HIPÁTIA

Υπατία

REVISTA BRASILEIRA DE HISTÓRIA, EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA

ISSN 2526-2386

v.2, n.2, dezembro 2017

Instituto Federal de São Paulo

HIPÁTIA
Υπατία

Instituto Federal de São Paulo (IFSP); Rodrigo de Souza Bortolucci, Fundação para o Vestibular da UNESP (VUNESP); Rosa Lúcia Sverzut Baroni, Universidade Estadual Paulista (UNESP); Priscila Coelho Lima, Instituto Federal de São Paulo (IFSP); Sabrina Helena Bonfim, Universidade Federal do Mato Grosso do Sul (UFMS); Silvana Cláudia Santos, Universidade Federal de Viçosa (UFV); Sílvia Aimi, Centro de Ensino Superior de Jataí (CESUT); Thaís Jordão, Universidade de São Paulo (USP); Vanessa Largo, Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR); Walas Leonardo de Oliveira, Instituto Federal de São Paulo (IFSP).

REVISÃO

Guilherme Sachs, Instituto Federal do Paraná (IFPR); Karin Cláudia Nin Brauer, Faculdade de Tecnologia do Estado de São Paulo São Paulo (FATEC); Lucas Toledo de Andrade, Universidade Estadual de Londrina (UEL); Rosicleide Rodrigues Garcia, Universidade de São Paulo (USP); Vera Lúcia Villas Boas, Instituto Federal de São Paulo (IFSP)

DIAGRAMAÇÃO

Línlya Sachs, Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR); S. César Otero-Garcia, Instituto Federal de São Paulo (IFSP).

INSTITUTO FEDERAL
São Paulo

UTFPR
UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

HIPÁTIA

Υπατία

REVISTA BRASILEIRA DE HISTÓRIA, EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA

v.2, n.2, dezembro 2017

Instituto Federal de São Paulo

HIPÁTIA	São Paulo (SP)	v. 2	n. 2	p. 1-93	dez. 2017

LINHA EDITORIAL

A HIPÁTIA - Revista Brasileira de História, Educação e Matemática, conforme sugere seu nome, aceita trabalhos de História da Matemática, Educação Matemática e de Matemática (pura e aplicada). A revista foi oficialmente criada em 8 de março de 2016. Duas concepções principais nos norteiam: ajudar a ampliar o espaço da mulher na ciência no Brasil; abrir um espaço para jovens pesquisadores (mestres, doutorandos ou doutores que tenham obtido título há, no máximo, cinco anos). Isso significa que procuramos dentro da composição de nosso Conselho Editorial, Conselho Científico e em nossas edições, obter uma maioria de pesquisadores ou de trabalhos cujos autores atendam a pelo menos um desses quesitos. É salutar destacar que, no entanto, contribuições de outros pesquisadores continuam sendo de grande valia. A revista é composta por quatro seções : **1) Artigos**, na qual são aceitos trabalhos completos de pesquisadores; **2) Comunicações Científicas**, na qual são aceitos trabalhos com resultados parciais contundentes em nível de pós-graduação ou trabalhos concluídos decorrentes de pesquisas em nível de graduação (iniciação científica, trabalho de conclusão de curso, monografias resultantes de trabalhos orientados por docentes etc.); **3) Relatos de Experiência**, na qual são publicados textos que descrevam precisamente uma dada experiência que possa contribuir de forma relevante para as áreas da HIPÁTIA; **4) Resenhas**, na qual são aceitas resenhas de livros, dissertações e teses, ou outros formatos de interesse publicados preferencialmente há não mais que cinco anos.

SUMÁRIO

EDITORIAL iv

Artigos

CONCEPÇÕES DE LICENCIANDOS EM MATEMÁTICA SOBRE AS METODOLOGIAS DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA

Gabriela Castro Silva Cavalheiro; Renata Cristina Geromel Meneghetti; Augusta Teresa Barbosa Severino 1

O NÚMERO DE EULER: CONTRIBUIÇÕES E POSSIBILIDADES PARA A ESCOLARIDADE BÁSICA

Wagner Marcelo Pommer............ 13

Comunicações Científicas

AS PESQUISAS BRASILEIRAS E O ENSINO DE MATEMÁTICA PARA DEFICIENTES VISUAIS INCLUSOS: UMA REVISÃO CATEGORIZADA

Tiago Pereira; Fábio Alexandre Borges 30

O QUE OS ALUNOS DIZEM? UMA REFLEXÃO DE UMA PRÁTICA DE SALA DE AULA VIVENCIADA À LUZ DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA REALÍSTICA

Daniela Harmuch; Marcele Tavares Mendes 46

O CAMPO DO ENSINO DE GEOMETRIA NO BRASIL:
DO BRASIL COLÔNIA AO PERÍODO DO REGIME MILITAR

Sandra Kozen; Luci T. M. dos Santos Bernardi; Bruna Larissa Cecco 58

AS FUNÇÕES DIDÁTICAS DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NOS LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA DO ENSINO MÉDIO

Elisângela Miranda Pereira Carlini; Mariana Feiteiro Cavalari 71

Resenhas

CORDEIRO, E. M. **Travessias de Cecília**: a caminho da Educação Matemática no Ceeja Padre Moretti (Rondônia). São Paulo: Cultura acadêmica, 2015.

Liliane dos Santos Gutierre 89

EDITORIAL

S. César **Otero-Garcia**
Editor Chefe

Línlya Sachs
Coeditora

Com muita alegria, lançamos este novo número da HIPÁTIA – Revista Brasileira de História, Educação e Matemática, que tem como característica a predominância de autoria feminina, com 11 dos 14 autores presentes nos textos.

O primeiro artigo, “Concepções de licenciandos em Matemática sobre as metodologias de Resolução de Problemas e Investigação Matemática”, é produção de uma recém doutora, Gabriela Castro Silva Cavalheiro, de sua orientadora, Renata Cristina Geromel Meneghetti, e de uma doutoranda, Augusta Teresa Barbosa Severino; e o segundo artigo, “O Número de Euler: contribuições e possibilidades para a escolaridade básica”, é de autoria de Wagner Macelo Pommer.

Quatro textos compõem a seção Comunicação Científica: “As pesquisas brasileiras e o ensino de matemática para DV´s inclusos: uma revisão categorizada”, desenvolvido por Tiago Pereira, graduando em Licenciatura em Matemática, e Fábio Alexandre Borges; “O que os alunos dizem? Uma reflexão de uma prática de sala de aula vivenciada à luz da Educação Matemática Realística”, de autoria da doutoranda Daniela Harmuch e de sua orientadora de mestrado, Marcele Tavares Mendes; “O campo do ensino de Geometria no Brasil: do Brasil Colônia ao período do regime militar”, de Sandra Konzen, Luci T. M. dos Santos Bernardi e Bruna Larissa Cecco, desenvolvido a partir de um trabalho de conclusão do curso de Licenciatura em Matemática; e “As funções didáticas da História da Matemática nos livros didáticos de Matemática do Ensino Médio”, das autoras Elisângela Miranda Pereira Carlini e Mariana Feiteiro Cavalari, com base em resultados obtidos na pesquisa de mestrado da primeira, sob orientação da segunda.

A resenha, escrita por Liliane dos Santos Gutierre, a respeito do livro de Edna Maria Cordeiro, “Travessias de Cecília: a caminho da Educação Matemática no Ceeja Padre Moretti (Rondônia)”, fecha este número.

Aos leitores, desejamos que esta revista seja uma possibilidade de conhecer produções de jovens pesquisadores e pesquisadoras e reconhecer sua qualidade.

Cornélio Procópio, 30 de dezembro de 2017.

CONCEPÇÕES DE LICENCIANDOS EM MATEMÁTICA SOBRE AS METODOLOGIAS DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA[1]

CONCEPTIONS OF UNDERGRADUATE STUDENTS IN MATHEMATICS ON THE METHODOLOGIES OF PROBLEM SOLVING AND MATHEMATICAL INVESTIGATION

CAVALHEIRO, Gabriela Castro Silva[2]
MENEGHETTI, Renata Cristina Geromel[3]
SEVERINO, Augusta Teresa Barbosa[4]

RESUMO

Este artigo divulga uma pesquisa que teve por objetivo levantar e compreender as concepções de alunos de um curso de Licenciatura em Matemática sobre duas metodologias de ensino e aprendizagem: a resolução de problemas (RP) e a investigação matemática (IM). Para tanto, analisou-se o uso dessas metodologias quando empregadas em uma turma de 13 licenciandos, matriculados na disciplina de Prática Pedagógica III, oferecida no terceiro semestre, em uma instituição pública de Ensino Superior do interior do estado de São Paulo. Os dados foram coletados mediante aplicação de questionários (avaliações) e fichas de tarefas e realização de observação participante. Cronologicamente, as etapas de coleta foram: aplicação de avaliação inicial; aula de RP; aula de IM; e aplicação de avaliação final. Entre o primeiro dia e os seguintes foram trabalhados com a turma, paralelamente, textos teóricos sobre as metodologias. Os resultados desta pesquisa indicam que, no início, os licenciandos apresentavam uma concepção muito vaga sobre os assuntos. Após o uso das metodologias, houve indícios de mudança na concepção dos sujeitos, no sentido de ampliar suas compreensões e entendimentos em relação às referidas metodologias. Diante disso, conclui-se que, para que a RP e a IM possam estar mais presentes no cotidiano das aulas de Matemática, elas necessitam ser tratadas em cursos de formação de professores, tanto teoricamente como por meio de abordagens mais práticas.

Palavras-chave: Metodologia de ensino e aprendizagem. Formação de professores. Licenciatura em Matemática.

ABSTRACT

This article presents a research that aimed to raise and understand the conceptions of students of a Mathematics Degree course on two teaching and learning methodologies: problem solving (PR) and mathematical research (IM). For that, the use of these methodologies was analyzed when employed in a class of 13 graduates, enrolled in the discipline of Pedagogical Practice III, offered in the third semester, in a public institution of Higher Education in the interior of the state of São Paulo. The data were collected through the application of questionnaires (evaluations) and tokens of tasks and realization of participant observation. Chronologically, the steps of collection were: application of initial evaluation; RP classroom; IM classroom; and final evaluation application. Between the first day and the following were worked with the group, in parallel, theoretical texts on methodologies. The results of this research indicate that, in the beginning, the

---

[1] Uma versão preliminar e parcial deste artigo foi apresentada no V Seminário Nacional de Histórias e Investigações de/em Aulas de Matemática (SHIAM), realizado de 6 a 8 de julho de 2015 em Campinas, SP, Brasil.

[2] Doutora em Educação para a Ciência pela Universidade Estadual Paulista (UNESP), Bauru, São Paulo, Brasil. Docente do Instituto Federal de São Paulo (IFSP), Araraquara, São Paulo, Brasil. Endereço eletrônico: gcavalheiro@ifsp.edu.br.

[3] Livre-docente pela Universidade de São Paulo (USP) e doutora em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista (UNESP). Professora Associada do Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação (ICMC) da Universidade de São Paulo (USP), São Carlos, São Paulo, Brasil. Docente colaboradora no Programa de Pós-graduação em Educação para a Ciência da UNESP, Bauru, São Paulo, Brasil. Endereço eletrônico: rcgm@icmc.usp.br.

[4] Doutoranda em Educação para a Ciência pela Universidade Estadual Paulista (UNESP), Bauru, São Paulo, Brasil. Docente das escolas de Educação Básica I E.E. "Prof. José Ranieri" e E.M.E.F. "Prof. Fausto de Marco". Endereço eletrônico: gutasix@yahoo.com.br.

graduates had a very vague conception of the subjects. After the use of the methodologies, there were indications of a change in the subjects' conception, in order to broaden their understanding and understanding of these methodologies. Therefore, it is concluded that, in order for PR and IM to be more present in the daily routine of Mathematics classes, they need to be treated in teachers' education courses, both theoretically and through more practical approaches.
Keywords: Teaching and learning methodology. Teachers' education. Degree in Mathematics.

1 INTRODUÇÃO

Este artigo apresenta resultados de uma pesquisa que teve como objetivo levantar e compreender as concepções de alunos de um curso de Licenciatura em Matemática sobre duas metodologias de ensino e aprendizagem de Matemática: a resolução de problemas (RP) e a investigação matemática (IM). Sendo assim, durante todo o processo de coleta e análise dos dados, buscou-se responder à seguinte questão norteadora: *Que concepções licenciandos em Matemática têm a respeito do uso das metodologias de RP e de IM na Educação Básica?*

O termo *concepções* está fundamentado em Ponte (1992), a saber: algo de natureza cognitiva, formado em um processo ao mesmo tempo individual (resultado da própria experiência) e social (fruto do confronto das suas elaborações com as dos outros). Segundo o autor, as concepções estruturam o sentido que damos às coisas. Para Barbosa (2001, p. 11), as concepções "[...] funcionam como lentes pelas quais os sujeitos dão significado às suas experiências". Portanto, neste artigo, concepções referem-se a compreensões, entendimentos, percepções dos sujeitos.

Nesse sentido é que se torna relevante trabalhar tais questões em cursos de formação inicial de professores, pois tal como apontado por Giani e Garnica (2004), as concepções dos professores são constituídas e se efetivam durante o processo de formação docente e tendem a ser, posteriormente, reproduzidas em sala de aula. Esses autores indicam, portanto, que as concepções do professor influenciam sua prática docente em sala de aula. Isso também é posto por Fiorentini[5] (1995, p. 4, apud MENEGHETTI; TREVISANI, 2013, p.157-158): "[...] por trás de cada modo de ensinar, esconde-se uma particular concepção de aprendizagem, de ensino, de Matemática e de Educação". Dessa forma, Cury (1999) indica que mudanças nas práticas e concepções dos professores, se necessárias e desejadas, só serão possíveis a partir de suas reflexões sobre as concepções e práticas em questão.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

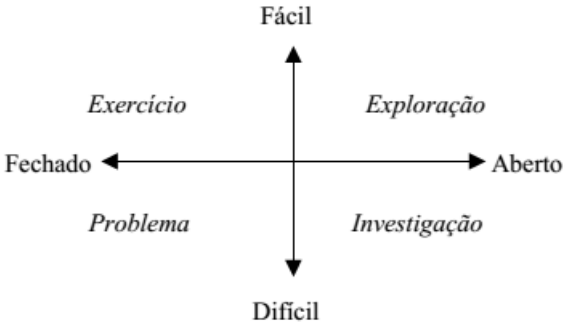
O tema RP, segundo Onuchic (1999), entrou em pauta mais fortemente com as discussões do NCTM – *National Council of Teachers of Mathematics* (em português, Conselho Nacional de Professores de Matemática), nos Estados Unidos, a partir de 1980, que recomendava a RP como foco para a Matemática escolar. Uma década depois, em Portugal, a IM surgiu e vem sendo utilizada desde então como uma abordagem distinta da RP (PONTE, 2007), constituindo-se em um campo próprio de pesquisa, que já possui muitas contribuições específicas para a Educação Matemática.

É importante ressaltar que as tarefas – propostas de trabalho formuladas usualmente pelo professor (PONTE, 2014) – fornecidas aos estudantes, no uso da RP e da IM como metodologias de ensino e aprendizagem, são, respectivamente, problemas e investigações. A figura 1 ilustra a diferença existente entre essas duas tarefas.

[5] FIORENTINI, D. Alguns modos de ver e conceber o ensino da Matemática no Brasil. **Zetetiké**, Campinas, ano 3, n. 4, p. 1-37. 1995.

Como se pode notar, os problemas apresentam uma estrutura fechada (uma ou mais respostas certas e com várias possibilidades de resolução) e um elevado nível de dificuldade. O que os distinguem dos exercícios é apenas o grau de dificuldade: exercícios são considerados fáceis. Por outro lado, as investigações e as explorações possuem uma estrutura aberta (diversas respostas e resoluções corretas), sendo que, enquanto as primeiras são difíceis, as últimas são relativamente mais fáceis.

Figura 1: Os diversos tipos de tarefas, em termos do grau de dificuldade e de abertura



Fonte: Ponte (2003, p. 5).

Apesar dessa distinção entre problemas e investigações, fornecida por Ponte (2003), há autores que não evidenciam tais diferenças. Vieira e Allevato (2012) defendem que estabelecer fronteiras entre problemas e investigações não é um trabalho fácil. De acordo com Lamonato e Passos (2011, p. 70),

> O entendimento dado à resolução de problemas pode distanciá-la ou aproximá-la da exploração-investigação matemática, dependendo da proposta apresentada, dos objetivos e das ações do professor, das oportunidades aproveitadas na sala de aula e da atividade do aluno.

Inclusive, segundo Onuchic – grande referência no Brasil na linha de pesquisa de RP –, tudo é problema, sendo este definido por ela como "[...] tudo aquilo que não se sabe fazer mas que se está interessado em resolver [...]" (ONUCHIC, 1999, p. 215).

> É verdade que, entre os diversos autores e trabalhos já publicados, podem ser encontrados muitos conceitos de *problema* adjetivados, refletindo qualidades específicas que deles se espera: problemas de fixação, exercícios, problemas abertos, problemas fechados, problemas padrão, problemas rotineiros e não rotineiros, quebra-cabeças, desafios, entre outros. Na realidade, são todos problemas, e os adjetivos expressam diferentes tipos de problema que admitem, para sua resolução, diferentes estratégias. (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p. 81).

Entretanto, mesmo reconhecendo as concepções de diversos pesquisadores da área de RP, as autoras deste texto adotaram a definição de Ponte (2003) para problemas e investigações, concebendo a RP e a IM como metodologias distintas de ensino e aprendizagem de Matemática.

Schroeder e Lester[6] (1989, apud ONUCHIC; ALLEVATO, 2011) explicitam três abordagens para o trabalho com a RP: 1. Ensinar *sobre* RP; 2. Ensinar Matemática *para* resolver problemas; e 3. Ensinar Matemática *através* da RP. A primeira delas consiste em teorizar *sobre* o tema, tratando a RP como um conteúdo do currículo, isto é, ensinando técnicas e estratégias de RP matemáticos. Na segunda abordagem, o professor deveria primeiro formalizar os conteúdos

[6] SCHROEDER, T. L.; LESTER JR, F. K. Developing understanding in mathematics via problem solving. In: TRAFTON, P. R.; SHULTE, A. P. (Eds.). **New directions for elementary school mathematics**. Reston: NCTM, 1989. p. 31-42.

matemáticos *para* que, em seguida, os estudantes possam aplicá-los na RP. Por fim, na terceira empregam-se os problemas não só como um propósito *através* dos quais se aprende Matemática, mas inclusive como ponto de partida para isso; sendo a RP, nesta última abordagem, considerada uma metodologia de ensino e aprendizagem de Matemática (ONUCHIC, 1999).

O docente que deseja adotar essa metodologia em suas aulas pode seguir a proposta atual composta por dez etapas:

> [...] (1) proposição do problema, (2) leitura individual, (3) leitura em conjunto, (4) resolução do problema, (5) observar e incentivar, (6) registro das soluções na lousa, (7) plenária, (8) busca do consenso, (9) formalização do conteúdo, (10) proposição e resolução de novos problemas. (ALLEVATO; ONUCHIC, 2014, p. 45).

Além disso, há também a possibilidade de os alunos formularem seus próprios problemas, algo que pode ocorrer antes, durante ou depois da RP. Discussões em torno desse assunto são abordadas, por exemplo, em Silver (1996). O autor defende que a formulação de problemas ajuda no sentido de desenvolver relações pessoais com a Matemática. Portanto, os alunos podem ser estimulados a formularem seus próprios problemas durante o processo de aprendizagem.

Sendo assim, as autoras deste artigo entendem que a formulação de problemas pode ser vista como uma etapa mais avançada da RP, mas também como um movimento que vai ao encontro das tarefas realizadas durante a IM, uma vez que

> Investigar, em Matemática, inclui a formulação de questões, que frequentemente evoluem à medida que o trabalho avança. [...] Quando procuramos obter uma melhor percepção da situação, estamos a “explorá-la”. Mais tarde, quando a nossa pergunta é formulada de modo claro, dando unidade ao trabalho, podemos dizer que temos um “problema”. (PONTE, 2010, p. 15).

Segundo Ponte et al. (1998), ao trabalhar com a IM como metodologia de ensino e aprendizagem de Matemática, o docente deverá efetuar as seguintes ações:

i. Desafiar os alunos, propondo tarefas que estimulem o espírito investigativo e criando um ambiente adequado para isso;
ii. Avaliar o progresso dos estudantes, acompanhando a leitura/compreensão da tarefa e o desenvolvimento dela;
iii. Raciocinar matematicamente, durante a aula, na frente dos alunos, manifestando assim seu modo de pensar a fim de dar o exemplo para a turma;
iv. Apoiar o trabalho dos alunos, garantindo a exploração-investigação da tarefa proposta e a gestão da situação didática ao promover a participação equilibrada de todos;
v. Fornecer e recordar informações, provendo a reflexão dos estudantes de modo a relacionar o trabalho atual com ideias já conhecidas.

Dessa maneira, é necessário que o professor esteja atento, principalmente, a dois aspectos fundamentais: dar autonomia aos estudantes para que não comprometa a autoria deles na investigação e garantir que o trabalho dos alunos flua mediante os objetivos da(s) aula(s).

A respeito da IM, Ponte (2003, p. 11) afirma que o trabalho com as explorações e investigações permite “[...] dar ao aluno a responsabilidade de descobrir e de justificar as suas descobertas”. Ainda segundo o autor, “se se pretende que os alunos desenvolvam plenamente as suas competências matemáticas e assumam uma visão alargada da natureza desta ciência, então as tarefas de exploração e investigação têm de ter um papel importante na sala de aula” (p. 12).

A fim de extrair ao máximo os potenciais e contornar eventuais obstáculos no uso da RP e da IM em sala de aula da Educação Básica, é fundamental que o professor de Matemática aprenda a trabalhar com elas, melhor ainda se tal aprendizagem começar já na formação inicial docente.

Fiorentini (2012) descreve seis diferentes abordagens para se trabalhar a RP e a IM em cursos de formação de professores de Matemática. Além da possibilidade de empregar aquelas já citadas anteriormente, a respeito da RP (ensinar *sobre/para/através* a/da RP), ele nos chama a atenção para mais uma abordagem visando principalmente a formação docente. Nela, o autor propõe que haja uma "[...] intencionalidade explícita de *problematizar* e *teorizar* a vivência, na formação inicial, de práticas *com/através ou via* resolução de problemas" (p. 70). Segundo ele, isso deve ser desenvolvido tanto em disciplinas específicas de matemática quanto naquelas de cunho didático-pedagógico.

Carrillo e Contreras[7] (1995, apud GIANI; GARNICA, 2004) afirmam que "[...] a tendência dos professores é reproduzir, sobretudo durante o primeiro período de seu exercício profissional, os modelos pelos quais foram formados" (p. 3). Nesse sentido, faz-se importante que reflexões sobre concepções e práticas sejam proporcionadas efetivamente em cursos de formação inicial de professores, o que vai ao encontro do trabalho ora apresentado.

Por isso, concordando com Llinares e Sanchez[8] (1989, apud CURY, 1999), os cursos de formação docente deveriam enfatizar não só a aquisição de conhecimento matemático, mas também a possibilidade de desenvolver experiências de ensino em que as crenças desses futuros profissionais viessem à tona e pudessem ser discutidas. Afinal, "[...] as crenças permanentes podem ser desafiadas e começam a mudar quando é dada a oportunidade aos estudantes de controlarem suas próprias aprendizagens e construírem uma compreensão da matemática" (SANTOS[9], 1993, apud CURY, 1999, p. 34).

Dessa forma, mediante análise das afirmações mencionadas, pode-se admitir que é importante focalizar, em cursos de formação inicial docente, o desenvolvimento de conteúdos matemáticos através de metodologias de ensino e aprendizagem tais como as abordadas neste trabalho.

3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

A metodologia seguiu os pressupostos teóricos da abordagem qualitativa de pesquisa. Isso porque a preocupação central foi com o processo e não com o produto, coletando-se dados predominantemente descritivos e dando a devida atenção à perspectiva dos participantes (LÜDKE; ANDRÉ, 2013).

A pesquisa consistiu em analisar o uso de duas metodologias de ensino e aprendizagem de Matemática (RP e IM), durante o primeiro semestre de 2015, quando empregadas em uma turma de 13 licenciandos em Matemática (sujeitos da pesquisa, denominados de L1, L2, ..., L13), ao longo de cinco horas-aula, como parte das atividades da disciplina Prática Pedagógica III. Tal disciplina tinha como conteúdo programático a RP e a avaliação do ponto de vista da Educação Matemática e era oferecida no terceiro semestre do curso, em uma instituição pública de Ensino Superior no interior do estado de São Paulo.

---

[7] CARRILO, J.; CONTRERAS, L. C. Un modelo de categorías e indicadores para el análisis de las concepciones del profesor sobre la matemática y su enseñanza. **Educación Matemática**, v. 7, n.3, p. 79-92, 1995.
[8] LLINARES, S.; SÁNCHEZ, V. La creencias epistemologicas sobre la naturaleza de las matemáticas y su enseñanza y el proceso de llegar a ser un profesor. **Revista de Educación**, n. 209, p. 389-406, 1989.
[9] SANTOS, V. M. P. The impact of an innovative mathematics course on the beliefs of prospective elementary teachers. In: ANNUAL MEETING OF THE AMERICAN EDUCATIONAL RESEARCH ASSOCIATION, 1993, Atlanta/Georgia. **Anais...** Atlanta, 1993.

Sobre a experiência docente inicial dos sujeitos, ou seja, antes do uso da RP e IM, pode-se afirmar que: sete licenciandos afirmaram não ter desenvolvido nenhuma atividade prévia como professor, ao passo que os outros seis disseram possuir alguma experiência anterior, sendo que para a maioria desses (5) ela foi realizada no Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID) e para o outro ela ocorreu na forma de aulas particulares.

No quadro curricular do curso em questão, as disciplinas de Educação/Educação Matemática ofertadas aos licenciandos antes do terceiro semestre eram: História da Educação, História da Educação no Brasil, Filosofia da Educação e Prática Pedagógica I e II. Nenhuma delas abordava diretamente metodologias de ensino e aprendizagem de Matemática, apenas conteúdos relacionados à educação no sentido geral e à legislação educacional ou ao uso da informática e da história na Educação Matemática. Mesmo a disciplina Didática, alocada no terceiro semestre, que tratava da dinâmica professor-aluno-conhecimento, não discutia metodologias voltadas ao ensino de Matemática.

A coleta de dados ocorreu através da aplicação de questionários e de fichas de tarefas e da realização de observação participante.

Os questionários foram entregues aos sujeitos em dois momentos de avaliação das concepções: inicial e final, isto é, antes e depois do trabalho envolvendo o uso das metodologias de RP e IM. A avaliação inicial (denominada diagnóstica) focalizada neste artigo continha as seguintes questões: 1. Você conhece alguma metodologia de ensino? Qual(is)?; 2. Já ouviu falar sobre a metodologia de resolução de problemas? O que sabe sobre ela?; 3. Você conhece a metodologia de investigação matemática (ou exploração-investigação matemática)?; e 4. Em caso afirmativo, o que sabe sobre ela? A avaliação final foi composta por cinco questões abertas: 1. Explique o que é problema e investigação; 2. Existe diferença entre eles? Qual(is)?; 3. Cite a(s) metodologia(s) de ensino que você conhece; 4. O que você compreendeu a respeito da resolução de problemas?; e 5. Comente o que você entendeu sobre a investigação matemática.

Para empregar as metodologias em questão, elaborou-se duas fichas de tarefas (problema e investigação), cada uma contendo três de cada tipo. As fichas abordaram conteúdos matemáticos referentes à Educação Básica, mais especificamente operações aritméticas, regra de três simples, proporcionalidade, porcentagem, elaboração de fórmulas; tudo isso visando a introdução do conceito de função. Tanto os problemas quanto as investigações foram contextualizados em uma situação do cotidiano: consumo de energia elétrica. Esse tema foi escolhido porque, na época, era um assunto recorrente, dada a falta de oferta de energia e implantação do Sistema de Bandeiras Tarifárias (verde, amarela e vermelha) pela Agência Nacional de Energia Elétrica (Aneel) em 1º de janeiro de 2015.

Ademais, durante a observação participante, por meio de um diário de campo do pesquisador, foi elaborado um relatório. Tal documento narrava o ocorrido durante as aulas de RP e IM, segundo a percepção da professora-pesquisadora (PP) da disciplina Prática Pedagógica III. Os fatos relatados envolviam o passo a passo das aulas, as dúvidas dos licenciandos na resolução dos problemas e realização das investigações, as intervenções da PP nesses momentos, as trocas e reflexões acerca dos conhecimentos matemáticos e pedagógicos abordados.

Cronologicamente, as etapas de coleta de dados foram:

- Primeiro dia: aplicação da avaliação inicial (diagnóstica), no intuito de identificar as concepções prévias dos licenciandos a respeito da RP e da IM como metodologias de ensino e aprendizagem de Matemática;

- Segundo dia: aula de RP (fichas de problemas) segundo as etapas indicadas em Allevato e Onuchic (2014), com o propósito de empregar essa metodologia e os licenciandos a vivenciarem na condição de alunos, enquanto a PP desempenhava o papel de professora;
- Terceiro dia: aula de IM (fichas de investigações) de acordo com as ações propostas Ponte et al. (1998), com o mesmo objetivo do dia anterior;
- Quarto dia: finalização das atividades da aula de IM;
- Quinto dia: aplicação da avaliação final, visando levantar as concepções finais dos licenciandos sobre RP e IM, ou seja, após o uso dessas metodologias.

A disciplina Prática Pedagógica III tinha carga horária de quatro aulas semanais, divididas em dois dias. Sendo assim, cada um dos dias de coleta de dados durou duas horas-aula, ou seja, uma hora e quarenta minutos.

Observa-se que, entre o primeiro dia e os seguintes foram trabalhados com a turma, em paralelo, trechos dos trabalhos de Onuchic (1999), Onuchic e Allevato (2011), Ponte (2003) e Ponte et al. (1998), que abordam a RP e a IM como metodologias de ensino e aprendizagem de Matemática. O assunto foi discutido por meio de aula expositiva e dialogada, com o auxílio da apresentação de *slides* em projetor multimídia.

Com os dados em mãos, efetuou-se a leitura dos questionários e do relatório de observação, com o propósito de organizar tais dados, analisá-los e discuti-los à luz da teoria.

4 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS DADOS

Para a análise dos dados foram estabelecidas duas categorias: 1) Concepções iniciais dos licenciandos a respeito das metodologias de RP e IM; e 2) Concepções finais dos licenciandos sobre a RP e a IM, ou seja, depois do uso dessas metodologias no processo de ensino e aprendizagem de Matemática; com cada uma delas contendo subcategorias para melhor organização e análise.

A *primeira categoria*, 1) Concepções iniciais dos licenciandos a respeito das metodologias de RP e IM, está dividida em três subcategorias:

a) Metodologias de ensino e aprendizagem citadas pelos sujeitos;
b) Compreensões dos licenciandos quanto à RP;
c) Entendimentos dos licenciandos sobre a IM.

Quanto à *subcategoria* 1a) Metodologias de ensino e aprendizagem citadas pelos sujeitos, apenas dois dos 13 sujeitos indicaram a RP como uma metodologia de ensino e aprendizagem de Matemática. Ninguém citou a IM. As demais metodologias elencadas foram: tradicional (denominada por eles de aula expositiva), modelagem matemática e etnomatemática.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de Matemática (BRASIL, 1998), a metodologia tradicional no ensino de Matemática é aquela na qual o professor apresenta o conteúdo, a partir de definições, exemplos e propriedades, e em seguida propõe exercícios para fixação e aplicação, supondo que os estudantes aprendam pela reprodução do que foi exposto. Essa metodologia pode forçar os estudantes a apenas reproduzir mecanicamente o que foi explicado, em geral não dá oportunidade para que eles pensem, raciocinem além daquilo que foi apresentado, fazendo assim com que eles só enxerguem o óbvio em diversas situações.

Além dessas metodologias, na *subcategoria* 1a) os licenciandos também listaram certos recursos para o ensino: jogos matemáticos, história da Matemática, softwares e computadores (TIC). Eles também citaram a questão de se ensinar de modo interdisciplinar (aspecto, característica educacional) e por meio da realização de seminários (que corresponde a uma estratégia de ensino/avaliação). Isso demonstra que pode ocorrer de o futuro professor acabar confundindo recursos, estratégias e aspectos educacionais com metodologias de ensino e aprendizagem, o que reforça a importância de se abordar/vivenciar as diferenças entre eles em curso de formação inicial docente.

Sobre a *subcategoria* 1b) Compreensões dos licenciandos quanto à RP, apesar de a maioria dos sujeitos (nove dentre os 13) ter declarado saber do que se trata a metodologia de RP, pode-se afirmar que as percepções apresentadas por eles eram bastante superficiais e incompletas.

O sujeito L3 até admitiu isso, em suas palavras: “Já ouvi falar [sobre a RP], porém tenho pouco conhecimento”. Outros inclusive, como é o caso de L6, fizeram uso incorreto de terminologias, ao dizer: “que o aluno aprenderia um assunto através da resolução de exercícios”. Nota-se, nesse exemplo, que L6 utilizou o termo aprendizagem através da resolução de exercícios em vez de aprendizagem/ensino através da RP. Demais casos no mesmo sentido foram os de L10, L12 e L13, que perceberam o significado de problema como sinônimo de erro/falha cometido pelo estudante durante a aprendizagem de Matemática. Por outro lado, L1, L4 e L8 trataram da metodologia de RP, entretanto de modo marginal: L1 a associou com a possibilidade de despertar a curiosidade do aprendiz pela Matemática; L8 a relacionou com problemas referentes à realidade/cotidiano do aluno; e L4 disse que a RP e a modelagem matemática se complementam; mas nenhum deles tentou definir/conceituar a RP como metodologia de ensino e aprendizagem.

Já o licenciando L9 tinha uma visão do ensino de Matemática *para* resolver problemas, mas não *através* da RP, abordagem esta que corresponde à metodologia de ensino e aprendizagem de Matemática. “Tenho como concepção que se trata de resolver problemas como forma de fixação do aprendizado” foi a resposta dada por L9. Tal colocação não está completamente errada, apenas não corresponde à RP como metodologia de ensino e aprendizagem de Matemática. Schroeder e Lester[10] (1989, apud ONUCHIC; ALLEVATO, 2011) esclarecem que, embora na teoria as três abordagens (ensinar *sobre/para/*através da RP) possam ser separadas, na prática elas se combinam e geralmente acontecem de formas e sequências variadas. Inclusive, a questão de consolidar/aprofundar o conteúdo que foi aprendido por meio da RP consiste na última etapa proposta por Allevato e Onuchic (2014, p. 45), que seria: (10) proposição e resolução de novos problemas. (ALLEVATO; ONUCHIC, 2014, p. 45).

A respeito da *subcategoria* 1c) Entendimentos dos licenciandos sobre a IM, quase todos (9) responderam não conhecer a metodologia de IM. Apesar de alguns (4) afirmarem saber do que se trata, L10 respondeu que não saberia defini-la. Outros até tentaram, mas ninguém conseguiu conceituar a IM por completo como uma metodologia de ensino e aprendizagem de Matemática, principalmente quanto às ações docentes a serem executadas, como se pode observar nas suas respostas: “O aluno tem que pesquisar sobre os conteúdos matemáticos” (resposta de L1); “Imagino que seja uma busca de conceitos a partir dos conhecimentos demonstrados pelo aluno” (resposta de L6); e “[...] acredito que ela se dá através da exploração de possíveis soluções para problemas, mas com organização do passo a passo” (resposta de L9). É claro que nas respostas há elementos condizentes com a metodologia de IM e, por meio da união de todas elas, pode-se até chegar a uma definição mais plausível.

[10] SCHROEDER, T. L.; LESTER JR, F. K. Developing understanding in mathematics via problem solving. In: TRAFTON, P. R.; SHULTE, A. P. (Eds.). **New directions for elementary school mathematics**. Reston: NCTM, 1989. p. 31-42.

É notório que, enquanto nove licenciandos afirmaram saber algo a respeito da RP e quatro não, o placar se inverteu quanto à IM. Isso é compreensível, já que a linha de pesquisa de RP (e consequentemente suas publicações) tem sido bastante difundida no Brasil (o uso da RP no ensino, inclusive, é defendido pelos próprios PCN), enquanto a IM é mais fortemente discutida e aplicada em Portugal. Mesmo assim, como a IM é um campo de pesquisa com contribuições específicas para a Educação Matemática, vale a pena estudá-la e saber empregá-la em sala de aula.

O fato de a maioria dos licenciandos não ter experiência docente prévia a esta pesquisa pode ser um dos motivos que justifique suas concepções iniciais incompletas, superficiais e marginais.

A *segunda categoria*, 2) Concepções finais dos licenciandos sobre a RP e a IM, está separada em quatro subcategorias:

a) Metodologias de ensino e aprendizagem citadas pelos licenciandos;
b) Diferenças entre problema e investigação, segundo os sujeitos;
c) Compreensões dos licenciandos quanto à RP;
d) Entendimentos dos licenciandos sobre a IM.

Em relação à *subcategoria* 2a) Metodologias de ensino e aprendizagem citadas pelos licenciandos, nove deles apontaram tanto a RP como a IM, enquanto quatro sujeitos indicaram apenas a RP. Aqueles (licenciandos L3 e L8) que já percebiam inicialmente a RP como uma metodologia, retificaram suas concepções nessa nova avaliação. Além da RP e da IM, as outras metodologias elencadas correspondem às mesmas respondidas no momento da avaliação inicial.

É interessante notar que todos os licenciandos perceberam a RP como uma metodologia de ensino e aprendizagem de Matemática, mas isso não foi unânime com a IM. Possivelmente eles compreenderam a IM como RP e por isso não a consideraram isoladamente, não a reconheceram como uma metodologia própria. Tal situação reforça a necessidade de implementação dessa última metodologia em cursos de formação docente e de modo conjunto com a RP, a fim de que o futuro professor possa conhecê-la melhor, compará-las e ter discussões e embasamentos para utilizá-las futuramente em sala de aula.

Quanto à *subcategoria* 2b) Diferenças entre problema e investigação, segundo os sujeitos, todos conseguiram perceber distinções. Boa parte deles (10) definiu corretamente o que seria um problema: L1 disse que se trata de "[...] questões fechadas [...] tem uma solução", coerente com a definição de Ponte (2003); L6 complementou afirmando que é algo que "[...] ainda não sabemos resolver, quando descobrirmos sua solução deixa de ser um problema", na mesma linha de pensamento de Onuchic (1999, p. 215), ou seja, "[...] problema é tudo aquilo que não se sabe fazer mas que se está interessado em resolver [...]". Os demais (3) ainda confundiram o conceito de problema com o de exercício, como se pode ver na resposta de L3: "problemas [...] tentam estimular o interesse dos alunos com exercícios baseados na pesquisa", e na de L5: "problema é um exercício apenas aplicado para o treino de determinado assunto". Mas quase ninguém conseguiu explicar de modo completo o que seria uma investigação. A resposta mais significativa do ponto de vista de Ponte (2003) foi a de L12: "Os problemas são tarefas fechadas e com dificuldade elevada. Tarefas de exploração são fáceis e com estruturas abertas. A investigação tem um grau de dificuldade, mas também uma estrutura aberta".

No que se refere à *subcategoria* 2c) Compreensões dos licenciandos quanto à RP, essa foi mais satisfatória. Alguns (L1, L4, L7, L12 e L13) conseguiram identificar e também explicar (L1, L4 e L12) as três abordagens da RP (ensinar *sobre, para* e *através* da RP) segundo o defendido por

Schroeder e Lester[11] (1989, apud ONUCHIC; ALLEVATO, 2011). Nesse quesito, a resposta de L12 se sobressaiu:

Há 3 maneiras ou etapas para ser mais precisa: 1-Sobre: ensinar sobre a resolução de problemas, trabalhar esse assunto como um conteúdo matemático. 2-Para: ensinar para é focar nas habilidades do aluno para resolver problemas rotineiros e não rotineiros e que eles consigam transferir o que eles aprenderam para outro problema. 3-Através: alunos devem confrontar situações problemáticas e usar as noções prévias e construir uma nova compreensão.

Ainda relativa à subcategoria 2c), outros licenciandos (L5 e L11) destacaram o fato de haver vários modos de resolução para um mesmo problema; houve um (L7) que apontou a oportunidade de se trabalhar a Matemática contextualizada à realidade e outros (L8, L9 e L10) que citaram as etapas seguidas pelo aluno na RP. Nas palavras de L8: "[...] o problema primeiramente precisa ser analisado, depois encontrada uma maneira de resolvê-lo. Após resolvido, deve-se voltar ao enunciado e equipará-lo com a solução". Vale observar que um sujeito (L3) faltou na aula de RP, portanto suas concepções iniciais não sofreram interferência do uso dessa metodologia.

Na *subcategoria* 2d) Entendimentos dos licenciandos sobre a IM, verificou-se que a maioria deles (9) não conseguiu discursar sobre ela como metodologia de ensino e aprendizagem, comentando somente das explorações e investigações, que são as tarefas propostas pelo professor quando utiliza tal metodologia em suas aulas. Porém, algumas ideias chamaram atenção: L1 argumentou que a IM pode estimular o raciocínio matemático devido ao fato de envolver vários conteúdos; L4 disse que o foco da IM não é a solução (resposta da questão), mas a investigação dos meios para se chegar lá; L6 respondeu que a IM "é uma metodologia em que o aluno busca caminhos, seja pesquisando, seja retomando conteúdos anteriores, até chegar a materialização do aprendizado"; L2 e L7 consideraram relevante expor que, em suas concepções, uma investigação matemática demanda mais tempo e é mais trabalhosa do que a exploração ou a RP.

Entende-se que a falta de conhecimento dos sujeitos sobre RP e IM, expressada por concepções vagas sobre as metodologias, pode ser devido à forma como se vem abordando-as em cursos de formação docente. Pois, como defende Fiorentini (2012, p. 75-76),

> [...] para uma formação emancipatória do professor, não é suficiente o professor receber ensino sobre RP ou vivenciar uma prática de ensino através de RP. É preciso que ele possa se constituir também em um estudioso das práticas de ensinar e aprender matemática em ambientes exploratório-investigativos ou de resolução de problemas. Que o professor possa, ao mesmo tempo, experienciar e refletir/analisar outros modos de estabelecer relação com o conhecimento em ambientes de exploração, investigação ou de resolução de problemas seja enquanto aprendiz na formação inicial seja enquanto docente sobre sua prática com os alunos.

Apesar dos apontamentos feitos por esta pesquisa e do trabalho realizado com os licenciandos, está claro que a formação propiciada ainda não é suficiente para preencher todas as lacunas conceituais e metodológicas desses sujeitos sobre o assunto. Pelo contrário, a ideia era dar o primeiro passo no sentido de oportunizar a vivência, a problematização e a reflexão conforme proposto por Fiorentini (2012).

[11] SCHROEDER, T. L.; LESTER JR, F. K. Developing understanding in mathematics via problem solving. In: TRAFTON, P. R.; SHULTE, A. P. (Eds.). **New directions for elementary school mathematics**. Reston: NCTM, 1989. p. 31-42.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho procurou levantar e compreender as concepções de licenciandos em Matemática sobre o uso da RP e IM na Educação Básica, por meio da utilização de tais metodologias em sala de aula. Foi uma experiência realizada em curso de formação inicial docente, na qual os licenciandos desempenharam o papel de alunos e a primeira autora deste artigo o papel de professora.

Após análise e discussão dos dados, os resultados indicam que, no início, antes do uso das metodologias, os licenciandos apresentavam uma concepção muito vaga sobre os assuntos, mostrando que eles não tinham conhecimento sobre o significado do uso das metodologias de RP e de IM no processo de ensino e aprendizagem de Matemática. Após o emprego das metodologias, houve indícios de mudança na concepção dos sujeitos: todos passaram a conceber a RP como uma metodologia e a maioria também conseguiu fazer o mesmo com a IM; a totalidade dos licenciandos percebeu diferenças entre um problema e uma investigação (tarefas típicas da RP e da IM, respectivamente); além disso, evidenciou-se que os sujeitos ampliaram suas compreensões e entendimentos em relação às metodologias abordadas neste artigo.

Diante disso, conclui-se que, para que as metodologias de RP e IM possam estar mais presentes no cotidiano das aulas de Matemática, elas necessitam ser tratadas em cursos de formação de professores, tanto teoricamente como por meio de abordagens mais práticas, assim como defende Fiorentini (2012).

REFERÊNCIAS

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática: por que através da resolução de problemas? In: ONUCHIC et al. (Org.). **Resolução de problemas**: teoria e prática. 1. ed. Jundiaí: Paco Editorial, 2014. p. 35-52.

BARBOSA, J. C. Modelagem matemática e os professores: a questão da formação. **Bolema - Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, v. 14, n. 15, p. 5-23, 2001.

BRASIL. Ministério da Educação/Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**: Matemática. Brasília, DF, 1998. 152 p. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf. Acesso em: 5 jan. 2017.

CURY, H. N. Concepções e crenças dos professores de Matemática: pesquisas realizadas e significado dos termos utilizados. **Bolema - Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, v. 12, n. 13, p. 29-43, 1999.

FIORENTINI, D. Formação de professores a partir da vivência e da análise de práticas exploratório-investigativas e problematizadoras de ensinar e aprender Matemática. **Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática**, Costa Rica, v. 7, n. 10, p. 63-78, 2012.

GIANI, L. M. C. C.; GARNICA, A. V. M. (2004). Um olhar qualitativo sobre as concepções dos professores de Matemática. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA E ESTUDOS QUALITATIVOS, 2., 2004, Bauru, SP. **Anais...** Bauru: UNESP, 2004. Disponível em: http://www.sepq.org.br/IIsipeq/anais//pdf/gt1/07.pdf. Acesso em: 09 jul. 2015.

LAMONATO, M.; PASSOS, C. L. B. Discutindo resolução de problemas e exploração-investigação matemática: reflexões para o ensino de Matemática. **Zetetiké**, Campinas, v. 19, n. 36, p. 51-74, 2011.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em educação: abordagens qualitativas.** 2. ed. Rio de Janeiro: E.P.U., 2013.

MENEGHETTI, R. C. G.; TREVISANI, F. M. Futuros matemáticos e suas concepções sobre o conhecimento matemático e seu ensino e aprendizagem. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 15, n. 1, p. 147-178, 2013. Disponível em: http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/7058/pdf. Acesso em: 14 mar. 2018.

ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). **Pesquisa em Educação Matemática**: concepções e perspectivas. São Paulo: UNESP, 1999. p. 199-218.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Pesquisa em resolução de problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **Bolema**: Boletim de Educação Matemática, Rio Claro, v. 25, n. 41, p. 73-98, 2011.

PONTE, J. P. Concepções dos professores de Matemática e processos de formação. In: BROWN, M. et al. (Orgs.). **Educação Matemática**: temas de investigação. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional, 1992, p. 185-239.

PONTE, J. P. Investigar, ensinar e aprender. In: PROFMAT, 2003, Lisboa. **Actas...** Lisboa: APM, 2003. p. 1-23. Disponível em: http://www.ime.usp.br/~dpdias/2012/MAT1500-3-Ponte(Profmat).pdf. Acesso em: 09 out. 2016.

PONTE, J. P. Investigations and explorations in the mathematics classroom. **ZDM Mathematics Education**, v. 39, n. 5, p. 1-25, 2007. Disponível em: http://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/3978/1/07-Ponte%20%28Paper-ZDM%29.pdf. Acesso em: 12 fev. 2017.

PONTE, J. P. Explorar e investigar em Matemática: uma actividade fundamental no ensino e na aprendizagem. **Unión**: Revista Iberoamericana de Educación Matemática, Rio Claro, n. 21, p. 13-30, 2010.

PONTE, J. P. Tarefas no ensino e na aprendizagem da Matemática. In: ______. (Org.). **Práticas profissionais dos professores de Matemática**. Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, 2014. p. 13-27.

PONTE, J. P. et al. O trabalho do professor numa aula de investigação matemática. **Quadrante**, Lisboa, v. 7, n. 2, p. 1-28, 1998. Disponível em: http://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/3042/1/98-Ponte%20etc%20Quadrante-MPT_.pdf. Acesso em: 09 out. 2016.

SILVER, E. A. Acerca da formulação de problemas de Matemática. In: ABRANTES, P.; LEAL, L. C.; PONTE, J. P. (Orgs.). **Investigar para aprender Matemática**: textos selecionados. Lisboa: Projeto MPT e APM, 1996. p. 139-162.

VIEIRA, G.; ALLEVATO, N. S. G. Tecendo relações entre resolução de problemas e investigações matemáticas nos anos finais do Ensino Fundamental. **Anais do Encontro de Produção Discente PUCSP/Cruzeiro do Sul**, São Paulo, v. 1, n. 1, p. 1-13, 2012.

O NÚMERO DE EULER: CONTRIBUIÇÕES E POSSIBILIDADES PARA A ESCOLARIDADE BÁSICA

EULER'S NUMBER: CONTRIBUTIONS AND POSSIBILITIES FOR BASIC SCHOOLING

POMMER, Wagner Marcelo[1]

RESUMO

Na escolaridade básica, o momento de introdução dos números irracionais – um tema teórico – revela uma série de obstáculos de ordem epistemológica e didática, principalmente situados numa exposição oposta ao modo pragmático, tal como é realizado o desenvolvimento dos números racionais. Dentre os poucos números irracionais usualmente trabalhados no currículo de Matemática Elementar, o presente texto se propôs a apontar e discutir referenciais que permitam a abordagem significativa do número de Euler na escolaridade básica. O referencial teórico se situa no entendimento do processo de transposição didática, conforme Chevallard, Bosch e Gascón (2001), que permite compreender o conjunto das transformações que sofre certo saber científico, para se constituir em objeto de ensino compreensível ao aprendiz. Como metodologia recorremos à epistemologia do conhecimento matemático dos números reais para levantar mecanismos de ordem didática com relação ao número de Euler. Nossas análises apontam para a epistemologia presente no par exato/aproximado, associado à ideia de infinito, que podem intercambiar com aspectos da problematização, do conhecimento como rede de significados (Machado, 2001) e o uso das fontes computacionais como portadores de um espaço de significação para a abordagem do número de Euler no ensino básico.

Palavras-chave: Números Irracionais. Número de Euler. Transposição Didática. Aproximação.

ABSTRACT

At basic education, the moment of introduction of irrational numbers - a theoretical theme - reveals a series of epistemological and didactic obstacles, mainly situated in an exposition opposite to the pragmatic way, so is the development of rational numbers is carried out. Among the few irrational numbers usually worked at the Elementary Mathematics curriculum, the present text proposed to point out and discuss references that allow a significant approach to Euler's number at basic schooling. The theoretical reference is situated in the understanding of the process of didactic transposition, according to Chevallard, Bosch and Gascón (2001), that allows to understand the set of transformations that suffers a certain scientific knowledge, in order to constitute an object of education comprehensible to the learner. As methodology, we used the epistemology of the real numbers' mathematical knowledge to raise mechanisms of didactic order in relation to the Euler's number. Our analyzes point to the epistemology present in the exact/approximate pair, associated with the idea of infinity, which can be interchanged with aspects of problematization, knowledge as a meaning network (Machado, 2001) and the use of computational sources as a space of significance for approaching Euler's number at elementary education.

Keywords: Irrational numbers. Euler's number. Didactic transposition. Approximation.

1 INTRODUÇÃO

Os números representam um campo de importância tanto em Matemática como nas várias ciências. Na Matemática Elementar, a grande maioria dos números reais é do tipo irracional. Porém, no ensino fundamental e médio, onde se predomina o contexto dos números reais, Leviathan (2004) destaca que os números inteiros e racionais são estudados cuidadosamente, por diversos anos, mas os números irracionais são tratados de modo reduzido e simplificado.

[1] Doutor em Educação pela Universidade de São Paulo (FEUSP), São Paulo, Brasil. Docente da Universidade Federal de São Paulo (UNIFESP-Diadema), Departamento de Ciências Exatas e da Terra (DCET), Brasil. Endereço eletrônico: wagner.pommer@unifesp.br.

O ensino de Matemática, ao privilegiar o estudo pormenorizado dos números inteiros e racionais, faz uma escolha que não revela a importância dos números irracionais:

> Há muito se sabe, no entanto, que a maioria absoluta, a quase totalidade dos números reais existentes é constituída por números irracionais. Os outros, os racionais, constituem uma ínfima minoria, a despeito de o homem comum não ter contato senão com uns poucos números irracionais, ao longo da vida (MACHADO, 1990, p. 43-44).

Pesquisadores como Fischbein, Jehian e Cohen (1995), Soares, Ferreira e Moreira (1999), Rezende (2003), Zazkis e Sirotic (2004), Boff (2006), Sirotic e Zazkis (2007), Costa (2009), López (2010), Silva (2011) e Martins (2014) relatam a pouca ênfase dada ao ensino dos irracionais e também os escassos estudos e pesquisas acadêmicas focando explicitamente a conceituação de números irracionais, se considerarmos a inerente e complexa problemática da aprendizagem do referido assunto durante a escolaridade básica[2].

O relativo esquecimento dos números irracionais na Matemática Elementar tem, como principal motivo, que "[...] a matemática da escola básica é essencialmente concebida como um conjunto de aplicação de técnicas" (FISCHBEIN; JEHIAM; COHEN, 1995, p. 29, tradução nossa).

Para se fazer um trabalho de compreensão com relação ao entendimento dos diversos tipos de sistemas numéricos:

> [...] os conceitos de números naturais, racionais, irracionais e reais deveriam ser explicitamente e sistematicamente ensinados. Mas não estamos nos referindo somente aos conhecimentos técnicos, definições e procedimentos operativos. Também consideramos que a resolução de problemas propicia aflorar o pensamento intuitivo, sem o qual a Matemática se torna um mero esqueleto (FISCHBEIN; JEHIAM; COHEN, 1995, p. 43, tradução nossa).

Há outra ressalva. Dentre a diversa tipologia dos números irracionais, os documentos oficiais como os Parâmetros Curriculares Nacionais, descritos em Brasil (1997; 1998) e a Proposta Curricular, conforme São Paulo (2008), observam que é necessário o estudo do número Pi (π), de grande importância científica e do trabalho com as raízes enésimas irracionais.

A pesquisa com livros didáticos do Ensino Médio em autores como Silva (2011) e Pommer (2012) destaca que predomina a exploração de exemplos prototípicos, como as raízes enésimas irracionais, especialmente se focando na $\sqrt{2}$ e também no número irracional π.

Nesse contexto, Rezende (2003) aponta que o universo numérico apresentado aos nossos estudantes pelos manuais escolares se restringe aos números racionais acrescido de um conjunto enumerável de pouquíssimos números irracionais notáveis.

Os documentos oficiais, como os PCN, Brasil (1997; 1998) e a Proposta Curricular, descrita em São Paulo (2008), há indicação para se trabalhar os números irracionais em relação com situações que envolvem medições, com o uso de estimativas e cálculos aproximados, de acordo com a situação ou necessidade e, ainda, em conexão com a geometria.

Frente a esses indicadores, o estudo do número de Euler pode se constituir em alternativa para se explorar os números irracionais. Silva (2011) e Pommer (2012) apontam que o número de Euler, em alguns dos livros analisados, é brevemente citado no tema dos logaritmos, como uma possível base, denominando-se tais logaritmos de naturais, sem nenhum trabalho

[2] Estamos a considerar a escolaridade básica inserida nos pressupostos da Lei de Diretrizes e Bases da Educação, lei n. 9394, descrita em Brasil (1996), onde o ensino regular é composto pela educação infantil, o ensino fundamental e o ensino médio. Os artigos 21 e 22 desta lei expõem que o objetivo da Educação Básica é assegurar a todos os brasileiros a formação comum indispensável para o exercício da cidadania e fornecer-lhes os meios para progredir no trabalho e em estudos posteriores.

conceitual e procedimental. Geralmente, a referida menção ocorre como um comentário para ilustrar que existem diferentes Sistemas de Logaritmos. Assim, o número de Euler é apresentado como um pequeno acréscimo de informação, sendo um número irracional aproximado por $2{,}718281$, que pode ser obtido utilizando-se uma calculadora eletrônica. Mas por qual motivo esse logaritmo com base dada pelo número de Euler se denomina natural? E por que apresenta o valor aproximado de $2{,}718281$? Isto não é explicado nos livros didáticos da escolaridade básica.

Constatando-se a falta de material de pesquisa para esclarecer e introduzir o que representa o número de Euler, de modo a fazer sentido aos alunos da escolaridade básica, fica em aberto uma possibilidade e uma necessidade: discutir esse assunto, que está no contexto da Matemática Elementar, aliando-os à realidade e aos contextos didáticos e educativos da escolaridade básica.

Em essência, os números irracionais e, em particular, o número de Euler, representam uma ideia matemática sofisticada, não trivial e pouco intuitiva, dificultando a abordagem desse assunto em sala de aula. Esta intrínseca característica teórica remete a uma necessária busca de recursos, de ordem didática e epistemológica, para discutir a problemática de introduzir esse campo numérico, de modo significativo, no ensino básico.

Nesse entorno, colocamos a questão de base que pretendemos explorar: quais os referenciais que poderiam nortear a apresentação e o desenvolvimento do número de Euler no ensino de Matemática Elementar?

2 OS REFERENCIAIS TEÓRICOS

Diversos autores como Lima (1983) e Iezzi (2006) apontam que a apresentação usual do número de Euler se inicia pela definição $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Nesse formato, após a exposição da definição, é costume seguir um trabalho de desenvolvimento fundamentado na exposição através da escrita algébrica, própria do saber matemático, com as devidas demonstrações e exposições de teoremas e axiomas. Complementa esta abordagem a citação de alguns exemplos prototípicos, em que os limites recaem em uma potência na qual a base é o número de Euler e o expoente é um número inteiro ou racional.

Esta apresentação usual de definir um objeto do saber, inicialmente, faz parte da vertente axiomática da Matemática. Mas será a exposição axiomática do saber matemático a que melhor potencializa a construção de conhecimentos dos alunos da escolaridade básica?

Para Copi (1973), no caso da apresentação do infinito, do número de Euler ou número de ouro, é usual o ensino recorrer ao símbolo estipulado ou sobre aquilo que o símbolo designa para introduzir o objeto matemático.

Vianna e Cury (2001) esclarecem que, ao invés de se optar por uma determinada definição matemática logo no início da apresentação dos temas, seria também importante observar se ela está bem construída ou se há outras possibilidades para elaborá-la. Essa observação reforça a hipótese "[...] que, didaticamente, não se deveria começar a trabalhar um conceito mediante a sua definição" (VIANNA; CURY, 2001, p. 32), principalmente se estivermos nos situando na escolaridade básica, onde a meta não é, necessariamente, preparar um futuro matemático.

Para entender os motivos das escolhas que o saber acaba se instaurando nas instituições onde circula – universidades, artigos, teses, livros, comunicações, dentre outros – passamos a discutir seu entorno.

Em particular, o conhecimento matemático envolvendo os números irracionais, adquirido através dos embates efetivados no percurso histórico e sistematizado pela comunidade de matemáticos, sofreu uma transposição didática[3] para ser ensinado em sala de aula. Além do conhecimento em si, para se efetivar esta tarefa são necessários referenciais que permitam orientar e fundamentar o modo como pode ocorrer tal tratamento.

Para entender os motivos que fazem esta abordagem dificultar o entendimento de alunos, na Matemática Elementar, inicialmente fazemos referência ao conceito de transposição didática, conforme exposto em Chevallard (1999).

Chevallard (1999) propõe a Teoria Antropológica do Didático, que estuda as relações que acontecem entre sujeito-instituição-saber (aluno-professor-saber), concebido por Brousseau (1986) como o Sistema Didático (ou Triângulo Didático).

O termo antropologia, segundo Ferreira (2003), significa o estudo científico com relação ao ser humano ou a designação a várias ciências cujas metas são a descrição e a análise do ser humano com base nas características da disciplina em questão. No caso de Chevallard (1999), a proposta é que a matemática estuda o homem frente ao saber matemático, no Sistema Didático. Assim, "[...] a Teoria Antropológica do Didático situa a atividade matemática, e em consequência o estudo da matemática dentro do conjunto de atividades humanas e de instituições sociais" (CHEVALLARD, 1999, p. 1).

No Triângulo Didático, o saber é um elemento mediador do processo de ensino e aprendizagem. Chevallard, Bosch e Gascón (2001) apontam que a interação no sistema de ensino se situa no sistema didático *stricto sensu*, que comporta três elementos – o aluno, o professor e o saber – partes constitutivas de uma relação dinâmica e complexa – a relação didática – que leva em consideração as interações entre professor e alunos (elementos humanos), mediadas pelo saber, elemento não humano que é fundamental para a forma como as relações no sistema didático se estabelecem.

Chevallard (1999) acrescenta que a obra matemática não surge gratuitamente, mas sim como resposta a uma questão ou necessidade, embora essas possam ser esquecidas com o passar dos anos. Porém, o autor coloca que a obra matemática está sempre aberta e inacabada, posto que evolui de acordo com as mudanças presentes no desenvolvimento e amadurecimento das sociedades.

O autor aponta que um saber que é produzido por uma determinada instituição, como, por exemplo, um grupo de pesquisadores, pode vir a ser utilizado em alguma outra instituição. Algumas vezes, o sistema de ensino incorpora um saber que, para ser viabilizado, deve sofrer algum tipo de transformação, de modo a se adaptar as condições do novo meio. Esse fenômeno é denominado de transposição didática.

Para Chevallard (1999), a transposição ocorre em três etapas. Na primeira etapa, o pesquisador deverá organizar, despersonalizar, ordenar os resultados e ligá-lo a outros saberes, para torná-los passíveis de serem transmitidos de modo generalizado. É o saber científico, que pode ser desenvolvido na academia e é encontrado em textos técnicos e científicos, mas esse saber não se encontra disponível para a maior parte das pessoas.

Para ser viabilizado no sistema de ensino, o saber sábio ou científico deve ser remodelado segundo parâmetros didáticos. Esta situação corresponde à segunda etapa de transposição, em que um objeto de saber pode se converter em objeto a ensinar (ou saber escolar). Para isto, uma instituição denominada Noosfera, da qual participam matemáticos e professores conceituados, autores de livros, especialistas em educação e políticos, se encarregam da análise e pertinência

[3] Segundo Chevallard, Bosch e Gascón (2001), transposição didática é o conjunto das transformações que sofre um saber científico, para se constituir em objeto de ensino compreensível ao aprendiz.

da manipulação de um objeto de saber em objeto a ensinar: “Que uma obra seja ou não ensinada na escola é o resultado de decisões tomadas pelos homens ao longo da história” (CHEVALLARD; BOSCH; GASCÓN, 2001, p. 117).

Na terceira etapa da transposição didática temos o professor como ator fundamental, pois esse tem a função de traduzir o objeto a ensinar em objeto de ensino, por meio de uma prática educativa baseada em situações de ensino ou de aprendizagem, de modo a ser viável colocar o aluno em ação e, preferivelmente, possibilitar que o mesmo construa seu conhecimento matemático. Para Brousseau (1986), o trabalho do professor envolve uma simulação da descoberta do saber, um autêntico processo de autoria, que está diretamente ligado às relações do Sistema Didático *stricto sensu*: aluno-saber-professor.

Para Brousseau (1986), o trabalho do professor é então, inverso ao do pesquisador matemático, ou seja, deve buscar a (re)contextualização, personalizá-lo e sincretizá-lo com outros saberes. O professor deve estimular e situar o aluno em uma simulação do trabalho científico, de modo com que esse construa o conhecimento.

O professor pode buscar várias fontes de referência, para ampliar seu horizonte de possibilidade de transposição didática. Para isto, o trabalho do professor é o de ponderar qual o contexto dos conceitos e a evolução das ideias matemáticas, seja pela reflexão e análise das possibilidades oriundas da construção histórica do saber, para que assim possa reorganizá-la em uma prática educativa, porém sem perder a essência do objeto de conhecimento.

Nesse ponto, voltamos à nossa crítica em relação à apresentação usual do número de Euler, dada por $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Esse tipo de abordagem pertence à primeira etapa da transposição didática, pois é um tratamento realizado por matemáticos e cientistas para expor e comunicar um assunto de modo a se priorizar a consistência, a completude e a independência dos axiomas[4].

Entretanto, quando estamos a pensar na exposição escolar do tema do número de Euler no ensino básico necessitamos reavaliar qual o tipo de apresentação poderia se adequar aos contextos e restrições desta faixa de ensino.

Um primeiro empecilho à utilização desta definição é que o conceito de limite e de infinito não fazem parte, explicitamente, do currículo da escola básica. Aliás, não são conceitos triviais e a escolha inicial em se apelar para a notação sem um maior aprofundamento do tema acrescenta mais um obstáculo. Esta escolha usual não contribui para a exposição de tal abordagem para alunos da escolaridade básica, faixa de ensino que não tem a intenção de formar matemáticos, mas essencialmente preparar o indivíduo para o exercício da cidadania e do trabalho (BRASIL, 1997; 1998).

Do modo como está registrada nos livros de referência do saber científico, a definição de Euler necessita da tradução do professor. Mas, ao invés de apresentar a definição no início da exposição, fica a questão: é possível realizar um trabalho didático para construir a ideia do conceito do número de Euler sem a utilização do registro formal algébrico de limite e de infinito?

3 O CONTEXTO HISTÓRICO DO SURGIMENTO DO NÚMERO DE EULER

A História da Matemática é um importante recurso para se verificar a gênese dos objetos matemáticos, situando o caminho que o saber foi concebido historicamente, o que pode contribuir para a transposição didática.

[4] Em termos lógicos, o sistema axiomático é um tipo de teoria dedutiva, construída a partir de termos iniciais (postulados ou axiomas) e desenvolvida por meio de certas regras. Uma abordagem axiomática é consistente quando não existe contradição entre uma proposição e a respectiva negação. Uma teoria axiomática é completa se cada proposição puder ser deduzida a *P* (isto também vale para a negação de *P*).

Segundo Maor (2008), o número de Euler era conhecido, de modo implícito e não intencional, pelos antigos povos mesopotâmios e egípcios, por meio de situações de ordem prática, antes de qualquer estudo ou intenção teórica.

Depois de um grande lapso de tempo, Maor (2008) destaca que o número de Euler surge no estudo desenvolvido por Napier, de forma indireta, em 1618, com relação à descoberta dos logaritmos. Historicamente, esse tema emergiu da necessidade de uma ferramenta para agilizar cálculos na astronomia. Os logaritmos, "[...] que inicialmente eram instrumentos fundamentais para a simplificação de cálculos, hoje não se destinam precipuamente a isso, sendo imprescindíveis no estudo das grandezas que variam exponencialmente" (SÃO PAULO, 2008, p. 50).

Porém, a ideia básica de Napier é muito importante para se compreender a natureza do número de Euler. Napier queria escrever qualquer número como uma potência de algum número fixo, que posteriormente foi denominado de base. Desse modo, multiplicar/dividir dois números de grande ordem seria equivalente a somar/subtrair os expoentes das potências correspondentes.

De modo simplificado, considerando-se números de pequena ordem, poderíamos fazer uso de uma tabela para as potências de 2 (quadro 1). Se desejássemos multiplicar 64 por 512, sem o uso de calculadora eletrônica, trocamos 64 por 2^6 e 512 por 2^9. Daí: $64512 = 2^6 \cdot 2^9 = 2^{15}$, pela propriedade de soma dos expoentes de uma potência qualquer. Pelo quadro 1, o resultado da potência 2^{15} é 32768.

Quadro 1: Potências inteiras de 2.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2^n	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192	16384	32768

Fonte: o autor

Atualmente não se faz mais assim, pois existem calculadoras ou computadores. Na época de Napier existiam tabelas compiladas para ajudar os cálculos dos astrônomos. Então, ele produziu uma tabela que completava os espaços entre as potências de expoente inteiro, de modo a ampliar o alcance e velocidade dos cálculos.

Por exemplo, para multiplicar 3 por 5, Napier recorria a uma tabela na qual se observava que o número $2{,}322$ era o expoente da potência de base 2 que resultava 5, ou seja, $2^{2{,}322} = 5$. Do mesmo modo ele poderia obter $2^{1{,}585} = 3$. Assim, $3 \cdot 5 = 2^{1{,}585} \cdot 2^{2{,}322} = 2^{3{,}907}$, e, retornando à tabela, era possível ler diretamente que o resultado era 15.

Para completar os inúmeros espaços entre as potências de números inteiros, Napier fez uma escolha, utilizando o número $1 - 10^{-7} = 0.9999999$. Essa ideia de utilizar um fator próximo a 1 é a que permite entender a essência do número de Euler.

A compilação de tais tabelas exigiu muito tempo e dedicação, mas que, ao final, ajudou os cálculos computacionais dos astrônomos, os usuários da ciência daquele momento histórico. Na época de Napier, Briggs propôs melhorias no trabalho de Napier, apresentando uma aproximação numérica para o logaritmo de e na base dez, mas não fez referência ao significado desse resultado.

Em 1668, Mercator, no livro *Logarithmotechnia,* utilizou a nomenclatura logaritmo natural, porém o número de Euler ainda era uma referência implícita ao desenvolvimento dos logaritmos. Napier definiu os logaritmos através da expressão $N = 10^7.(1 - 10^{-7})^L$, sendo N um número real qualquer e L o respectivo logaritmo.

Ao se reescrever esta expressão como sendo $N = 10^7.\left[(1 - 10^{-7})^{10^7}\right]^{\frac{L}{10^7}}$, a expressão entre colchetes, dada por $\left[(1 - 10^{-7})^{10^7}\right]$, se aproxima da ideia do número de Euler, se estendermos o valor de 10^7 como sendo um número real 'n' que pode ser aumentado indefinidamente, ou seja, levado ao infinito, na forma potencial. Desse modo, a expressão $\left[(1-10^{-7})^{10^7}\right]$ pode ser substituída por $\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right]$, e levada ao infinito, acabaria surgindo a definição usual do inverso do número de Euler, ou seja, $e^{-1}=\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$.

O'Connor e Robertson (2001) ressaltam que o trabalho com logaritmos, realizado por Napier e Briggs, quase reconheceu explicitamente o número de Euler, mas que não o fizeram. Entretanto, a primeira apresentação explícita do número de Euler foi realizada em problemas que envolviam investimentos com juros compostos.

Após meio século, o número de Euler é estudado pelo advento do Cálculo Diferencial e Integral, a partir do século XVII. Nesse momento, o número de Euler tornou-se importante e surgiu em diversas áreas do conhecimento, como a Biologia, a Economia, as Engenharias e a Física, dentre outros contextos do conhecimento, o que derivou a nomenclatura base natural dos logaritmos.

4 O NÚMERO DE EULER E O PAR EXATO/APROXIMADO

Há vários modos de se introduzir o número de Euler na escolaridade básica, sem partir da definição matemática, mas por meio da problematização e exposição do conhecimento em rede de significações (MACHADO, 2001).

Segundo Machado (2001), os significados são construídos através de um feixe de relações. Para compreender algo é necessário apreender a significação das relações desse objeto com outras coisas. Nessa perspectiva, conhecer é como:

> [...] enredar, tecer significações, partilhar significados. Os significados, por sua vez, são construídos por meio de relações estabelecidas entre os objetos, as noções, os conceitos. Um significado é como um feixe de relações. O significado de algo é construído falando-se sobre o tema, estabelecendo conexões pertinentes, às vezes insuspeitadas, entre diversos temas. Os feixes de relações, por sua vez, articulam-se em uma grande teia de significações e o conhecimento é uma teia desse tipo (MACHADO, 2001, p. 4).

Para rastrear as relações envolvendo o número de Euler, recorremos a Maor (2008), autor que destaca indícios que os antigos babilônios haviam se aproximado do tema em aplicações financeiras. Independentemente da questão da veracidade histórica, podemos fazer uso didático de um problema encontrado numa tábua de argila dos antigos babilônios, datada de cerca de 1700 a.C.: "Quanto tempo levará para uma soma de dinheiro dobrar se for investida a uma taxa de 20 por cento de juros compostos anualmente?" (MAOR, 2008, p. 41).

Em linguagem matemática atual, ao final de cada ano, o capital inicial deverá ser multiplicado por um fator $1{,}2$. Assim, em t anos, o capital será crescido de um fator $1{,}2^x$. Como o problema solicita em quanto tempo o capital dobra, isto significa resolver a equação exponencial $1{,}2^x = 2$.

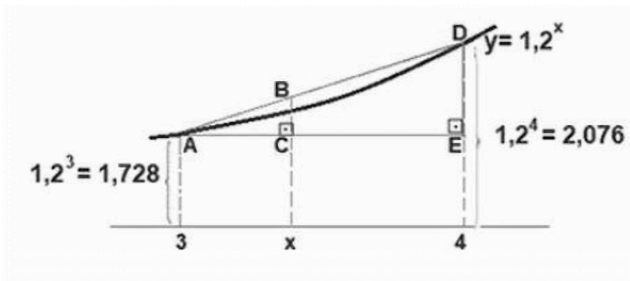
A resposta a essa questão recai em um número irracional. Na época dos antigos babilônios, tal problema foi resolvido por meio da aproximação de um número irracional para um número racional, um importante fundamento a ser trabalhado em diferentes contextos da escolaridade básica. Atualmente sabemos que a representação decimal dos números irracionais é infinita e não periódica, um conceito de natureza teórica. Porém, o único modo de se ter acesso a um número irracional no mundo real se faz por meio de aproximações sucessivas por meio de números racionais.

Assim, uma primeira aproximação pode ser feita por meio de um intervalo de números inteiros. Em três anos o capital terá sido acrescido de $1{,}2^3 = 1{,}728$, e em quatro anos tal valor passa a ser $1{,}2^4 = 2{,}076$. Assim, o tempo estimado se encontra no intervalo: $3\,anos < x < 4\,anos$.

Mas sempre podemos melhorar essa aproximação. Para Beskin (1987), uma aproximação é uma operação que remete à possibilidade de substituir um objeto por outro do mesmo tipo, mais simples e suficientemente próximo do primeiro. Para esse autor, se remetermos ao âmbito dos números irracionais, uma boa aproximação é aquela que o número racional escolhido possa ser sempre substituído por outro mais conveniente, de acordo com o desejo ou necessidade do contexto de dada realidade a ser estudada.

Nesse sentido, Maor (2008) coloca que o antigo povo babilônico utilizava um meio de aproximação: a interpolação linear. Esse processo consiste em estabelecer uma relação de proporcionalidade direta, de modo a substituir o arco da função (no caso a função exponencial $y = 1{,}2^x$) por um segmento de reta. Na Figura 1, observa-se um arco da função $y = 1{,}2^x$, em que para $x_1 = 3$ tem-se $y_1 = 1{,}2^3 \cong 1{,}728$ e para $x_2 = 4$ se obtém $y_1 = 1{,}2\text{^}4 \cong 2{,}076$.

Figura 1: O processo de interpolação linear



Fonte: o autor

Pela Figura 1, pode-se perceber que os triângulos retângulos ADE e ABC são semelhantes, o que permite a proporção direta:

$$\frac{BC}{AC} = \frac{DE}{AE} \Rightarrow \frac{1{,}2^x - 1{,}2^3}{x-3} = \frac{1{,}2^4 - 1{,}2^3}{4-3}$$

Fazendo-se $1{,}2^x = 2$, tem-se:

$$\frac{2 - 1{,}728}{x-3} = \frac{2{,}076 - 1{,}728}{4-3} \Leftrightarrow x - 3 = 0{,}7816\,ano \Leftrightarrow x \cong 3\,anos\;9\,meses\;11\,dias.$$

Esse valor encontrado pelo método babilônico da interpolação linear é bem próximo do valor exato, obtido pela técnica da logaritmização atual, que descrevemos a seguir:

$$1{,}2^x = 2 \Rightarrow \ln 1{,}2^x = \ln 2 \Rightarrow x.\ln 1{,}2 = \ln 2 \Rightarrow x = \frac{\ln 2}{\ln 1{,}2} = 3{,}8018\,anos \;\cong 3\,anos\;9\,meses\;18\,dias.$$

O procedimento da interpolação linear representa uma estratégia inicial para a resolução do problema proposto, permitindo contrapor a aproximação e o uso da estimativa com o valor exato.

Outro aspecto importante da rede de significados que se pode formar remete ao cálculo envolvendo juros compostos, onde o valor futuro (VF) ou Montante (S) pode ser expresso em relação ao capital inicial (P) ou valor presente (VP), aplicado a uma taxa de juros compostos (i), durante uma unidade de tempo (t) é dada por: $VF = VP.(1+i)^t$.

Porém, a taxa de juros não é geralmente dada no mesmo período que o tempo t de aplicação. Para equalizar o intervalo de tempo, digamos em n períodos, encontramos um divisor de ambos os valores, de modo que a taxa de juros fica: $\frac{i}{n}$ e o tempo de aplicação $n.t$. Assim, de modo mais geral: $VF = VP.\left(1+\frac{i}{n}\right)^{n.t}$.

A história da Matemática Financeira, exposta em Rosetti Jr. e Schimiguel (2011), aponta que era extremamente usual, em tempos remotos, ser cobrada uma taxa de juros anual de 100%. Maor (2008) destaca que o caso de um capital $P = 1$, aplicado a juros compostos de 100% ao ano, ao ser subdividido em intervalos cada vez maiores se aproxima de certo limite, de valor aproximadamente $2{,}718$, ou, de modo mais exato, corresponde ao número de Euler. Assim, a origem do número e acabou se conectando a "[...] um problema mundano: o modo como o dinheiro aumenta com o passar do tempo" (MAOR, 2008, p. 13).

Por meio dessa associação de um caso particular da aplicação dos juros compostos a um contexto da Matemática Financeira, o número de Euler pode ser introduzido por meio da problematização envolvendo uma narrativa e o uso de planilhas eletrônicas, recursos didáticos essenciais que permitem estabelecer uma ponte essencial entre o aproximado e o exato.

Suponha que um banqueiro empreste 1 real a juros de 100% ao ano para certa pessoa. Ao final de um ano, a pessoa encontra o banqueiro, devolvendo $1 + 1 = 2$ reais, algo que esse último considera injusto. O banqueiro, então, divide o ano em dois semestres, mostrando que a pessoa deveria pagar, depois de seis meses, a quantia de $1 + 50\%$ de $1 = R\$\,1½$. Em mais um semestre, os juros se comporiam em: $1½ + 50\%$ de $1½ = R\$\,2{,}25$.

Porém, o banqueiro continua argumentando que, se o ano fosse subdividido em 4 trimestres, teríamos que a pessoa deveria, ao final do ano, o valor de $2{,}44$ reais, conforme o Quadro 2.

Quadro 2: Cálculo do banqueiro supondo a correção trimestral dos juros

Período	Montante (Reais)
1º trimestre	$1 + 25\% = 1{,}25.$
2º trimestre	$1{,}25 + 25\%\ de\ 1{,}25 = 1{,}25.1{,}25 = 1{,}25^2 = 1{,}5625$
3º trimestre	$1{,}5625 + 25\%\ de\ 1{,}5625 = 1{,}5625.1{,}25 = 1{,}25^3 = 1{,}953125$
4º trimestre	$1{,}953125 + 25\%\ de\ 1{,}953125 = 1{,}25^4 = 2{,}4414063$

Fonte: o autor

Continuando a especulação, o banqueiro propõe que a correção poderia ser mensal, o que remete ao Quadro 3.

Quadro 3: Cálculo do banqueiro para a aplicação de 1 real, a 100% ao ano, com correção mensal dos juros

Período	Montante (Reais)
1º mês	$1 + 8{,}33\% = 1{,}083$
2º mês	$1{,}083 + 8{,}33\%\ de\ 1{,}083 = 1{,}083.1{,}083 = 1{,}17289$
3º mês	$1{,}172889 + 8{,}33\%\ de\ 1{,}172889 = 1{,}083^2.1{,}083 = 1{,}083^3 = 1{,}27024$
⋮	⋮
12º mês	$1{,}083^{12} = 2{,}6034$

Fonte: o autor

Assim, a uma taxa de $100/360 = 0{,}278\ \%$ ao dia, o devedor teria que pagar $1{,}00278^{360}$, ou seja, $2{,}7166825$ reais. Desse modo, a $\frac{100}{360.24} = 0{,}011574\%$ a hora, teríamos que a pessoa, ao final de um ano, deveria pagar: $1{,}00011574^{360.24} = 1{,}00011574^{8640} = 2{,}7181236$ reais. Se considerarmos a taxa por minuto, teríamos $\frac{100}{60.24.60} = 0{,}00019290$ ao minuto, o que resulta numa dívida de: $1{,}000001929^{518400} = 2{,}7182618$ reais.

Podemos representar um gráfico cartesiano do valor obtido por cada aproximação e o número de subdivisões efetivadas no período de 1 ano (quadro 4).

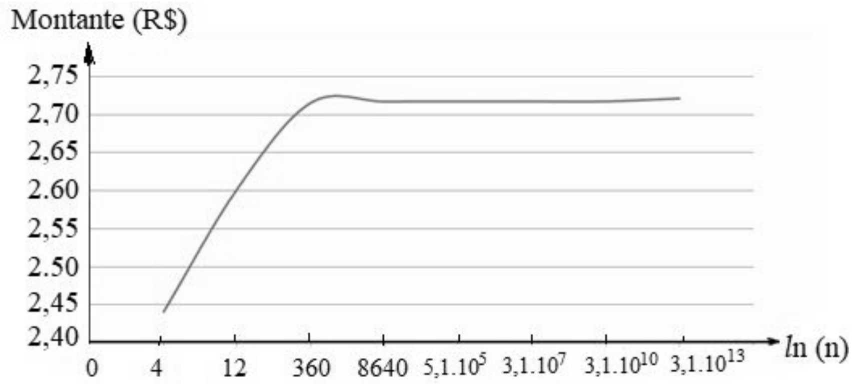
Quadro 4: Síntese dos cálculos do banqueiro em função da divisão em n períodos

Período	Montante (Reais)
4 trimestres	2,4414063
12 meses	2,6034
360 dias	2,7166825
8.640 horas	2,7181236
518.400 minutos	2,7182618
31.104 000 segundos	2,718281795
31.104.000.000 s (milésimos de segundo)	2,718288311
31.104.000.000.000 s (milionésimos de segundo)	2,722196066

Fonte: o autor

Plotando esses dados do quadro 4 no plano cartesiano, em uma planilha Excel (2007), obtivemos a Figura 2.

Figura 2: Representação cartesiana dos cálculos do banqueiro



Fonte: o autor

Na quadro 4 e na figura 2, observa-se que cada vez que a divisão de tempo aumenta (quando o tempo de composição dos juros tende a zero) o resultado da dívida parece convergir para certo número. Para verificar essa hipótese, podemos incrementar os intervalos, conforme o quadro 5.

Porém, verifica-se que para valores cada vez maiores a função começa a tender para o valor 1, que também pode ser visualizado na Figura 3.

Machado (1990) aponta o desconhecimento da gênese e significado dos símbolos que se apresentam no teclado das calculadoras, tal como o número π e o número de Euler, dentre outros. No nosso caso, podemos rapidamente ilustrar como acessar o valor aproximado do número de Euler, simplesmente por apertar as teclas 'e^x' e '1', recurso que permite perceber que a tabela apresenta uma boa tendência até cerca da ordem de $1{,}0.10^{13}$, em notação científica. A partir desse valor os resultados tendem erroneamente para 1. Então fica a questão: por que os resultados da planilha eletrônica não sintonizam com o resultado direto da leitura imediata na calculadora eletrônica?

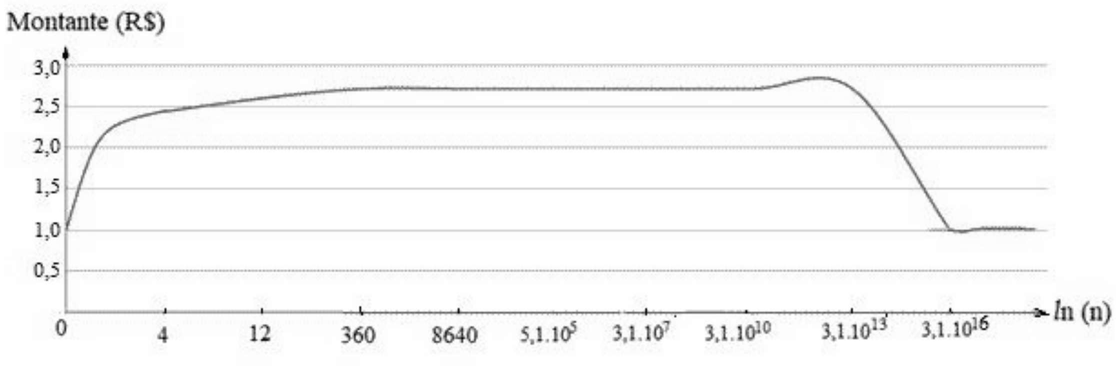
Quadro 5: Síntese dos cálculos do banqueiro em função da divisão em ‘n’ períodos

Período	Montante (Reais)
4 trimestres	2,4414063
12 meses	2,6034
360 dias	2,7166825
8.640 horas	2,7181236
518.400 minutos	2,7182618
31.104 000 segundos	2,718281795
31.104.000.000 s (milésimos de segundo)	2,718288311
31.104.000.000.000 s (milionésimos de segundo)	2,722196066
31.104.000.000.000.000 s (bilionésimos de segundo)	1
31.104.000.000.000.000.000 s (trilionésimos de segundo)	1

Fonte: o autor

A resposta a essa questão remete à essência das máquinas que apoiam os cálculos da planilha eletrônica. Augusto (2009) já alertava sobre o cuidado de conhecer as limitações de recursos eletrônicos como a calculadora e os computadores. Isto remete a um problema conceitual dos meios para se obter resultados aproximados na Matemática, o que situa a capacidade finita de caracteres no armazenamento das operações elementares das memórias desses recursos.

Figura 3: : Representação cartesiana dos cálculos do banqueiro no intervalo $\mathbb{R}^+$



Fonte: o autor

Nesse sentido, Machado (1990) e Bonomi (2008) relembram que a memória das máquinas é finita, correspondendo matematicamente a determinado número de casas decimais. Ainda, os autores ponderam que devem ser disponibilizadas situações onde surja esse problema da limitação do mostrador das calculadoras eletrônicas e da memória, de modo a ser possível repensar e introduzir aspectos conceituais na Matemática.

No presente caso da planilha eletrônica, podemos observar que esse meio realiza uma disponibilização de números na representação decimal, por aproximação, no âmbito dos números racionais, o que permite uma porta de acesso para continuar a investigação inicial da natureza dos números irracionais, um tema de natureza teórica.

5 O NÚMERO DE EULER E A EXPANSÃO BINOMIAL DA FUNÇÃO $\boldsymbol{y = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$

Para se proceder a uma investigação do problema da limitação das memórias de recursos eletrônicos, podemos propor a construção do gráfico da função $y = f(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Essa função decorre do 'Problema do banqueiro' anteriormente discutido, pois ao fazermos $P = 1$, $r = 1$ e $t = 1$, e trocando-se S por y em $S = P.\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{n.t}$ surge a expressão $y = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Vale apontar um destaque histórico relatado por O'Connor e Robertson (2001), que atribuem a Jacob Bernoulli, em 1683, a utilização da expressão $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, com n tendendo ao infinito. O referido matemático, ao se utilizar da expansão binomial, encontrou uma primeira aproximação do número de Euler no intervalo $[2; 3]$.

Um recurso disponível para se desenvolver teoricamente essa expressão é utilizar a expansão binomial, desenvolvida inicialmente por Newton e que constitui um tema da escolaridade básica. A expressão é dada por:

$$(a + b)^n = \binom{n}{0} a^n. b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1}. b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2}. b^2 + \binom{n}{3} a^{n-3}. b^3 + \cdots + \binom{n}{n} a^0. b^n$$

Aplicando para o caso $a = 1$ e $b = \frac{1}{n}$, tem-se:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \binom{n}{0} 1^n. \frac{1^0}{n} + \binom{n}{1} 1^{n-1}. \frac{1^1}{n} + \binom{n}{2} 1^{n-2}. \frac{1^2}{n} + \binom{n}{3} 1^{n-3}. \frac{1^3}{n} + \cdots + \binom{n}{n} 1^0. \frac{1^n}{n}$$

Resolvendo-se os números binomiais, tem-se:

$$\begin{aligned}
\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 1 + n. \left(\frac{1}{n}\right) + \frac{n. (n-1)}{2!}. \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{n. (n-1). (n-2)}{3!}. \left(\frac{1}{n}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{n}\right)^n \\
&= 1 + 1 + \frac{1}{2!}. \frac{n. (n-1)}{n^2} + \frac{1}{3!}. \frac{n. (n-1). (n-2)}{n^3} + \cdots + \left(\frac{1}{n}\right)^n \\
&= 1 + 1 + \frac{1}{2!}. \frac{n}{n}. \frac{n-1}{n} + \frac{1}{3!}. \frac{n}{n}. \frac{n-1}{n}. \frac{(n-2)}{n} + \cdots + \left(\frac{1}{n}\right)^n \\
&= 1 + 1 + \frac{1}{2!}. \frac{n-1}{n} + \frac{1}{3!}. \frac{n-1}{n}. \frac{(n-2)}{n} + \cdots + \left(\frac{1}{n}\right)^n \\
&= 1 + 1 + \frac{1}{2!}. \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}. \left(1 - \frac{1}{n}\right). \left(1 - \frac{2}{2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n}\right)^n
\end{aligned}$$

Assim, para n aumentando indefinidamente, ou seja, para n tendendo ao infinito:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}. (1 - 0) + \frac{1}{3!}. (1 - 0). (1 - 0) + \cdots = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$$

O resultado da expansão binomial é uma expressão, uma definição do número de Euler, por meio de uma série infinita convergente[5]. O tema 'séries' é importante assunto a ser abordado na escolaridade básica dentro dos temas do currículo de matemática, porém raramente é apresentado.

Acreditamos que esse tipo de abordagem inicial, considerando um problema prático por meio da matemática financeira, permite a introdução do número de Euler de modo a superar o obstáculo didático de se considerar erroneamente o infinito como um número grande. Para um estudante da escolaridade básica a observação ingênua da:

[5] Numa linguagem matemática mais voltada ao cálculo, quando n tende a infinito, $\frac{1}{n}$ tende a zero. Daí, podemos escrever: $e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2{,}718281828 \ldots$, tal qual se encontra nos livros de referência do saber sábio.

> [...] expressão $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ para valores grandes de *n* deve parecer de fato intrigante. Suponha que se consideremos apenas a expressão dentro dos parênteses, $1+\frac{1}{n}$ à medida que n aumenta, $\frac{1}{n}$ fica cada vez mais próximo de 0 e assim $1+\frac{1}{n}$ fica cada vez mais próximo de 1, embora seja sempre maior do que 1. Assim, podemos ser tentados a concluir que para um valor grande de n 'realmente grande' a expressão $1+\frac{1}{n}$ pode ser substituída por 1 (MAOR, 2008, p. 47).

Interessante que esse tipo de obstáculo didático apresenta similaridade com o que ocasionou o erro das memórias eletrônicas: ao se aumentar o número n, o processo de cálculo computacional acaba tornando a base exatamente igual a 1, um tipo de erro de truncamento que acaba no falso resultado da tabela 03 quando n tende ao infinito e a expressão $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ acaba resultando 1.

Para se verificar a convergência do número de Euler inicialmente determinamos um limite inferior:

$$e=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots=2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots,$$

o que implica $e>2$.

Para determinar se existe um limite superior para o número de Euler, tem-se que:

$$\frac{1}{n!}=\frac{1}{1.2.3.4.\dots.n}=\frac{1}{1}.\frac{1}{2}.\frac{1}{3}.\dots.\frac{1}{n}<1.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\dots.\frac{1}{2}=\frac{1}{2^{n-1}}$$

$$e=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots$$

Na P.G. acima, de infinitas parcelas, primeiro termo $\frac{1}{2}$ e razão $\frac{1}{2}$, no intervalo para $-1<q<1$:

$$Soma=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots=\frac{a_1}{1-q}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1.$$

Daí:

$$e<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots=1+1+1=3\Rightarrow e<3$$

Assim, o número de Euler é convergente e fica limitado pela desigualdade $2<e<3$.

Retomando a definição $e=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots$, observamos que essa expressão permite se determinar o número de Euler, um número irracional, a partir de infinitas parcelas compostas de números racionais, se constituindo em um imbricamento entre esses dois conjuntos.

Outra possibilidade de se trabalhar com a definição de número de Euler dada pela série convergente exposta acima se faz com relação à exploração do par exato e aproximado. Nesse sentido, consideremos os intervalos denominados encaixantes dados por $I_1=[2;3]$; $I_2=\left[\frac{5}{2!};\frac{6}{2!}\right]$; $I_3=\left[\frac{16}{3!};\frac{17}{3!}\right]$; $I_4=\left[\frac{65}{4!};\frac{66}{4!}\right]$, ou, de modo geral: o intervalo $I_n=[a_n;A_n]$. Cada termo desse intervalo é dado por $a_n=\frac{p}{q!}$, obtido por truncamento da série e, ainda, $A_n=\frac{p+1}{q!}$.

Assim, podemos obter os intervalos encaixantes. Inicialmente, fazemos $n = 1$, obtendo-se $a_1 = 1 + 1 = 2$, que representa o 1° truncamento da série, o que decorre $A_1 = 3$ e, assim, tem-se o primeiro intervalo $I_1 = [2; 3]$. Os outros intervalos encaixantes estão indicados no quadro 6.

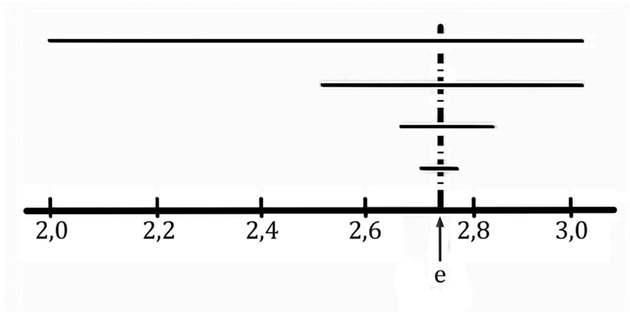
Tabela 4: Obtenção dos primeiros intervalos encaixantes

$n = 1$	$a_1 = 1 + 1 = 2$	$A_1 = 3$	$I_1 = [2; 3]$
$n = 2$	$a_2 = 1 + 1 + \frac{1}{2!} = \frac{2+2+1}{2!} = \frac{5}{2!}$	$A_2 = \frac{5+1}{2!} = \frac{6}{2!}$	$I_2 = \left[\frac{5}{2!}; \frac{6}{2!}\right]$
$n = 3$	$a_3 = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} = \frac{6+6+3+1}{3!} = \frac{16}{3!}$	$A_3 = \frac{16+1}{3!} = \frac{17}{3!}$	$I_3 = \left[\frac{16}{3!}; \frac{17}{3!}\right]$
$n = 4$	$a_4 = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} = \frac{65}{4!}$	$A_4 = \frac{66}{4!}$	$I_4 = \left[\frac{65}{4!}; \frac{66}{4!}\right]$

Fonte: o autor

Ainda o valor do número de Euler corresponde à intersecção dos infinitos intervalos I_n, ou seja: $\cap I_n = \{e\}$. Geometricamente, isto pode ser visualizado, na Figura 4.

Figura 4: Representação geométrica de e



Fonte: o autor

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Apresentamos várias possibilidades de abordagem do número de Euler, sem necessariamente partir de certa definição matemática, mas percorrendo um caminho para construir o conhecimento relativo a tal conceito, por meio de diversos recursos didáticos e trilhando o viés epistemológico da área da Matemática, principalmente situados na transposição didática. Nesse mote, o número de Euler, um assunto comum de se apresentar em cursos envolvendo o Cálculo Diferencial e Integral, pode ser desenvolvido na escolaridade básica, em um modo de transposição do objeto de saber convertido em objeto a ensinar.

A escolha do percurso de transposição recaiu na problematização inicial, pela escolha de uma situação comum da Matemática Financeira, uma área que está atualmente desenvolvendo pesquisas com mais ênfase na área do ensino. O cálculo de uma situação particular, juros a 100% ao ano, capitalizados em prazos cada vez menores, possibilitou o estabelecimento de uma percepção que o resultado parecia tender para algum número, fato já percebido e comentado em autores como Maor (2008), em meados do século XVI.

Nesse percurso, saímos de uma situação real para abstrair uma expressão, a função $y = \left(x + \frac{1}{n}\right)^n$, tendo como recurso a aproximação por meio de planilha eletrônica. Vale destacar nos PCN, Brasil (1998), a importância do uso de calculadoras e planilhas eletrônicas como instrumentos motivadores para a construção do conhecimento, pois permitem cálculos mais rápidos, possibilitando modo mais eficiente em determinadas tarefas e investigações, abrindo um leque para a construção de significados de certos temas.

No presente caso do número de Euler, o cálculo por meio de planilhas auxiliou na compreensão do papel das aproximações, como uma ferramenta inicial para se observar o comportamento da função $y = \left(x + \frac{1}{n}\right)^n$, mas quando n cresce indefinidamente, as planilhas revelam um erro de truncamento, que poderia se constituir como um obstáculo didático.

Assim, a motivação da planilha eletrônica revelou as limitações do instrumento computacional, o que fez requerer um estudo mais teórico, envolvendo a expansão binomial. Seu desenvolvimento permitiu a obtenção de uma definição do número de Euler em termos de uma série infinita e convergente, que possibilitou determinar intervalos de convergência para situar visualmente a ideia do número de Euler como a intersecção dos infinitos intervalos encaixantes.

Pode-se provar a irracionalidade do número de Euler utilizando argumentos presentes no currículo da escolaridade básica: desigualdades numéricas envolvendo frações, fatorial; sequências; progressão geométrica e manipulações algébricas.

O uso da aproximação de um número irracional, por meio dos números racionais, permitiu a contraposição com o exato e com o modo de administrar as provas, as demonstrações e os recursos didáticos, favorecendo a compreensão do tema do número de Euler na escolaridade básica.

Em síntese, encaminhamos algumas possibilidades didáticas considerando a problematização, o uso de recursos computacionais, o conhecimento como rede, que compõem um amálgama para a administração da tensão inerente ao par aproximado/exato, de modo a compor um espaço de significação para a exploração do número de Euler.

REFERÊNCIAS

AUGUSTO, A. **Esses engenheiros fantásticos e suas calculadoras maravilhosas**. 2007. Disponível em: http://alvaroaugusto.blogspot.com/2007/02/esses-engenheiros-fantsticos-e-suas.html. Acesso em: 18 jan. 2009.

BESKIN, N. M. **Frações Contínuas.** Trad. Pedro Lima. Moscou: Editora Mir, 1987.

BOFF, D. S. **A construção dos números reais na escola básica**. 2006, 253 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2006.

BONOMI, M. C. **Os números irracionais e as calculadoras.** São Paulo: SEMA/USP, 2008.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Brasília: SEMT/MEC. 1997.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: 3° e 4° ciclos do Ensino Fundamental: Matemática. Brasília: MEC/SEF. 1998.

BROUSSEAU, G. Fundamentos y Metodos de la Didátcica de las Matemáticas. **Recherches en Didactique de matématiques,** v. 7, n. 2, p. 33-115, 1986.

CHEVALLARD, Y. El Análisis de las prácticas docentes em la teoria antropológica de lo didáctico. **Recherches em Didactique dês mathématiques**, v. 19, n. 2, p. 221-266, 1999.

CHEVALLARD, Y.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. **Estudar Matemáticas**: o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem. Trad. Daisy Vaz de Moraes. Porto Alegre: ArtMed, 2001.

COPI, I. M. **Introducción a la logica.** 13. ed. Buenos Aires: Eudeba, 1973.

COSTA, L. V. C. **Números Reais no Ensino Fundamental:** alguns obstáculos epistemológicos. 2009, 377 p. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade de São Paulo, São Paulo, 2009.

FERREIRA, A. B. H. **Dicionário da língua portuguesa**. 3. ed. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 2003. CD-ROM

FISCHBEIN, E.; JEHIAM, R.; COHEN, D. The Concept of Irrational Numbers in High-School Students and Prospective Teachers. **Educational Studies in Mathematics**, v. 29, n. 1, p. 29-44., jul. 1995. Disponível em: www.jstor.org/stable/3482830. Acesso em: 12 dez. 2011.

IEZZI, G. et al. **Fundamentos da Matemática Elementar.** São Paulo: Atual, 2006.

LEVIATHAN, T. Introducing real numbers: when and how? In: INTERNATIONAL CONGRESS ON MATHEMATICAL EDUCATION, 10., 2004, Copenhagen. **Proceedings**... Copenhagen, 2004, p. 1-13.

LIMA, E. L. Conceitos e Controvérsias. **Revista do Professor de Matemática.** v. 2, p. 6-12, 1983.

LÓPEZ, F. V. El numero de Euler (e): sus aplicaciones y didáctica. **Reflexiones y Experiencias Innovadoras en el Aula**, n. 21, p. 1-11, jun. 2010.

MACHADO, N. J. A Universidade e a organização do conhecimento: a rede, o tácito, a dádiva. **Estudos Avançados**, São Paulo, v. 15, n. 42, p. 333-351, 2001.

MACHADO, N. J. **Matemática e Língua Materna.** São Paulo: Editora Cortez, 1990.

MAOR, E. **e:** a história de um número. 5. ed. Trad. Jorge Calife. Rio de Janeiro: Editora Record, 2008.

MARTINS, M. C. A versatilidade do número de Neper!. **Correio dos Açores**, p. 16, 24 abr. 2014.

O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. **The number *e*.** [S.I.: s.n.]. Setembro, 2001. Disponível em: http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/e.html. Acesso em: 19 out. 2009.

PAIS, L. C. Transposição Didática. In: MACHADO, S. D. A. (Org.). **Educação Matemática:** uma introdução. São Paulo: EDUC, 2002. p. 13-41.

POMMER, W. M. **A Construção de significados dos Números Irracionais no ensino básico**: uma proposta de abordagem envolvendo os eixos constituintes dos Números Reais. 2012. 235 p. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade de São Paulo, São Paulo, 2012.

REZENDE, W. M. **O ensino de Cálculo:** dificuldades de natureza epistemológica. 2003. 450 p. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003.

ROSETTI JR., R.; SCHIMIGUEL, J. História do dinheiro, matemática financeira e a educação matemática. **Revista Gestão Universitária**, v. 256, p. 1-3, 2011.

SÃO PAULO. **Proposta Curricular do Estado de São Paulo:** Matemática/ Ensino Fundamental (ciclo II) e Médio. São Paulo: SEE, 2008.

SILVA, A. L. V. **Números reais no Ensino Médio:** identificando e analisando imagens conceituais. 2011. 333 p. Tese (Doutorado em Educação) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2011.

SIROTIC, N.; ZAZKIS, R. Irrational numbers: the gap between formal and intuitive knowledge. **Educational Studies in Mathematics**, v. 65, p. 49–76, mai. 2007.

SOARES, E. F., FERREIRA, M. C. C.; MOREIRA, P. C. Números Reais: concepções dos Licenciandos e Formação Matemática na Licenciatura. **Zetetiké**, v. 7, n. 12, p. 95-117, jul./dez. 1999.

VIANNA, C. R.; CURY, H. N. Ângulos: uma "História" escolar. **Revista História & Educação Matemática,** v. 1, n. 1, p. 23-37, jan./jun., 2001.

ZAZKIS, R.; SIROTIC, N. Making sense of irrational numbers: focusing on representation. In: CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS, 28., 2004, Bergen. **Proceedings**... Bergen, 2004, v. 4 p. 497–504. Disponível em: http://www.emis.de/proceedings/PME28/RR/RR082_Zazkis.pdf. Acesso em: 08 ago. 2011.

AS PESQUISAS BRASILEIRAS E O ENSINO DE MATEMÁTICA PARA DEFICIENTES VISUAIS INCLUSOS: UMA REVISÃO CATEGORIZADA

THE BRAZILIAN RESEARCHES AND MATHEMATICS TEACHING TO INCLUDED VISUALLY IMPAIRED PEOPLE: A CATEGORIZED REVIEW

PEREIRA, Tiago[1]
BORGES, Fábio Alexandre[2]

RESUMO

O artigo aqui apresentado[3] traz resultados de uma pesquisa vinculada ao Programa de Iniciação Científica da Universidade Estadual do Paraná/Campus de Campo Mourão, desenvolvida pelo primeiro autor[4] e sob a orientação do segundo. Buscou-se traçar um panorama atualizado das pesquisas que versam sobre o ensino de Matemática para Deficientes Visuais – DV inclusos e que foram publicadas em periódicos científicos brasileiros *online* da área de Ensino e Educação Especial, no período de 2006 a 2016. O objetivo foi identificar os principais aspectos abordados nessas pesquisas. Os resultados aqui apresentados são expressos por meio de quatro categorias, construídas a partir dos objetivos principais enunciados em cada um dos 25 textos encontrados. Com os principais aspectos dos textos elencados, o processo de categorização se deu pela convergência entre os interesses comuns das investigações. As categorias construídas foram: *Comunicação e linguagem nas aulas de Matemática para alunos DV*, *Pesquisas acerca do ensino de Matemática para DV e o destaque à geometria*, *Tecnologias Assistivas no ensino de Matemática para DV* e *A formação de professores de Matemática e os alunos DV*.

Palavras-chave: Deficientes Visuais. Revisão Bibliográfica. Educação Matemática Inclusiva.

ABSTRACT

The article presented here brings results of a research linked to the Scientific Initiation Program of Paraná State University / campus of Campo Mourão, developed by the first author and under the guidance of the second one. It was sought to outline an update view of the researches on the teaching of Mathematics for included visually impaired people and that were published in Brazilian online scientific periodicals of the area of Teaching and Special Education, from 2006 to 2016. The objective was to identify the main aspects covered in these studies. The results presented here are expressed in four categories, based on the main objectives stated in each of the 25 sought texts. Since the main aspects of the text were mentioned, the process of categorization was due to the convergence among the common interests of the investigations. The built categories identified were: *Communication and language in Mathematics classes for visually impaired students, Researches on the teaching of Mathematics for visually impaired people and the emphasis on geometry, Assistive Technologies in teaching Mathematics for the visually impaired and The training of Mathematics teachers and the visually impaired.*

Keywords: Visually impaired. Literature review. Inclusive Mathematics Education

1 EDUCAÇÃO MATEMÁTICA INCLUSIVA: PRESSUPOSTOS INICIAIS

A inclusão de alunos com necessidades especiais tem sido um desafio nos diversos ambientes

[1] Graduando em Licenciatura em Matemática pela Universidade Estadual do Paraná, *Campus* de Campo Mourão. Bolsista do Programa de Iniciação Científica da Unespar. Projeto financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq). Endereço eletrônico: tiago025pereira@hotmail.com.

[2] Doutor em Educação para a Ciência e a Matemática pela Universidade Estadual de Maringá, Docente do Colegiado de Matemática da Universidade Estadual do Paraná, *Campus* de Campo Mourão. Endereço eletrônico: fabioborges.mga@hotmail.com.

[3] O presente artigo é uma versão ampliada de outro, publicado nos Anais do XIV Encontro Paranaense de Educação Matemática (PEREIRA; BORGES, 2017).

[4] Pesquisa financiada por meio de bolsas de estudos pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – CNPq.

para os quais ela é pensada (de trabalho, familiares, espaços públicos, meios de transportes, entre outros). Todavia, quando se foca na questão do ambiente escolar, o desafio parece-nos tornar-se ainda maior por alguns aspectos. A escola carrega a responsabilidade de transformar-se em instrumento de equidade, igualdade e isonomia para todos, ou seja, a educação escolar é considerada como uma possibilidade para se superar a marginalidade e a exclusão social. Desta forma, no decorrer dos tempos, foram muitos os debates e lutas na busca de uma educação escolar que fosse realmente para todos. Além disso, esse "todos" modificou-se em decorrência do contexto social e histórico no qual estamos inseridos, passando a considerar negros, pobres, homossexuais, moradores do campo, indígenas, pessoas com necessidades especiais etc. Cabe destacar que, apesar das conquistas de direito ao acesso, o "todos" almejado para a educação ainda necessita avançar rumo a uma maior participação dos diferentes sujeitos nos variados níveis de ensino. Também, muitos desses sujeitos de grupos minoritários, como o caso dos deficientes, apesar de ingressarem nos ambientes escolares, apresentam um índice de evasão maior, considerando que a escola muitas vezes não contempla suas especificidades (KASPER; LOCH; PEREIRA, 2008).

Falar em inclusão no cenário educacional brasileiro é algo recente. Estudos sobre essa temática são, em sua maioria, datados a partir da década de 90, período em que houve fortes discussões em nível mundial em torno desse novo modelo de atendimento escolar, que se opunha à ideia de integração vigente postulada anteriormente. Basicamente, a ideia do antigo modelo – de integração - consistia em adaptar o sujeito ao meio. Já com o ideal da inclusão, busca-se uma adaptação em "mão-dupla", que parte não somente dos sujeitos a serem incluídos, mas também dos diferentes espaços que o receberão. Dentre estas discussões, responsáveis pelo cunho do termo Inclusão Social e suas derivações, cabe destacarmos a "Declaração de Salamanca sobre princípios, políticas e práticas na área das Necessidades Educativas Especiais" (UNESCO, 1994) e a "Declaração Mundial sobre educação para todos" (UNESCO, 1990), as quais tiveram reflexos em todos os países participantes e cossignatários, influenciando as políticas educacionais brasileiras.

Com o avanço dos debates em nível mundial acerca da inclusão, constatou-se a necessidade de discutir abertamente essa temática, em consequência de sua grande repercussão em diferentes meios sociais. Essas discussões permeiam também o cenário das pesquisas científicas educacionais, que evidenciaram consideravelmente o seu interesse por essa temática, levando-se em conta a presença cada vez maior desses educandos nas escolas que se propõem inclusivas. Tal crescimento é refletido em diversos aspectos, como, por exemplo, inserido no campo de investigação em Educação Matemática. Nesta área específica de pesquisas, podemos citar a criação de um Grupo de Trabalho[5] (GT) junto à Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM) no ano de 2014, intitulado "Diferença, Inclusão e Educação Matemática". A criação deste grupo deveu-se ao fato de que, dentre outros aspectos, o número de investigadores brasileiros interessados na temática já era demasiadamente grande. Além disso, os demais Grupos de Trabalho daquela organização não contemplavam, diretamente, as discussões propostas pelo novo grupo. Podemos também citar o número temático da Revista Paranaense de Educação Matemática, publicado no ano de 2017, o qual trouxe especificamente trabalhos que tratavam da relação entre o ensino de Matemática e a inclusão de grupos minoritários em um cenário educacional matemático.

Apesar de todo esse fomento, os cursos de Licenciatura em Matemática ainda carecem de

[5] A Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM) organiza-se em Grupos de Trabalhos, os quais congregam pesquisadores de temáticas comuns por todo o país. Na maior parte dos eventos organizados pela SBEM, os trabalhos, bem como as discussões, são atrelados a esses Grupos de Trabalho. Atualmente, a SBEM possui 15 GT's.

inserções de tal discussão em suas disciplinas e atividades responsáveis pela formação de futuros docentes nesta área. Consideramos tal fato como capaz de trazer consequências diretas para que a inclusão ocorra de maneira mais satisfatória, no sentido de que estes estudantes não sejam apenas inseridos em um mesmo espaço, mas, mais do que isso, que disponham de acesso aos diferentes conhecimentos com qualidade. Sobre a problemática da formação inicial, Glat e Nogueira (2002) destacam esta formação como uma barreira, a qual impede a possibilidade de realização das políticas de inclusão nas salas de aula.

Ademais, esse despreparo acaba por gerar uma espécie de ciclo vicioso, afinal, não há como professores do Ensino Superior abordarem assuntos para os quais nunca foram apresentados, requerendo, desta forma, cursos de formação continuada que ainda são escassos, na tentativa de uma adaptação contínua nos processos formativos e que visem menos aos estudantes "ideais" e mais aos "reais", caracterizados pela diversidade comum no interior das salas de aula atuais, consequência da ampliação do direito à educação para diferentes grupos historicamente excluídos deste ambiente (BORGES, 2013).

Convém lembrar ainda que a ideia de uma educação inclusiva vai muito além de uma formação adequada do docente, pois é preciso que haja o envolvimento de inúmeros outros sujeitos para obter-se uma escola inclusiva de boa qualidade, assim como evidencia Beyer (*apud* GELLER; SGANZERLA, 2014):

> [...] a ideia de uma escola inclusiva, com capacidade para atender alunos em situações diferenciadas de aprendizagem, é altamente desafiadora. Implica uma ação conjunta e responsável de muito sujeitos para que essa escola se torne possível. Ação conjugada que engloba os próprios alunos, as famílias, os professores, as equipes pedagógicas, os funcionários e os gestores do projeto político-pedagógico (p.132).

Motivados pela ideia de contribuir com o cenário de inclusão, apresentaremos a seguir um levantamento bibliográfico categorizado a partir dos principais aspectos discutidos nas pesquisas brasileiras acerca do ensino de Matemática para Deficientes Visuais (DV)[6] inclusos, bem como a maneira como tais aspectos estão sendo abordados. Na sequência, explicaremos como se deram nossos procedimentos de coleta e análise dos dados levantados.

2 PERCURSO METODOLÓGICO

Optamos por realizar um estudo bibliográfico, que, segundo a perspectiva de Feldens (1981), trata este tipo de coleta de dados no campo educacional como uma ferramenta capaz de dar foco ao seu problema de pesquisa, delimitando seus objetivos e correlacionando-os a outros de pesquisas desenvolvidas no mesmo cenário. Uma pesquisa bibliográfica também permite destacar a importância do projeto e organizar seus resultados prévios, possibilitando ao leitor a compreensão do fenômeno estudado e como este é ajustado no contexto geral da pesquisa. Complementamos que, por meio de um estudo deste formato, é possível evidenciar temas que estão sendo mais discutidos dentro de uma determinada área e campos nos quais ainda se pode avançar.

Para a realização desta pesquisa bibliográfica, foram considerados textos no formato de artigos científicos e relatos de experiência, publicados em periódicos científicos *online* brasileiros com publicações datadas no período de 2006 a 2016. A publicação *online* foi escolhida pelo fato de facilitar nosso processo de busca por tais textos. As revistas analisadas deveriam ser

[6] Neste texto, optamos por utilizar o termo Deficientes Visuais – DV para nos referirmos a todo sujeito que necessita de atividades pensadas para essa diferença. Nesse sentido, estamos nos baseando em um termo mais amplo, já que esta pesquisa se trata de uma revisão bibliográfica derivada de diferentes trabalhos, com diferentes perspectivas.

qualificadas pela CAPES – Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de nível Superior - nas áreas de "Ensino" ou "Educação Especial" e apresentarem uma publicação regular há, no mínimo, três anos. Além disso, estes periódicos deveriam destacar, dentre os seus objetivos, características que permitam o envio de textos que estejam vinculados ao campo de investigação de Educação Matemática, quer seja, discussões que abarquem o ensino e a aprendizagem dessa disciplina em sua multiplicidade de aspectos envolvidos.

Submetendo a seleção das revistas *online* aos critérios previamente definidos, obtivemos vinte e um periódicos para análise. O próximo passo foi a identificação dos textos que formariam o *corpus* de nossa revisão. Para localizar estes textos, utilizamos da ferramenta de busca das revistas, adotando palavras-chave que remetessem ao objetivo de nossa pesquisa. As palavras utilizadas como busca nas revistas de Ensino (e que tratavam especificamente da Matemática) foram: *cego, deficiente visual, deficientes visuais, baixa-visão e deficiência visual*. Já nas revistas de Educação Especial, utilizamos as palavras *matemática* e *matemático*, considerando que estas revistas também trazem discussões de outras áreas do conhecimento. Mesmo com estas palavras escolhidas, bem como com as revistas delimitadas, ainda assim foi necessário um trabalho de leitura inicial apenas dos resumos dos textos, com vistas a identificar aqueles que discutiam especificamente nosso campo de interesse, isto é, o ensino de Matemática para DV inclusos.

Ao final da coleta e da leitura dos resumos, obtivemos vinte e cinco (25) textos, classificados em: 4 (quatro) relatos de experiência, 20 (vinte) artigos científicos e 1 (uma) atividade para sala de aula, que possui formato semelhante ao de um relato. A grande maioria dos textos coletados é datada dos últimos cinco (05) anos analisados, ou seja, a partir de 2012. Mais precisamente, dezenove (19) textos estão circunscritos ao período de 2012-2016 e apenas seis (06) foram publicados no período de 2006-2011. Isso nos permite fazer uma primeira inferência com base em nossas análises: a maior concentração dos textos está nos últimos cinco (05) anos. Abaixo, listamos os textos analisados. Destacamos que as referências serão colocadas apenas nos trabalhos que serão utilizados em nossa análise e discussão das categorias. Apesar disso, esperamos que o quadro a seguir sirva também como um instrumento de apoio aos interessados nessa temática.

Quadro 1: Relação dos artigos analisados

Título do texto	Autores	Periódico e período de publicação[7]
A Inclusão de Alunos Cegos nas Aulas de Matemática: explorando Área, Perímetro e Volume através do Tato	Solange Hassan Ahmad Ali Fernandes; Lulu Healy	Bolema, Rio Claro (SP), v.23, n.37, p. 1111-1135, 2010.
Inclusão de Estudantes Cegos nas Aulas de Matemática: a construção de um kit pedagógico	Marcia Rosa Uliana	Bolema, Rio Claro (SP), v.27, n.46, p. 597-612, 2013.
O uso de narrativas (auto)biográficas como uma possibilidade de pesquisa da prática de professores acerca da Educação (Matemática) Inclusiva	Fernanda Malinosky C. da Rosa; Ivete Maria Baraldi	Bolema, Rio Claro (SP), v.29, n.53, p. 936-954, 2015.

[7] Com esta tabela, esperamos contribuir com os leitores que desejarem encontrar as pesquisas consideradas. Entretanto, nas referências ao final do artigo, elencaremos apenas os textos utilizados em nossa discussão.

A probabilidade, a maquete tátil, o estudante cego: Uma teia inclusiva construída a partir da análise instrumental	Aida Carvalho Vita, Sandra Maria Pinto Magina; Irene Maurício Cazorla	Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática, v.8(3), p. 55-97, 2014.
Programa Computacional para o Estudo Matemático de Matrizes	Flávia Aparecida Reitz Cardoso; Felipe Veiga Ramos	Zetetiké – FE/Unicamp – v.21, n.40 – p. 127-147 jul/dez 2013.
A inclusão de estudantes com deficiência visual no ensino e aprendizagem de estatística: medidas de tendência central	Rita de Cássia Célio Pasquarelli; Ana Lucia Manrique	Educação Matemática Pesquisa, São Paulo, v.18, n.1, pp. 309-329, 2016.
O museu interativo de Matemática como uma ferramenta para a democratização da Matemática com vistas à educação inclusiva	Ana Maria M. R. Kaleff; Rosângela Figueira Dornas; Bárbara Gomes Votto; Fernanda Malinosky Coelho da Rosa	Educação Matemática em Revista- EMR-RS, v.1 e v.2, n.11, p. 83-91, 2010.
Reflexões de Professores sobre Tecnologias Assistivas e o Processo de Ensino e Aprendizagem de Matemática	Marlise Geller; Maria Adelina Raupp Sganzerla	Revista de ensino de ciências e Matemática. Acta Scientiae Canoas, v.16, n.4, p.116-137, 2014.
O professor, alunos cegos e a linguagem Matemática	Elisabete Marcon Mello	Revista Paranaense de Educação Matemática - RPEM, Campo Mourão, Pr, v.2, n.2, p.132-143, jan-jun. 2013.
Dois desafios para o ensino e para a inclusão do deficiente visual na escola: visualização e interpretação de figuras geométricas	Ana Maria M. R. Kaleff	Educação Matemática em Foco, v.1, n.2, p.33 – 55, Ago/Dez 2012.
Um museu interativo itinerante de Educação Matemática na formação do professor de Matemática	Ana Maria M. R. Kaleff; Anne Michelle Dysman	Educação Matemática em Foco, v.2, n.2, p. 53 – 66 Ago/Dez 2013.
Adaptações no Software GeoGebra para Alunos com Baixa Visão	Arthur Rodrigues Papacosta; Jaqueline Araújo Civardi; Maria Eurípedes de Souza Dias	Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática. Ano 20, Nº 47, p.21-28, dezembro de 2015.
Inclusão no Ensino Médio: Geometria para Deficiente Visual	Davi Cézar da Silva; José Carlos da Silva Leivas	Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática. Ano 18, Nº 40, p. 13-20, novembro de 2013.
Tecnologias Concretas e Digitais Aplicadas ao Processo de Ensino-Aprendizagem de Matemática Inclusiva	Teodora Pinheiro Figueroa; Eliane Maria de Bortoli Fávero; Braian Lucas Camargo Almeida; Josiane Rodrigues dos Santos	Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática. Ano 14, Nº 32, p.52-60, março de 2011.

Avaliação do Nível de Conhecimento dos Alunos do Ensino Médio da cidade de João Pessoa com Deficiência Visual sobre as Grafias Química e Matemática Braille	João Batista Moura de Resende Filho; Nathália Kellyne Silva Marinho Falcão; Alessandra Marcone Tavares Alves de Figueirêdo; Maria Fernanda Henrique Odebrecht	Revista Educação Especial. v. 26, n. 46, p. 367-384, maio/ago. 2013.
Buscando a Educação Inclusiva em Geometria	Ana Maria M. R. Kaleff; Fernanda Malinosky C. da Rosa	Revista do instituto Benjamin Constant. Edição 51 - Abril de 2012.
A Matemática por trás da Orientação e Mobilidade	Jorge Carvalho Brandão	Revista do instituto Benjamin Constant. Edição 42 - Abril de 2009.
Desenho Geométrico e Deficiência Visual	Jorge Carvalho Brandão	Revista do instituto Benjamin Constant. Edição 39 - Abril de 2008.
Matemática e a Deficiência Visual: Atividades Desenvolvidas com o Material Dourado	Celis Ferreira Turella; Keli Cristina Conti	Revista do instituto Benjamin Constant. Edição 52 - Agosto de 2012.
Matemática inclusiva em ação: um estudo de caso de deficiência visual na Educação Básica	Gabriel Luís da Conceição; Chang Kuo Rodrigues	Revista do instituto Benjamin Constant. Edição 57 volume 2 - Julho a Dezembro de 2014.
O ensino de Matemática para pessoas com deficiência visual no Brasil: um estudo bibliográfico	Ailton Barcelos da Costa; Sabrina Gomes Cozendey	Revista do instituto Benjamin Constant. Edição 57 volume 1 - Janeiro a Junho de 2014.
Proposta para o ensino de conteúdos de Matemática a estudantes cegos	Lui Fellippe da Silva Bellicantta Mollossi; Tatiana Comiotto Menestrina; Marnei Luis Mandler	Revista do instituto Benjamin Constant. Edição 57 volume 1 - Janeiro a Junho de 2014.
Uma perspectiva sobre a inclusão de cegos: considerações de uma professora de Matemática	Luís Fellippe da Silva Bellicantta Mollossi; Tatiana Comiotto Menestrina; Marnei Luis Mandler; Laura Comiotto Menestrina	Revista do instituto Benjamin Constant. Edição 58 volume 1 - Janeiro - Junho de 2015.
Inclusão do aluno com baixa visão: colaboração entre educador especial e o professor da sala de aula	Débora Lucila Carlos; Carla Ariela Rios Vilaronga; Silvana Tonon	Revista do instituto Benjamin Constant. Edição 56 - Dezembro de 2013.
De lá pra cá... Daqui pra lá... Tanto faz... — As Operações Matemáticas nas Velhas Tábuas de Contar	Cleonice Terezinha Fernandes	Revista do instituto Benjamin Constant. Edição 35 - Dezembro de 2006.

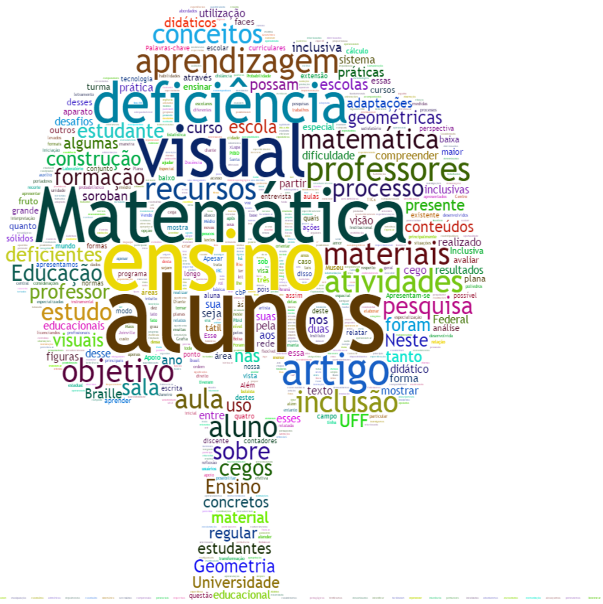
Fonte: Os autores.

Cabe destacar, inicialmente, em quais regiões brasileiras estão concentrados os pesquisadores que publicaram os textos aqui apresentados. Nesse sentido, os 25 textos são oriundos de pesquisas cujos autores atuam nos seguintes estados brasileiros: São Paulo (07 textos); Rio de Janeiro (05 textos); Paraná (02 textos); Santa Catarina (02 textos); Rio Grande do Sul (02 textos); Ceará (02 textos); Mato Grosso (01 texto); Bahia (01 texto); Rondônia (01 texto); Goiás (01 texto) e Paraíba (01 texto). Notamos que a discussão se concentra em maior número nas regiões Sudeste e Sul. No caso do estado de São Paulo, destacamos, dentre outros fatores, a presença do Programa de Pós-Graduação em Educação Especial, ofertado pela Universidade Federal de São Carlos. Já no Rio de Janeiro, cabe lembrar que uma das instituições de ensino de cegos mais antigas e respeitadas está sediada no estado em questão, o Instituto Benjamin Constant.

Após a leitura na íntegra dos textos, os mesmos foram fichados por meio de resenhas, com o intuito de aproximar o pesquisador do seu material, afinal, o conhecimento do *corpus* de pesquisa é essencial, visto que a nossa intenção é categorizar estes textos de acordo com as principais características abordadas. De acordo com Moraes (2003), o processo de categorização pode se dar de duas maneiras: indutiva ou dedutiva. No nosso caso, consideramos a categorização como indutiva, por emergir de aspectos observados nas pesquisas[8], e não previamente destacados por nós. Vale ressaltar também que há casos de um mesmo texto ser analisado em mais de uma categoria, por abarcar discussões diversas e pertinentes a mais de uma delas.

Uma ferramenta na construção das categorias foi o mapa de palavras, constituído a partir dos resumos dos textos integrantes do *corpus* de nosso estudo bibliográfico. Para estruturação deste, utilizou-se do gerador de mapa de palavras *online*, *WordCloud*, no qual se inseriu os resumos de todos os textos e, a partir disto, ele construiu o mapa desejado, utilizando as palavras que mais aparecem nos resumos e nos fornecendo até mesmo a listagem com número de vezes que cada palavra apareceu. Essa ferramenta deu subsídios para a construção das categorias. A seguir apresentamos o mapa ao qual nos referimos.

Figura 1: Árvore de palavras.



Fonte: Autores

Conhecendo os textos, tendo em mãos a resenha de cada um e o mapa de palavras, partimos para a elaboração das categorias emergentes dos aspectos comuns entre os textos. A categorização focou nas características encontradas nos textos em geral, dando enfoque em

---

[8] Ainda de acordo com Moraes (2003), o processo de categorização dedutiva ocorre quando as categorias já são previamente definidas.

especial ao objetivo geral que cada pesquisa assumiu e sobre o que se pretendia tratar dentro do cenário de inclusão para os deficientes visuais. As quatro (04) categorias por nós evidenciadas e que serão discutidas a seguir foram: *Comunicação e linguagem nas aulas de Matemática para alunos DV*; *Pesquisa acerca do ensino de Matemática para DV e o destaque à Geometria*; *Tecnologias Assistivas no ensino de Matemática para DV*; e *A formação de professores de Matemática e os alunos DV*.

3 DISCUSSÃO DAS CATEGORIAS

3.1 Comunicação e Linguagem nas aulas de Matemática para alunos DV

Essa categoria reúne textos que discutem a importância das interações ocorridas em ambientes inclusivos envolvendo DV e os demais sujeitos. Segue quadro com os textos que trazem contribuições nesse sentido.

Quadro 2: Textos que compõem a categoria 3.1

Textos pertencentes à categoria
A Inclusão de Alunos Cegos nas Aulas de Matemática: explorando Área, Perímetro e Volume através do Tato (FERNANDES; HEALY, 2010).
Programa Computacional para o Estudo Matemático de Matrizes (CARDOSO; RAMOS, 2013).
O professor, alunos cegos e a linguagem Matemática (MELLO, 2013).
Adaptações no Software GeoGebra para Alunos com Baixa Visão (PAPACOSTA; CIVARDI; DIAS, 2015).
Avaliação do Nível de Conhecimento dos Alunos do Ensino Médio da cidade de João Pessoa com Deficiência Visual sobre as Grafias Química e Matemática Braille (RESENDE FILHO *et al,* 2013).
Proposta para o ensino de conteúdos de Matemática a estudantes cegos (MOLLOSSI; MENESTRINA; MANDLER, 2014).

Fonte: Os autores.

Partimos do pressuposto de que, para que haja ensino e aprendizagem, deve-se estabelecer um processo de interação entre os diferentes sujeitos que compõem a esfera escolar, com destaque para o professor e seus alunos. Observamos que os textos trazem diferentes sujeitos participantes do ambiente educacional aqui analisado: o próprio DV, professores, educador especial, alunos videntes[9], equipe pedagógica etc. Seis (06) textos evidenciam situações de pequenas mudanças que contribuem para o aprendizado do aluno, como um simples "mudar de lugar" na própria sala de aula, que pode facilitar a vida escolar de um aluno com baixa visão.

Essa categoria abrange também a comunicação entre professor de sala de aula e educador especial, pois, partindo do pressuposto que um possui formação específica para Matemática e outro para as necessidades especiais do aluno, o contato entre ambos pode fornecer adaptações curriculares que contribuem diretamente com o ensino e a aprendizagem de Matemática para aqueles que requerem maior atenção, além de facilitar o processo de avaliação desses alunos.

Agrupamos linguagem e comunicação em uma mesma categoria, pois, acreditamos que a segunda é crucial para contornar dificuldades advindas da primeira, estando, portanto, interligadas. Por mais cuidadoso e experiente que seja o docente, haverá situações em que ele estará propenso a cometer "erros" na sua fala, especialmente em turmas com a presença de alunos inclusos. Quando dizemos erros, estamos nos referindo a certas falas que encontram

[9] Consideramos como alunos videntes todos aqueles que não apresentam nenhum comprometimento em sua visão, necessitando, consequentemente, de um atendimento educacional especializado.

validade dentro de uma determinada escrita, mas que, quando transpostas para outra, como o braile, tornam-se errôneas.

Mello (2013) destaca que há uma grande diferença entre a escrita braile e a escrita a tinta, o que pode culminar em obstáculos quando o professor não conhece a escrita utilizada pelo aluno. Ainda em Mello (2013), observamos exemplos de falas do tipo, “denominador é o número de baixo” ou “expoente é aquele que vai em cima” que não são válidas para a escrita em braile e requerem atenção dos educadores que possuem em suas classes alunos cegos. O texto da autora traz um exemplo que pode confundir o aluno, devido à ambiguidade na hora de sua interpretação ao copiar o exercício, que geralmente é ditado por um colega de classe ou pelo próprio professor, pois diferentes expressões são oralizadas da mesma forma, mas, em sua representação escrita, assumem formatos diferentes, como por exemplo $2^{(x+1)}$ e $2^x + 1$, isso pode ocasionar uma dúvida e, consequentemente, o erro na escrita em braile pelo aluno DV. Neste exemplo específico, Mello (2013) sugere que o professor comunique o posicionamento dos parênteses na expressão, onde começam e terminam.

Vemos a boa comunicação, nesse caso, como um meio para minimizar tais equívocos, visto que, apesar de professor e aluno possuírem uma escrita diferente, a linguagem oral é comum aos dois. Além disso, é sempre bem-vinda a análise do procedimento utilizado pelo aluno nos cálculos, especialmente a análise do erro, isso para qualquer aluno, evidenciando se o estudante realmente cometeu um erro de cálculo por não compreender o conceito ou por um mal-entendido na hora de escrever o exercício. Com isso, destacamos a importância do diálogo entre o professor e o aluno DV, no sentido de que esse último seja estimulado a falar sobre sua resolução e resposta, muitas vezes representadas em uma escrita não dominada pelo professor (o braile).

A exemplo de como a comunicação é de extrema importância quando tentamos criar um ambiente inclusivo para DV, temos o trabalho de Carlos, Viralon e Tonon (2013), que apresentam uma experiência de ensino envolvendo uma aluna do Ensino Fundamental com deficiência auditiva leve e baixa visão, a qual depende de adaptações feitas sob a forma de ensino colaborativo entre professor e educador especial e realizadas por uma acadêmica de Matemática, bolsista do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID). Dentre tais adaptações, citamos as de menor expressão, mas que refletem consideravelmente no aprendizado da aluna que, segundo a autora, foram: a escrita na lousa com o giz branco em letras maiores; o uso do Datashow e de atividades impressas, a preocupação com a fonte da escrita, o contraste das cores; a valorização dos acertos e erros como fontes de aprendizagens; a observação da necessidade, por parte da aluna, de um tempo diferenciado para realizar as atividades; a posição da carteira ocupada pela aluna nas primeiras fileiras; a liberdade para se levantar e chegar mais próximo da lousa, entre outros.

Os autores destacam que outras adaptações em materiais e estratégias pedagógicas podem ser usufruídas por toda a turma, o que permite a interação do aluno com necessidades especiais e os demais, contribuindo para o processo de inclusão. Por fim, os autores trazem uma ideia importante, de que essas adaptações que parecem simples, fazem total diferença na independência do aluno, no reconhecimento de suas reais necessidades e em seu progresso escolar.

Outra dificuldade atrelada à escrita, e que é um reflexo da linguagem utilizada em sala, é a falta de domínio da simbologia do braile por parte dos envolvidos. O professor da sala de aula regular, por não conhecer as características desta escrita, torna-se e sente-se impotente diante de tudo que o aluno escreve se não houver a própria interpretação do aluno (RESENDE FILHO *et al,* 2013). Já os alunos DV ficam sem artifícios para a escrita quando não conhecem a maneira como se referir à uma palavra específica, ainda mais considerando as diversas expressões particulares da matemática. A pesquisa de Resende Filho *et al* (2003) traz um exemplo do retratado. Na análise do nível de conhecimento de alunos do Ensino Médio, os autores evidenciam um domínio consideravelmente baixo no que concerne ao uso correto dos símbolos compilados nas grafias comuns nas disciplinas de Química e Matemática em braile.

Em consonância com Mello (2013), acreditamos que a comunicação entre professor e aluno podem amenizar os problemas causados pelas diferenças entre a escrita a tinta e a em braile, compensando em partes o déficit no domínio de escrita dessa, principalmente nas aulas de Matemática. Essa aproximação entre as escritas contribui para a participação do aluno nas atividades escolares, encorajando-o a questionar seus resultados e o estimulando no desenvolvimento de sua autonomia.

3.2 Pesquisas acerca do ensino de Matemática para DV e o destaque à geometria

A segunda categoria diz respeito à ênfase dada à geometria pelas pesquisas que tratam de inclusão no cenário educacional. Em nossa revisão, identificamos doze textos que discutem o ensino desta temática, seja criando metodologias, materiais manipuláveis ou outras metodologias para o ensino de geometria para estudantes DV. No quadro 3 temos os textos que compuseram a categoria.

Destacamos o trabalho de Costa e Cozendey (2014)[10], que também realizaram um estudo bibliográfico sobre a Matemática e a inclusão. Dentre os dez (10) artigos selecionados por eles, oito (08) discutiam conceitos relacionados com a geometria, reforçando a ideia do destaque dado a este conteúdo quando se trata de pesquisas voltadas para DV e a Matemática.

Dentre as opções de escolha daqueles que queremos destacar, temos os textos relacionados com o projeto “Vendo com as mãos”, que possui um museu itinerante (LEG) e é coordenado pela professora e pesquisadora Ana Kallef. A professora assumiu a proposta de gerar recursos para o ensino de geometria para DV, possuindo diversos textos relatando experiências acerca do tema. Em um deles, intitulado “O museu interativo de matemática como uma ferramenta para a democratização da matemática com vistas à educação inclusiva”, são apresentados materiais desenvolvidos com o intuito de auxiliar no desenvolvimento de habilidades geométricas de alunos DV, como o mosaico de encaixe, pranchas dinâmicas para a representação de polígonos equivalentes, aparelhos especiais de modelagem e medição de comprimento, área e volume, modelos de poliedros articulados, esqueletos de poliedros regulares, entre outros.

Temos também o trabalho de Uliana (2013), que narra a aplicação e aperfeiçoamento de um kit pedagógico para o estudo de conteúdos de geometria plana. Uliana (2013) faz sucessivas aplicações e alterações no material, a fim de torná-lo o mais utilitário possível para alunos (videntes ou não) estudarem figuras geométricas planas e gráficos de função polinomial. Já em Brandão (2009), a geometria é estudada por meio do processo de Orientação e Mobilidade (OM), elaborando atividades que abordam principalmente o conceito de ângulos.

Lembramos aqui que os conteúdos estruturantes propostos nas Diretrizes Curriculares da Educação Básica (PARANÁ, 2008) para rede pública estadual, são cinco: Números e Álgebra, Grandezas e Medidas, Geometrias, Funções e Tratamento da Informação. Ou seja, os alunos inclusos, assim como todos os demais, devem apreender sobre esses cinco pilares da Matemática, que se ramificam em conteúdos mais específicos durante sua vida escolar. Logo, espera-se que haja pesquisas científicas que foquem em criar metodologias e materiais para todos esses

[10] Apesar da similaridade entre nosso estudo e o de Costa e Cozendey (2014), a ênfase desses últimos foi na busca por atividades inclusivas a serem utilizadas nas turmas de Matemática com alunos cegos e DV inclusos. Já o presente artigo não focalizou especificamente um aspecto, a não ser o fato de que os artigos encontrados e analisados deveriam discutir o ensino de Matemática para cegos e DV como um todo.

conteúdos, na área de inclusão, mas, infelizmente os cinco não são alvos de pesquisas de forma igualitária, apesar de serem igualmente importantes na disciplina de matemática.

Quadro 3: Textos que compõem a categoria 3.2

Textos pertencentes à categoria	Conteúdo específico
A Inclusão de Alunos Cegos nas Aulas de Matemática: explorando Área, Perímetro e Volume através do Tato (FERNANDES; HEALY, 2010).	Geometria
Inclusão de Estudantes Cegos nas Aulas de Matemática: a construção de um kit pedagógico (ULIANA, 2013).	Figuras geométricas planas e gráficos de função polinomial
Reflexões de Professores sobre Tecnologias Assistivas e o Processo de Ensino e Aprendizagem de Matemática (GELLER; SGANZERLA, 2014).	Gráficos e sólidos geométricos
Dois desafios para o ensino e para a inclusão do deficiente visual na escola: visualização e interpretação de figuras geométricas (KALEFF, 2012).	Figuras geométricas
Inclusão no Ensino Médio: Geometria para Deficiente Visual (SILVA; LEIVAS, 2013).	Figuras elementares da geometria plana
Tecnologias Concretas e Digitais Aplicadas ao Processo de Ensino-Aprendizagem de Matemática Inclusiva (FIGUEROA *et al*, 2011).	Equações algébricas e gráficos de funções
Buscando a Educação Inclusiva em Geometria (KALEFF; ROSA, 2012).	Geometria (apresenta diversos materiais adaptados)
A Matemática por trás da Orientação e Mobilidade (BRANDÃO, 2009).	Geometria, orientação e mobilidade
Desenho Geométrico e Deficiência Visual (BRANDÃO, 2008).	Geometria
Matemática inclusiva em ação: um estudo de caso de deficiência visual na Educação Básica (CONCEIÇÃO; RODRIGUES, 2014).	Geometria Plana e Espacial
Proposta para o ensino de conteúdos de Matemática a estudantes cegos (SILVA *et al*¸ 2014).	Geometria Plana e aritmética
Inclusão do aluno com baixa visão: colaboração entre educador especial e o professor da sala de aula (CARLOS; VILARONGA; TONON, 2013).	Ângulos complementares e suplementares

Fonte: Os autores.

3.3 Tecnologias Assistivas no ensino de Matemática para DV

As Tecnologias Assistivas são abordadas com frequência nos trabalhos que tratam de inclusão, mesmo que nem todos esses usem esse termo para classificá-las. Entendemos Tecnologias Assistivas de acordo com as definições de Cat (2007), como sendo:

> Uma área do conhecimento, de característica interdisciplinar, que engloba produtos, recursos, metodologias, estratégias, práticas e serviços que objetivam promover a funcionalidade, relacionada à atividade e participação, de pessoas com deficiência, incapacidades ou mobilidade reduzida, visando sua autonomia, independência, qualidade de vida e inclusão social (CAT, 2007, p. 4, *apud* MARCHI, SILVA (2016)).

No quadro 4 temos a relação dos dezenove (19) textos componentes dessa categoria.

Quadro 4: Textos que compõem a categoria 3.2

Textos pertencentes a categoria
A Inclusão de Alunos Cegos nas Aulas de Matemática: explorando Área, Perímetro e Volume através do Tato (FERNANDES; HEALY, 2010).
Inclusão de Estudantes Cegos nas Aulas de Matemática: a construção de um kit pedagógico (ULIANA, 2013).
A probabilidade, a maquete tátil, o estudante cego: Uma teia inclusiva construída a partir da análise instrumental (VITA; MAGINA; CAZORLA, 2014).
Programa Computacional para o Estudo Matemático de Matrizes (CARDOSO; RAMOS, 2013).
A inclusão de estudantes com deficiência visual no ensino e aprendizagem de estatística: medidas de tendência central (PASQUARELLI; MANRIQUE, 2016).
O museu interativo de Matemática como uma ferramenta para a democratização da Matemática com vistas à educação inclusiva (KALEFF *et al*, 2010).
Reflexões de Professores sobre Tecnologias Assistivas e o Processo de Ensino e Aprendizagem de Matemática (GELLER; SGANZERLA, 2014).
Dois desafios para o ensino e para a inclusão do deficiente visual na escola: visualização e interpretação de figuras geométricas (KALEFF, 2012).
Um museu interativo itinerante de Educação Matemática na formação do professor de Matemática (KALEFF; DYSMAN, 2013).
Adaptações no Software GeoGebra para Alunos com Baixa Visão (PAPACOSTA; CIVARDI; DIAS, 2015).
Inclusão no Ensino Médio: Geometria para Deficiente Visual (SILVA; LEIVAS, 2013).
Tecnologias Concretas e Digitais Aplicadas ao Processo de Ensino-Aprendizagem de Matemática Inclusiva (FIGUEROA *et al,* 2011).
Buscando a Educação Inclusiva em Geometria (KALEFF; ROSA, 2012).
A Matemática por trás da Orientação e Mobilidade (BRANDÃO, 2009).
Matemática e a Deficiência Visual: Atividades Desenvolvidas com o Material Dourado (TURELLA; CONTI, 2012).
Matemática inclusiva em ação: um estudo de caso de deficiência visual na Educação Básica (CONCEIÇÃO; RODRIGUES, 2014).
Proposta para o ensino de conteúdos de Matemática a estudantes cegos (SILVA *et al*, 2014).
Inclusão do aluno com baixa visão: colaboração entre educador especial e o professor da sala de aula (CARLOS; VILARONGA; TONON, 2013).
De lá pra cá... Daqui pra lá... Tanto faz... — As Operações Matemáticas nas Velhas Tábuas de Contar (FERNANDES, 2006).

Fonte: Os autores.

Dentre todas as Tecnologias Assistivas, as que aparecem com maior destaque nesta revisão são: os equipamentos de cálculo, recursos computacionais, em especial os ampliadores e leitores de tela, recursos táteis e pequenas adaptações na sala de aula (mudança de lugar, aumento de letra etc). Iniciamos enunciando uma característica importante e comum a todas estas Tecnologias Assistivas, que diversos outros autores já enfatizam, que é o fato de muitas das vezes elas serem o pilar central da aquisição de um conceito. Nas palavras de Radabauch (2014, *apud* GELLER; SGANZERLA, 2014), se para as pessoas sem deficiência, a tecnologia torna as coisas mais fáceis, para as pessoas com deficiência a tecnologia torna as coisas possíveis.

A utilização de Tecnologias Assistivas no ensino e aprendizagem de Matemática é importante, por trata-se de uma disciplina que lida com conhecimentos abstratos e, se pensarmos em pessoas que contam com acuidade visual baixa ou nenhuma acuidade, torna-se ainda mais necessário esse recurso, pois se precisa buscar meios que driblem os obstáculos decorrentes da limitação visual do aluno.

Dentre os trabalhos que integram esta categoria, temos o de Papacosta, Civardi e Dias (2015), que trazem como Tecnologia Assistiva o simulador de gráficos para o aprendizado de estatística, e Pasquarelli e Manrique (2016), que realizam adaptações no software Geogebra que viabilizam o uso desse por alunos com baixa visão.

Ferreira (2006) retrata a importância de entendermos que as Tecnologias Assistivas não dizem respeito apenas aos estudantes com deficiência, mas a todos que enfrentam alguma forma de barreira. Desta forma, acreditamos que todo docente deveria se instrumentalizar de tecnologias que enriqueçam suas metodologias de trabalho em sala de aula.

Em geral, os trabalhos pertencentes a esta categoria, em grande parte das vezes, possuem um formato de estudo de caso, ou mesmo uma intervenção pedagógica para testagem de alguma Tecnologia Assistiva, neste caso softwares ou materiais manipuláveis. Textos assim fornecem subsídios para outros docentes que possuem em suas salas de aula alunos inclusos e desconhecem materiais e métodos para este tipo de atendimento.

3.4 A formação de professores de Matemática e os alunos DV

A formação de professores é a última categoria que evidenciamos para esta revisão. Os textos que abordam o ensino de Matemática para DV geralmente trazem ênfase na falta de preparo dos professores para atuarem em sala de aula com alunos inclusos, relatada pelos próprios professores, ou giram em torno da importância da formação continuada. Há ainda trabalhos que trazem uma análise do nível de conhecimento dos docentes para discutir a necessidade de uma melhor preparação por parte dos professores, conforme discutiremos na sequência. No quadro 5 temos elencados os sete (07) textos da presente categoria.

A principal causa apontada quanto ao despreparo dos docentes de Matemática para lidarem com alunos DV é o fato deles nunca terem tido experiências desse tipo durante sua formação docente. Na pesquisa de Molossi *et al* (2015), evidenciamos tal fato quando os autores realizam entrevistas com um grupo de docentes a respeito de sua formação, sendo que os sujeitos deixam explícito nunca terem tido uma disciplina que promovesse o debate acerca da prática em sala de aula com alunos inclusos, exceto pela disciplina de Libras.

Nesses casos, a formação continuada é apontada como um caminho para complementar a formação docente inicial. Os cursos de formação inicial de Matemática ainda carecem de, ou disciplinas específicas para lidarem com a inclusão, ou inserções de tal temática, atrelada aos diferentes aspectos relacionados à formação dos futuros professores, nas demais disciplinas.

Do trabalho de Rosa e Baraldi (2015), evidenciamos na fala de uma docente responsável pela capacitação de professores de Matemática de uma escola inclusiva e pela adaptação de provas e trabalhos para a escrita em Braile, que apesar da política de inclusão (im)posta pelas leis, esta não foi (nem vem sendo) acompanhada na mesma velocidade pelos cursos de formação de professores. No trabalho citado, Rosa e Baraldi (2015) realizam uma discussão por meio de memoriais de formação com a expectativa de esboçar como os professores de Matemática se aproximaram da Educação (Matemática) Inclusiva e algumas de suas práticas nas classes especializadas ou inclusivas, que recaem sobre sua formação.

Quadro 5: Textos que compõem a categoria 3.2

Textos pertencentes a categoria
O uso de narrativas (auto)biográficas como uma possibilidade de pesquisa da prática de professores acerca da Educação (Matemática) Inclusiva (ROSA; BARALDI, 2015).
Reflexões de Professores sobre Tecnologias Assistivas e o Processo de Ensino e Aprendizagem de Matemática (GELLER; SGANZERLA, 2014).
O professor, alunos cegos e a linguagem Matemática (MELLO, 2013).
Um museu interativo itinerante de Educação Matemática na formação do professor de Matemática (KALEFF; DYSMAN, 2013).
Desenho Geométrico e Deficiência Visual (BRANDÃO, 2008).
Uma perspectiva sobre a inclusão de cegos: considerações de uma professora de Matemática (SILVA *et al*, 2015).
Inclusão do aluno com baixa visão: colaboração entre educador especial e o professor da sala de aula (CARLOS; VILARONGA; TONON, 2013).

Fonte: Os autores.

Um fato também trazido por Rosa e Baraldi (2015) é a discussão que envolve aqueles que são contra a educação inclusiva. Não vemos como justificativa para se assumir uma posição contrária à inclusão, o fato do docente não ter uma formação específica para trabalhar com alunos inclusos. Segundo os autores, pessoas que tem esse perfil, em geral são aqueles que não se importam com os alunos e entram em suas salas de aula sem se questionarem sobre sua responsabilidade social. Além disso, tratar inclusão como simplesmente "colocar" o aluno DV em uma sala de aula com outros estudantes videntes, é mascarar o objetivo maior da escola, que é anterior às discussões políticas voltadas para as pessoas com necessidades especiais.

Cremos que uma formação adequada certamente acarretará no conhecimento de alguns materiais didáticos e metodologias que auxiliem no ensino e na aprendizagem, e que podem evitar um mal desempenho escolar, como apresentam Figueroa, Fávero, Almeida e Santos (2011) em seu relato de experiência ao descreverem uma experiência didático-pedagógica dos alunos do curso de Licenciatura em Matemática, bolsistas do PIBID, que aplicam metodologias de ensino direcionadas a DV em uma turma do Ensino Médio.

Os autores ao mostrarem tal experiência conseguem evidenciar que um aluno que não participava efetivamente das aulas, em decorrência das dificuldades encontradas (formação inadequada dos professores do ensino regular, falta de interação entre o professor do ensino regular e o professor especialista em braile, além da carência de recursos didáticos adequados), apresenta um aprendizado significativo, juntamente com os demais alunos, quando conta com licenciados preparados para lidar com as limitações do aluno, sabendo explorar as potencialidades desse, com materiais e metodologias adequadas às suas necessidades.

Por fim, lembramos que a formação do professor é um processo contínuo e, por mais preparado que ele se julgue estar, em decorrência das suas experiências, sempre haverá novos ensinamentos que podem contribuir como sua formação. Afinal, a cada dia um "novo" estudante pode "bater à porta" das suas salas de aula, e é para este estudante, real e não ideal, que temos que voltar nossas atenções e priorizar ações inclusivas que se revertam em um ensino e aprendizagem de boa qualidade.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O trabalho aqui descrito, que tinha como objetivo realizar um levantamento do que tratam as pesquisas publicadas em periódicos científicos de revistas *online* da área de Ensino e Educação Inclusiva, apresentou seus resultados na forma de quatro categorias, que foram arquitetadas de forma indutiva após o aprofundamento dos pesquisadores com material analisado, por meio das leituras, resenhas, discussões e auxiliado pelo mapa de palavras, sendo estas categorias intituladas: *Comunicação e linguagem nas aulas de Matemática para alunos DV*, *Pesquisa acerca do ensino de Matemática para DV e o destaque à geometria*, *Tecnologias Assistivas no ensino de Matemática para DV* e *A formação de professores de Matemática e os alunos DV*.

Acreditamos que, devido a esta temática ainda ser recente, é natural que equívocos ocorram, mas precisamos, acima de tudo, dialogar quando tivermos a presença desses alunos em nossas salas e instituições de ensino. É essencial repensar a prática como docente, o papel assumido por toda escola e os espaços físicos oferecidos, pois, se aguardarmos que as políticas públicas se revertam efetivamente em ações adequadas de ensino, isso levará um tempo maior e estaremos excluindo, na atualidade, estudantes das possibilidades de aprendizagem com significados e ignorando a capacidade de transformação social destes sujeitos.

Ao lançarmos um olhar mais amplo para todas as categorias, notamos uma característica fundamental para se pensar em uma inclusão de fato: as adaptações ditas “especiais” são também adequadas para os demais estudantes, aqueles que não possuem comprometimentos de ordem patológica. Afinal, “repensar a formação docente”, “inserir tecnologias no ensino”, “adotar Tecnologias Assistivas e materiais manipuláveis”, “atentar para a linguagem utilizada em sala de aula”, dentre outros aspectos, são propostas já feitas para outros estudantes, com a justificativa de contribuírem com o ensino e aprendizagem dos mais diversos sujeitos. Fica-se, então, a ideia de que o “olhar” para as necessidades de estudantes como os DV escancaram as nossas fragilidades e, por outro lado, reforçam argumentos já anunciados quanto a necessidade de repensar nossas estratégias metodológicas de maneira contínua.

De maneira geral, esperamos que a pesquisa possa contribuir com todos aqueles que almejam discutir a Matemática para alunos DV inclusos e outras áreas próximas, fornecendo o direcionamento, de maneira genérica, assumido pelas pesquisas por nós investigadas.

REFERÊNCIAS

BORGES, F. A. **A educação inclusiva para surdos**: uma análise do saber matemático intermediado pelo intérprete de Libras. Tese de Doutorado, Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2013.

BRANDÃO.C.B. A Matemática por trás da Orientação e Mobilidade. **Revista do Instituto Benjamin Constant**, Rio de Janeiro, edição 42, artigo 1, abril de 2009.

CARLOS, D. L.; VILARONGA, C. A. R.; TONON, S. Inclusão do aluno com baixa visão: colaboração entre o educador especial e o professor da sala comum. **Revista do instituto Benjamin Constant**, Rio de Janeiro, edição 56, artigo 1, dezembro de 2013.

COSTA, A. B.; COZENDEY, S. G. O ensino de Matemática para pessoas com deficiência visual no Brasil: um estudo bibliográfico. **Revista do Instituto Benjamin Constant**, Rio de Janeiro, ano 20, n. 57, v. 1, p. 38-51, 2014.

FELDENS, M.G.F. Os propósitos da revisão de literatura e o desenvolvimento da pesquisa educacional. **Ciência e Cultura**, v. 33, n. 9, p. 1197-1199, 1981.

FERREIRA, W. B. Práticas educacionais inclusivas na sala de aula regular. **III Seminário Nacional de Formação de Gestores e Educadores – Ensaios Pedagógicos**. Ministério
da Educação. Secretária de Educação Especial. Brasília, 2006. Disponível em:

http://portaldoprofessor.mec.gov.br/storage/materiais/0000013526.pdf. Acesso em: 01 de março de 2017.

FIGUEROA, T. P.; FÁVERO, M. B. F.; ALMEIDA, B. L. C.; SANTOS, J. R. Tecnologias Concretas e Digitais Aplicadas ao Processo de Ensino-Aprendizagem de Matemática Inclusiva. **Sociedade Brasileira de Educação Matemática**. Ano 19, n. 32, p. 52-60, 2011.

GELLER, M.; SGANZERLA, M. A. R. Reflexões de Professores sobre Tecnologias Assistivas e o Processo de Ensino e Aprendizagem de Matemática. **Revista de ensino de ciências e Matemática,** Rio Grande do Sul, v. 16, n. 4, p.116-137, 2014.

GLAT, R.; NOGUEIRA, M. L. L. Políticas Educacionais e a Formação de Professores para a Educação Inclusiva no Brasil. **Revista Integração**, Brasília, v. 24, ano 14, p. 22-27, jan., 2002.

KASPER, A. A.; LOCH, M. V. P.; PEREIRA, V. L. D. V. Alunos com deficiência matriculados em escolas públicas de nível fundamental: algumas considerações. **Educar,** Curitiba, n.31, p. 231-243, 2008.

MOLOSSI, L. F. S. B.; MANESTRINA, T. C.; MANDLER, M. L.; MENESTRINA, L. C. Uma perspectiva sobre a inclusão de cegos: considerações de uma professora de Matemática. **Revista do Instituto Benjamin Constant**, Rio de Janeiro, ano 21, n. 58, v. 1, p. 30-48, 2015.

MARCHI, M. I.; SILVA, T. N.C. Formação continuada de professores: buscando melhorar e facilitar o ensino para deficientes visuais por meio de tecnologias assistivas. **Revista Educação Especial**, Rio Grande do Sul, v. 29, n. 55, p. 457-470, 2016.

MELLO, E. M. O Professor, Alunos Cegos e a Linguagem Matemática. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, Campo Mourão, v. 2, n. 2, p.132-143, 2013.

MORAES, R. Uma tempestade de luz: a compreensão possibilitada pela Análise Textual Discursiva. **Revista Ciência & Educação**, v. 9, n. 2, dez. 2003.

PAPACOSTA, A. R.; CIVARDI, J. A.; DIAS, M. E. S. Adaptações no Software GeoGebra para Alunos com Baixa Visão. **Sociedade Brasileira de Educação Matemática**, Ano 20, n. 47, p.21-28, dez. 2015.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. **Diretrizes Curriculares de Matemática para a Educação Básica.** Curitiba, 2008. Disponível em: http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/diretrizes/dce_mat.pdf. Acesso em: 28 de setembro de 2017.

PASQUARELLI, R. C. C.; MANRIQUE, A. L. A inclusão de estudantes com deficiência visual no ensino e aprendizagem de estatística: medidas de tendência central. **Educação Matemática Pesquisa**. São Paulo, v. 18, n. 1, p. 309-329, 2016.

PEREIRA, T.; BORGES, F. A. O ensino de Matemática para alunos cegos inclusos: uma análise da produção bibliográfica brasileira em periódicos científicos nos últimos dez anos. In: ENCONTRO PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 14., 2017. **Anais...** Cascavel, 2017, s.p.

RESENDE FILHO, J. B. M. et al. Avaliação do nível de conhecimento dos alunos do Ensino Médio da cidade de João Pessoa com deficiência visual sobre as grafias química e matemática braile. **Revista Educação Especial**, Santa Maria, v. 26, n. 46, p. 367-384, 2013.

ROSA, F. M. C.; BARALDI, I. M. O uso de narrativas (auto)biográficas como uma possibilidade de pesquisa da prática de professores acerca da Educação (Matemática) Inclusiva. **Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, v. 29, n. 53, p. 936-954, 2015.

ULIANA, M. R. Inclusão de Estudantes Cegos nas Aulas de Matemática: a construção de um kit pedagógico. **Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, v. 27, n. 46, p. 597-612, 2013.

UNESCO. **Declaração de Salamanca sobre Princípios, Política e Prática em Educação Especial**. Salamanca: S.l., 1994.

UNESCO. Organizações das Nações Unidas para a Educação, Ciência e Cultura. **Declaração Mundial sobre Educação Para Todos** (Conferência de Jomtien). Tailândia: Unesco, 1990. Disponível em: http://www.unesco.org.br/publicação/doc-internacionais. Acesso em: 01 de março de 2017.

O QUE OS ALUNOS DIZEM? UMA REFLEXÃO DE UMA PRÁTICA DE SALA DE AULA VIVENCIADA À LUZ DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA REALÍSTICA

WHAT DO STUDENTS SAY? A REFLECTION OF A CLASSROOM PRACTICE EXPERIENCED IN THE LIGHT OF REALISTIC MATHEMATICAL EDUCATION

HARMUCH, Daniela[1]
MENDES, Marcele Tavares[2]

RESUMO

O presente trabalho é recorte de uma pesquisa de mestrado que elaborou, aplicou e discutiu, à luz dos pressupostos da abordagem de ensino Educação Matemática Realística, tarefas matemáticas que oportunizam o desenvolvimento de aspectos da Educação Financeira. A abordagem Educação Matemática Realística pressupõe a matemática reconhecida como uma atividade humana, um contexto de sala de aula em que o aluno se reconhece protagonista e responsável por seu processo de aprendizagem e o professor como um guia, no sentido de orientar e acompanhar seus alunos, por meio de intervenções, na direção dos objetivos da educação desejada. Tratou-se de uma pesquisa qualitativa de cunho interpretativo. A aplicação das tarefas foi desenvolvida em uma instituição filantrópica da cidade de Londrina-PR, no segundo semestre de 2016, em 3 encontros de 4 horas, com adolescentes em situação de desproteção social. Especificamente, neste texto é apresentada uma reflexão do processo vivido a partir de respostas recolhidas dos alunos por meio de um questionário escrito, nas quais eles apontam contribuições, para suas vidas, do processo vivenciado; da utilidade da matemática para a Educação Financeira; dos objetivos da Educação Financeira proposta nos documentos do Enef, assim como nas diretrizes nacionais de educação. Em nossa análise, buscamos ainda evidenciar aspectos de uma prática de ensino à luz da Educação Matemática Realística, que podem favorecer o desenvolvimento da autonomia de cada estudante.
Palavras-chave: Educação Matemática Realística. Educação Financeira. Intervenção. Tarefas.

ABSTRACT

The present work is a study of a master's research that elaborated, applied and discussed, in the light of the assumptions of the teaching approach Realistic Mathematics Education, mathematical tasks that allow the development of aspects of Financial Education. The Realistic Mathematics Education approach presupposes the recognized mathematics as a human activity, a classroom context in which the student recognizes protagonist and responsible for its learning process and the teacher as a guide, in the sense of guiding and accompanying its students, through interventions, towards the goals of the desired education. It was a qualitative research of an interpretive nature. The application of the tasks was carried out in a philanthropic institution of the city of Londrina-PR, in the second semester of 2016, in 3 meetings of 4 hours, with adolescents in situations of social deprotection. Specifically, in this text is presented a reflection of the process lived from the answers collected from the students through a written questionnaire, in which they point out contributions, for their lives, of the process experienced; of the usefulness of mathematics for Financial Education; of the Financial Education objectives proposed in the Enef documents, as well as in the national education guidelines. In our analysis, we also sought to highlight aspects of a teaching practice, in the light of Realistic Mathematics Education, which may favor the development of each student's autonomy.
Keywords: Realistic Mathematics Education. Financial education. Intervention. Tasks.

[1]Doutoranda do Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina. Mestre em Ensino de Matemática pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), multicâmpus Londrina e Cornélio Procópio, PR, Brasil. Endereço eletrônico: dharmuch@yahoo.com.br.

[2]Doutora em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina. Docente do Departamento de Matemática e do Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática – Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), câmpus Londrina. Endereço eletrônico: marceletavares@utfpr.edu.br.

1 INTRODUÇÃO

Milhões de brasileiros passaram ou estão passando pelo desconforto de más escolhas ou falta de planejamento financeiro, muitos por falta de habilidades suficientes para analisar e antecipar um endividamento ou um controle de sua situação financeira e/ou familiar, assim como em refletir e avaliar as consequências de projetos políticos, por exemplo, a reforma da previdência, ou a reforma trabalhista. A Educação Financeira é um dos ramos da Educação Matemática que pode auxiliar no desenvolvimento dessas habilidades.

Este artigo apresenta uma reflexão a partir de respostas de jovens a quatro questionamentos que fazem parte de uma Sequência de Tarefas composta de doze tarefas, elaborada ao longo da pesquisa de mestrado da primeira autora, sob orientação da segunda, cujo objetivo geral foi elaborar, aplicar e discutir tarefas que desenvolvessem competências da Educação Financeira em jovens em desproteção social[3] à luz da abordagem de ensino Educação Matemática Realística. Especificamente, a reflexão promulgada baseia-se em indícios de respostas que sugerem que os jovens, envolvidos com as oficinas e o desenvolvimento da Sequência de Tarefas, reconhecem, com essa prática, contribuição para suas vidas; a matemática como ferramenta para a Educação Financeira, enfim, alguma aprendizagem advinda dessa experiência.

A Sequência de Tarefas, desenvolvida à luz da Educação Matemática Realística, buscou desenvolver elementos do pensamento financeiro, assim como comportamentos financeiros autônomos e saudáveis. Esses elementos estão associados aos princípios apresentados para um modelo pedagógico elaborado pela OCDE[4], que foi concebido para oferecer ao aluno a construção de um pensamento financeiro consistente, para que ele possa, "como protagonista de sua história, planejar e fazer acontecer a vida que deseja para si próprio, em conexão com o grupo familiar e social a que pertence" (BRASIL/COREMEC, 2010, p.7).

A abordagem de ensino Educação Matemática Realística, inspirada nas ideias e contribuições de Hans Freudenthal (1905-1990), pressupõe a matemática como uma atividade humana, na qual o professor guia e acompanha os processos de aprendizagem de seus estudantes que são protagonistas da construção de seus conhecimentos. A aprendizagem se dá por meio de situações em que os conceitos e estruturas matemáticas tornam-se ferramentas (no sentido de serem recurso para lidar com a situação) (MENDES, 2014; HARMUCH, 2017).

Neste texto, como ponto de partida, apresentamos os pressupostos da Educação Matemática Realística e da Educação Financeira e destacamos os aspectos dos procedimentos metodológicos considerados no desenvolvimento da pesquisa. Em seguida, nos resultados e discussões, apresentamos e analisamos respostas do questionário mencionado, que serviram para um repensar a respeito da abordagem de ensino Educação Matemática Realística (RME)[5] e para avaliar a Sequência de Tarefas. Finalizamos com nossas considerações finais.

2 RME E EDUCAÇÃO FINANCEIRA: PRINCÍPIOS PARA UMA PRÁTICA

A Educação Matemática Realística[6], abordagem de ensino considerada no desenvolvimento da pesquisa, pressupõe que a matemática seja reconhecida como uma atividade humana, isto é:

---

[3] O Estatuto da Criança e do Adolescente (ECA), que dispõe sobre a proteção integral à criança e ao adolescente, estabelece que crianças e adolescentes são considerados sujeitos de direitos, que vivenciam condições especiais e particulares, cujo desenvolvimento físico, mental, moral e social deve ser garantido em condições de liberdade e de dignidade. Adolescente em situação de desproteção social é aquele para quem esses direitos não são garantidos.

[4] Organização para Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE).

[5] Do Inglês, *Realistic Mathematics Education*.

[6] Realística não advém necessariamente da realidade. Realístico é que pode ser imaginável, realizável pelo estudante (MENDES, 2014).

> uma atividade de resolver problemas, de procurar problemas, e também uma atividade de organização de um assunto. Esta pode ser uma questão da realidade, a qual tem de ser organizada de acordo com padrões matemáticos se tiver de ser resolvida. Também pode ser uma questão matemática, resultados novos ou velhos de produção própria ou de outros, que têm de ser organizados de acordo com novas ideias, para ser melhor entendida, em um contexto mais amplo ou por uma abordagem axiomática (FREUDENTHAL, 1971, p.47).

Nesse contexto, segundo Van Den Heuvel-Panhuizen (2001), a matemática torna-se um meio de organizar uma situação e deve ser conectada à realidade para que possa ser de valor humano. Aos estudantes, deve ser dada a oportunidade "guiada" para "re-inventá-la" (FREUDENTHAL, 1979; VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996), o que significa permitir que o aluno, guiado pelo professor, se sinta o sujeito que elaborou/desenvolveu as estratégias, procedimentos, recursos matemáticos para lidar com uma situação. O professor tem papel fundamental nesse processo, uma vez que ele decide os momentos de intervir e de promover sistematizações das ideias matemáticas envolvidas.

Reinvenção Guiada é o nome dado ao processo de guiar e acompanhar a construção do conhecimento dos alunos, uma estratégia de ensino desenvolvida a partir da análise e da interpretação da matemática como uma atividade humana (FREUDENTHAL, 1991).

Alguns aspectos da dinâmica de uma aula sob a estratégia da Reinvenção Guiada estão descritos em Santos (2014), que destaca: o trabalho de sala de aula é feito a partir do envolvimento dos alunos com uma tarefa realística, a qual possibilita diferentes níveis de matematização[7]; o ambiente, por meio das interações com o professor assim como com os colegas, favorece a oportunidade de analisar e discutir estratégias e procedimentos escolhidos; o professor, utilizando questionamentos, explora as resoluções e orienta o desenvolvimento dos alunos com discussões de aspectos subjacentes à resolução.

Para a RME, cada aluno reinventa uma matemática própria. Segundo Ciani (2012, p. 29), de acordo com essa abordagem,

> aos aprendizes deveria ser permitido encontrar o seu próprio nível e explorar os caminhos que conduzem a isto, talvez com um pequeno guia que cada caso particular requer, até porque a aprendizagem por reinvenção pode ser motivadora, e fomenta a atitude da experiência matemática como uma atividade humana.

De acordo com a autora, os alunos devem lidar com situações que favoreçam a utilização de diferentes estratégias (informais e formais). Por meio dessas situações, os alunos analisam contextos que podem ser matematizados, de modo que eles sejam preparados para usar a matemática na formulação e resolução de situações (problemas, tarefas). Além disso, o lidar com essas situações propicia que os conteúdos curriculares não sejam trabalhados em capítulos estanques, uma vez que vários conhecimentos e ferramentas matemáticas podem ser utilizados. A figura 1 elenca algumas potencialidades de uma tarefa realizada em uma aula na perspectiva da RME.

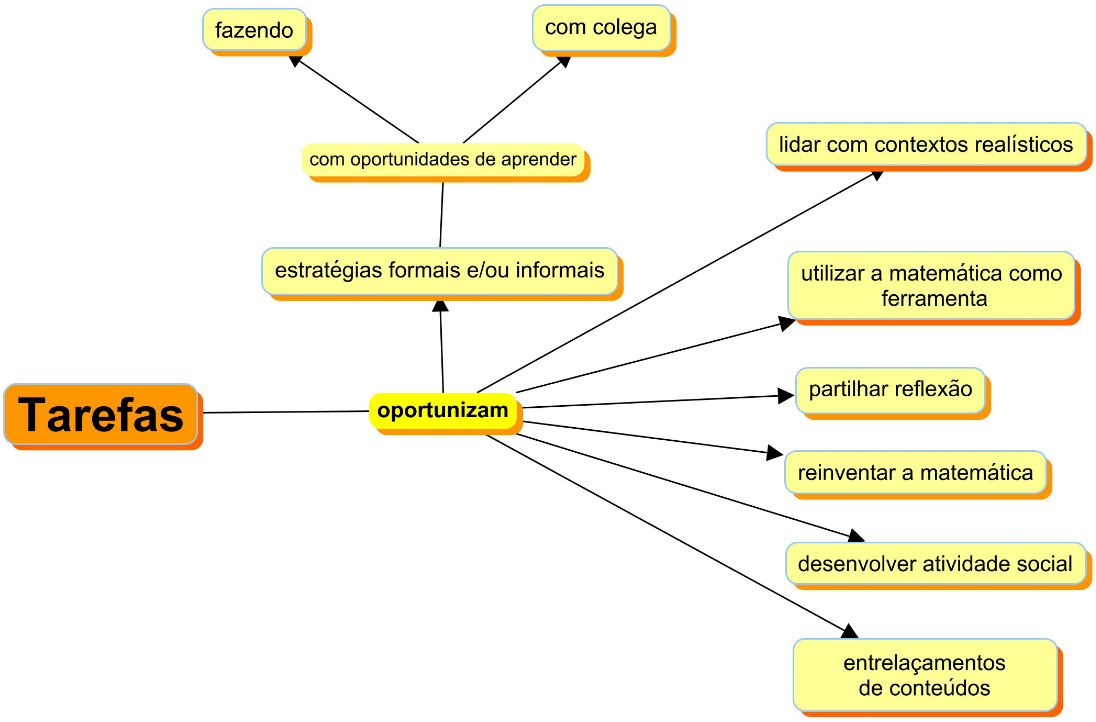
Nesse sentido, conforme Ferreira e Buriasco (2015, p. 461),

> conhecer as oportunidades que as tarefas podem oferecer quanto aos possíveis métodos de solução, a pertinência das múltiplas respostas, os conceitos envolvidos, a familiaridade do estudante com a tarefa, o que lhe é solicitado em relação ao conteúdo ou às competências parecem se constituir em um recurso necessário que o professor precisa conhecer.

[7] Os alunos utilizam seus procedimentos informais e por meio de esquematizações avançam para a construção de modelos mais formais (VAN DEN HEUVELPANHUIZEN, 2010).

À luz dos pressupostos da RME, transparece o desafio de organizar e elaborar tarefas de matemática em ambientes que oferecem aos estudantes oportunidades de desencadear ações formativas – oportunidades de aprendizagem, nas quais possam matematizar, para “reinventar” matemática, desenvolvendo a capacidade de organizar matematicamente situações que sejam “realizáveis” para que, guiados pelo professor, os estudantes possam construir e/ou discutir conceitos referentes à Educação Financeira.

Figura 1: Potencialidades de uma tarefa na perspectiva da RME.



Fonte: (HARMUCH, 2017, p. 27).

Ressaltamos que infelizmente a Educação Financeira é tratada como um tema transversal pelos Parâmetros Curriculares Nacionais, e poucos são os estudos a respeito. Um programa de Educação Financeira pode trazer benefícios. Entre esses benefícios está a possibilidade de fazer a sociedade repensar os hábitos de consumo, substituindo-os por outros mais sustentáveis. Para isso, é relevante promover projetos de educação financeira. Lidar com assuntos da Educação Financeira em aulas de matemática faz-se pertinente e necessário, sobretudo no esforço de promover o conhecimento matemático escolar, conferir significados econômicos aos problemas matemáticos e vice-versa, explorando-se bidirecionalmente a importância do contexto na construção de sentido e na solução de problemas (HOFMAMN, MORO, 2011).

Os princípios e competências da Educação Financeira que consideramos foram baseados nos apresentados pela OCDE em um modelo pedagógico concebido:

> para oferecer ao aluno informações e orientações que favoreçam a construção de um pensamento financeiro consistente e o desenvolvimento de comportamentos autônomos e saudáveis, para que ele possa, como protagonista de sua história, planejar e fazer acontecer a vida que deseja para si próprio, em conexão com o grupo familiar e social a que pertence. Nesse sentido, o foco do trabalho recai sobre as situações cotidianas da vida do aluno, porque é nelas que se encontram os dilemas financeiros que ele precisará para resolver (BRASIL/COREMEC, 2010, p.7).

Um dos propósitos apresentados no documento da Estratégia Nacional de Educação Financeira (ENEF) é educar crianças e adolescentes para lidar não só com o dinheiro, mas também para planejar sua trajetória de vida e se preparar, de forma segura, para as oscilações econômicas, independentemente de possuir pouco ou muito recurso financeiro para sua manutenção. Nesse documento, é sugerido um modelo pedagógico com sete objetivos que envolvem duas dimensões, espacial e temporal, pois o cotidiano acontece sempre em um espaço e em um tempo determinado (ENEF, 2011).

O Quadro 1 apresenta os objetivos, separados nas duas dimensões mencionadas, que são ramificados em dez competências.

Quadro 1: Objetivos e competências da Educação Financeira

OBJETIVOS			COMPETÊNCIAS	
OBJETIVOS ESPACIAIS	OB1	Formar para a cidadania.	C01	Debater direitos e deveres.
	OB2	Ensinar a consumir e a poupar de modo ético, consciente e responsável.	C02	Tomar decisões financeiras social e ambientalmente responsáveis.
			C03	Harmonizar desejos e necessidades no planejamento financeiro do projeto de vida.
	OB3	Oferecer conceitos e ferramentas para uma tomada de decisão autônoma baseada em mudança de atitude.	C04	Ler e interpretar textos específicos de Educação Financeira.
			C05	Ler criticamente textos publicitários.
			C06	Tomar decisões financeiras autônomas de acordo com suas reais necessidades.
	OB4	Formar multiplicadores.	C07	Atuar como multiplicador.
OBJETIVOS TEMPORAIS	OB5	Ensinar a planejar em curto, médio e longo prazos.	C08	Elaborar planejamento financeiro.
	OB6	Desenvolver a cultura da prevenção.	C09	Analisar alternativas de prevenção em longo prazo.
	OB7	Proporcionar a possibilidade de mudança da condição atual.	C10	Analisar alternativas para superar dificuldades econômicas.

Fonte: (BRASIL/COREMEC, 2010, p. 6)

As competências que derivam dos objetivos sugeridos não têm a mesma ordem de importância, e isso é intencional, porque umas são basilares; outras um pouco mais periféricas, e há múltiplas relações das competências entre si. O desenvolvimento e as reflexões a respeito dessas competências e desses objetivos da Educação Financeira à luz da abordagem de ensino Educação Matemática Realística, por meio de tarefas matemáticas, são o objeto central da pesquisa aqui apresentada.

3 ASPECTOS METODOLÓGICOS

Os aspectos metodológicos aqui apresentados serviram a uma pesquisa qualitativa de cunho interpretativo, cujo objetivo foi elaborar, aplicar e discutir tarefas matemáticas que provocam reflexões a respeito de temas da Educação Financeira à luz da abordagem de ensino da Educação Matemática Realística. Ao final da pesquisa, formou-se um conjunto de 12 tarefas, que foram organizadas como uma Sequência de Tarefas (produto educacional), que pode ser consultada em Harmuch (2017). Para cada tarefa, são apresentadas sugestões de dinâmica de organização pedagógica à luz dos pressupostos da RME, objetivos e competências baseadas no Quadro 1. Na organização da Sequência de Tarefas, foi considerada uma distribuição de 3 oficinas de 4 horas.

Sua aplicação ocorreu em uma instituição filantrópica da cidade de Londrina - PR, no segundo semestre de 2016. A Instituição em foco tem como objetivo principal promover o direcionamento social, educacional e profissional do adolescente, qualificando-o para o mercado de trabalho, visando melhorar sua atual realidade. As 3 oficinas aconteceram no contraturno das atividades escolares dos sujeitos desta pesquisa, 24 jovens em situação de desproteção social de diferentes regiões da cidade de Londrina que cursavam entre o 9º ano do Ensino Fundamental e o 3º ano do Ensino Médio. O Quadro 2 apresenta o tema de cada uma das oficinas realizadas, com o respectivo número das tarefas trabalhadas em cada encontro.

Quadro 2: Temas e Organização das Tarefas.

Organização	Tema	Tarefas
Oficina 1	A busca do conceito de felicidade – uma reflexão sobre o custo de vida e estratégias de economia doméstica.	Tarefas 1, 2, 3, 4 e 5.
Oficina 2	Gastos pequenos precisam ser controlados, eles se acumulam e podem se tornar gastos grandes.	Tarefas 6, 7, 8, 9.
Oficina 3	Como devo agir em situações reais diversas relacionadas ao quesito financeiro?	Tarefas 10, 11 e 12.

Fonte: (HARMUCH, 2017).

O Quadro 3 situa os objetivos específicos da Educação Financeira de cada tarefa, relacionando as competências, com base no Quadro 1.

Quadro 3: Tarefas, objetivos e competências.

Temas 1, 2 e 3													
		Nome da Tarefa	**Objetivos específicos**	**Competências**									
				C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9	C10
Oficina 1	Tarefa 1	O que se espera aprender com Educação Financeira?	Oportunizar o confronto de seus preconceitos sobre Educação Financeira.									X	X
	Tarefa 2	A matemática tem que estar vinculada a números?	Esclarecer que matemática não está só vinculada a número.							X			
	Tarefa 3	O que é felicidade para você?	Oportunizar a discussão sobre felicidade relacionada a dinheiro.			X		X			X	X	X
	Tarefa 4	Como proceder com pouco dinheiro?	Decidir por formas de poupar dinheiro; identificar categorias em que as despesas podem ser reduzidas; avaliar a importância das despesas no contexto familiar próprio; pensar no futuro econômico.	X	X	X		X	X	X	X	X	X

	Tarefa 5	Qual meu custo de vida?	Listar as despesas familiares; classificar as despesas familiares em “fixas”, “variáveis” e “eventuais (ou extraordinárias) ”; elaborar um orçamento mensal organizando as despesas de acordo com a classificação atribuída; saber organizar dados em planilhas eletrônicas.		X	X			X	X	X	X	X

Oficina 2	Tarefa 6	O que priorizar com uma determinada quantia e as demandas do mês?	Registrar despesas regularmente; saber como se gasta o próprio dinheiro mensalmente; estimar o valor das próprias despesas; compreender que há comportamentos que nos levam a gastar mais dinheiro do que o previsto em determinadas situações; distinguir os comportamentos positivos dos negativos na hora de tomar algumas decisões envolvendo o financeiro; tomar decisões de compra diante de certos imprevistos.		X	X			X	X	X	X	X
	Tarefa 7	No Supermercado	Compreender que há comportamentos que nos levam a gastar mais dinheiro do que o previsto em determinadas situações; distinguir os comportamentos positivos dos negativos na hora de algumas decisões envolvendo o financeiro; tomar decisões de compra diante de certos imprevistos.	X	X	X		X	X		X	X	X
	Tarefa 8	Qual devo comprar?	Compreender que há comportamentos que nos levam a gastar mais dinheiro do que o previsto em determinadas situações; distinguir os comportamentos positivos dos negativos na hora de tomar algumas decisões envolvendo o financeiro; saber e aplicar a matemática para resoluções nas escolhas de produtos; saber identificar qual o real custo de determinados produtos.		X	X		X	X	X	X	X	X
	Tarefa 9	Qual sua opinião?	Saber identificar, na mídia, situações envolvendo o financeiro; saber e aplicar a matemática para resoluções de situações problemas corriqueiras.					X	X				

Oficina 3	Tarefa 10	Planejar é necessário?	Reconhecer a importância de planejar algo o que se almeja; equilíbrio dos desejos e necessidades em um projeto de vida.			X				X	X	X	X
	Tarefa 11	Havia uma porcentagem no meio do caminho	Comparar valores; compreender que não saber fazer cálculos de porcentagem pode nos levar a gastar mais dinheiro; tomar decisões em compras; identificar se vale a pena aplicar dinheiro; debater a importância de não sonegar impostos; debater direitos e deveres como consumidor.	X	X	X		X	X	X	X	X	X
	Tarefa 12	Avaliação	Reflexão das tarefas propostas.							X			

Fonte: (HARMUCH, 2017).

Os dados analisados na pesquisa e neste texto são fruto das gravações de áudio transcritas, fotos e diário de campo, com o consentimento legal dos alunos, dos responsáveis e da Instituição.

Neste artigo, apresentamos uma reflexão a partir das respostas dos alunos na Tarefa 12, desenvolvida no terceiro encontro, no qual a primeira autora deste texto foi a regente. Por meio dessa reflexão, buscou-se evidenciar aspectos da prática de uma sala de aula à luz da Educação Matemática Realística e do desenvolvimento de objetivos e competências de uma Educação Financeira.

A Tarefa 12 consistiu em quatro perguntas impressas em uma folha de sulfite – Quadro 4. Esse conjunto de perguntas teve como propósito estimular que os alunos refletissem acerca do processo vivido (autoavaliação dos estudantes do processo vivenciado nas três oficinas), promover um repensar a respeito da abordagem de ensino, assim como avaliar a Sequência de Tarefas.

Quadro 4: Tarefa 12

Pergunta 1: Quais as contribuições para sua vida nesses 3 encontros?
Pergunta 2: A matemática teve utilidade para sua Educação Financeira? Explique.
Pergunta 3: O que você aprendeu nesses 3 encontros?
Pergunta 4: Você gostaria de sugerir, criticar ou elogiar? Escreva ao lado.

Fonte: (HARMUCH, 2017)

Cada jovem pôde responder por escrito cada uma das questões, sendo opcional colocar seu nome. Alguns alunos deixaram de fazer um registro escrito de suas percepções a alguma pergunta, outros produziram um único texto e houve aqueles que registraram verbalmente (os registros orais foram gravados e transcritos). Por essa razão, em nossa análise não há nenhuma codificação das respostas dos alunos referente a qual aluno respondeu, ou a qual questão refere-se a resposta.

4 O QUE ELES DISSERAM? UM REPENSAR A PARTIR DE UMA PRÁTICA

Nesta seção, a partir de algumas respostas obtidas na Tarefa 12, iremos refletir e discutir aspectos do desenvolvimento das oficinas à luz da RME, na direção de promover um repensar da prática, assim como da Sequência de Tarefas.

Identificamos em algumas falas e/ou escrita que a abordagem de ensino desenvolvida nos encontros favoreceu a esses estudantes se reconhecerem sujeitos ativos dos processos de aprendizagem, aspecto que vem contribuir para o desenvolvimento de autonomia e segurança na realização de trabalhos em grupo. Por exemplo, no trecho que segue, o estudante se reconheceu sujeito que aprende a partir de suas experiências em grupo e identificou sua participação como um momento formativo.

> Professora, esse jeito de trabalhar em grupo e você deixar nós falar[8], é legal porque aprende.

O aprender e/ou reaprender algum elemento da matemática a partir das experiências vivenciadas em um contexto em que a professora assumiu a figura de guia, e não de portador/transmissor único do conhecimento, também foi mencionado em respostas, por exemplo:

> Às vezes muita coisa não lembrava o como fazer, mas quando você pede para um amigo ajudar, não tem tanto problema não saber, a gente não fica com vergonha e aprende.

Esses dois trechos vão ao encontro da expectativa para a conduta que a professora planejou e buscou desenvolver nas oficinas: possibilitar trocas de experiências entre os colegas, favorecendo aprendizagens individuais a partir de situações colaborativas. Para Gravemeijer (2008), uma maneira de promover o processo de Reinvenção Guiada é a interação entre os estudantes no desenvolver das Tarefas.

O professor, ao configurar um ambiente que favorece discussões e propicia aos alunos apresentar seus modos de lidar com uma dada tarefa, permite que cada um deles reflita e avalie novas decisões. Essa oportunidade é uma característica de aula baseada nos princípios da Reinvenção Guiada e foi amplamente disseminada na Sequência de Tarefas, uma vez que o trabalho em grupo, no qual todos tinham que expressar seus modos de pensar, foi a forma quase exclusiva do desenvolvimento das atividades (com exceção da Tarefa 12). A interação coletiva se deu por meio da discussão oral; construção de cartazes em conjunto; construção de argumentos orais para serem comunicados à turma toda (momento de discussão no grande grupo); produção escrita para resolver situações do cotidiano.

Evidenciar a importância de ideias matemáticas em decisões relacionadas à Educação Financeira foi um dos propósitos a ser alcançado com o desenvolvimento da Sequência de Tarefas. Buscou-se fazer com que as tarefas proporcionassem revelar a matemática como ferramenta, por exemplo, operações com números decimais, porcentagem e operações básicas. Identificamos a valorização desse propósito em várias respostas.

> Foi muito importante, tudo precisa de matemática, devemos saber sobre nossas finanças e isso ela nos ajuda.
>
> Sim, toda ela, abre portas, onde aprendemos a investir, não sermos enganados, com as % ou juros, a matemática é essencial para a vida.
>
> Sim, através dos cálculos sabemos a melhor opção para cada situação.

Especificamente com relação a planejamento financeiro, foi possível identificar nas respostas dos alunos os termos investir, planejamento, aplicar, organizar, colocar metas, escolhas, tomar decisões, buscar tomar uma melhor decisão de seus gastos, buscando harmonizar seus desejos ou buscando outras alternativas para superar dificuldades econômicas,

[8] As falas dos alunos foram transcritas sem correções.

buscar analisar alternativas de decisões financeiras. São declarações que evidenciam que uma aula de matemática à luz da RME pode favorecer um ambiente para uma Educação Financeira, assim como a Educação Financeira mostrou-se um contexto para evidenciar a matemática como ferramentas para organizar fenômenos do mundo físico (FREUDENTHAL, 1983). Destacamos algumas respostas:

> Aprendi como investir dinheiro e fazer render; o que é felicidade e que tudo que fazemos com objetivo precisa de planejamento.
>
> Me ensinou que nós podemos aplicar nosso dinheiro certo e que não podemos nos deixarmos ser enganados por propagandas.
>
> Aprendi em como me organizar, como tenho que investir o meu dinheiro, planejar, colocar metas em meus objetivos.
>
> Me ajudou muita coisa, e que vai fazer diferença na minha vida, e eu vou usar bastante porcentagem e principalmente como lidar com escolhas e propagandas das lojas.

Esses trechos permitem dizer que o desenvolvimento das oficinas oportunizou aos estudantes refletir a respeito da possibilidade de mudança de atitude e a respeito dos desafios cotidianos em relação a condutas financeiras.

Ao pedirmos críticas, sugestões e/ou elogios, nenhum aluno fez comentários que pudessem favorecer uma reorientação da prática. Em geral nos parabenizaram e pediram mais intervenções como essa e formas análogas de aprendizagem.

Ao repensar todo o processo de elaboração, aplicação e discussão das tarefas na direção de esta pesquisa reorientar outras práticas de sala de aula, em especial aulas de matemática, destacamos a possibilidade e a necessidade de práticas de ensino e de aprendizagem em que as intervenções do professor não sejam diretivas, em que o professor não aponte uma resposta para uma pergunta do aluno, mas oportunize (por meio de novas tarefas, questionamentos, conversas com os colegas) atalhos e caminhos para que ele construa a sua resposta.

Os sujeitos envolvidos eram de diferentes níveis de escolaridade (9º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio). Essa diferença não desfavoreceu o desenvolvimento das oficinas, pois foi respeitado o nível de compreensão de cada estudante, e todos foram convidados a participar e contribuir para o desenvolvimento de cada tarefa. Em uma sala de aula regular, assim deve ser: respeitar a individualidade de cada estudante e o seu modo de lidar com a matemática.

Esta pesquisa fortalece a discussão já posta na Educação Matemática de que é preciso o professor ouvir o que cada aluno tem a falar, tanto em pequenos grupos, como em discussões com toda a sala. Foram as respostas dos alunos a cada atividade que enriqueceram o trabalho e trouxeram segurança para a professora seguir e reorientar seu planejamento.

A prática reafirmou que tarefas matemáticas podem ser veículos para discutir objetivos da Educação Financeira. Para tanto, é preciso o professor ter domínio do conteúdo abordado em uma tarefa, pois o rumo que a tarefa ou a discussão pode tomar nem sempre está no caminho planejado. Com domínio e clareza, é possível enxergar o reinventar da matemática pelo aluno com maior propriedade, oportunizando intervenções coerentes e/ou condução da discussão ao objetivo desejado.

O papel do aluno foi central no processo de ensino-aprendizagem. Ele construiu seu próprio conhecimento, ou seja, o aluno foi responsável pelo seu próprio envolvimento com as tarefas, por sua própria aprendizagem, entretanto isso não o fez ser isolado, ele dependeu diretamente das interações vividas com seus colegas e professores. O compartilhar das ideias dos alunos, de suas explicações, justificativas, produções, explicações, seja com colegas ou com professores, foi fundamental para um ambiente no qual se pretendeu desenvolver a autonomia.

Cada estudante, ao lidar com as Tarefas da Sequência, teve a oportunidade de refletir acerca de todos os sete objetivos da Educação Financeira e suas competências (Quadro 1). Foram trabalhadas as duas dimensões, espacial e temporal, o impacto de uma ação individual sobre o contexto social e as noções de como decisões tomadas no presente podem afetar o futuro. Contemplaram-se situações para se pensar a curto prazo, por exemplo, decidir qual produto comprar; a médio e a longo prazo, quando, por exemplo, refletiu-se sobre o custo de vida e ao analisar alternativas para superar dificuldades econômicas ou prevenções de gastos. Por fim, reflexões de âmbito individual sobre questões sociais também foram atendidas, como, por exemplo, escolher um produto de acordo com sua real necessidade.

Todo o processo da pesquisa, desde o estudo teórico, a elaboração da Sequência de Tarefas, a aplicação, até a análise, favoreceu repensar a prática letiva e a aprendizagem dos estudantes, no sentido de que não há um receituário para uma boa prática, nem um único caminho, mas a necessidade constante do professor de buscar possibilidades de conduzir o aluno na reflexão, na construção e na compreensão de seu conhecimento, tendo claros os seus objetivos. Forneceu também indícios de que a participação dos jovens nessa prática tenha trazido alguma contribuição para suas vidas; reconhecimento da matemática como ferramenta para a Educação Financeira; aprendizagem nessa experiência.

5 ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

Consideramos que intervenções relacionadas à Educação Financeira, inseridas no contexto escolar, em especial em aulas de matemática, que permitam aos alunos reflexões em torno da conscientização para um consumo responsável e consciente, conscientização sobre a importância de poupar, objetivando a realização de sonhos de curto, médio e longo prazo, são necessárias, uma vez que as finanças estão entre as maiores inquietudes de um sistema capitalista como o do nosso país.

Salientamos que a Educação Financeira não visa ao enriquecimento, e sim à conscientização para que as pessoas lidem com suas finanças e talvez, a longo prazo, mudem o quadro econômico pessoal e familiar.

> Cada indivíduo participante do processo de formação do ser humano tem uma parte de responsabilidade nesse processo de mudança pela qual a educação passa. E a Educação Financeira vem ser um elo entre várias áreas do conhecimento, no sentido de fazer com que trabalhem juntas e formem na epistemologia do aluno conceitos capazes de instrumentalizá-lo para a construção de sua autonomia. Assim a educação financeira não será apenas um aprendizado em fase escolar, mas acompanhará o aluno por toda sua existência (STHEPANI, 2005, p.12).

A RME possibilitou ir ao encontro do ambiente que se desejou propiciar aos jovens envolvidos, um ambiente em que eles fossem sujeitos ativos em suas aprendizagens a partir de situações significativas. Essa escolha demarca a perspectiva de ensino e de aprendizagem aqui considerada, ela não limita adaptações.

Espera-se que a presente pesquisa possa colaborar para a compreensão da importância de se trabalhar a Educação Financeira e que essa contribuição não se limite apenas ao campo acadêmico, mas que possa colaborar para a promoção do tema de forma mais efetiva em organizações escolares.

REFERÊNCIAS

BRASIL/COREMEC (2010). **Educação Financeira nas escolas** – Ensino Médio. Bloco 1 (Livro do professor). COREMEC, GAP, UNIBANCO.

BRASIL/ENEF (2011). **Estratégia nacional de Educação Financeira** – Plano Diretor da ENEF: Anexos. Disponível em http://www.vidaedinheiro.gov.br/Legislacao /Arquivo /Plano-Diretor-ENEF-anexos-1.pdf.Acesso em: 05 nov. 2017.

CIANI, A. B. **O realístico em questões não-rotineiras de matemática**. 2011. 166 f. Tese (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2012.

FERREIRA, P.; BURIASCO, R.L.C. Enunciados de Tarefas de Matemática Baseados na Perspectiva da Educação Matemática Realística. **Bolema** [online], v. 29, n. 52, p.452-472, 2015.

FREUDENTHAL, H. **Geometry between the devil and the deep sea. Educational Studies in Mathematics**. Holanda, v. 3, n. 3-4, p. 413-435, 1971.

FREUDENTHAL, H. Matemática nova ou educação nova? **Perspectivas**, Portugal, v. 9, n.3, p. 317-328, 1979.

FREUDENTHAL, H. **Revisiting Mathematics Education**. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1991.

FREUDENTHAL, H. **Didactical phenomenology of mathematical structures**. Dordrecht: Reidel Publishing Company, 1983.

GRAVEMEIJER, K. P. E. RME Theory and Mathematics Teacher Education. In: **The International Handbook of Mathematics Teacher Education**. Rotterdam: Sense Publishers, 2008, v. 1. p. 283-302.

HARMUCH, D. **Tarefas para uma educação financeira: um estudo.** 2017. 116 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2017.

HOFMANN, R. M, MORO, M.L.F. Educação matemática, contexto e educação financeira. In: CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 12., 2011, Recife. **Anais**... Recife, 2011. p. 1-13.

MENDES, M. T. **Utilização da Prova em fases como recurso para aprendizagem em aulas de Cálculo**. 2014. 274 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2014.

SANTOS, E. R, **Análise de produção escrita em Matemática: de Estratégia de avaliação a estratégia de ensino**. 2014. 157 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2014.

STEPHANI, M. **Educação Financeira: uma perspectiva interdisciplinar na construção da autonomia do aluno**. 2005. Dissertação (Mestrado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2005.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. V. D. **Assessment and realistic mathematics education**. Utrecht: Freudenthal Institute, 1996.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. V. D. Learning-teaching trajectories with Intermediate attainment targets. In: VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. (Ed.). ***Children learn mathematics:*** a learningteaching trajectory with intermediate attainment targets for calculation with whole numbers in primary school. Groningen, The Netherlands: Wolters Noordhoff, 2001.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. V. D. Reform under attack – Forty Years of Working on Better Mathematics Education thrown on the Scrapheap? No Way! In: SPARROW, L.; KISSANE, B.; HURST, C. (Eds.). **Proceedings of the 33th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia**. Fremantle: MERGA. 2010. p. 1-25.

O CAMPO DO ENSINO DE GEOMETRIA NO BRASIL: DO BRASIL COLÔNIA AO PERÍODO DO REGIME MILITAR

THE FIELD OF GEOMETRY TEACHING IN BRAZIL: FROM BRAZIL COLONY TO THE PERIOD OF THE MILITARY REGIME

KONZEN, Sandra[1]
BERNARDI, Luci T. M. dos Santos[2]
CECCO, Bruna Larissa[3]

RESUMO

O presente artigo consiste num estudo bibliográfico, oriundo de um trabalho de conclusão de curso, desenvolvido com o objetivo de compreender como se configura o campo do ensino de Geometria no Brasil. O recorte apresentado coloca em tela o contexto histórico do Brasil Colônia até o período do Regime Militar, especificamente, de documentos publicados a partir de 1700 até 1985, que demarcam a transição da geometria de disciplina para conteúdo da disciplina de matemática, tratando, também, do Movimento da Matemática Moderna. Analisamos o campo do ensino de Geometria presente nos documentos a partir das seguintes categorias, definidas a priori: objetivos, orientações pedagógicas e programas. Nesse contexto, a geometria possui um papel importante na promoção de condições para que o aluno possa ver e entender o mundo a sua volta de um modo mais crítico. Entender como se configurou esse campo do ensino proporciona uma visão histórica necessária para que possamos olhar a geometria criticamente, percebendo sua importância como um conteúdo significante na disciplina de Matemática e suas relações com diversos elementos do contexto.

Palavras-chave: Educação Matemática. Ensino de Geometria. História da Geometria no Brasil.

ABSTRACT

The present article consists of a bibliographical study, from a course conclusion work, developed with the objective of understanding how the field of geometry teaching in Brazil is configured. This paper presents the historical context of Brazil, when the country was a colony, until the period of the Military Regime, specifically, documents published from 1700 to 1985, which demarcate the transition from geometry as discipline to part of the content of mathematics course, touching also the Modern Mathematics Movement. We analyze the field of teaching of geometry present in the documents from the following categories, defined a priori: objectives, pedagogical guidelines and programs. In this context, geometry plays an important role in promoting conditions so that the student can see and understand the world around him in a more critical way. Understanding how this field of teaching was configured provides a necessary historical view so that we can look at geometry more critically, perceiving its importance as a significant content in the Mathematics discipline and its relationships with various elements of the context.

Keywords: Mathematical Education. Teaching Geometry. History of Geometry in Brazil.

---

[1] Graduada em Matemática pela Universidade Comunitária da Região de Chapecó (Unochapecó), Chapecó, SC, Brasil. Professora da Rede Estadual de Ensino em Santa Catarina. Endereço eletrônico: sandrakonzen@unochapeco.edu.br.

[2] Doutora em Educação Científica e Tecnológica pela Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), Florianópolis, SC, Brasil. Professora pesquisadora do Curso de Matemática e do Programa de Pós-graduação em Educação da Universidade Comunitária da Região de Chapecó (Unochapecó), Chapecó, SC, Brasil. Endereço eletrônico: lucib@unochapeco.edu.br.

[3] Mestra em Educação pela Universidade Comunitária da Região de Chapecó (Unochapecó), Chapecó, SC, Brasil. Professora substituta da Universidade Federal da Fronteira Sul (UFFS), Chapecó, SC. Endereço eletrônico: brunacecco@unochapeco.edu.br.

1 INTRODUÇÃO

O presente artigo se constitui a partir de um trabalho de conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática, intitulado "Do Brasil Colônia à contemporaneidade: a configuração da Geometria como campo de ensino no Brasil" (KONZEN, 2016), que objetivou compreender a configuração do campo do ensino de Geometria no Brasil. Apresentamos, aqui, um recorte da referida pesquisa no intuito de colocar em análise o período do Brasil Colônia até o período do Regime Militar, especificamente, documentos publicados de 1700 até 1985. Nesses documentos, analisamos a transição da geometria de disciplina para conteúdo de matemática e as implicações no ensino de Geometria do Movimento da Matemática Moderna (MMM).

Entendemos que a geometria, assim como outros campos da matemática, surgiu a partir das necessidades humanas. Desde os primórdios, o homem observou o mundo ao seu redor e estabeleceu relações, investigando-as. A partir do momento em que passou a construir suas moradias e promover o cultivo da terra, deixando de ser nômade, passou a percebê-las e utilizá-las ainda mais. Essas descobertas foram transmitidas a seus descendentes, que as utilizaram e aprimoraram, estruturando a geometria conhecida atualmente.

Durante a história da humanidade, diversos povos deram a sua contribuição para o desenvolvimento da geometria, como os gregos, os egípcios, os babilônicos, os indianos e os chineses. Os gregos, no período que antecedeu o nascimento de Cristo, fizeram importantes descobertas, tanto que o termo *geometria* é de origem grega: *geo* = terra e *metria* = medir, significa medir a terra. Podemos citar nomes que se destacaram entre os estudiosos gregos, como Tales de Mileto, Pitágoras, Platão, Aristóteles e Euclides. Todos deram suas contribuições, mas foi Euclides que as organizou em sua importante obra *Os Elementos*[4] e as sistematizou de forma dedutiva, introduzindo o rigor e o método axiomático. Até hoje, o termo "geometria euclidiana" é muito frequente, fazendo referência a Euclides. A sua obra, considerada a mais influente de todos os tempos, contribuiu de maneira significativa para o desenvolvimento da Geometria e representa um marco histórico. Após a sua criação, foi estudada e aprimorada por diversos matemáticos. A Geometria contribuiu para o desenvolvimento do mundo como um todo, da partilha de terras férteis às margens dos rios até complexas construções nos dias atuais, muitas atividades humanas dependem de operações geométricas. A partir do momento em que as civilizações organizaram seus sistemas de ensino, perceberam a necessidade de ensinar a Geometria para seus descendentes, enfatizando a sua importância como ciência.

Sabemos que a Geometria está presente no cotidiano das pessoas, e é um tema estudado em todo o mundo. No Brasil não é diferente, ela é ensinada desde a educação infantil até o Ensino Superior. Porém, apesar da importância da Geometria no desenvolvimento da Matemática, Meneses (2007) aponta que a Geometria foi perdendo espaço nos currículos, ficando seu ensino restrito a poucos itens sobre figuras simples e suas propriedades, quando não é ignorada.

Nesse debate, queremos alargar a compreensão da geometria como campo de ensino, assim, propomos compreender como se deu seu processo de configuração no Brasil. Entendemos que o seu desenvolvimento aconteceu de forma cronológica, por isso, buscamos revisitar a

[4] *Os Elementos* de Euclides é um tratado matemático e geométrico consistindo de 13 livros escritos pelo matemático grego Euclides em Alexandria por volta de 300 a.C. que, além de definições, postulados e noções comuns/axiomas, demonstram-se 465 proposições, em forte sequência lógica, referentes à geometria euclidiana, a da régua e compasso, e à aritmética, isto é, à teoria dos números. Os seis primeiros livros dão conta da geometria plana; os três seguintes, da teoria dos números; o livro X, o mais complexo, estuda uma classificação de incomensuráveis/irracionais; e os três últimos abordam a geometria no espaço/estereometria (EUCLIDES, 2009).

história, encontrando o início do ensino escolar, nele localizando a Matemática e, principalmente, a área da geometria, perpassando por seus marcos históricos.

Para a realização desta pesquisa, fizemos leituras em diferentes arquivos, caracterizando-a como bibliográfica. Segundo Fiorentini e Lorenzato (2007), a pesquisa bibliográfica é aquela que se faz preferencialmente sobre documentação escrita, em que a coleta de informações é feita a partir de fichamento de leituras. A pesquisa é qualitativa, pois não se preocupou com representatividade numérica, mas, com o aprofundamento da compreensão do campo do ensino de Geometria. A análise de dados foi desenvolvida por meio de um processo de categorização, com categorias definidas a priori: objetivos, programas e orientações pedagógicas.

Diante do exposto, e com o objetivo de compreender a configuração do campo do ensino de Geometria no Brasil, acreditamos que nosso trabalho traz contribuições para significar o papel da Geometria na Educação Básica, fortalecendo o debate instituído na contemporaneidade acerca de objetivos e de conteúdos dessa área do conhecimento, evidenciando sua função na formação dos jovens estudantes. Também, apontamos sua relevância acadêmica e formativa, à medida que sua socialização pode contribuir com a formação dos professores que ensinam matemática.

O texto está organizado em duas partes: na primeira, caracterizamos o campo do ensino de Geometria no Brasil, abarcando o período entre os anos de 1700 a 1985; no segundo, tratamos dos objetivos, programas e orientações pedagógicas identificados no período.

2 O CAMPO DO ENSINO DE GEOMETRIA NO BRASIL

A presente sessão tem a função de apresentar as propostas evidenciadas em documentos que abordam o ensino de Geometria no período do Brasil Colônia até o período Nacional de Desenvolvimento, documentos de 1700 até 1964, que demarcam a transição da geometria de disciplina para conteúdo da disciplina de matemática. Apresentamos, também, o Movimento da Matemática Moderna, marco importante no período do Regime Militar (1964-1985).

A história nos mostra que o ensino de geometria no país passou por diversas fases, até chegar à atualidade. Por cerca de duzentos anos, desde a chegada dos portugueses, o ensino no Brasil foi dominado por jesuítas. Porém, eles não foram responsáveis pela introdução da matemática no sistema escolar, pois achavam que seu ensino era em vão (MENESES, 2007).

A Geometria iniciou seu desenvolvimento no Brasil, pelas necessidades da guerra, pois os soldados sentiam dificuldade em acertar os alvos por não ter conhecimento da área.

> Assim em 1699, é criada a aula especial de fortificações, com objetivo de ensinar a desenhar e a trabalhar no forte. Na década de 1730 o ensino militar tornou-se obrigatório a todo o oficial, há o registro dos primeiros livros brasileiros sobre geometria - *Exames de Artilheiros e Exames de Bombeiros*. Foi a necessidade de ter noções geométricas que impulsionou estudos matemáticos, incorporados nos currículos oficiais (SENA; DORNELES, 2013, p.139).

De acordo com Sena e Dorneles (2013), os livros *Exames de Artilheiros e Exames de Bombeiros* foram escritos por José Fernandes Pinto Alpoim, que foi designado pela corte portuguesa para ministrar aulas aos combatentes. Neles, os conceitos geométricos presentes tinham como objetivo alcançar conhecimentos que contribuíssem para a atuação na carreira militar e o ensino da geometria organizado com definição, explicação e exemplo numérico.

Pode-se perceber que, nessa época, a preocupação principal era que os militares aprendessem na prática, sem o rigor científico dos teoremas, demonstrações e corolários.

Valente (2007) afirma que, em 1720, iniciou-se na França uma reformulação dos exércitos, sendo criadas escolas de ensino militar, que contavam com um professor de matemática muito bem remunerado, devido ao valor que lhe era atribuído. Em uma delas, o professor era Bernard de Bélidor[5], que além de ensinar, foi escritor de textos e manuais de ensino.

Tempos depois, em Portugal, também se viu a necessidade de reorganizar os exércitos. Conforme Valente (2007), foram criadas aulas nos regimentos militares, utilizando livros de Bélidor. Em 1767, no Brasil, foi criada a Aula de Regimento de Artilharia do Rio de Janeiro sendo implantados os livros de Bélidor como material didático.

Após Bélidor ser afastado, outro autor que se destacou foi Étienne Bézout[6]. No Brasil, inicialmente, as obras de Bézout foram adotadas na área da aritmética, ficando ainda Bélidor como referência na geometria, havendo uma universalização da matemática ensinada na Europa com a utilização dos dois autores simultaneamente.

Mais tarde, ocorreu uma mudança com a ascensão do brasileiro Vilela Barbosa. Parte da notoriedade da obra de Vilela Barbosa se deu devido ao fato de que ele, durante o período de 1801 a 1821, passou a ser responsável por examinar o curso de Matemática da Academia, e os alunos, durante esse período, passaram a ser avaliados a partir de seu livro (MENESES, 2007, p. 38).

As obras de Barbosa apresentavam um maior rigor matemático e preocupação na linguagem. Meneses (2007) afirma que, ao fazer a análise de seus livros, percebemos que ele introduz os conceitos com teoremas, demonstrações e axiomas. A geometria, a partir desse momento, deixa de ser prática, passando a ter um modelo mais didático-pedagógico.

Com a mudança para o Brasil Império (1822-1889), novos caminhos foram dados para a educação e, em decorrência, novas propostas para o ensino de matemática e de geometria.

Em 1827, com a gratuidade do nível primário, as tentativas de incluir noções geométricas, além das quatro operações fundamentais, foram em vão, "primeiramente por não haver professores primários habilitados e, depois, por não ser um conhecimento escolar solicitado para o ingresso em nenhuma instituição secundária" (VALENTE, 1999, p. 113 *apud* SENA; DORNELES, 2013, p. 139).

Valente (2007) ainda afirma que a geometria passou a ter importância a partir da criação da escola secundária para candidatos ao ensino superior, pois passou a ser pré-requisito para quem quisesse fazer Cursos Jurídicos que formavam advogados. Mais tarde, também passou a ser necessária para entrar nas Academias Médico/cirúrgicas e nas Escolas Politécnicas, aumentando ainda mais a sua importância.

"Em 1837 com o intuito de servir de modelo de escolarização secundária no país, é criado o colégio Dom Pedro II, onde as matemáticas[7] figuram em todas as oito séries do Colégio" (VALENTE, 2007, p. 118). Os conteúdos estavam organizados por anos e tratavam de Aritmética, Geometria, Álgebra, Trigonometria e Mecânica. A Geometria estava presente no 4º e no 5º ano, com duas horas semanais, inicialmente.

---

[5] "Bernard Forest de Bélidor nasceu na Catalunha (Espanha), segundo pesquisadores em 1697 ou 1698, filho de Jean-Baptiste Forest de Bélidor, um oficial militar francês que estava em serviço na Espanha, e Marie Hébert. Sua vida foi dividida entre o militarismo e a ciência. O gosto pela matemática assegurou-lhe uma participação nas pesquisas de Jacques Cassini e Philippe de La Hire. O seu talento chamou a atenção do duque de Orléans, que o indicou para um cargo de professor de matemática na Escola de Artilharia de La Fère. Nesse cargo, escreveu diversos manuais técnicos durante as décadas de 1720 e 1730" (SILVA; PASCHOARELLI, 2010, p. 18).

[6] "Étienne Bézout, matemático francês da escola de Mézières nascido em Nemours, Seine-et-Marne, consagrado pela publicação da coleção *Cours de mathématique*, em seis volumes cobrindo toda a matemática elementar até a de alto nível conhecida até então, com ênfase para a mecânica e a navegação (1764-1769)" (O´CONNOR, ROBERTSON, 2016).

[7] Até o início do século XX, os conteúdos de Matemática eram organizados em disciplinas independentes, as matemáticas: aritmética, álgebra, geometria e trigonometria, cuja fusão se deu em 1927, com a criação da disciplina escolar Matemática, proposta de renovação encaminhada por Euclides Roxo (MENESES, 2007).

Em 1841, foi feita uma alteração na sequência dos conteúdos e a geometria ficou mais algebrizada, passando então para o final dos livros e para os últimos anos do ensino secundário.

Conforme Valente (2004), Cristiano Ottoni foi professor da Academia de Marinha nas áreas de Geometria, Aritmética, Álgebra e Trigonometria. Também foi autor do livro *Elementos de geometria e trigonometria retilínea* que foi utilizado pelo Colégio Pedro II. Seus livros foram usados como referência para textos de preparação dos exames de geometria.

No final do século XIX, surgiu no Brasil uma literatura didática, marcada sempre pela sigla FIC. São os *Elementos de Arithmetica por FIC, os Elementos de Geometria por FIC* etc. Deve-se ao prof. Eugênio de Barros Raja Gabaglia a introdução, no país, desses livros. "[...] As escola da Congregação dos Frères de l´Instruction Chrétienne (FIC) constroem, principalmente por meio dos seus frades-professores, uma grande obra didática em vários campos do saber" (VALENTE, 2007, p. 176-177).

Na obra "Uma história da matemática escolar no Brasil" de Wagner Rodrigues Valente (2007), tem-se uma breve análise desses livros por área. O autor afirma que, nos *Didáticos de Geometria por FIC* com autoria de La Mennais, fundador das escolas por FIC no norte da França, o objetivo era sempre ligar a geometria com a resolução de problemas.

A instituição buscava um autor dentro dos próprios FIC para fazer um tratado de geometria, e, em 1869 ou 1870, surgiram tratados de M. Ph. André com uma geometria bem prática. No Brasil, os livros de André foram traduzidos e adaptados por Barros, mas sem muitas alterações.

No final do século XIX, surgem na Europa inúmeras revistas especializadas em Matemática, num movimento internacional de ensino da disciplina. No Brasil, o movimento influenciou a maneira de ensinar, voltando-se para o ser humano, mais do que para o conteúdo a ser ensinado.

O Colégio Pedro II utilizou os FIC até 1922, quando adotou um livro elaborado pelo diretor Euclides Roxo. Com mudanças nos programas de ensino, o Colégio Pedro II tornou-se referência no ensino nacional para a aritmética escolar.

> Euclides Roxo sugeriu à congregação do Colégio Pedro II, em 1927, uma alteração no ensino da Matemática, alteração essa que era baseada no movimento de modernização internacional [...]. Em 1928, esse documento foi aprovado pelo Departamento Nacional de Ensino e também pela Associação Brasileira de Educação, mas o novo programa só passou a vigorar em 1929 e apenas no Colégio Pedro II (MENESES, 2007, p. 78).

A partir desse programa, Roxo buscou uma integração de conteúdos da aritmética, álgebra e geometria, com a publicação do livro *Curso de Matemática Elementar.* A proposta foi revolucionária, pois até então os professores que ensinavam por área específica teriam que unificar e trabalhar as três áreas em uma só disciplina. Diversas críticas surgiram, mas como menciona Valente (2004), Roxo defendia a proposta, alegando que até então o ensino secundário preparava para os exames classificatórios, não para as escolas superiores, algo que deveria mudar com a unificação das matemáticas. Vários outros colégios do país foram aderindo à proposta feita no Colégio Pedro II, o qual era referência para o ensino secundário.

De 1925 a 1930, houve uma transição no sistema de ensino e a frequência no curso secundário tornou-se obrigatória para a obtenção de um diploma desse nível escolar. "O decreto n. 16.782A, de 13 de janeiro de 1925, do governo Arthur Bernardes, que ficou conhecido como Reforma "Rocha Vaz" estabeleceu a seriação obrigatória de seis anos do curso secundário para todo país" (VALENTE, 2004, p. 41). Os conteúdos eram divididos por anos e a matemática se fazia presente nos quatro primeiros, sendo que, ao final do 2º, 3º e 4º ano, haviam exames finais a fim de aprovar ou reprovar.

Diferente do que acontecia antes da reforma, os conteúdos ficavam separados por anos, e os alunos tinham que ver os conteúdos em apenas um, sem revisões nos outros anos, havendo um retrocesso na maneira de ensinar. Isso porque, com a Reforma, a geometria, por exemplo, ficou concentrada somente em um ano, não sendo mais estudada em outros. Com a Revolução de 1930, Getúlio Vargas assumiu a Presidência da República e, segundo Meneses (2007), com o objetivo de agradar aos estados parceiros de batalha, Rio Grande do Sul e Minas Gerais, criou os ministérios do "Trabalho, Indústria e Comércio" e da "Educação e Saúde", nomeando Francisco Campos como ministro deste último.

Francisco Campos iniciou uma reforma educacional com o objetivo de unificar o ensino em todo o país, conhecida como "Reforma Francisco Campos". A reforma organizou o sistema nacional de ensino e estruturou o secundário em dois níveis: o Curso Fundamental seguido pelo Curso Complementar. "O primeiro, de cinco anos, devia ser comum e fundamental, e o segundo, de dois anos, devia constituir a necessária adaptação dos candidatos aos cursos superiores" (VALENTE, 2004, p. 136).

No Curso Fundamental, tornou-se obrigatório nas cinco séries o ensino da nova disciplina, chamada Matemática. Roxo foi autor do programa para a disciplina em cada uma das séries.

> [...] Roxo procurou sedimentar dois momentos para a matemática no secundário: um primeiro calcado num ensino intuitivo que progressivamente caminharia para uma segunda etapa mais formalista, abstrata. A matemática do ginásio seria caracterizada, sobretudo, pelos primeiros anos do curso fundamental. (VALENTE, 2004, p. 137).

Roxo aproveitou a proposta de unificação que já tinha feito no Colégio Pedro II, fazendo adaptações e mantendo a ideia inicial com uma formação voltada para a aprendizagem do aluno, e não como um simples instrumento para preparar candidatos ao ensino superior. A grande mudança, conforme menciona Meneses (2007), é que se inicia uma inversão de objetivos, em busca de formar os jovens para todos os setores da atividade nacional.

A partir desse momento, a geometria passa a ser conteúdo da disciplina de Matemática, surgindo seus primeiros livros didáticos, um marco fundamental para a configuração do ensino de Geometria no Brasil[8]. Outra reforma significativa que ocorreu no ramo educacional foi a Reforma Capanema:

> Em abril de 1942, a lei orgânica do ensino secundário, reestrutura o ensino (ginásio – 4 anos e científico – 3 anos). A geometria é organizada com o mesmo programa estabelecido na reforma de 30: é abordada intuitivamente nas duas primeiras séries ginasial e dedutivamente nas duas últimas. No científico, estava presente em todos os anos. No entanto, as críticas aos programas extensos levou a nova reestruturação do ensino. A geometria foi então redistribuída e passou a não constar "no programa da 2ª série do ensino ginasial e, no 2º ciclo, ficou toda concentrada ao 1º ano (SENA; DORNELLES, 2013, p. 140).

Com a Reforma, nos três últimos anos que hoje correspondem ao Ensino Médio, os alunos poderiam escolher o tipo de curso que queriam cursar, direcionado para alguma área. Estes anos tinham objetivos de preparar para o ensino superior ou para o trabalho. Já os primeiros quatro anos eram de conhecimento geral, correspondendo aos atuais Anos Finais do Ensino Fundamental.

> Essa reforma permaneceu em vigor até 1961, com a aprovação da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional. Apenas um reajustamento dos

[8] Meneses (2007) menciona que Wagner Rodrigues Valente organizou, em 2005, uma análise de alguns desses livros, principalmente na área de geometria. Reconhecemos a importância desse trabalho para conhecermos os conteúdos e metodologias utilizadas naquela época, porém, não conseguimos acessar tal material.

> programas foi feito em 1951. Após isso, somente na década de 60, com a chegada ao Brasil do movimento da "Matemática Moderna", que mudanças significativas voltaram a ocorrer no ensino de Matemática (DASSIE; ROCHA, 2003, p. 07).

Nos registros da história da educação brasileira, identificamos que o período Nacional de Desenvolvimento (1946-1964) foi de escassas mudanças na educação.

Como vimos, o ensino de Geometria no Brasil passou por diversas fases, até ser fundido, em 1930 com a Reforma Francisco Campos, com a aritmética e álgebra se transformando na disciplina de matemática. Percebemos que a geometria foi perdendo importância com o tempo, principalmente na questão prática, que foi o motivo para iniciar seu ensino no país.

Assim, inicia-se uma nova fase, como conteúdo da disciplina de matemática, passando por um período de adaptação por parte dos professores ao ensinar a nova disciplina, marcado por altos índices de retenção, possivelmente promovida por um ensino com formalização precoce de conceitos e mecanização de processos sem compreensão.

Nas décadas de 1960 e 1970, o ensino de Matemática no Brasil, assim como em outros países, foi influenciado por um movimento de renovação que ficou conhecido como Movimento da Matemática Moderna - MMM (BRASIL, 1998).

> Dentre as reformas do ensino de Matemática, pode-se dizer que o Movimento da Matemática Moderna foi a que se tornou mais conhecida. Ao contrário das Reformas Campos e Capanema, a Matemática Moderna não foi implantada por nenhum decreto, o que não impediu que ela fosse amplamente divulgada e adotada em todo o território nacional. No Brasil, a Matemática Moderna veio como uma alternativa ao ensino tradicional que, apesar de demonstrar certa estabilidade de conteúdo e metodologia em livros e programas de ensino, recebia críticas por adestrar os alunos em fórmulas e cálculos sem aplicações (SOARES, 2005, p. 2).

O movimento influenciou o ensino até a década de 80, estando presente nos livros didáticos utilizados. Suas bases estavam principalmente em conceituação e formulações abstratas, seguindo uma linha de matemática pura, próxima da estudada por pesquisadores e estudiosos. O que se propunha estava fora do alcance dos alunos, pois se distanciou das questões práticas, impedindo a visualização do sentindo da matemática. Assim, a geometria foi relegada a segundo plano, pois o Movimento da Matemática Moderna estava focado na Teoria dos Conjuntos e o estudo da Álgebra era o que prevalecia (MENESES, 2007).

Os professores não entendiam essa perspectiva e acabavam deixando de lado o ensino de geometria, até porque, muitas vezes os conteúdos da área estavam no final do livro. Ainda como menciona Meneses (2007), esse abandono abrangeu também os cursos de magistério e licenciaturas, com currículos despreocupados com o ensino de geometria, com uma geração órfã dessa formação.

Um novo olhar foi dado na "Agenda para Ação":

> Em 1980, o National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), dos Estados Unidos, apresentou recomendações para o ensino de Matemática no documento "Agenda para Ação". Nele a resolução de problemas era destacada como o foco do ensino da Matemática nos anos 80. Também a compreensão da relevância de aspectos sociais, antropológicos, lingüísticos, além dos cognitivos, na aprendizagem da Matemática, imprimiu novos rumos às discussões curriculares. (BRASIL, 1998, p. 20).

Essas recomendações influenciaram a realização de reformas curriculares em todo mundo. No Brasil, algumas Secretarias de Educação municipais e estaduais buscaram contemplar essas recomendações para a formulação de propostas curriculares para a Matemática. Porém, as ideias nelas contidas dificilmente chegavam aos professores, pois não havia muito debate sobre o assunto. Especificamente em geometria, os professores órfãos de uma boa formação acadêmica em cursos de magistério e licenciaturas, ficavam imobilizados para empreender tal debate.

De acordo com os Parâmetros Curricular Nacionais – PCN (BRASIL, 1998), o quadro do ensino de Matemática naquela época apresentava diversos obstáculos, principalmente a falta de profissionais capacitados e ausência de políticas educacionais efetivas, além da interpretação equivocada das concepções pedagógicas. Consideramos que, no campo da Geometria, tais obstáculos assumiam maior intensidade, pelo pouco conhecimento dos professores sobre o conteúdo e pela falta de consciência da sua importância no processo formativo dos estudantes.

Outra crítica sobre o ensino da matemática da época é a maneira hierárquica em que se constitui a organização de conteúdos. Pautados na história, sabemos que a matemática não foi construída de uma só vez e em uma sequência lógica; povos de diversas épocas e lugares deram sua contribuição, por isso, não há sentido em querer estabelecer uma ordem. A Geometria, em tempos de MMM, foi tratada sob enfoque das *estruturas,* afastando-se completamente da construção histórica que lhe deu origem.

É importante demarcar que, a partir das dificuldades do ensino de Matemática, emergem preocupações em torno de como melhorá-lo, não apenas o ensino, mas também a aprendizagem de Matemática. Tal movimento tem envergadura principalmente na década de 90, pós Regime Militar, e consideramos que a publicação da Lei de Diretrizes e Bases da Educação - LDB, em 1996, e dos Parâmetros Curricular Nacionais – PCN, em 1998, representam dois marcos fundamentais para a organização do sistema educacional do País, e, especialmente na Matemática, o caminho para a superação do MMM.

Acreditamos que tais mudanças, mobilizadas pelo processo democrático em nosso país, preconizam que nossos estudantes tenham o direito de estudar para além da prática, para além de formar um operário do mundo capital. Nesse contexto, a geometria possui um papel importante com objetivos de promover condições para que o aluno possa ver e entender o mundo a sua volta de um modo mais crítico, agindo matematicamente.

3 FALANDO DE OBJETIVOS, PROGRAMAS E ORIENTAÇÕES PEDAGÓGICAS

Quando se elabora um plano de ensino, uma proposta curricular ou uma diretriz pedagógica norteadora para a educação, nas diversas esferas, os primeiros itens planejados são os objetivos educacionais (gerais) e os objetivos de ensino (específicos). Os objetivos educacionais, segundo Targino (2009), são objetivos muito amplos, que englobam as pretensões formuladas por uma Nação ou Estado que traçam o perfil do homem que se deseja formar. Esse tipo de objetivo, quando formulado pelo poder público, condiz com o que ele quer que os estudantes de seu país aprendam e o tipo de pensamento que produzem. Assim, dependendo da corrente teórica ideológica preponderante no momento de tempo/espaço eles tomam uma conotação diferenciada.

Para atender aos objetivos estabelecidos pelo sistema educacional, elenca-se os programas de ensino, escolhendo conteúdos específicos de cada disciplina, através dos quais os objetivos serão atingidos. Sendo assim, um programa de ensino orienta sobre o que os professores precisam saber, o que as escolas precisam ensinar e o que será avaliado.

Em geometria, diversos assuntos relacionados com a área podem ser contemplados nos programas de ensino. Porém, cada assunto exige um nível de conhecimento por parte dos estudantes e é papel do professor planejar e realizar escolhas metodológicas que propiciem que o ensino e a aprendizagem ocorram da melhor forma.

Nesta sessão, abordamos esse tripé: os objetivos de ensino, os programas e as orientações pedagógicas, as três categorias propostas para nosso estudo, enfatizando o momento da geometria como conteúdo e depois como disciplina de matemática. Nossa referência inicia com os Cursos Militares estendendo-se até ao Movimento da Matemática Moderna.

Nos Cursos Militares, que surgiram por volta de 1710, a Geometria começou a ser ensinada com o objetivo de preparar os militares para as guerras. Assim, esse conhecimento era específico de uma determinada profissão, sendo considerada uma disciplina isolada, tendo como pré-requisito os conhecimentos de aritmética.

Os futuros militares precisavam de conhecimentos geométricos para poder acertar com mais precisão seus alvos. O conteúdo que era ensinado não apresentava nenhum rigor em sua metodologia, que era totalmente especulativa e prática, com exemplos bem objetivos em situações que auxiliariam nas guerras. Conforme Valente (2007), não havia proposições geométricas e nenhuma preocupação com demonstrações de propriedades geométricas.

Analisando o livro “Uma história da Matemática escolar no Brasil”, de Wagner Valente (2007), nos cursos militares os conteúdos ensinados tratavam de: triângulos, paralelogramos, círculos, retas e assuntos que facilitariam a vida dos militares em combate. Quanto às escolhas dos conteúdos, os livros adotados representavam os programas de ensino.

Quanto à metodologia, era bastante incentivado o uso da construção geométrica sem preocupação com o rigor matemático e “a sequência didática utilizada pelo autor incluía geralmente três passos: definição, explicação e exemplo numérico. Além disso, como ocorria na época, todo o livro continha pouquíssima notação matemática” (VALENTE, 1999, p. 29 *apud* MENESES, 2007, p. 24).

Quanto aos livros utilizados, temos dois com maior destaque, os livros de Alpoim e de Vilela Barbosa:

> Grande parte dos conceitos abordados nos livros de Alpoim era apresentada por meio do sistema de perguntas e respostas. A maioria deles era abordada de modo prático, isto é, o aluno tinha a oportunidade de aprender tais noções por meio da construção geométrica (MENESES, 2007, p. 25).

Os livros de Vilela Barbosa foram adotados após os de Alpoim e com “nova metodologia com o uso de axioma, teorema, problema, corolário, escólio, solução, demonstração, hipótese e construção. Percebe-se um maior rigor matemático” (MENESES, 2007, p. 40).

Com o ensino secundário, temos alguns livros que se destacaram e foram utilizados antes da Reforma Francisco Campos. Nos livros de Ottoni, “a linha seguida era baseada na exploração da Geometria formal, isto é, preocupava-se mais com o rigor do que com suas aplicações” (MENESES, 2007, p. 46).

No Colégio Pedro II, a geometria passou a ser ensinada nos cursos preparatórios para o ensino superior. Nesse período, o ensino não era obrigatório e somente as classes mais favorecidas tinham acesso a ele.

> Devido ao caráter preparatório que caracterizava a escolarização secundária, as matemáticas vão deixando de representar um saber técnico, específico das Academias Militares e vão passar a fazer parte da cultura escolar geral de formação do candidato ao ensino superior (VALENTE, 2007, p. 119).

Aqui, percebe-se uma mudança nos objetivos educacionais da Geometria, ensinada para preparar o estudante para o ensino superior, tornando-se um conhecimento da cultura escolar geral.

Valente (2007, p. 120) afirma que, em 1841, no Colégio Pedro II, “fica estabelecida a sequência Aritmética-Álgebra-Geometria e como acontecia em outros países a geometria escolar vai se algebrizando e sendo colocada ao final dos estudos matemáticos”.

Já nos Livros *Par Fic*, últimos utilizados antes da Reforma Francisco Campos e escritos de forma separada, o tratamento dado ao ensino de geometria é meramente formal.

> Começa com as definições preliminares de alguns conceitos e com essas definições não tem nada que possa ser associado com a vida prática dos alunos. Geometria isolada e sem conexões com a álgebra e forma lógico-dedutiva de apresentar os conceitos (MENESES, 2007, p. 57).

Instituídos no Colégio Pedro II, os livros de Euclides Roxo sugerem a unificação da geometria com a aritmética e a álgebra, surgindo uma nova disciplina, a matemática.

> Mesmo assim as questões que envolviam geometria seriam o carro-chefe para o funcionamento da nova disciplina. Devia-se manter vivo o caráter experimental e intuitivo e estar presente nas questões que tratassem do aprendizado dos alunos. Não haviam demonstrações dos teoremas, somente verificações materiais (MENESES, 2007, p.79).

A partir da Reforma Campos, ocorrida em 1931, a geometria passou a ser um conteúdo da nova disciplina chamada matemática. Nesse período, no Brasil, a industrialização passou a ganhar espaço em relação ao sistema agrário e começou a ser sentida a necessidade de uma reforma educacional. O Governo concretizou a reforma, que era um anseio de toda a sociedade. Conforme Meneses (2007), a Reforma foi feita para uniformizar o ensino, com outros objetivos além de preparar para o ensino superior, como era feito até então. Buscava-se a formação do homem que atendesse a todos os grandes setores da atividade nacional.

Valente (2004, p. 23) afirma que Roxo, ao organizar a disciplina de Matemática, defendia que "a finalidade de Matemática no ensino secundário seria preparar o aluno para a vida, utilizando aplicações práticas, de modo a torná-lo um cidadão para viver com dignidade em uma sociedade democrática".

Quanto aos programas do ensino secundário, Meneses (2007) afirma que o programa era estabelecido e os professores tinham que seguir aquela linha de ensino, pois, ao final de cada ano, os estudantes passavam por um exame pré-montado. Os exames eram bem estruturados, contendo demonstrações e cálculos bem trabalhosos para serem realizados sem o uso de calculadora.

A Geometria, integrada na disciplina de Matemática, inaugura uma época em que ela é tomada com menor detalhamento, haja vista ser tratada de forma mais geral.

Com a reforma Capanema, em 1942, a ideologia, segundo Ribeiro (1993), era voltada para o patriotismo e o nacionalismo. Quanto à matemática, Valente (2004) comenta que:

> Se a Reforma Francisco Campos expressou quais deveriam ser os conteúdos e a metodologia a ser empregada para a condução da nova disciplina Matemática, a Reforma Gustavo Capanema apenas elencou os conteúdos da disciplina que deveriam ser ensinados nas diferentes séries do ensino secundário. Com ela, a disciplina ganhou novas feições. A análise das coleções evidencia que a apropriação que os autores fizeram da nova reforma traduziu-se pela manutenção em separado dos ensinos de Aritmética, de Álgebra e de Geometria, mesmo que sob o manto de uma única disciplina chamada Matemática (p.6).

Não houve reformas oficiais até a proposição dos PCN, no final da década de 1990, mas o Brasil enfrentou duas profundas modificações em seus objetivos educacionais, mobilizadas por dois motivos: a Tendência Tecnicista e o Movimento da Matemática Moderna.

A Tendência Tecnicista, introduzida pelo regime militar, objetivava formar estudantes com competências para o mundo do capital, como explicita Martins (2008, p. 18):

> Propõe tornar a escola mais eficiente e organizada, sua finalidade é preparar o aluno para o mercado de trabalho. Os conteúdos matemáticos são ensinados em

> passos sequenciais, onde o aluno aprende repetindo exercícios, com um ensino mecanizado com regras e técnicas sem fundamentar os procedimentos. Esta tendência não enfatiza a compreensão e análise dos conteúdos, apenas no desenvolvimento de atitudes e na memorização de conceitos, capacitando o aluno para resolver exercícios. Na Tendência Tecnicista não há preocupação em formar cidadãos conscientes e críticos, mas em indivíduos competentes para o mundo capitalista.

Percebemos que, com o tecnicismo, os alunos não precisavam refletir sobre o que estudavam. O ensino se dava pela memorização de conceitos, como se fossem uma máquina num processo mecânico. Mudanças significativas aconteceram com o MMM:

> No final da década de 1950 e início de 1960, o ensino de Matemática em muitos países absorveu o MMM, que pretendia aproximar a Matemática trabalhada na escola básica com a Matemática produzida pelos pesquisadores da área. Os defensores da Matemática Moderna (MM) acreditavam que poderiam preparar pessoas que pudessem acompanhar e lidar com a tecnologia que estava emergindo. Dessa forma, as propostas veiculadas pelo MMM inseriram no currículo conteúdos matemáticos que até aquela época não faziam parte do programa escolar como, por exemplo, estruturas algébricas, teoria dos conjuntos, topologia, transformações geométricas (WIELEWSKI, 2008, p.2).

A autora indica ainda que o MMM foi "oficializado" em alguns estados do Brasil por intermédio de grupos de professores de Matemática que foram constituídos entre as décadas de 1960 e 1980[9]. Uma característica comum a esses grupos era o interesse e a necessidade de mudar o ensino de Matemática desenvolvido na época. O MMM ficou também conhecido como sinônimo de Teoria dos Conjuntos, singularizando todo o processo. Hoje, sabemos que o MMM fracassou no mundo todo, sendo o livro "O Fracasso da Matemática Moderna", de Morris Kline (1976), uma referência para esse diagnóstico. Mesmo assim, é importante considerarmos que um movimento da abrangência e importância como o da Matemática Moderna deixou marcas no ensino de Matemática brasileiro por muito tempo.

De certa maneira, há quase um consenso de que uma das razões do abandono do ensino de Geometria seja por conta do MMM, contrariado por alguns autores. Silva e Oliveira (2009), ao analisarem o material que compõe o Arquivo Pessoal do professor Sylvio Nepomuceno (professor participante do GEEM[10]), revelam que a contribuição do livro didático produzido por ele se diferencia, em certos aspectos, do livro tido como referência, no estado de São Paulo, durante o MMM e que, entre esses aspectos, destacam uma valorização do ensino de geometria, que é apresentada em todas as séries da coleção, com propostas diferenciadas, contrariando o consenso de que uma das razões do abandono do seu ensino seja o MMM.

Na pesquisa sistematizada, não conseguimos elementos para aprofundar esse debate. Na bibliografia que embasou a construção deste artigo, os conteúdos tradicionais da geometria não

[9] No Brasil, o Estado de São Paulo é considerado pioneiro no MMM, devido à criação do GEEM – Grupo de Estudos do Ensino da Matemática, em 1961, na cidade de São Paulo, liderado por Osvaldo Sangiorgi. Grupos semelhantes ao GEEM foram fundados no Brasil, como o Núcleo de Estudos e Difusão do Ensino de Matemática do Paraná – NEDEM, em 1962, sob a coordenação do professor Osny Antonio Dacol; o Grupo de Estudos sobre o Ensino de Matemática de Porto Alegre – GEEMPA (atualmente a sigla significa *Grupo de Estudos sobre Educação, Metodologia de Pesquisa e Ação*), em 1970, em Porto Alegre, sob a liderança da professora Ester Pilar Grossi; e, no Rio de Janeiro, cria-se em 1976 o Grupo de Estudos e Pesquisa em Educação Matemática (GEPEM), fundado em assembleia, sob a regência da professora Maria Laura Mouzinho Leite Lopes.

[10] Grupo de Estudos do Ensino da Matemática (GEEM) foi criado em 1961, na cidade de São Paulo, liderado por Osvaldo Sangiorgi e tinha como principal objetivo coordenar e divulgar a introdução da Matemática Moderna na Escola Secundária e também na tradução, publicação e divulgação de livros que discutissem assuntos relacionados ao MMM (SILVA; OLIVEIRA, 2009).

são evidenciados nos estudos desenvolvidos sobre o período do MMM. Assim, num movimento de entender a real contribuição do MMM no ensino de geometria no Brasil, existe a necessidade de maior aprofundamento nesta temática para futuros trabalhos.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Perpassando pela história da educação de nosso país, podemos perceber as diferentes fases do ensino de Geometria, em vários aspectos. Nossa caminhada inicia no Brasil ainda Colônia de Portugal, quando a geometria era ensinada para um grupo seleto e pequeno de estudantes que ingressavam na carreira militar, até o ensino socializado para toda população, como na contemporaneidade, em que a geometria é conteúdo obrigatório da disciplina de matemática.

Uma das fases em que o ensino de geometria sofreu grande influência pelo momento político que se estabelecia foi durante o Brasil Colônia, com a prioridade no ensino militar. É importante considerarmos as reformas que ocorreram na Era Vargas, quando foi unificada com aritmética e álgebra, criando-se a disciplina de matemática, em 1930 com a Reforma Francisco Campos. Observamos que a geometria foi perdendo importância com o tempo, principalmente na questão prática, que foi o motivo para iniciar seu ensino no país.

Na Reforma Campos, Euclides Roxo aproveitou a proposta de unificação que já tinha feito no Colégio Pedro II, fazendo adaptações e mantendo a ideia inicial com uma formação voltada para a aprendizagem do aluno, e não como um simples instrumento para preparar candidatos ao ensino superior. A grande mudança, conforme menciona Meneses (2007), é que se inicia uma inversão de objetivos, em busca de formar os jovens para todos os setores da atividade nacional.

Na ditadura militar, tem-se um ensino mais voltado para apenas o saber fazer, sem questionamentos sobre os conteúdos ou expressões de ideias. No Movimento da Matemática Moderna, é explícita a busca por preparar os estudantes para o mundo das tecnologias. Segundo os PCN, muitas das ideias defendidas pelo MMM ainda permanecem presentes no ensino brasileiro de Matemática: "por exemplo, a insistência no trabalho com a linguagem da teoria dos conjuntos nas séries iniciais, a formalização precoce de conceitos, o predomínio absoluto da álgebra nas séries finais e as poucas aplicações práticas da Matemática no ensino fundamental" (BRASIL, 1998, p. 21).

A pesquisa desenvolvida se caracteriza como um momento de aprendizado, tanto para o pesquisador quanto para o leitor, permitindo conhecer e entender um pouco melhor a consolidação da matemática e da geometria no Brasil, especialmente o ensino, e suas múltiplas relações com a sociedade. Estudar a história, de qualquer área, é um processo desafiador e que desperta a curiosidade de conhecer os fatos, os acontecimentos, as marcas de cada época, o que provocou as mudanças e as consequências das mesmas.

A caminhada pela história nos mostrou que as mudanças na Educação, como um todo, ocorrem acompanhando os movimentos políticos e sociais. Assim, verificamos que a matemática e a geometria acompanham historicamente essas mudanças, que são influenciadas pela visão existente sobre a educação, e, em certa medida, por demandas do capital, por isso, é importante termos a noção do contexto de cada época, o que nos dá elementos para refletirmos sobre a nossa prática docente, as metodologias que queremos utilizar e como queremos que os alunos aprendam a geometria e, principalmente, o objetivo da aprendizagem.

No cenário em vivemos hoje no Brasil, olhar para essa história nos coloca com mais clareza os desafios que a Educação, em especial a Educação Matemática, têm para promover uma sociedade mais justa e mais ética. A que ou a quem servirá o conhecimento da geometria? Quem continuará com acesso a um ensino de qualidade? Quem terá possibilidades de desenvolver competências para a cidadania? Muitas são as inquietações para debater, o Novo Ensino Médio, a

Escola sem Partido, a Base Nacional Comum Curricular, as reformas. Isso nos mostra que a presente pesquisa é inconclusa, pois a sociedade, a política, os interesses majoritários se *movimentam* e no efeito dominó *movimentam* a educação, a matemática, a geometria...

REFERÊNCIAS

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**: Matemática, terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental. Brasília: MEC / SEF, 1998.

DASSIE, B. A.; ROCHA, J. L. O ensino de matemática no Brasil nas primeiras décadas do século XX. **Caderno Dá Licença,** Niterói, v. 5, n.4, p. 65-74, 2003.

EUCLIDES. **Os elementos**. 1.ed. Trad. Irineu Bicudo. Rio Claro, SP: Unesp, 2009.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática.** 2. ed. rev. Campinas: Autores Associados, 2007.

KONZEN, S. **Do Brasil Colônia à contemporaneidade:** a configuração da geometria como campo de ensino no Brasil. 2016. 55 p. Trabalho de Conclusão de Curso. (Curso de Licenciatura em Matemática) – Universidade Comunitária da Região de Chapecó, Chapecó, 2016. Disponível em: http://konrad.unochapeco.edu.br:8080/pergamumweb/vinculos/0000ea/0000eaae.pdf. Acesso em 15 ago. 2017.

MARTINS, L. F. **Motivando o ensino da geometria**. Unesc: Criciúma, 2008.

MENESES, R. S. **Uma *história* da *geometria* escolar no Brasil**: de disciplina a conteúdo de ensino. 2007. 172 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

O´CONNOR, J.; ROBERTSON, E. **Mac tutor history of mathematics archive.** Disponível em: http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/. Acesso em 01 dez. 2016.

SENA, R. M.; DORNELES, B. V. Ensino de geometria: rumos da pesquisa (1991-2011). **Revista Revemat,** Florianópolis, v. 08, n. 1, p. 138-155, 2013.

SILVA, J. C. P.; PASCHOARELLI, L. C. (Org.). **A evolução histórica da ergonomia no mundo e seus pioneiros** [online]. São Paulo: UNESP; São Paulo: Cultura Acadêmica, 2010.

SOARES, F. S. Os congressos de ensino da matemática no Brasil nas décadas de 1950 e 1960 e as discussões sobre a matemática moderna. In: SEMINÁRIO PAULISTA DE HISTÓRIA E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 1., 2005, São Paulo. **Anais**... São Paulo: IME - USP, 2005. p. 445-452. Disponível em: http://www.ime.usp.br/~sphem/documentos/sphem-tematicos-5.pdf.Acesso em 10 dez. 2016.

TARGINO, Regina Rodriguez Bôtto. **Objetivos de ensino**. 2009. Disponível em: http://profareginarodriguez.blogspot.com.br/2009/04/objetivos-de-ensino-regina-rodriguez.html. Acesso em: 15 nov. 2016.

VALENTE, W. R. (Org.). **O Nascimento da matemática do ginásio**. São Paulo: Annablume/FAPESP, 2004.

VALENTE, W. R. **Uma história da matemática escolar no Brasil, 1730-1930**. 2. ed. São Paulo: Annablume/FAPESP, 2007.

WIELEWSKI, G. D. O movimento da matemática moderna e a formação de grupos de professores de matemática no Brasil. **Revista APM**. Lisboa, Portugal: Associação de Professores de Matemática, 2008. Disponível em: http://ml.apm.pt/files/_Co_Wielewski_4867d3f1d955d.pdf. Acesso em: 01 dez.2016.

AS FUNÇÕES DIDÁTICAS DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NOS LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA DO ENSINO MÉDIO

THE DIDATIC FUNCTIONS OF HISTORY OF MATHEMATICS IN THE HIGH SCHOOL MATHEMATICS TEXTBOOKS

CARLINI, Elisângela Miranda Pereira[1]
CAVALARI, Mariana Feiteiro[2]

RESUMO

O presente trabalho se desenvolveu com o intuito de analisar quais funções didáticas as menções à História da Matemática (HM) desempenham nos livros didáticos de Matemática do Ensino Médio, aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) 2015. Para tal, identificamos as menções à HM presentes nas seis coleções aprovadas nesta edição do Programa e analisamos as funções didáticas desempenhadas pela HM, a partir de três agrupamentos: “HM e estratégia didática”; “HM e a elucidação dos porquês e do para que?” e “HM e formação cultural geral”. Identificamos que, de um total de 294 menções, 54% destas menções têm o potencial de desempenhar a função “HM e formação cultural geral”, apresentando, em geral, fatos da vida de estudiosos da Matemática. Já a função “HM e estratégia didática”, identificada em uma pequena parcela de menções (13%), tem o potencial de desempenhar o papel de proporcionar ao aluno o desenvolvimento de algum raciocínio matemático e a função “HM e a elucidação dos porquês e do para que?”, que representa 33% do total de menções, pode contribuir para uma mudança de percepção em relação à Matemática. Neste sentido, podemos afirmar que a HM, de modo geral, ainda não está inserida nos livros didáticos da forma que os pesquisadores de História da Matemática e/ou Educação Matemática apresentam como mais profícua. Entretanto, destaca-se que, em comparação com estudos anteriores, podemos afirmar que já há um indicativo nos livros didáticos de maior adequação desta utilização com relação ao apontado pela referida literatura.
Palavras-chave: História da Matemática. Livros didáticos. PNLD. Ensino Médio.

ABSTRACT

This paper aimed to analyze the didactic functions the History of Mathematics (HM) plays in the high school mathematics textbooks, approved by the National Textbook Program in Brazil (PNLD) in 2015. For such purpose, the references to HM presented in the six collections approved by this program were identified and the didactic functions performed by HM were analyzed, from three groups of reference: "HM and teaching strategies"; "HM and the elucidation of why and what for?" and "HM and general cultural background". It was identified that out of a total of 294 mentions, 54% have the potential to perform the function "HM and general cultural formation", presenting, in general, facts of the life of mathematical scholars. The "HM and didactic strategy" function, identified in a small number of mentions (13%), has the potential to play the role of providing the student with the development of some mathematical reasoning, and the function "HM and the elucidation of why and of what for?", which represents 33% of the total number of mentions, can contribute to a change of perception in relation to Mathematics. In this sense, we can affirm that HM, in general, is not yet inserted in such textbooks as the researchers in the History of Mathematics and/or Mathematical Education indicate as profitable way. However, it is emphasized that, in comparison with previous studies, we can now affirm that there is an indicative of greater adequacy in the textbooks of that utilization as pointed by the literature.
Keywords: History of Mathematics. Textbooks. PNLD. High School.

[1] Mestre em Ensino de Ciências pela Universidade Federal de Alfenas (UNIFEI). Atua como Técnica em Assuntos Educacionais no Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais (CEFET-MG). Endereço eletrônico: elisaufop@yahoo.com.br.
[2] Doutora em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista (UNESP). Atua como docente no Instituto de Matemática e Computação da Universidade Federal de Itajubá (UNIFEI), Itajubá, MG, Brasil. Endereço eletrônico: mfcavalari@unifei.edu.br.

1 INTRODUÇÃO

A apresentação de elementos da História da Matemática (HM) no ensino de Matemática pode ser destacada como uma das tendências que emergem da pesquisa em Educação Matemática (PAIS, 2011). Neste contexto, entende-se que a HM pode contribuir de forma significativa no processo de ensino e aprendizagem da Matemática, nos diversos níveis de ensino.

A inclusão de aspectos relativos à HM no ensino de Matemática tem sido indicada tanto por documentos oficiais, tais como os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM), as Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNEM+) e as Orientações Curriculares para o Ensino Médio, quanto por Educadores Matemáticos, dos quais podemos citar Vianna (1995); Miguel (1997); Tzanakis e Arcavi (2000); Giardinetto (2000); Mendes, Fossa e Valdés (2006); Fossa (2008); Miguel e Miorim (2011); dentre outros.

Embora muitos estudos indiquem que a HM pode contribuir com o ensino de Matemática e a sua inclusão seja indicada pelos documentos oficiais, Souto (2010) enfatiza, com base em sua interação com professores de Matemática na Educação Básica e com base em alguns trabalhos acadêmicos, que “[...] na prática efetiva de sala de aula, a História da Matemática tem tido pouca ou nenhuma participação” (p. 524). Para Tzanakis e Arcavi (2000), uma das formas de facilitar ou possibilitar a utilização da HM em sala de aula seria por meio da incorporação de informações históricas nos livros didáticos em todos os níveis.

O livro didático pode ser entendido como o livro que será utilizado em aulas e que “[...] provavelmente foi escrito, editado, vendido e comprado, tendo em vista essa utilização escolar e sistemática” (LAJOLO, 1996, p. 4). Este recurso tem sido utilizado no sistema escolar por um longo período de tempo e, ainda hoje, ocupa um lugar privilegiado nos processos de ensino e aprendizagem (DÍAZ, 2011).

Corroborando a esta informação, Bittencourt (2004) enfatiza que, embora o livro didático seja vítima de polêmicas e críticas de estudiosos, ele ainda pode ser considerado um instrumento fundamental no processo de ensino e aprendizagem. Com relação à Matemática, Dante (1996) indica que o Livro didático tem uma forte influência nas aulas desta disciplina.

Embora o Livro Didático não seja o único material de referência do docente para preparar e lecionar suas aulas, em muitas situações, este recurso determina, “[...] de forma decisiva, o que se ensina e como se ensina o que se ensina” (LAJOLO, 1996, p. 4, grifo do autor). Neste sentido, Silva (2010), aponta que o Livro Didático, em muitas situações, pode se configurar como um material para complementação de conhecimentos do professor, tanto com relação às propostas metodológicas para o ensino, quanto com relação a conhecimentos específicos referentes à disciplina escolar.

Esta complementação torna-se relevante quando consideramos a inclusão de elementos da HM em sala de aula, já que muitos docentes podem não ter tido contato com a HM em sua formação inicial ou continuada.

Neste sentido, Santos (2017), ao analisar as concepções de docentes sobre a inclusão de aspectos da HM em suas aulas, identificou que ao menos[3] 30% dos docentes de Matemática de escolas públicas de uma cidade localizada na região Sul de Minas Gerais utilizam o Livro didático como fonte das informações históricas apresentadas em sala de aula.

[3] Participaram desta investigação 13 docentes que inicialmente responderam a um questionário e, posteriormente, 4 destes docentes foram entrevistados. Nestes instrumentos de coleta de dados buscou-se identificar, entre outras informações, as fontes relativas à HM que os professores utilizavam para preparar suas aulas. Nos questionários apenas um docente indicou utilizar o livro didático para preparar suas aulas relativas à HM, entretanto, nas entrevistas três dos quatro docentes afirmaram utilizar as informações HM apresentadas nos livros didáticos. Destaca-se que destes 4 docentes, 3 indicaram utilizar somente as informações históricas apresentadas pelo Livro Didático.

Com base nestas informações e no fato de que, de acordo com Choppin (2004), os livros didáticos podem ser uma interessante fonte de pesquisa, ressaltamos a importância de uma análise da apresentação da HM nesse tipo de material didático. Alguns estudos já foram realizados com o objetivo de analisar a HM presente nos livros didáticos de Matemática, dentre os quais podemos citar Vianna (1995), Bianchi (2006) e Gomes (2008).

Vianna (1995) investigou a forma que a HM era abordada em livros didáticos de variados níveis de ensino. Foram analisadas uma coleção de livros didáticos de 5a a 8a séries do Ensino Fundamental, dois livros utilizados no Ensino Superior, duas coleções de livros paradidáticos, e um livro sobre HM. Suas análises apontam que a HM presente na maioria destes materiais não tem relação direta com o conteúdo que os alunos devem apreender, e que os usos didáticos da História da Matemática estavam limitados às questões de motivação ou informações adicionais, raramente incorporando-se o conhecimento histórico na elaboração de novas sequências ou estratégias didáticas.

Bianchi (2006) investigou como a HM foi abordada em duas coleções de Livros Didáticos de 5ª a 8ª séries em suas edições avaliadas pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) em 1999, 2002 e 2005. A autora identificou que as coleções analisadas apresentavam a HM e que procuravam atender a demanda que os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) indicam, embora tenha observado que as informações históricas eram utilizadas na maior parte dos casos para a apresentação de informações gerais e/ou adicionais, e que as informações históricas que contribuíam para o desenvolvimento do conhecimento matemático eram pouco exploradas nos Livros Didáticos analisados. Entretanto, a autora, ao comparar livros analisados nos PNLD de 1999 e 2002, com os avaliados no PNLD 2005, identificou mudanças na apresentação da HM que, segundo ela, mostra uma preocupação de manter a História da Matemática definitivamente nos Livros Didáticos.

Já Gomes (2008), ao analisar cinco das 11 coleções de livros didáticos de Matemática para o Ensino Médio aprovadas pelo PNLEM[4] 2005 e ao realizar entrevistas com os autores dessas coleções, identificou que os autores entrevistados se preocupam com a contextualização da matemática escolar, e entendem que a HM pode auxiliar neste processo. Além disto, enfatizou que alguns dos autores de livros didáticos reconheceram a dificuldade em trabalhar com a HM e que o fizeram por ser uma exigência constante da ficha de avaliação do PNLD. Assim, segundo o autor, “[...] as práticas mobilizadoras de histórias da Matemática nos livros didáticos ainda estão longe de fazê-las participar de forma orgânica, esclarecedora, significativa e problematizadora da educação matemática escolar” (GOMES, 2008, p. 160).

Diante dos resultados destas pesquisas e do fato de que Miguel e Miorim (2011) afirmam que as informações históricas nos atuais livros didáticos brasileiros podem apresentar “[...] diferenciações na forma como tais informações são introduzidas bem como nos objetivos da introdução” (p. 58), realizamos o presente trabalho com o intuito de analisar que funções didáticas as menções à História da Matemática[5] (HM) desempenham nos livros didáticos de Matemática do Ensino Médio, aprovados pelo PNLD 2015[6].

[4] PNLEM – O Programa se denominava Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio (PNLEM) nas edições de 2005 e 2009. A partir da edição de 2012 passou a ser denominado Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), não tendo mais nomenclatura diferenciada das edições de avaliações dos livros didáticos para os outros níveis de ensino.

[5] Este termo por vezes será apresentado como “menção histórica”, ou apenas por “menção”. Destacamos que nesta investigação consideramos por “menção histórica” todo trecho que apresenta elementos da HM. Apresentaremos uma definição mais detalhada deste termo nos itens subsequentes.

[6] Este artigo baseia-se em resultados obtidos na dissertação de mestrado intitulada "A História da Matemática nos livros didáticos de Matemática do Ensino Médio: conteúdos e abordagens", apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Ciências da Universidade Federal de Itajubá.

A escolha pelas coleções aprovadas pelo PNLD justifica-se pelo fato de que este é um programa governamental, que tem por finalidade avaliar e distribuir livros didáticos, obras literárias, obras complementares e dicionários aos alunos e professores dos ensinos fundamental e médio das escolas públicas federais e as que integram as redes de ensino estaduais, municipais e do Distrito Federal, participantes do PNLD (BRASIL, 2014). Neste sentido, os livros utilizados por escolas que integram esta rede, necessariamente, foram aprovados pelo PNLD. Já a escolha pela análise das coleções aprovadas em 2015 justifica-se pelo fato de que esta era a avaliação mais recente dos livros de Matemática destinados ao Ensino Médio.

Para a apresentação dos resultados desta investigação, expomos inicialmente uma revisão bibliográfica acerca da HM no ensino de Matemática, posteriormente apresentamos os aspectos metodológicos da pesquisa e, por fim, expomos considerações acerca da HM nos Livros didáticos de Matemática aprovados pelo PNLD 2015 e suas funções didáticas.

2 A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NO ENSINO

A inclusão da HM no ensino de Matemática, conforme já exposto, é indicada por documentos oficiais brasileiros e por pesquisadores da área de Educação Matemática e/ou História da Matemática. Os pesquisadores que defendem que elementos da História sejam incluídos no processo de ensino-aprendizagem da Matemática indicam que a abordagem histórica pode contribuir para a mudança de percepção do estudante com relação a natureza do conhecimento Matemático.

Miguel e Miorim (2011) e Brolezzi (1991) afirmam que o distanciamento entre o modo como os conteúdos matemáticos são apresentados ao aluno e o seu desenvolvimento ao longo da História podem contribuir para uma falsa ideia de que a Matemática é uma ciência pronta e acabada. Neste contexto, a apresentação da História da Matemática poderia contribuir para a desmistificação desta crença errônea com relação à Matemática.

A perspectiva histórica pode aproximar o estudante “[...] da Matemática como ciência humana, não-endeuzada, às vezes penosamente rastejante e, em ocasiões falíveis, porém, capaz também de corrigir seus erros” (VALDÉS, 2006, p. 16). Corroborando esta ideia, Tzanakis e Arcavi (2000) defendem que a HM poderá contribuir para a construção de uma visão acerca da natureza e da atividade matemática, pois esta possibilita o entendimento de que a Matemática está em constante desenvolvimento e que dúvidas, erros, controvérsias e incertezas são partes integrantes da atividade matemática.

A HM, também, pode contribuir para mostrar as conexões entre a Matemática e outras disciplinas que, em um primeiro momento, podem parecer alheias. Nesse sentido, através da HM, os alunos poderão perceber que, muitas vezes, os conhecimentos matemáticos são motivados e desenvolvidos por questões e problemas de outras disciplinas, que aparentemente não estão relacionadas com a Matemática (TZANAKIS; ARCAVI, 2000).

Além disto, através de exemplos históricos, a HM pode auxiliar a mostrar aos estudantes que o desenvolvimento da Matemática não foi impulsionado apenas por questões utilitárias, mas também foram motivados “[...] por questões estéticas, pela curiosidade intelectual, por desafio e prazer, para fins recreativos etc.” (TZANAKIS; ARCAVI, 2000, p. 207, tradução nossa).

Dessa forma, para Brolezzi (1991), o conhecimento histórico torna-se essencial para se ter uma visão abrangente da Matemática elementar, sendo a mesma dificilmente adquirida sem esse recurso. Para o autor, tal situação contribui para a visão da utilidade de cada tópico do currículo que “[...] transcende a sua possível aplicação prática imediata” (BROLEZZI, 1991, p. 59).

Assim, a HM também contribui para a compreensão de que existem conceitos que não possuem aplicações práticas imediatas e que "[...] ter *significado* não é o mesmo que ter *aplicações práticas*" (BROLEZZI, 1991, p. 63, grifo do autor). Este autor, ainda, reforça que a HM é essencial para que se compreenda que a Matemática "[...] não é um conjunto de regras para resolver problemas práticos" (p. 58).

Além disto, a inclusão, em aulas de Matemática, de aspectos relativos à história do desenvolvimento de conteúdos matemáticos pode propiciar ao estudante "[...] compreender o significado desses conceitos e sua importância para o desenvolvimento de toda a matemática e suas conexões" (MENDES, 2006, p. 111). Nesta perspectiva, a HM pode contribuir para trazer significado ou para ressignificar os conceitos matemáticos abordados em sala de aula.

Com base nestas informações, podemos afirmar que a HM pode contribuir em vários aspectos no processo de ensino e aprendizagem da Matemática. Para tanto, enfatizamos que não é qualquer abordagem da HM que contribui com o ensino de Matemática. É necessário que "[...] os procedimentos de ensino reflitam a riqueza e dinamicidade encontrada na história" (GIARDINETTO, 2000, p. 137).

A HM, entretanto, tem sido apresentada, com frequência, nas aulas de Matemática, como uma "curiosidade" ou como um momento de descontração (MIGUEL, 1997). Corroborando a Miguel (1997), diversos autores, como Vianna (1995), Tzanakis e Arcavi (2000), Giardinetto (2000), Mendes, Fossa e Valdés (2006), Fossa (2008), Miguel e Miorim (2011), dentre outros, apontam a necessidade de ser cauteloso na utilização de elementos da HM para a motivação ou para a apresentação de curiosidades, pois esta abordagem não privilegia a aprendizagem dos conteúdos matemáticos em si, além de ser um tipo de abordagem da HM que acaba sendo inserida de forma esporádica em sala de aula.

Em que pese o fato desta ser uma possibilidade do estudante ter contato com a HM, enfatizamos na mesma perspectiva de Giardinetto (2000), que "[...] embora seja importante a utilização da história da matemática da forma ilustrativa ou informativa, essa utilização pouco contribui para o entendimento da própria lógica dos conceitos" (p. 137).

Considerando que este tipo de abordagem da HM apresenta limitações, Fossa (2008) indica outras duas formas de utilização da HM em sala de aula que se apresentam mais eficazes, quais sejam: "[...] o uso da História da Matemática como um agente de formação cultural, em que a história aborda a matemática como parte do patrimônio cultural da humanidade", e "[...] o uso da História da Matemática como um agente de formação cognitiva na sala de aula" (FOSSA, 2008, p. 07), ou seja, a HM contribuindo para a aprendizagem de conceitos matemáticos.

Para tal situação, as informações históricas devem passar por adaptações pedagógicas, visando atender aos objetivos almejados. Esta adaptação pode ser realizada por meio de uma história-narrativa (MENDES, 2006).

Para exemplificar, Mendes (2006) apresenta uma história-narrativa sobre Ptolomeu[7] e seus estudos sobre as cordas da circunferência, na qual os estudantes podem realizar investigações acerca das razões trigonométricas a partir da exploração de certas propriedades matemáticas. Estas propriedades matemáticas dizem respeito a "[...] semelhança de triângulos, paralelismo, proporcionalidade entre outros princípios geométricos que conduzem à noção de seno de um

---

[7] Cláudio Ptolemeu (c. 90-168 d.C.) escreveu um tratado astronômico e matemático sobre o movimento estelar e planetário que celebraria o modelo geocêntrico do universo e seria um dos textos científicos de maior influência de todos os tempos. Com o título de *Síntese Matemática* e composto por 13 livros, seu tratado ficou conhecido por *Almagesto* — o maior, a partir do termo usado pelos árabes para destacá-lo de outros tratados de astronomia. Em seu *Almagesto*, Ptolemeu deu a contribuição mais significativa para a trigonometria na Antiguidade (MOL, 2013, p. 56).

ângulo como a razão entre o cateto oposto a um ângulo agudo e a hipotenusa do triângulo retângulo" (MENDES, 2006, p. 104).

Assim, a história-narrativa para Mendes (2006) não se configura como a apresentação de informações históricas e, sim, como a apresentação de elementos da HM que possibilitem aos estudantes perceberem o caráter investigatório de tal conteúdo e, a partir desta investigação, espera-se que os alunos possam "[...] (re)formular as relações matemáticas que justificam o surgimento [...]" dos conceitos trabalhados (MENDES, 2006, p. 104).

Brolezzi (1991) sugere algumas abordagens de utilização da HM, de forma que o "[...] próprio conteúdo seja influenciado pelo uso da História da Matemática em sala de aula" (p. 01). Este autor enfatiza que utilizar a HM não significa, necessariamente, que o professor deve contar a história aos alunos. Para ele, uma possibilidade seria estruturar o conteúdo a ser ensinado de acordo com o seu desenvolvimento histórico. Dessa forma, o ensino da Matemática seria mais significativo, pois estaria baseado em uma lógica mais natural, portanto, mais acessível aos alunos, o que acabaria por possibilitar-lhes uma visão da totalidade do conhecimento matemático que deve ser adquirido.

Outra possibilidade, para Brolezzi (1991), seria o professor buscar na História não somente o relato do acontecimento, mas informações relevantes que contribuam para uma abordagem do conteúdo que consiga transmitir o significado daquilo que se pretende ensinar, ou seja, "[...] é necessário captar a forma de pensar, a lógica da construção matemática" (BROLEZZI, 1991, p. 05).

Para ilustrar, Brolezzi (1991) apresenta um exemplo de utilização da HM para o ensino de Matemática por meio da apresentação aos alunos de um episódio da infância de Gauss. Nesta situação, para o autor, basta narrar uma história deste conceito que apresente a lógica utilizada por Gauss, que culminou na fórmula da soma da Progressão Aritmética. O importante é o professor diferenciar a informação fundamental a ser buscada na HM, daquelas que são apenas complementares. Essa anedota poderia tornar-se menos útil se não fizesse referência ao modo de raciocínio utilizado por Gauss, observando que a soma do primeiro termo com o último era a mesma do segundo com o penúltimo, e assim por diante. Assim, após a apresentação desta ideia, o processo de obtenção da fórmula da soma da Progressão Aritmética fica mais compreensível (BROLEZZI, 1991).

Diante do exposto, podemos afirmar que a HM pode contribuir com o ensino de Matemática. Neste contexto, conforme já indicado, realizamos a presente investigação com foco nas funções didáticas desempenhadas pela HM em um importante material de referência do professor, que é o livro didático.

3 ASPECTOS METODOLÓGICOS

O *corpus* documental da presente investigação foi constituído pelas seis coleções de livros didáticos de Matemática, para o Ensino Médio, aprovadas pelo PNLD 2015, sendo cada uma composta por três volumes. No quadro 1 apresentamos estas coleções e os códigos que elaboramos para facilitar a sua identificação.

Após a identificação e localização destes livros, iniciamos a sua leitura. Elaboramos, então, a definição do conceito de "menção à História da Matemática" que utilizaríamos. Este foi definido com base no conteúdo apresentado pelos livros didáticos e em Boyer (2012). Desta forma, consideramos como menção à HM trechos que abordam: origem/surgimento de alguma ideia/noção/conceito relacionado à Matemática; atribuição de autoria (fatos, obras, teoremas, relações, paradoxos etc.); biografias; fatos da vida de estudiosos ou suas realizações no campo da Matemática; cronologias; histórico do desenvolvimento de conceitos matemático; conhecimento das antigas civilizações a respeito da Matemática (babilônios, egípcios, gregos, chineses, árabes etc.); problemas de origem histórica (Papiro[8] de Rhind, de Cairo etc.); utilização de conhecimentos matemáticos em outras áreas (Astronomia, Física, Artes, Arquitetura etc.) ao longo da história.

Quadro 1: *Corpus* Documental: coleções de livros didáticos de Matemática para o Ensino Médio aprovadas pelo PNLD 2015.

Coleção	Autor(es)	Editora	Edição/Ano	Código
Conexões com a Matemática	Fábio Martins de Leonardo	Editora Moderna	2ª ed./2013	C1
Matemática: Contexto e aplicações	Luiz Roberto Dante	Editora Ática	2ª ed./2013	C2
Matemática: Paiva	Manoel Rodrigues Paiva	Editora Moderna	2ª ed./2013	C3
Matemática – Ciência e aplicações	Gelson Iezzi e outros	Editora Saraiva	7ª ed./2013	C4
Matemática – Ensino Médio	Kátia Cristina Stocco Smole Maria Ignez de Souza Vieira Diniz	Editora Saraiva	8ª ed./2013	C5
Novo Olhar: Matemática	Joamir Souza	Editora FTD	2ª ed./2013	C6

Fonte: Elaborado pelas autoras com base em dados do Guia de Livros Didáticos PNLD 2015.

Após esta etapa, realizamos a leitura dos livros que estavam sendo analisados e selecionamos as menções históricas à HM. Realizamos, então, uma análise com relação ao formato destas menções. Para Tzanakis e Arcavi (2000), ao analisar o formato de uma menção histórica, devemos observar a exposição didática (texto expositivo ou uma atividade), o seu estilo (se aparece em destaque em relação ao texto principal) e o seu posicionamento no texto.

Em seguida, realizamos a leitura das menções identificadas nos livros didáticos e, com base nelas e em algumas ideias de Brolezzi (1991), Vianna (1995) e Fossa (2008), definimos três agrupamentos excludentes[9], a saber: HM e estratégia didática; HM e a elucidação dos *porquês* e do *para que?*; HM e formação cultural geral.

No agrupamento denominado “HM e estratégia didática”, reunimos as menções nas quais as informações relativas à HM são apresentadas de modo a possibilitar ao estudante o desenvolvimento de algum raciocínio matemático e, assim, contribuem para a compreensão do conteúdo a ser estudado.

No agrupamento denominado “HM e a elucidação dos *porquês* e do *para que?*”, agrupamos as menções em que as informações históricas podem auxiliar a apresentação do porquê de certos conhecimentos matemáticos, ou seja, a forma que, em que circunstâncias e por que foram desenvolvidos estes conteúdos. Além disto, nas menções deste agrupamento à HM é

[8] Muitos dos registros da civilização egípcia chegaram aos nossos dias em papiros, alguns deles de conteúdo matemático. O papiro de conteúdo matemático mais célebre é o Papiro de Rhind, adquirido pelo egiptólogo escocês Alexander Rhind em 1858 e datado de cerca de 1650 a.C.. Com mais de 5 m de comprimento e 33 cm de largura, é possivelmente o melhor registro da matemática egípcia. Foi copiado por um escriba de nome Ahmes de um texto matemático mais antigo. Contém 84 problemas de geometria e de aritmética acompanhados de soluções. Entre os problemas aritméticos, há estudos de frações unitárias e de equações lineares e entre os problemas de geometria, há o cálculo de volume de silos de base circular e retangular e cálculo de áreas (MOL, 2013, p. 21).

[9] Essa classificação é excludente, ou seja, uma menção faz parte somente de um agrupamento.

utilizada para expor ao aluno a "[...] razão de ser de tópicos específicos da Matemática" (BROLEZZI, 1991, p. 61), apresentando sua utilidade ao longo do tempo, ou em um período específico. Neste caso, as menções que desempenham esta função apresentam as aplicações (dentro da própria Matemática ou em outras áreas do conhecimento) dos conteúdos matemáticos ao longo do tempo.

Por fim, o agrupamento denominado "HM e formação cultural geral" é constituído por menções que apresentam informações históricas sucintas que podem apenas propiciar uma formação cultural com relação à Matemática, ou seja, não contribuem diretamente para a aprendizagem de Matemática e nem sobre a Matemática. São exemplos, a apresentação de fatos da vida de algum estudioso que trouxe contribuições para o desenvolvimento da Matemática.

Após esta descrição dos procedimentos de desenvolvimento deste trabalho, exporemos a seguir a nossa análise com relação às funções didáticas desempenhadas pela HM nas coleções de livros didáticos do Ensino Médio analisadas.

4 A FUNÇÃO DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NOS LIVROS APROVADOS PELO PNLD 2015

A análise de aspectos relativos à História da Matemática em livros didáticos de Matemática do Ensino Médio foi realizada nas cinco edições do Programa Nacional do Livro Didático para este nível de ensino já realizadas no Brasil. Nas edições do PNLEM 2006, PNLEM 2009, PNLD 2012 e PNLD 2015, a HM foi analisada no item "contextualização", no qual, de acordo com o Guia de livros didáticos (2014), é identificado se os conhecimentos matemáticos são contextualizados, de forma significativa, no que diz respeito às práticas sociais atuais, à História da Matemática e a outras áreas do conhecimento.

A resenha do item "Contextualização", no Guia de Livros Didáticos referente ao PNLD 2015, apresenta uma avaliação bastante sucinta no que diz respeito à abordagem da História da Matemática nas coleções analisadas:

> No caso de contextualizações ligadas à história da Matemática, há obras didáticas em que se encontram breves informações, com ênfase na identificação dos personagens envolvidos no desenvolvimento de um determinado tema e suas localizações no tempo histórico (BRASIL, 2014, p. 106).

Este documento, entretanto, indica que é possível "atribuir significado" aos conceitos matemáticos por meio da discussão do seu desenvolvimento histórico "[...] e de suas inter-relações no âmbito da Matemática, quanto das motivações sociais, econômicas e científicas que levaram ao avanço da Matemática" (BRASIL, 2014, p. 106).

Com vistas a analisar as menções à HM presentes nas seis coleções aprovadas no PNLD 2015, em um primeiro momento, conforme já apontado, nos dedicamos a identificar estas menções. Assim, localizamos 294 menções à HM nas coleções analisadas. Dentre estas menções, 265 se encontram no formato de texto expositivo e 29 se apresentam na forma de atividades.

Com relação a sua apresentação no livro didático, 183 menções se distinguem do texto principal, ou com molduras e/ou sendo apresentadas de cores, fundos e/ou fontes diferenciados, ou com a apresentação de imagem, ilustração, gravura e/ou fotografia. Já com relação à localização das menções no texto, indicamos que 106 menções à HM são apresentadas no início da exposição do conteúdo, 46 no decorrer do texto (intercalada no texto ou em nota de rodapé), 77 em paralelo (separado do texto, geralmente com algum destaque) e 40 ao final da apresentação do conteúdo. Neste sentido, pode-se afirmar que a maior parte das menções ou inicia o conteúdo a ser abordado ou está paralelo a ele.

Destacamos, entretanto, que não identificamos, no desenvolvimento desta investigação, uma relação direta entre esta forma de apresentação e a função didática que identificamos ser desempenhada por ela.

Em outra perspectiva, Fossa (2008) identificou que a HM era apresentada nos textos de Matemática na forma de uma caixa, separada ou não do texto, às vezes na margem da página, outras vezes no final ou na seção de um capítulo. Esta, muitas vezes, se configurava apenas como uma ilustração. Para este autor, esta abordagem é de pouca eficácia e não é a utilização da HM mais desejável. Entretanto, ele destaca que ela proporciona um primeiro contato do aluno com a HM, servindo como motivação para alguns, e contribuindo para a sua formação cultural. Para Fossa (2008), tais informações podem ser melhor trabalhadas pelos professores que poderão apresentar explicações adicionais relevantes.

Após a apresentação do formato das menções à HM, apresentaremos informações relativas à função didática que atribuímos a elas. Das menções localizadas, identificamos que 38 (cerca de 13%) apresentam elementos da HM que se voltam para apresentar e/ou propiciar o desenvolvimento de algum raciocínio matemático, ou seja, a HM nestas menções, além de apresentar o relato histórico, apresenta o raciocínio matemático envolvido, contribuindo, assim, para auxiliar a "captar a forma de pensar" e para trazer significado ao conteúdo a ser estudado (BROLEZZI, 1991). Desta forma, a HM, nestas menções, pode "[...] sugerir ideias que levem à compreensão do conteúdo" (VIANNA, 1995, p. 77). Estas menções formam o agrupamento que denominamos "HM e estratégia didática", que foi elaborado com base na categoria "História da Matemática como estratégia didática", apresentada em Vianna (1995) e inspirado nas ideias de Brolezzi (1991).

Na figura 1, apresentamos uma menção que trata do tópico Soma dos termos de uma Progressão Aritmética finita e ilustra este agrupamento.

Figura 1: Gauss e a soma dos termos de uma PA

2.4 Soma dos *n* primeiros termos de uma PA

Carl Friedrich Gauss (1777-1855) é considerado um dos maiores matemáticos do século XVIII. Conta-se que, quando criança, o professor de sua turma pediu aos alunos que calculassem a soma: $1 + 2 + 3 + 4 + ... + 98 + 99 + 100$

Para surpresa do professor, Gauss resolveu rapidamente o desafio e foi o único a acertar a resposta: 5.050. O pequeno Gauss percebeu que:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 98 + 99 + 100$$

101

101

101

Como são 50 parcelas iguais a 101, a soma dos termos dessa PA será igual a: $50 \cdot 101 = 5.050$

A soma dos *n* primeiros termos de uma PA, sendo conhecidos o primeiro e o último termo da progressão, é dada por: $S_n = \dfrac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$

REPRODUÇÃO - BRANDENBURG ACADEMY OF SCIENCES AND HUMANITIES, BERLIM

Carl Friedrich Gauss, retratado por Christian Albrecht Jensen (1850), era filho único de pais sem instrução, foi matemático, astrônomo e físico.

Fonte: Leonardo, 2013a, p. 216.

Nesta menção, é apresentada a ideia que Gauss utilizou para calcular a soma dos termos de uma P.A. Destacamos, na mesma perspectiva de Brolezzi (1991), que uma das formas de utilizar a HM em sala de aula pode ser por meio da apresentação de uma pequena narrativa, que mostre a lógica utilizada pelos matemáticos para a criação do conteúdo que está sendo trabalhado. No caso da fórmula da soma da Progressão Aritmética, para o autor, o importante é apresentar que Gauss observou que a soma do primeiro termo com o último era a mesma do segundo com o penúltimo e assim por diante.

Dessa forma, ao mostrar o raciocínio de Gauss, esta menção pode contribuir para que o aluno compreenda a fórmula da soma dos termos de uma Progressão Aritmética. Neste caso, entendemos que o importante não é que o aluno reproduza o raciocínio de Gauss e sim que ele entenda a forma como a fórmula foi criada, assim, o conhecimento deste fato da história da Matemática pode auxiliar na compreensão do conteúdo. Neste sentido, por meio do conhecimento desta história o aluno poderá reconstruir a fórmula, se necessário, por entender a lógica matemática envolvida.

Interessante destacar que a Fórmula da Soma dos Termos de uma PA foi apresentada em todas as coleções, por meio de um viés histórico e como estratégia didática. Outro assunto que foi apresentado em todas as coleções utilizando a HM como "estratégia didática" foi a Sequência de Fibonacci. Outras temáticas abordadas desta forma em algumas coleções foram semelhança de triângulos, cálculo de áreas de figuras planas, aproximação para o valor de π, dentre outros.

As menções que formam este agrupamento, conforme apontado, apresentam elementos da HM como forma de propiciar aos estudantes o desenvolvimento de algum raciocínio ou procedimento, fato que contribui para a aprendizagem de conteúdos/conceitos matemáticos. Neste sentido, entendemos que esta forma de apresentação da HM deveria ser bastante utilizada.

Entretanto, esta foi a função didática menos identificada em todas as coleções. Esta situação está em consonância com os resultados de Vianna (1995) e Bianchi (2006), que indicaram que este tipo de utilização da História da Matemática (como estratégia didática) não era muito utilizada nos livros didáticos do Ensino Fundamental, então denominados 5ª a 8ª séries, que analisaram.

Além desta função didática, identificamos que 97 menções, que representam cerca de 33% das menções localizadas, apresentam a origem de algum conhecimento matemático, ora abordando *como*, *por que* ou *em que circunstâncias* foi desenvolvido tal conceito, e, ainda, apresentam as aplicações de conceitos e/ou conteúdos matemáticos ao longo do tempo, na própria Matemática e em outras áreas do conhecimento. Estas menções foram reunidas no agrupamento denominado "HM e a elucidação dos *porquês* e do *para que?*", inspirado em ideias de Brolezzi (1991).

As menções reunidas neste agrupamento tratam, por exemplo, da origem dos números incomensuráveis, do conceito de área, dos números complexos, da aplicação das cônicas na Astronomia, da medida da circunferência da Terra, do número de ouro e de sua aplicação nas Artes e na Arquitetura, dentre outros.

Na Figura 2, apresentamos uma menção que ilustra aquelas reunidas neste agrupamento. Esta menção complementa e faz referência a outra menção sobre esses números, que traz a forma como os pitagóricos se depararam com um novo tipo de número: os números incomensuráveis.

Embora esta menção não aponte que existam diferentes interpretações com relação ao problema que teria dado origem à ideia de segmentos incomensuráveis e as consequências destes na escola Pitagórica[10], através dela, os estudantes têm acesso a uma interpretação da origem dos números hoje conhecidos como irracionais, e por meio desta, têm a possibilidade de observar o quanto a Matemática é passível de erros e está em constante desenvolvimento.

Figura 2: Os pitagóricos e os números incomensuráveis

A crise dos irracionais

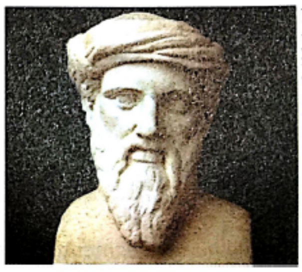
Como já dito anteriormente, os pitagóricos acreditavam que, tomando-se quaisquer dois segmentos, eles seriam comensuráveis. Para eles, o dogma de sua doutrina, "TUDO É NÚMERO", referia-se aos números racionais, já que eles não concebiam a existência de outros números que não fossem racionais (inteiro ou fração).

Assim, como estudamos, ao medirem a diagonal de um quadrado cujos lados medem 1 unidade de comprimento, os pitagóricos se depararam com o número irracional $\sqrt{2} = 1{,}414213562...$, ou seja, descobriram que o lado desse quadrado e sua diagonal são segmentos incomensuráveis.

Essa descoberta causou, na época, grande constrangimento, pois punha por terra um dos dogmas centrais dos pitagóricos: "TUDO É NÚMERO" (racional).

Conta-se que Pitágoras proibiu seus discípulos de divulgar tal descoberta para não abalar a sua doutrina, mas um deles, Hipaso, quebrou o voto de silêncio e foi, por isso, duramente punido.

A resistência aos números irracionais prosseguiu por vários séculos, até que, no fim do século XIX, o matemático George Cantor fundamentou-os adequadamente.



Busto de Pitágoras

George Cantor

Fonte: Dante, 2013a, p. 22.

A menção indica que os pitagóricos, ao acreditarem que qualquer segmento seria comensurável, percebiam nisso uma verdade, até se depararem com os números incomensuráveis, e como a menção nos apresenta, esta situação teria causado uma crise na doutrina pitagórica. A menção apresenta, também, que foi um longo processo que levou séculos, até que estes números fossem adequadamente fundamentados e finalmente aceitos. Neste sentido, esta menção possibilita a apresentação da ideia de que a Matemática, como qualquer outra atividade humana, conforme já apontado, está em desenvolvimento e sua história é constituída, também, por erros, controvérsias, dúvidas e incertezas.

Nesse sentido, este tipo de abordagem está em consonância com Brolezzi (1991), que afirma que, como exemplo da história da Noção de Número, pode ser apresentada a questão da crise da Escola Pitagórica perante aos incomensuráveis, e que a incorporação dos incomensuráveis fez alterar o significado de Número.

Assim, segundo o autor, da mesma forma que os matemáticos enfrentaram dificuldades na compreensão desse assunto, os alunos provavelmente também enfrentarão. Nesse caso, compreender o desenvolvimento "[...] dos significados ao longo da História é fundamental para a elaboração de um ensino com significado, pois permite que se construam novamente os significados junto com os alunos" (BROLEZZI, 1991, p. 52).

Outro exemplo de menção que classificamos com potencial de desempenhar a função didática "HM e a elucidação dos *porquês* e do *para que?"* está representado pela Figura 3.

Esta menção apresenta algumas informações sobre a forma como os egípcios calculavam as áreas de terras e quais as motivações para fazê-lo que, neste caso, eram derivadas de

[10]Uma versão diferente desta pode ser encontrada em Roque (2012).

necessidades práticas. Segundo Tzanakis e Arcavi (2000), a apresentação de motivações para o surgimento de uma ideia, noção ou conteúdo matemático pode contribuir para o ensino de Matemática. Por outro lado, ressaltamos que, conforme já explicitado, é importante apresentar aos estudantes que nem todo o conhecimento Matemático tem uma aplicação imediata. A Figura 4 representa uma menção que apresenta informações históricas sobre o estudo das cônicas, que pode suscitar esta discussão.

Figura 3: A origem do conceito de área

O conceito de área já era utilizado pelos egípcios há milhares de anos. Na época das cheias, quando as águas do rio Nilo começavam a subir, era inundada uma região ao longo de suas margens. Após as águas baixarem, as margens ficavam cobertas por uma lama contendo vários nutrientes, que tornava o solo mais fértil para o cultivo. No entanto, ao baixarem as águas, as demarcações que delimitavam as propriedades eram desfeitas, sendo necessária a realização de novas medições.

Essas medições eram realizadas pelos antigos agrimensores egípcios, que utilizavam cordas com vários nós, em que a distância entre um nó e outro indicava uma unidade de medida de comprimento.

Muitos dos registros envolvendo o cálculo de áreas podem ser encontrados no papiro de Rhind, importante documento egípcio de cerca de 1650 a.C.

Fonte: Souza, 2013b, p. 184.

De fato, as cônicas, quando foram estudadas, na Grécia Antiga, a princípio, não tinham uma motivação prática e tampouco aplicação. Porém, após muitos anos, estas ideias foram aplicadas nos estudos astronômicos de Galileu e Kepler. Assim, a HM, também, contribui para a compreensão de que nem todos os tópicos apresentam aplicações práticas imediatas, e reforça a ideia de Brolezzi (1991) de que um conceito pode ter significado mesmo sem ter uma aplicação prática. Desta forma, podemos perceber que este tipo de menção nos mostra que o desenvolvimento de certos conhecimentos matemáticos nem sempre ocorre incentivado por questões utilitárias, mas também por questões internas à própria Matemática.

Assim, as menções que apresentam a “HM para a elucidação dos *porquês* e do *para que?*” podem contribuir para que seja atribuído sentido ao conteúdo a ser aprendido pelo estudante, na medida em que apresenta a Matemática como ciência em desenvolvimento, às vezes vinculado às questões utilitárias, e às vezes vinculado às questões intrínsecas à própria ciência Matemática.

Diante das menções analisadas, podemos perceber que esta forma de utilização da HM, que apresenta as contribuições e aplicações do conhecimento matemático ao longo do tempo, pode contribuir para a desmistificação da visão da Matemática como uma ciência isolada, mostrando que ela possui relações com as necessidades sociais e também com outras áreas do conhecimento.

Destacamos, entretanto, que as informações relativas à HM, na maioria das menções identificadas (aproximadamente 54%), são de cunho geral, não relacionadas diretamente à aprendizagem de algum conteúdo matemático, porém ligadas à Matemática. Esta forma de apresentação da HM, embora não contribua especificamente para a aprendizagem de conteúdos específicos de Matemática, segundo Fossa (2008), pode contribuir para a formação cultural dos estudantes. Assim, reunimos estas menções no agrupamento denominado "HM e formação cultural", que foi inspirado nas ideias de Vianna (1995)[11] e Fossa (2008).

Figura 4: Apolônio, o estudo das cônicas e suas aplicações

Da origem das cônicas às suas aplicações atuais

O mais completo tratado sobre as cônicas foi escrito pelo matemático e astrônomo grego Apolônio de Perga, por volta de 225 a.C., embora elas já tivessem sido estudadas antes dele.

A obra *As cônicas*, de Apolônio, foi duramente criticada por alguns sábios de sua época, que encaravam esse estudo como puro deleite do autor, sem nenhum interesse no mundo real. O tempo se incumbiu de mostrar que esses sábios estavam enganados: por volta de 1605, o astrônomo alemão Johannes Kepler descobriu que os planetas descrevem órbitas **elípticas** em torno do Sol; em 1632, Galileu Galilei descreveu como **parabólica** a trajetória de projéteis lançados obliquamente para cima; em 1662, Robert Boyle descobriu que, sob temperatura constante, a função que expressa a relação entre o volume de uma massa fixa de gás e a pressão exercida sobre ela é **hiperbólica**. Constatamos, ainda, a presença das cônicas em muitas outras situações do mundo real, como na construção de antenas, espelhos e lentes parabólicos ou hiperbólicos; na construção de pontes pênseis; nas trajetórias elípticas, parabólicas ou hiperbólicas de astros celestes; em Economia, no estudo da curva parabólica de possibilidades de produção etc.

Fonte: Paiva, 2013c, p. 108.

As menções reunidas neste agrupamento tratam, quase em sua totalidade, de atribuição de autoria, ou seja, de apresentar a relação criação/nome de um estudioso que trouxe contribuições importantes para a Matemática. Na maioria dos casos, estas menções expõem um retrato deste estudioso, acompanhado de um texto explicativo que apresenta informações relacionadas a ele e suas contribuições para o desenvolvimento da matemática. As menções apresentadas a seguir, representadas pelas Figuras 5 e 6, ilustram este agrupamento.

A menção representada pela Figura 5 expõe um selo elaborado em homenagem a um matemático e a Figura 6 apresenta Tales de Mileto e narra possíveis fatos de sua vida e algumas contribuições para a Matemática. Estas informações históricas são apresentadas como "curiosidades" e pouco contribuem para discussões acerca da natureza do conhecimento matemático e tampouco contribuem para a aprendizagem de conceitos e/ou conteúdos matemáticos.

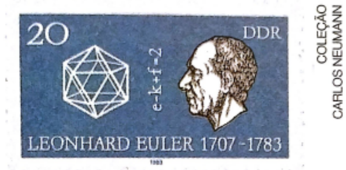
Contrapondo a esta utilização, Valdés (2006) expõe que o conhecimento histórico não deve ser exposto em forma de historietas ou anedotas, como forma de curiosidade, apenas para entreter o aluno. Para este autor, "[...] relacionar um nome e uma data com uma ideia, conceitos ou procedimentos não é suficiente" (VALDÉS, 2006, p. 25).

Embora esta forma de utilização da HM não seja a mais indicada pelos pesquisadores da área de Educação Matemática e/ou História da Matemática, as menções classificadas nesta função representam mais da metade das menções históricas identificadas nos livros analisados. Destacamos, entretanto, na mesma perspectiva de Fossa (2008) que, embora essa forma de utilização da HM não seja a mais desejável, a apresentação deste tipo de informação desempenha a função de proporcionar um primeiro contato do aluno com a HM, contribuindo para a formação cultural deste.

[11] Embora existam vários distanciamentos entre o agrupamento "HM e formação cultural" e as categorias "História da Matemática como motivação" e "História da Matemática como informação" apresentadas por Vianna (1995), estas inspiraram a elaboração de tal agrupamento.

Assim, em que pese o fato de que esta não é, de acordo com a literatura especializada, a abordagem mais adequada para a utilização da HM em sala de aula, destacamos que se trata de "[...] uma tentativa incipiente de aproveitar da mesma para fins pedagógicos" (FOSSA, 2008, p. 09). Nesse sentido, entendemos que esta forma de utilização da HM, enquanto formação cultural dos alunos, é uma tentativa (mesmo que inicial) de introduzir a HM nos livros didáticos.

Figura 5: Selo em homenagem a Euler



Esse selo comemorativo, de 1983, mostra a importância da descoberta da relação de Euler, matemático suíço que viveu no século XVIII.

Fonte: Leonardo, 2013b, p. 139.

Figura 6: Tales de Mileto, o primeiro dos "sete sábios" da Grécia Antiga

Tales de Mileto (640-546 a.C.) é conhecido como o primeiro dos "sete sábios" da Grécia Antiga.

Considerado o primeiro filósofo, é a ele que se atribui a introdução na Grécia do estudo de Geometria. Era um homem de reconhecida inteligência, que se dedicou a diversas atividades. Foi comerciante, homem de Estado, filósofo, engenheiro, astrônomo e matemático. Em sua meia-idade, dedicou-se ao comércio e suas atividades o levaram ao Egito, onde estudou as ciências físicas e matemáticas com os sacerdotes. Os historiadores da época relatam que Tales não demorou a superar seus mestres e a conquistar a admiração do rei Amásis, por ter sido capaz de medir as alturas das pirâmides a partir das sombras daqueles monumentos.

As aplicações da Geometria em situações práticas foram um de seus grandes feitos. Ele usou conhecimentos sobre triângulos semelhantes para calcular distâncias inacessíveis, como a distância de navios à praia.

Com Tales tem início o estudo científico da Astronomia. Ele se tornou célebre ao prever um eclipse solar, que viria a ocorrer em 585 a.C. Conta-se dele que, enquanto caminhava durante uma noite contemplando as estrelas, caiu em um fosso. Uma senhora que o acudiu comentou: "Como pode saber das coisas do céu quando não sabe o que passa sob seus pés?".

Fonte: Smole e Diniz, 2013a, p. 235.

Destacamos, também, que a apresentação destas informações no livro didático pode contribuir para uma visão da Matemática como construção humana. Porém, deve-se ser cauteloso ao apresentar somente a imagem do "matemático" com informações biográficas ou a relação criação/autoria, pois, desta forma, pode-se colaborar para uma visão equivocada dos matemáticos como gênios, "[...] fechados em ambientes e alheios à necessária tomada de decisão" (VALDÉS, 2006, p. 19).

Com base nas informações expostas sobre as funções didáticas desempenhadas pelas menções históricas identificadas nas coleções, podemos afirmar que houve um certo interesse em utilizar a HM nas coleções de livros didáticos, seja por iniciativa dos autores, seja pelo fato de que este é um item requisitado na avaliação pelo PNLD. Este fato pode ser comprovado pela presença de quase 300 menções históricas nas coleções. Destacamos que estas menções não se distribuem de maneira uniforme entre as coleções analisadas, conforme pode ser identificado no quadro 2.

Identificamos que as coleções que mais apresentam menções à HM são as coleções 2 e 6, que são também aquelas que mais apresentam menções que desempenham as funções didáticas "HM e a elucidação dos *porquês* e do *para que?"* e "HM como estratégia didática", que são as funções didáticas apontadas pela literatura como as mais profícuas para serem utilizadas em sala de aula.

Além disto, destaca-se que a "HM como estratégia didática" foi a função didática menos identificada em todas as coleções e, foi, também, a menos identificada em cada uma das coleções. Já a maioria das menções à HM identificada nestes livros e em cada uma das coleções desempenha a função didática “HM e formação cultural”. Estas apresentam informações de cunho geral, que não estão contribuindo, de forma explícita, para a compreensão dos conteúdos matemáticos.

Tabela 1: Distribuição das menções por Coleção

	Coleção						
Função Didática	1	2	3	4	5	6	Total
HM e estratégia didática	3	9	3	3	4	16	38
HM e a elucidação *porquês* e do *para que*?	11	26	12	12	16	20	97
HM e formação cultural	16	31	22	19	24	47	159
Total de Menções	30	66	37	34	44	83	294

Fonte: Dados da pesquisa.

Assim, os resultados desta investigação mostram que as menções à HM localizadas nos livros didáticos aprovados pelo PNLD 2015 não estão, ainda, sendo apresentadas da forma como aponta a literatura. Ainda assim, observamos um certo interesse em utilizar a HM nesta coleção de livros didáticos, visto o número de menções à HM, quando comparada com outras edições do PNLD analisadas, apresentadas por meio de trabalhos anteriores, já mencionados. Dessa forma, entendemos que este fato já apresenta um indicativo de maior adequação às indicações da literatura com relação à esta utilização.

Destacamos, para finalizar, que as funções didáticas apresentadas neste artigo se referem ao texto presente no livro didático e que estas podem ser alteradas dependendo da abordagem dada pelo docente a este conteúdo histórico em suas aulas. Ainda que estas funções possam ser alteradas em sala de aula, enfatizamos a relevância de que os livros didáticos, materiais relevantes para o processo de ensino-aprendizagem de Matemática, apresentem a HM de forma a contribuir para a aprendizagem de conceitos e/ou conteúdos matemáticos ou para a mudança de percepção sobre o conhecimento matemático.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente artigo foi desenvolvido com o intuito de analisar que funções didáticas as menções à História da Matemática (HM) desempenham nos livros didáticos de Matemática do Ensino Médio, aprovados pelo PNLD 2015. A partir da nossa análise, identificamos quase 300 menções à HM nestes materiais e, desta forma, podemos afirmar que observamos um certo interesse em utilizar a HM nesta coleção de livros didáticos, seja pela exigência de tal utilização na avaliação dos livros pelo PNLD, seja pela vontade própria do autor.

No desenvolvimento desta pesquisa, verificamos que pouco mais da metade das menções identificadas estão desempenhando a função “HM e formação cultural geral”, que a nosso ver, é a função menos interessante do ponto de vista da compreensão de conteúdos ou conceitos matemáticos, pois, de modo geral, as menções deste agrupamento não apresentam contribuições para a aprendizagem ou esclarecimentos acerca de certos conteúdos, conceitos ou ideias matemáticas, ou sua utilidade e conexão com outras áreas do conhecimento. Porém, entendemos que esta forma de utilização da HM já é um primeiro passo na tentativa de introduzir a cultura de utilização da HM no conteúdo dos livros didáticos.

Já um terço das menções encontradas tem o potencial de desempenhar a função didática "HM e a elucidação dos *porquês* e do *para que?*", ou seja, a HM está contribuindo para o conhecimento da origem de certos conteúdos, bem como suas aplicações na própria Matemática e em outras áreas do conhecimento. Esta função deveria ser mais explorada, visto que, de acordo com nossas análises, pode contribuir para uma mudança de percepção em relação à Matemática. Esta possibilita a desmistificação da Matemática como uma ciência isolada e acabada, à medida que mostra a Matemática como ciência em desenvolvimento e, também, as motivações e aplicações, ao longo do tempo, de conceitos matemáticos.

A função "HM e estratégia didática" foi identificada em uma pequena parcela de menções. Esta é a função que entendemos, em consonância com a literatura, como a função mais interessante, visto que esta tem o papel de proporcionar ao aluno o desenvolvimento de algum raciocínio matemático, levando-o à compreensão do conteúdo ou conceito matemático.

Neste sentido, podemos afirmar que, de modo geral, os livros didáticos ainda não estão apresentando a HM da forma como a literatura indica ser a mais profícua. Entretanto, destaca-se que, ao comparar os resultados desta investigação com pesquisas em livros didáticos aprovados nas edições anteriores do PNLD, podemos perceber uma maior adequação às indicações da literatura com relação à esta utilização.

Por fim, ressaltamos a necessidade da apresentação da HM nos livros didáticos e a relevância de que estas não sejam apenas curiosidades para que possam contribuir para a aprendizagem de conteúdos matemáticos pelo aluno, e também para uma mudança de percepção em relação à Matemática.

REFERÊNCIAS

BIANCHI, M. I. Z. **Uma reflexão sobre a presença da História da Matemática nos livros didáticos**. 2006, 103p. Dissertação de Mestrado (Programa de Pós-graduação em Educação Matemática), Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2006.

BITTENCOURT, C. M. F. Em Foco: História, produção e memória do livro Didático. **Educação e Pesquisa**, São Paulo, v. 30, n. 3, Apresentação, set./dez. 2004. Disponível em: http://www.scielo.br/pdf/ep/v30n3/a07v30n3.pdf. Acesso em:18 fev. 2015.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. Trad. Helena Castro. São Paulo: Edgard Blücher, 2012.

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. **Catálogo do Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio**: PNLEM 2006: matemática: ensino médio. Brasília: MEC/SEB, 2004.

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. **Catálogo do Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio**: PNLEM 2009: matemática: ensino médio. Brasília: MEC/SEB, 2008.

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. **Guia de livros didáticos**: PNLD 2012: matemática: ensino médio. Brasília: MEC/SEB, 2011.

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. **Guia de livros didáticos**: PNLD 2015: matemática: ensino médio. Brasília: MEC/SEB, 2014.

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio**. Brasília: MEC/SEB – Parte III – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, 2000.

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio**. (Orientações Educacionais

Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais). Brasília: MEC/SEB. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, 2002.

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. **Orientações curriculares para o Ensino Médio**. Brasília: MEC/SEB. Vol. 2: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. 2006.

BROLEZZI, A. C. **A Arte de contar**: Uma Introdução ao Estudo do Valor Didático da História da Matemática. 1991. 75 p. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1991.

CHOPPIN, A. História dos livros e das edições didáticas: sobre o estado da arte. **Educação e Pesquisa**, São Paulo, v.30, n.3, p. 549-566, set./dez. 2004. Disponível em: http://www.scielo.br/pdf/ep/v30n3/a12v30n3.pdf. Acesso em:18 fev. 2015.

DANTE, L. R. Livro Didático de Matemática: uso ou abuso? **Revista Em Aberto**, Brasília: INEP, ano 16, n. 69, p. 83-97, jan./mar. 1996. Disponível em: http://emaberto.inep.gov.br/index.php/emaberto/article/viewFile/1040/942. Acesso em:18 fev. 2015.

DANTE, L. R. **Matemática**: contexto e aplicações. 2.ed. São Paulo: Ática, 2013a. Vol. 1.

DÍAZ, O. R. T. A atualidade do livro didático como recurso Curricular. Tradução: Maria Susley Pereira. **Linhas Críticas**, Brasília: DF, v. 17, n. 34, p. 609-624, set./dez. 2011. Disponível em: http://periodicos.unb.br/index.php/linhascriticas/article/view/6248/5121. Acesso em: 18 fev. 2015.

FOSSA, J. A. Matemática, História e Compreensão. **Revista Cocar**. UEPA, v. 2, p. 7-15, 2008. Disponível em http://paginas.uepa.br/seer/index.php/cocar/article/view/77. Acesso em: 01 abr. 2015.

GIARDINETTO, J. R. B. Reflexões sobre o uso da história da matemática como contribuição para a melhoria do ensino da geometria analítica (nível 1º e 2º graus). **Nuances**: Revista do Curso de Pedagogia, Departamento de Educação, UNESP, Campus de Presidente Prudente, v. 6, n. 6, p. 136-42, 2000.

GOMES, L. G. **As práticas culturais de mobilização de histórias da matemática em livros didáticos destinados ao ensino médio**. 2008. 163 p. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2008.

LAJOLO, M. Livro Didático: um (quase) manual de usuário. **Revista Em Aberto**, Brasília: INEP, ano 16, n.69, p. 3-9, jan./mar. 1996. Disponível em: http://emaberto.inep.gov.br/index.php/emaberto/article/viewFile/1033/935. Acesso em:18 fev. 2015.

LEONARDO, F. M. **Conexões com a Matemática**. 2.ed. São Paulo: Moderna, 2013a. Vol. 1.

LEONARDO, F. M. **Conexões com a Matemática**. 2.ed. São Paulo: Moderna, 2013b. Vol. 2.

MENDES, I. A. A investigação histórica como agente da cognição matemática na sala de aula. In: MENDES, I. A.; FOSSA, J. A.; VALDÉS, J. E. N. **A História como um agente de cognição na Educação Matemática**. Porto Alegre: Editora Sulina, 2006. p. 79-136.

MIGUEL, A. As potencialidades pedagógicas da história da matemática em questão: argumentos reforçadores e questionadores. **Zetetiké**, v. 5, n. 8, p. 73-105, 1997.

MIGUEL, A; MIORIM, M. A. **História na Educação Matemática**: propostas e desafios. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2011.

MOL, R. S. **Introdução à História da Matemática**. Belo Horizonte: CAED-UFMG, 2013, 138 p. Disponível em: http://www.mat.ufmg.br/ead/acervo/livros/introducao_a_historia_da_matematica.pdf. Acesso em: 12 mar. 2018.

PAIS, L. C. **Didática da Matemática**: uma análise da influência francesa. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2011.

PAIS, L. C. **Matemática**: Paiva. 2.ed. São Paulo: Moderna, 2013c. Vol. 3.

ROQUE, T. **História da Matemática**: uma Visão Crítica, Desfazendo Mitos e Lendas. Rio De Janeiro: Zahar, 2012.

SANTOS, M. R. **Compreensões de professores do Ensino Médio acerca da utilização da História da Matemática no ensino de Matemática**, 2017. Dissertação

(Mestrado Profissional em Ensino de Ciências). Universidade Federal de Itajubá, 2017.

SILVA, D. R. **Livro didático de Matemática**: lugar histórico e perspectivas. 2010. 152p. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2010.

SOUTO, R. M. A. História na Educação Matemática – um estudo sobre trabalhos publicados no Brasil nos últimos cinco anos. **Bolema**, v. 23, n. 35b, p. 515-536, abr. 2010.

SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. **Matemática Ensino Médio.** 8.ed. São Paulo: Saraiva, 2013a. Vol. 1.

SOUZA, J. **Novo olhar Matemática**. 2.ed. São Paulo: FTD, 2013b. Vol. 2.

TZANAKIS, C.; ARCAVI, A. Integrating history of mathematics in the classroom: an analytic survey. In: FAUVEL, J.; MAANEN, J. (Eds.). **History in Mathematics Education**. The ICMI Study. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000. p. 201-240.

VALDÉS, J. E. N. A história como elemento unificador na educação matemática. In: MENDES, I. A.; FOSSA, J. A.; VALDÉS, J. E. N. **A História como um agente de cognição na Educação Matemática**. Porto Alegre: Editora Sulina, 2006. p. 15-78.

VIANNA, C. R. **Matemática e História**: Algumas relações e implicações pedagógicas. 1995. 228 p. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1995.

CORDEIRO, E. M. **Travessias de Cecília**: a caminho da Educação Matemática no Ceeja Padre Moretti (Rondônia). São Paulo: Cultura acadêmica, 2015.

GUTIERRE, Liliane dos Santos[1]

Não somente pelo prefácio, nem tão somente pela carta destinada à Cecília (capítulo 1) que estão no livro advindo da tese de doutorado de Edna Maria Cordeiro que escrevo a sua resenha, mas pela escolha diferenciada da escrita de um trabalho científico que, por meio de um texto polifônico e dialógico, apresenta contribuições para a Educação Matemática de nosso país.

Em seu livro, com o objetivo de analisar por meio de uma interpretação histórica, como se delineou o cenário da Educação Matemática no Centro Estadual de Educação de Jovens e Adultos (Ceeja) Padre Moretti (1977 a 2012), a autora nos apresenta, no capítulo 2 (*Iniciando a travessia*: angústias e confraternizações), a coordenadora pedagógica Cecília, que inicia um trabalho no referido Centro, localizado do outro lado do Rio Madeira, em Porto Velho/RO. Cecília era membro de uma família formada, até então, por seus irmãos, Felipe, Pedro, Joaquim, Luiz (Luisinho); sua mãe, Helena; sua avó paterna, Aparecida e seu pai, Justino, caminhoneiro, que decidiu sair do estado do Paraná, a fim de apoderar-se de terras oferecidas pelo Governo Federal, no então Território Federal de Rondônia, com promessas de melhores condições econômicas e sociais as famílias dos migrantes.

A realidade vivida pelos professores do Ceeja passou a se descortinar perante Cecília, por meio das conversas que tinha com professores dessa instituição. A professora Elizabeth, por exemplo, relata que lecionou Matemática para alunos de 5ª à 8ª séries, na década de 1980, apenas com formação no curso de Magistério, o que fez Cecília relembrar de uma informação encontrada em suas pesquisas documentais, que, o Padre João Batista Moretti - cujo nome foi dado, honrosamente, ao Ceeja - ensinou Matemática em Rondônia, sem formação específica para tal, sendo um professor leigo até concluir sua formação no curso de Licenciatura em Matemática na cidade de Fortaleza/CE.

A pedagoga Zenaida, diretora do Ceeja, entre os anos de 1996 a 1999, também participou dessas primeiras conversas e, por meio dela, Cecília soube que havia professores, nessa instituição, que sentiam necessidade de responder a questionamentos, tais como: - educar para quê? Educar por quê? Então, Cecília destacou a importância de se trabalhar, durante o encontro de professores, no grupo de discussões, a partir da perspectiva freiriana de se pensar no por que e para quê de um trabalho pedagógico. Assim, as experiências do fazer docente de cada professor, acerca da Educação de Jovens e Adultos (EJA), no Ceeja, iam se descortinando perante Cecilia, na medida em que os professores as narravam, durante os encontros, possibilitando a ela, a escrita da história da instituição, em especial, a escrita da própria história da EJA em Rondônia. Vale ressaltar que, a fim de tornar possível a interpretação histórica do cenário educacional do Ceeja, no período estudado, a autora do livro, respaldada na História Cultural, lança mão de fontes escritas e orais, e a partir de sua problematização, cria uma interpretação histórica sobre a cultura escolar e as práticas dos professores que lecionavam Matemática na instituição.

[1]Professora do Departamento de Matemática e do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática (PPGECNM) da Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN). Líder do Grupo Potiguar de Estudos e Pesquisas em História da Educação Matemática (GPEP) e membro do Grupo de Pesquisa História, Filosofia e Educação Matemática (HIFEM). Endereço eletrônico: lilianegutierre@gmail.com.

No capítulo 3, *Percebendo a realidade*: conquistas e decepções, Cecília fala sobre a evasão das crianças matriculadas no Ceeja e do o seu desejo, junto da então diretora Joana, de conscientizar os pais desses alunos, sobre a da importância da frequência escolar, mesmo em um período de colheita, época em que as crianças eram solicitadas a ajudarem as famílias no campo. Cecília, ao visitar as famílias da região, em busca de diminuir a evasão escolar, tentando convencer os pais das crianças de que cada uma delas, na escola, era importante, se depara com a cultura indígena, muito presente na região e, diante de relatos acerca dos cuidados que o Marechal Rondon (1865-1913) tinha com essa comunidade, percebe, inclusive, por meio do site do Projeto Rondon, a importância que teve o referido Marechal para aquele povo. Inclusive destaca que o Marechal Rondon também ensinou Matemática naquela região.

Após o processo de conscientização das famílias ser concluído, acontece uma mudança súbita na direção do Ceeja, devido a questões políticas, o cargo, então, é assumido pela professora Elaine, o que afastou da instituição a então diretora Joana e a coordenadora pedagógica Cecília. Mas, em outra mudança de diretores, Cecília retorna ao Ceeja e retoma suas discussões com os professores da instituição, sobre a história da EJA em Rondônia. Nesse momento da trajetória relatada, o grupo de professores é formado por Júlio César, Elizabeth, Zenaida, Terezinha, Paulo e Jair.

É também neste capítulo que a autora do livro relata que, quando criança, conheceu Vitória, uma menina que perdeu os pais devido à violência constante em Porto Velho (capital do estado de Rondônia) e redondezas, decorrente da falta de política de colonização e da Reforma Agrária prometida pelo Governo Federal aos migrantes, sendo adotada pela avó de Cecília.

No capítulo 4, intitulado *Conquistas se realizando*: avanços e dificuldades, encontramos Cecília cursando Pedagogia, já adaptada ao sol e ao sotaque rondoniense, com mais dois irmãos: os gêmeos Lucas e João. Sua experiência profissional se iniciou com aulas de reforço aos gêmeos e a algumas crianças vizinhas. É neste capítulo também que, por meio da informação documentada obtida pela autora do livro, ao contatar a direção e a secretaria do Ceeja, descobre que, nessa instituição, foram desenvolvidos o Logos II (formação de professores leigos), os Exames de Educação geral em nível de 1º e 2º graus (correspondem aos Ensinos Fundamental e Médio atuais) e cursos supletivos. Posto isto, Cecília retorna ao grupo de discussões e nele participava ainda o professor Francisco Ilson, cuja presença corroborava com o compromisso que os professores assumiam com os alunos do Ceeja, seja no Logos II ou não.

Zenaida conta que, em 1996, a convite da Secretaria Estadual de Educação (Seduc), passou a ser diretora do Ceeja e prezou pela implantação do Telecurso 1º e 2º graus (com a utilização do material impresso e dos vídeos do programa; uma parceria da Fundação Padre Anchieta com a Fundação Roberto Marinho), do Exame de Circulação de Estudos (oferecido aos alunos matriculados na rede pública ou privada – a nível de conclusão do Ensino Fundamental ou Médio, mediante o aproveitamento de estudos) e do Curso Supletivo Seriado (atendia ao Ensino Fundamental e Médio no Ceeja); pois até sua gestão só havia disponível aos alunos o Curso Modular (ensino por módulos), além da educação de 1ª a 4ª séries. Nessa conversa com os professores, Cecília também foi informada que havia os Cursos Fênix e Proformação (semelhantes ao Logos II, que visava oferecer formação a professores leigos). A autora destaca a importância do papel da gestão democrática na história do Ceeja, que proporcionava ao professor assumir um compromisso com a educação local, por meio de encontros pedagógicos, e aprofundar/ampliar sua formação, a exemplo de Jaqueline e Simone, paranaenses, amigas da família de Cecília, que em Porto Velho, tiveram a oportunidade de fazer o Logos II.

No capítulo 5, *Aproximando-se da EJA*: avanços e retrocessos, a autora aponta que o ensino na EJA ia ao encontro da teoria proposta por Paulo Freire, pois visava uma educação com conscientização a todo e qualquer cidadão, de maneira que o aluno adulto tivesse condições de desenvolver-se pessoal, social e profissionalmente. Nessa perspectiva de formação, Cordeiro relata que, em Rondônia, aconteceram aulas das escolas Radiofônicas (ensino via rádio, transmitido pelas emissoras católicas, no inicio dos anos de 1950, no Brasil, advindo do Movimento de Educação de Base, experiência de alfabetização de adultos), do Movimento Brasileiro de Alfabetização (Mobral - ensino supletivo para adultos e adolescentes, que existiu até o ano de 1985) e do Curso Supletivo Projeto Minerva (projeto de ensino à distância via rádio, iniciado na década de 1970, oferecido pelo governo ditatorial brasileiro).

Nesse capítulo, a autora ainda nos remete às reuniões da escola, apresentando-nos outras pessoas, Valesca, que trabalhava no setor de lotação da Seduc e foi aluna do Ceeja e também Júlio César, Everaldo e Jaime*,* que foram alunos do Ceeja e, em seus depoimentos, mostraram à Cecília o quanto esta instituição era organizada e importante para a formação dessas pessoas que, em idade adulta, voltavam à sala de aula, seja por meio da EJA ou do Projeto Telensino (uso das tecnologias de informação como meio de auxiliar no ensino e aprendizagem). O irmão de Cecília, Luisinho, lançou mão dessa modalidade de formação, embora não a tenha concluído, evadindo-se da escola, como acontecia com muitos alunos. Cecília não se conformava com a desistência do irmão, pois seu estágio obrigatório do Curso de Pedagogia, acontecia na modalidade de ensino EJA, no Serviço Social do Comércio (Sesc), onde Luiz estudava, e ela gostaria de colaborar com sua formação, ensinando-o, fazendo-o aprender o conteúdo curricular, colocando em prática o que aprendera em sua formação.

No capítulo 6, *Educação Matemática:* aproximações, conhecemos Marília, professora que também participou dos encontros de formação e planejamento e que destaca a importância da compreensão da Matemática, a partir de estudos dos Parâmetros Curriculares Nacionais, e Juliano, professor de História, que pediu informações a Cecília acerca da Especialização em Gestão Escolar, oferecida pelo Ministério da Educação junto a Universidade Federal de Rondônia (Unir). Cecília, além de coordenadora pedagógica, também era fonte de inspiração aos professores do Ceeja, por estar fazendo sua formação continuada, de modo que sempre contribuía com eles, dando-lhes informações nesse sentido.

Reflexões sobre o ensino de Matemática também foram apresentadas neste capítulo e estas se encaminhavam para a perspectiva de um ensino com qualidade, na medida em que os professores do Ceeja faziam a avaliação do seu trabalho, considerando, por exemplo, o sucesso de seus alunos ao ingressarem na Unir; em que valorizavam o professor de Matemática, sendo atencioso com o aluno; à medida que utilizavam os módulos (subdivisões de cadernos, que eram organizadas para atender aos objetivos específicos dos conteúdos), e só seguiam adiante, para outro módulo, caso os alunos aprendessem o conteúdo; recorrendo a vídeos, advindos do projeto Telensino, cujas possíveis dúvidas (de alunos e professores) poderiam ser sanadas com os professores da instituição.

Por fim, a autora conclui que a qualidade do ensino de Matemática no Ceeja foi evidenciada a partir de aprovações dos alunos em concursos e/ou vestibulares, mas também a partir do desempenho dos alunos em atividades de ensino que consideravam suas vivências e necessidades. Nesse capítulo, Cecília nos conta a respeito de sua experiência como professora de Matemática no Colégio Dom Bosco e destaca a falta de políticas públicas no estado de Rondônia com relação à área da saúde, o que influenciou diretamente na morte de seu irmão Lucas, com apenas 11 anos.

Currículo de Matemática: autonomia e imposição, capítulo 7 do livro, Cecília relata aos professores do grupo a experiência que teve em Manaus/AM, ao participar do lançamento da Proposta Curricular para Educação de Jovens e Adultos para a Região Norte do Brasil, propondo a eles um estudo das atuais necessidades educacionais desse nível de escolaridade. Além disso, informa aos professores que está cursando Mestrado, na busca de uma formação profissional permanente e de poder contribuir com a Educação Básica, na medida em que trabalha na licenciatura, com a formação de professores. Nas reuniões, Cecília, já na condição de professora do Ensino Superior, discute a importância do currículo e da autonomia do professor, inclusive nas escolhas dos materiais didáticos; aborda os conteúdos matemáticos considerados, pelos professores que participavam dos encontros mediados por Cecília, difíceis de aprender (como equações do 2° grau), de modo que as reflexões, geradas a partir das discussões nos encontros do grupo, reforçam a necessidade de um material didático adequado à EJA. Também, a autora aponta que a aprendizagem de jovens e adultos deve ser valorizada, pois eles aprendem ao longo de toda a vida, podendo atualizar-se em qualquer momento. Um exemplo foi Luisinho, irmão de Cecília, ter concluído seus estudos.

No capítulo 8, *Processos formativos*: dificuldades e oportunidades, encontramos aspectos relacionados ao professor enquanto sujeito dos seus estudos, com participação ativa no processo ensino-aprendizagem, de modo que ele passa a ser percebido como um profissional com uma história de vida, experiência e valores próprios. Cecília, já na condição de orientadora educacional, informa aos colegas que participará do concurso para professor do Departamento de Educação da Unir - campus Vilhena/RO, e relata sua aproximação com a Educação Matemática, por meio de orientações de monografias de futuras Pedagogas, cujas referências fundamentavam-se nos trabalhos de Ubiratan D'Ambrosio, entre outros pesquisadores da área. No Ceeja, Cecília continuava com os encontros com professores e, nesse capítulo, a autora leva-nos a refletir, junto às vozes dos professores, acerca das lacunas na formação inicial de um professor de Matemática, uma vez que neste processo há uma tendência em privilegiar o conhecimento específico da Matemática em detrimento do conhecimento pedagógico que um curso de licenciatura demanda. A autora apresenta também uma lista com dez ações do Governo Estado de Rondônia voltadas para a formação docente, para que este atenda a demanda por vagas nas escolas de Porto Velho.

No capítulo 9, *Práticas Pedagógicas*: dificuldades e potencialidades*,* Cecília informa aos professores do grupo que está fazendo doutorado em Educação Matemática. A autora nos apresenta a metodologia da sua pesquisa a partir da corrente historiográfica da nova História Cultural e nos mostra que em Rondônia os cursos de formação para docentes continuam introduzindo reformas e inovações educacionais, a exemplo do Programa de Gestão da Aprendizagem Escolar (Gestar) e também do Grupo de Estudo e Trabalho Pedagógico de Ensino de Matemática (Getemat) da Unir. No Ceeja, Cecília retorna ao grupo de professores (após finalizar o doutorado) para escutar dos participantes e registrar, como era o ensino de Matemática com jovens e adultos naquela instituição, a partir dos olhares dos professores daquele grupo, que apontaram dificuldades de se trabalhar com alunos da EJA.

A autora conclui que as experiências desses professores mostram acolhimento aos alunos numa perspectiva da Educação Matemática Crítica, já que eram organizadas situações de aprendizagem que valorizavam os conhecimentos prévios dos alunos, para a construção de novos conhecimentos. Muitas estratégias eram criadas pelos professores para que o jovem ou o adulto conseguissem sair de situações concretas referentes aos conteúdos estudados e caminhar para a abstração que a Matemática demanda, o que aconteceu ao estudarem, por exemplo, equações.

Nesse processo era levada em conta a concepção de que não se transfere conhecimentos, mas sim, criam-se possibilidades para a sua construção.

No capítulo 10, *Educação Matemática*: evidências e lacunas, a autora se remete ao Programa de Formação de Professores Leigos (Prohacap) em Rondônia, que licenciava docentes nas áreas de Pedagogia, História, Geografia, Matemática e Educação Física; ao Plano Nacional de Formação de Professores da Educação Básica (Parfor), cujo objetivo era semelhante ao do programa Prohacap, na medida em que se caracteriza como um programa emergencial criado pelo governo federal para permitir a professores da rede pública, em exercício, o acesso à formação exigida na Lei de Diretrizes e Bases.

No capítulo em questão, a autora também ressalta que optou em investigar o Ceeja Padre Moretti, devido à importância da instituição em Rondônia e por não se ter notícias de pesquisas que abordem sua atuação, especialmente na EJA. Apresenta-nos Sofia, sua orientadora de doutorado, destacando sua importância para a escrita do texto em uma abordagem polifônica. Apresenta ainda as narrativas dos professores sobre o ensino de Matemática no Ceeja, e informa a eles sobre sua saída do grupo, sendo este o penúltimo encontro que ela mediaria. Além disso, nos conta sobre o assassinato de seu pai, no sítio em que moravam a alguns quilômetros de Porto Velho (Rondônia).

Finalmente, no último capítulo, *Do outro lado – Rio Claro – Avanços e Possibilidades*, Cecília em uma conversa virtual com Marília, percebe que ao buscar identificar as principais dificuldades presentes na prática pedagógica na EJA, observa aspectos como: a falta de valorização do trabalho docente; poucos conhecimentos de matemática básica e a diversidade cultural existentes. Descreve o seu último encontro com os professores, destacando que o Ceeja, ao oferecer possibilidades diversificadas de EJA, assegura oportunidades educacionais apropriadas aos alunos, considerando suas especificidades. Nesse encontro, os professores apontaram que o grupo de estudantes que cursava o Ceeja era muito diversificado e que eles precisavam ficar atentos para organizarem, com eficácia, situações didáticas favoráveis à aprendizagem matemática daqueles estudantes jovens e adultos. Após o término dos encontros com os professores do Ceeja, em uma conversa telefônica com seu irmão Luisinho, Cecília relata a ele sobre a qualificação de sua tese de doutorado, compartilhando seu encantamento com a Educação Matemática, já que esta área possibilitou seu encontro com a História, com a Cultura e com textos narrativos.

A leitura desse livro é, pois, necessária, na medida em que nos leva, em tempos de conflituosas situações políticas, a refletir sobre o currículo escolar necessário e obrigatório na EJA, em especial, na disciplina de Matemática. Com efeito, Edna Maria Cordeiro conseguiu delinear um cenário da Educação Matemática no Ceeja Padre Moretti, no período de 1977 a 2012, de forma sagaz, com um rigor teórico-metodológico que, pesquisadores poderiam lançar mão em suas estratégias de investigação. O proeminente, no caso, é a possibilidade de constatar a magnitude da sua contribuição para a Educação Matemática do nosso país, além da expectativa de que Cecília faça uma nova travessia para continuar contando-nos seus percursos e descobertas.