . Acesso em: 03 nov. 2017.

FIORENTINI, D.; PASSOS, C. L. B.; LIMA, R. C. R de (Orgs.). **Mapeamento de pesquisa acadêmica brasileira sobre o professor que ensina matemática**: período 2001-2012. Campinas: Unicamp, 2016.

KILPATRICK, J. Fincando Estacas: uma tentativa de demarcar a Educação Matemática como campo profissional e científico. Tradução: Rosana G. S. Minskulin; Carmem Lúcia B. Passos; Regina C. Grando e Elisabeth A. Araujo. **Zetetiké**, Campinas, v. 4, n. 5, p. 99-120, jan./jun. 1996.

SILVA, C. R. da. **Os Signos Peirceanos e os Registros de Representação Semiótica: qual Semiótica para a Matemática e seu Ensino?** 2013. 202 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, SP, 2013. Tese orientada por Saddo Ag Almouloud.

FERRÃO, Naíma Soltau[1]

Cintia Rosa da Silva é doutora em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUCSP), mestre em Ciências da Linguagem, especialista em Educação Matemática e Licenciada em Matemática pela Universidade do Sul de Santa Catarina (UNISUL). Possui experiência na área de Ensino da Matemática e dedica-se a estudos acerca da Semiótica na Matemática. Atualmente, é professora adjunta na Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC.

Sob orientação do Prof. Dr. Saddo Ag Almouloud, Silva faz, em sua tese defendida em 2013, uma reflexão a respeito das teorias de Registro de Representação Semiótica de Raymond Duval e a Semiótica de Charles Sanders Peirce com o intuito de responder à seguinte pergunta de investigação: quais signos peirceanos podem ser usados para analisar os registros de representação semiótica e qual é a semiótica para a Matemática e seu ensino?

Os principais objetivos elencados pela autora foram: analisar a Teoria de Registro de Representação Semiótica por meio da semiótica peirceana; analisar o que Duval utilizou da Semiótica de Peirce em sua teoria; propor um quadro semiótico para a Matemática; e exemplificar as teorias por meio da análise de objetos como plano, reta, vetor e ponto na Geometria Analítica Espacial.

Segundo Silva (2013), para realizar a pesquisa adotou-se uma abordagem qualitativa, de cunho bibliográfico e o desenvolvimento da tese foi dividido em três etapas: levantamento dos referenciais teóricos, tratamento teórico dos referenciais encontrados e a elaboração de um texto final que expresse a análise efetuada.

Quanto à organização, o conteúdo da tese distribuiu-se da seguinte forma: Introdução; Capítulo I – As Teorias de Registro de Representação Semiótica e Semiótica Peirceana; Capítulo II – Trabalhos relacionados; Capítulo III – Análise Peirceana da Teoria de Registro de Representação Semiótica; Capítulo IV – Geometria Analítica Espacial: estudo de um corpus de livros didáticos; Considerações e Perspectivas; e Referências.

Na introdução, Silva apresenta alguns aspectos das teorias de Peirce e Duval de forma sucinta, inserindo o leitor, neste primeiro momento, no contexto da semiologia, ou seja, dos estudos que abrangem "todas as áreas do conhecimento envolvidas com as linguagens ou sistemas de significação" (PRATES, 2007 *apud* SILVA, 2013).

A presença deste tipo de introdução é extremamente válida, uma vez que conceitos de semiótica, tais como: signo, objeto, significante, significado, entre outros, são requisitos indispensáveis para o leitor poder compreender efetivamente o que Silva discutirá a seguir.

No primeiro capítulo, dedicado à fundamentação teórica, Silva apresenta de forma clara e profunda a Teoria de Registro de Representação Semiótica de Duval e a Semiótica peirceana,

---

[1] Doutora em Ensino de Ciências e Matemática pela Universidade Cruzeiro do Sul (UNICSUL), São Paulo, SP. Bolsista PNPD/CAPES no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM), Santa Maria, RS. Endereço eletrônico nsferrao@gmail.com.

descrevendo detalhadamente os principais conceitos e características destas teorias. Destaca que Duval distingue entre objeto e representação por considerar tal distinção estratégica para se compreender Matemática. Justifica seu trabalho mencionando, mais de uma vez, que a teoria de Duval trata dos objetos matemáticos e de suas representações como um todo, enquanto Peirce considera as partes do objeto, nas quais cada uma delas é um signo diferente, e, que apesar de Duval deixar claro a influência de Peirce em seus estudos, não está evidente o que realmente da teoria peirceana utilizou.

No segundo capítulo, a autora apresenta trabalhos relacionados com a Didática da Matemática e à Semiótica Pierceana, que tanto justificam quanto evidenciam a pertinência, a originalidade e as possíveis contribuições de sua pesquisa para o ensino e aprendizagem em Matemática.

No terceiro capítulo, referente à análise Peirceana da Teoria de Registro de Representação Semiótica, a autora utiliza três tricotomias definidas por Peirce para classificar os signos que considera serem mais relevantes para analisar a Teoria de Registro de Representação Semiótica de Duval por meio de analogias. As três tricotomias escolhidas foram a relação do signo consigo mesmo, a relação do signo com o objeto e a relação do signo com o interpretante, e as principais analogias apresentadas são: (*i*) a formação de representação semiótica pode ser um qualisigno, ícone ou rema; (*ii*) o tratamento pode ser um sinsigno, índice ou dicente; e (*iii*) a conversão pode ser um legisigno, símbolo ou argumento. Das analogias obtidas, Silva propõe um quadro semiótico para a Matemática.

O quarto capítulo, intitulado “Geometria Analítica Espacial: estudo de um corpus de livros didáticos”, induz o leitor a pensar que a autora recorrerá a vários livros didáticos para analisar as teorias e o quadro proposto - o que não ocorre. A análise ateve-se apenas ao livro *Mathématiques*[2] *da Collection Inter Africaine de Mathématiques 1re Sciences Mathématiques.* Neste capítulo, Silva aborda as representações de alguns objetos da Geometria Analítica presentes nos currículos do Ensino Superior por meio das teorias de Duval, de Peirce e do quadro semiótico elaborado, por ela, no capítulo anterior.

Ao analisar a teoria de Registro de Representação Semiótica de Duval pela perspectiva da Semiótica de Peirce, Silva acredita na possibilidade de obter um modelo sígnico, elaborado a partir das duas teorias, que explique os processos de ensino e de aprendizagem da Matemática. Propõe que as teorias examinadas podem, de fato, auxiliar na identificação de possíveis problemas e soluções identificadas em processos de ensino e da aprendizagem de Geometria Analítica. Na sequência, Silva apresenta suas considerações finais e perspectivas de pesquisas futuras.

De forma geral, a pesquisa de Silva é rica em detalhes, discussões teóricas e envolve questões que permeiam o ensino e a aprendizagem da Matemática, da Geometria Analítica e da Semiótica.

No capítulo de fundamentação teórica a autora utiliza, de forma pertinente, exemplos da Geometria Analítica para clarificar aspectos da teoria de Duval ou da Semiótica de Peirce. Justifica este procedimento pelo fato de encontrar na Geometria diversos registros de representação semiótica, tais como o algébrico, gráfico, geométrico e da linguagem natural.

---

[2] AKELE *et al* (1998).

Uma característica marcante ao longo de todo o texto de Silva é a utilização de termos técnicos oriundos das teorias analisadas. Desta forma, a tese destina-se ou alcança um público restrito e específico, pois exige do leitor um bom embasamento teórico prévio dos autores utilizados, de semiótica e de Geometria Analítica necessários para compreender o que está sendo investigado e discutido.

Quanto à estrutura, a tese demanda um capítulo ou tópico que apresentasse a metodologia adotada pela autora com mais profundidade. Assuntos dessa natureza, apesar de presente, foram pouco discutidos no texto, o que pode dificultar a reconstrução da pesquisa ou sua aplicação, por exemplo, para outras teorias. No entanto, segundo os objetivos de investigação propostos por Silva, a pesquisa pode ser considerada teórica, uma vez que busca “reconstruir teoria, conceitos, ideias, ideologias, polêmicas, tendo em vista, em termos imediatos, aprimorar fundamentos teóricos” (DEMO, 2000, p. 20) e, bibliográfica pois foi desenvolvida com base em material como livros e artigos científicos. (GIL, 2009).

Ao concluir, ressaltamos que sob a perspectiva didática é possível seguir a linha de pensamento da autora no que se refere à importância de analisar as teorias abordadas como forma de estudar os processos de ensino e da aprendizagem de Matemática em geral e da Geometria Analítica em particular. Também é evidente a necessidade de haver mais investigações teóricas sobre aspectos semióticos no campo da Educação Matemática.

REFERÊNCIAS

AKELE, C. *et al*. **Mathématiques**: 1ère Sciences Mathématiques. Paris, France: EDICEF, 1998. (Collection Inter Africaine de Mathématiques - CIAM).

DEMO, P. **Metodologia do conhecimento científico**. São Paulo: Atlas, 2000.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2009.

PRATES, E. **Semiótica**. 2007. Disponível em: <www.portaldomarketing.com.br/Artigos/Semiotica.htm>. Acesso em: 10 set. 2017.

SILVA, C. R. da. **Os Signos Peirceanos e os Registros de Representação Semiótica:** qual Semiótica para a Matemática e seu Ensino? 2013. 202 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.