HIPÁTIA

Υπατία

REVISTA BRASILEIRA DE HISTÓRIA, EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA

ISSN 2526-2386

v.2, n.1, junho 2017

Instituto Federal de São Paulo
Câmpus Campos do Jordão

HIPÁTIA

Υπατία

REVISÃO

Karin Cláudia Nin Brauer, Faculdade de Tecnologia do Estado de São Paulo (FATEC); Poliana Santos, Instituto Federal de São Paulo (IFSP): Rosicleide Rodrigues Garcia, Universidade de São Paulo (USP); Stefanie Martin, Instituto Federal de São Paulo (IFSP); Vera Lúcia Villas Boas, Instituto Federal de São Paulo (IFSP); Viviane Dinês de Oliveira Ribeiro Bartho, Instituto Federal de São Paulo (IFSP).

DIAGRAMAÇÃO

Paula Cristina de Almeida Pereira, Instituto Federal de São Paulo (IFSP); S. César Otero-Garcia, Instituto Federal de São Paulo (IFSP).

Gphem

INSTITUTO FEDERAL
São Paulo

HIPÁTIA

Υπατία

REVISTA BRASILEIRA DE HISTÓRIA, EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA

v.2, n.1, junho 2017

Instituto Federal de São Paulo

HIPÁTIA	**Campos do Jordão (SP)**	**v. 2**	**n. 1**	**p. 1-64**	**jun. 2017**

LINHA EDITORIAL

A HIPÁTIA - Revista Brasileira de História, Educação e Matemática, conforme sugere seu nome, aceita trabalhos de História da Matemática, Educação Matemática e de Matemática (pura e aplicada). A revista foi oficialmente criada em 8 de março de 2016. Duas concepções principais nos norteiam: ajudar a ampliar o espaço da mulher na ciência no Brasil; abrir um espaço para jovens pesquisadores (mestres, doutorandos ou doutores que tenham obtido título há, no máximo, cinco anos). Isso significa que procuramos dentro da composição de nosso Conselho Editorial, Conselho Científico e em nossas edições, obter uma maioria de pesquisadores ou de trabalhos cujos autores atendam a pelo menos um desses quesitos. É salutar destacar que, no entanto, contribuições de outros pesquisadores continuam sendo de grande valia. A revista é composta por quatro seções : **1) Artigos**, na qual são aceitos trabalhos completos de pesquisadores; **2) Comunicações Científicas**, na qual são aceitos trabalhos com resultados parciais contundentes em nível de pós-graduação ou trabalhos concluídos decorrentes de pesquisas em nível de graduação (iniciação científica, trabalho de conclusão de curso, monografias resultantes de trabalhos orientados por docentes etc.); **3) Relatos de Experiência**, na qual são publicados textos que descrevam precisamente uma dada experiência que possa contribuir de forma relevante para as áreas da HIPÁTIA; **4) Resenhas**, na qual são aceitas resenhas de livros, dissertações e teses, ou outros formatos de interesse publicados preferencialmente há não mais que cinco anos.

SUMÁRIO

EDITORIAL

S. César **Otero-Garcia**
Editor Chefe

Línlya Sachs
Coeditora

A HIPÁTIA – Revista Brasileira de História, Educação e Matemática, ao colocar em sua concepção e em seu nome o feminino, abre espaço e dá visibilidade para outras pesquisas.

A historiadora Luzia Margareth Rago, no texto "Epistemologia Feminista, Gênero e História"[1] , coloca em discussão justamente a existência de uma – ou de várias – teoria feminista do conhecimento, levando em consideração que "as mulheres trazem uma experiência histórica e cultural diferenciada da masculina, ao menos até o presente", provocando, por conseguinte, que a participação das mulheres na produção de conhecimento científico altere profundamente o campo da ciência. Desse modo, diferentes possibilidades são abertas, desconstruindo temas e interpretações masculinos e propondo novas formas de se fazer pesquisa.

Nessa perspectiva, a partir deste número, a HIPÁTIA tem como coeditora uma mulher, fortalecendo, assim, seu objetivo de ampliar o espaço da mulher na ciência no Brasil. Além disso, neste segundo número, lançado às vésperas de um novo ano, tem espaço privilegiado os textos produzidos por novos pesquisadores (graduandos, mestres, doutorandos ou doutores que tenham obtido título há, no máximo, cinco anos), representando sete dos dez autores.

O primeiro texto deste número, de autoria de Girleide Mari Silva e Miriam Cardoso Utsumi, é o artigo "O uso do Geogebra na aprendizagem de Geometria Analítica no Ensino Médio".

Na seção Comunicações Científicas, estão os seguintes textos: "Cálculo Interativo: um ambiente virtual de suporte às aulas de Cálculo Diferencial e Integral", de Alan Franco do Couto e André Luís Trevisan; "Modos outros de expressão dos Cálculos Diferencial e Integral nos rastros de Eudoxo e Arquimedes: possibilidades e limites para o ensino", de Diego de Matos Gondim; e "A Balestilha: um instrumento náutico como recurso para abordar conceitos matemáticos", de Antônia Naiara de Sousa Batista e Ana Carolina Costa Pereira;

Há, por fim, três resenhas. A primeira delas, de autoria de Rafael Montoito, refere-se ao livro "Literatura e Matemática: Jorge Luís Borges, George Perec e o OULIPO", de Jacques Fux. A

[1]RAGO, Luzia Margareth. Epistemologia Feminista, Gênero e História. In: PEDRO, Joana Maria; GROSSI, Miriam Pilar. **Masculino, Feminino, Plural**. Florianópolis: Editora das Mulheres, 1998. p. 21-42.

segunda, do livro “Aprender e ensinar geometria”, organizado por Sérgio Lorenzato, é de autoria de Marcelo Bergamini Campos. E a terceira, de Virgínia Cardia Cardoso, é do livro “Educação Matemática crítica: a questão da democracia”, de Ole Skovsmose.

Agradecemos à confiança dos autores em um periódico tão novo e desejamos, a todos, boa leitura deste número da HIPÁTIA.

Campos do Jordão, 30 de junho de 2017.

Cornélio Procópio, 30 de junho de 2017.

O USO DO GEOGEBRA NA APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA ANALÍTICA NO ENSINO MÉDIO

USE OF GEOGEBRA IN THE LEARNING OF ANALYTICAL GEOMETRY IN SECONDARY SCHOOL

SILVA, Girleide Maria[1]
UTSUMI, Miriam Cardoso[2]

RESUMO

Neste artigo apresentamos o recorte de um estudo desenvolvido em nível de mestrado[3], que investigou em que medida o *software* GeoGebra contribuiu para a aprendizagem dos conteúdos de Geometria Analítica, ponto e reta. Participaram da pesquisa duas turmas do período diurno do 3º Ano do Ensino Médio, de uma escola pública da Grande São Paulo que foram submetidas a uma Sequência de Atividades que considerava os diferentes Registros de Representação Semiótica de Duval. A primeira turma (T1), trabalhou com atividades em abordagens instrucionista e construcionista utilizando o GeoGebra, enquanto a outra (T2), trabalhou as atividades em ambiente lápis e papel. Os dados foram obtidos a partir de um questionário sobre o perfil dos participantes, um Pré-Teste, Avaliação Intermediária e um Pós-Teste. Neste texto, discutimos os resultados da Avaliação Intermediária, na qual verificamos que nas questões que abordavam as habilidades de visualização (localize, identifique) e construção (trace, represente) a Turma 1 apresentou médias superiores as dos participantes da Turma 2, contudo nas questões que exigiam habilidade de cálculo, a Turma 2 obteve médias melhores. Desta forma, consideramos que o GeoGebra, contribuiu para a aprendizagem dos conteúdos de ponto e reta, favorecendo a representação dos objetos matemáticos em diferentes registros. Porém, acreditamos que ele deva ser associado à outras metodologias que deem conta da compreensão e apropriação da habilidade de cálculo pelos alunos, a qual apenas o uso do software não contribuiu para desenvolver.

Palavras-chave: Educação matemática. Registros de representação semiótica.

ABSTRACT

In this article we present an extract of a study developed at master level, which investigated to what extent the GeoGebra software program contributed to the learning of point and line of Analytical Geometry contentes. Two groups of the daytime period of the 3rd. year of High School of a public school in the Greater São Paulo joined the study. These groups were given a Sequence of Activities which covered different Duval Registers of Semiotic Representation. The first group (T1) worked with activities in instructionist and constructionist approaches using GeoGebra, whereas the other group (T2) performed the same activities in a "pencil and paper" environment. The data was obtained from a questionnaire about the participants' profile, as well as a Pre-Test, an Intermediate Evaluation and Post-Test. We could see that, for the questions involving viewing skills (Locate, Identify) and construction skills (Trace, Represent), Group 1 got higher scores than the participants of Group 2. However, Group 2 got better scores for questions requiring calculation skills. In this text, we will discuss the results of the Intermediate Evaluation. We consider that GeoGebra helps learning the contents of point and line, thus favoring the representation of mathematical objects in different registers. However we believe that GeoGebra should be associated to other methodologies that provide students with an understanding and appropriation of calculations skills, which the use of the software program alone did not help develop.

Keywords: Mathematics education. Registers of semiotic representation.

[1]Mestre em Educação pela Universidade Federal de São Carlos (UFSCAR), São Carlos, São Paulo, Brasil. Professora da Secretaria Estadual de Educação do Estado de São Paulo (SEE-SP), Taboão da Serra, São Paulo, Brasil. Endereço eletrônico: girleidedasilva@gmail.com.
[2]Doutora em Educação pela Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), Campinas, São Paulo, Brasil. Docente da Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), Campinas, São Paulo, Brasil. Endereço para correspondência: Faculdade de Educação (UNICAMP), Rua Bertrand Russell, 801, Cidade Universitária Zeferino Vaz, CEP 13083-865, Campinas, São Paulo, Brasil. Endereço eletrônico: mutsumi@unicamp.br.
[3] SILVA (2016).

1 INTRODUÇÃO

A sociedade em constante inovação tecnológica modifica-se proporcionalmente em progressões mais elevadas que o seu sistema educacional, o qual se transforma a passos mais lentos, principalmente no que diz respeito às suas práticas pedagógicas e seus recursos. Segundo Moran (2012, p. 8): "[...] a sociedade evolui mais do que a escola e, sem mudanças profundas, consistentes e constantes, não avançaremos rapidamente como nação."

A Educação Matemática também passa por transformações, pois se faz necessário adequar seu papel educacional à sociedade. Temos observado nas preconizações das Diretrizes Curriculares que há forte tendência para um ensino de Matemática voltado ao uso das Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC) e as Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação (TDIC), que possibilitam a diversificação de métodos de ensino, propondo uma aprendizagem mais dinâmica e almejando um ensino com índices menores de fracasso.

Moran (2012) alerta que com o avanço das tecnologias, uma escola sem conexão com o mundo virtual e as multimídias é uma escola incompleta. Tal alerta é consoante com a Lei de Diretrizes e Bases do Ensino Nacional – LDBEN 9394/96 que atribui ao Ensino Médio a orientação tecnológica básica, e em seu Art. 35 parágrafo IV entre outras finalidades destaca "a compreensão dos fundamentos científicos tecnológicos dos processos produtivos, relacionando a teoria com a prática, no ensino de cada disciplina", para que, ao finalizar o ciclo de três anos o aluno tenha "domínio dos princípios científicos e tecnológicos que presidem a produção moderna" (Art. 36).

Analogamente, o currículo do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2012, p.21-22) relaciona educação à tecnologia, enfatizando dois aspectos: a alfabetização tecnológica, pela qual se aprende a lidar com computadores entendendo que as tecnologias estão inseridas na cultura humana como parte das práticas sociais e produtivas e, estão ligadas diretamente aos "conhecimentos científicos, artísticos e linguísticos que os fundamentam"; e, o uso da tecnologia para relacionar o "currículo ao mundo da produção e serviços" por todas as áreas do conhecimento no Ensino Médio.

Dentre as tecnologias informáticas, os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática – PCN de Matemática (BRASIL, 1998), apontam o computador como recurso didático dinâmico que favorece o processo de ensino – aprendizagem possibilitando o desenvolvimento cognitivo do aluno.

O uso do computador no ensino pode auxiliar na construção do conhecimento de acordo com o ritmo de aprendizagem do aluno, além de propiciar a interação com seus colegas trocando experiências e aprendendo com seus próprios erros. Não basta, porém, apenas possuirmos recursos tecnológicos sem atrelarmos a estes, os objetivos e as metodologias, integrando as ferramentas multimídias ou computacionais para um fim didático, prático e facilitador do processo de ensino e aprendizagem.

O acesso a outros métodos e estratégias de ensino que vinculem o uso das tecnologias atuais aos conhecimentos específicos das disciplinas, garantem maior diversidade de recursos, promovendo possibilidades de ensino e consequentemente, ampliando o universo de alternativas para a aprendizagem, proporcionando ao aluno um ambiente mais atraente para obtenção de conhecimentos, seja pelo acréscimo de mais uma ferramenta facilitadora ao processo de ensino e aprendizagem, seja pela utilização na escola de instrumentos compatíveis com a realidade dessa geração de educandos.

Um dos aspectos que pode contribuir de forma positiva a uma transformação das práticas pedagógicas é a variedade de recursos educacionais que podem ser usados com o auxílio do computador.

Os *softwares*, por exemplo, na atualidade têm se destacado como ferramentas que podem contribuir para o processo de ensino e aprendizagem de Matemática e o GeoGebra é um dos *softwares* que vem sendo utilizado nesse processo por ser dinâmico, permitindo a exploração geométrica, gráfica e algébrica simultaneamente. Tal aspecto pode favorecer a compreensão dos conceitos matemáticos, visto que a representação de um objeto matemático em diferentes registros semióticos, segundo Duval (2013) é fundamental para a aprendizagem significativa em Matemática.

A semiótica possui como essência o estudo dos signos presentes nos tipos de atos de comunicação que são: símbolos, sons, gestos e regras com sinais convencionados como a escrita, por exemplo. Os signos são definidos por Santaella (1983) como tudo que nos faz lembrar de algo que é perceptível aos nossos sentidos e tem como função ou poder, representar ou substituir o objeto.

A representação de um objeto matemático por um signo é denominada de representação semiótica. As representações são essenciais para fins de comunicação e da atividade cognitiva do pensamento (DUVAL, 2013).

A teoria das representações semióticas de Duval trata principalmente das relações cognitivas que o aluno realiza ao ser apresentado às atividades matemáticas. Duval (2013) afirma que a qualidade da atividade cognitiva do pensamento matemático é a capacidade de transitar entre os registros de representação semiótica, realizando tratamentos (em um mesmo sistema de registro de representação) ou conversões (alternância entre diferentes tipos de registro).

Segundo Duval (2013) há quatro tipos de registros de representação semiótica, a saber: a língua natural, os sistemas de escritas, as figuras geométricas e os gráficos cartesianos. Esses tipos estão representados no Quadro 1.

Quadro 1: Classificação dos tipos de registros de representação semiótica

	REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA	REPRESENTAÇÃO NÃO DISCURSIVA
REGISTROS MULTIFUNCIONAIS	*Língua natural* Associações verbais (conceituais). Forma de raciocinar: argumentação a partir de observações, de crenças; dedução válida a partir de definição ou de teoremas.	*Figuras geométricas* planas ou em perspectivas (configurações em dimensão 0,1,2 ou 3). apreensão operatória e não somente perceptiva; construção com instrumentos.
REGISTROS MONOFUNCIONAIS:	*Sistemas de escritas* numéricas (binária, decimal, fracionária, ...) algébricas; simbólicas (línguas formais) Cálculo.	*Gráficos cartesianos* mudanças de sistema de coordenadas; interpolação, extrapolação.

Fonte: Duval (2013, p.14)

De acordo com o Quadro 1, observa-se que um objeto matemático poderá ser representado de forma diferenciada dependendo da sua necessidade ou uso, podendo ser registrado por representações linguísticas, escritas, geométricas ou gráficas.

Acreditamos que o GeoGebra pode contribuir para a apreensão de diferentes tipos de registro de um objeto matemático. Ele é um aplicativo gratuito que pode ser utilizado em ambiente escolar por todos os níveis de ensino (AGUIAR, 2011) e reúne recursos que permitem aplicações na Geometria, na Álgebra, na Probabilidade, na Estatística e no Cálculo em um sistema dinâmico, com visualizações simultâneas de um mesmo objeto. (SANTOS, 2011; MALTEMPI E FARIA, 2012)

Com relação a escolha de *softwares* educacionais, os PCNs (BRASIL, 1998) recomendam aos educadores que a sua utilização seja avaliada de acordo com os objetivos que pretendem atingir, podendo utilizar *softwares* que se prestam a um trabalho mais dirigido, como forma de testar conhecimentos num enfoque mais instrucionista ou aqueles que auxiliam na construção do conhecimento com uma abordagem construcionista. É possível ainda, alternar o ensino de matemática entre estas duas abordagens (instrucionista e construcionista) utilizando apenas um recurso tecnológico digital que permita tal aplicação, como o GeoGebra.

Com esse olhar buscamos por um conteúdo destinado ao 3º ano do Ensino Médio, de acordo com o currículo do estado de São Paulo, que possibilitasse o uso de diferentes registros, e que favorecesse a construção de atividades elaboradas com base na Teoria dos Registros de Representação Semiótica. Escolhemos então o conteúdo de Geometria Analítica.

Elaboramos uma sequência didática sobre Ponto e Reta, na qual integramos o uso do *software* GeoGebra ao conteúdo de Geometria Analítica, com a perspectiva de investigar em que medida este software contribui para a aprendizagem dos conteúdos ponto e reta.

2 MATERIAIS E MÉTODOS

Classificamos essa pesquisa como descritiva, quanto aos seus objetivos e como pesquisa de campo, quanto ao seu delineamento. Os instrumentos de coleta de dados foram administrados por técnicas padronizadas e obtidos no ambiente natural, na unidade escolar, onde os participantes estudavam, por meio de observações diretas da pesquisadora aos grupos estudados, com a aplicação do questionário e das atividades elaboradas pela pesquisadora.

Participaram deste estudo duas turmas do terceiro ano do Ensino Médio de uma escola da rede estadual de ensino do período matutino localizada na cidade de Taboão da Serra/SP.

Esclarecemos que ambas as turmas tiveram acesso ao *software* GeoGebra, contudo em momentos diferentes. A primeira turma (T1) utilizou o *software* durante a aplicação da sequência sobre Geometria Analítica, e a segunda turma (T2) utilizou o *software* após a coleta dos dados do estudo, ao final do ensino daqueles conteúdos. Enfatizamos que tanto a T1, quanto a T2 realizaram as mesmas atividades da Sequência, entretanto a T2 com materiais impressos, enquanto a T1 tinha também o apoio do *software* na sala de informática.

A pesquisa ocorreu com todos os alunos das duas turmas. Os participantes da pesquisa foram selecionados segundo dois critérios: a devolutiva do termo de consentimento livre e esclarecido assinado pelo responsável; e, terem participado das aulas entregando no mínimo dez das onze atividades da Sequência de Atividades (a sequência completa pode ser acessada em SILVA, 2016).

Com base nesses critérios tivemos 20 alunos participantes oriundos da Turma 1 e 16 da Turma 2. A escolha da Turma 1 para utilizar o GeoGebra durante o ensino dos conteúdos foi decidida ao acaso.

Os instrumentos utilizados foram: um questionário sobre o perfil do participante, um Pré-Teste, um Pós-Teste, cinco atividades da sequência, uma atividade avaliativa intermediária, uma atividade com exercícios do Caderno do Aluno e os protocolos das observações. Por questão de espaço, neste artigo apresentaremos os resultados gerais e nos focaremos principalmente nos dados da avaliação intermediária.

O Pré-Teste continha 10 questões. As duas primeiras, referiam-se a localização de pontos no plano cartesiano, a terceira tratava da distância entre pontos, a quarta e a quinta, do ponto médio. A mediana e o baricentro era o tema da sexta questão, já o alinhamento de três pontos era trabalhado na sétima e décima e a inclinação da reta na oitava e nona questões. Todas, com o objetivo de verificar quais habilidades os participantes já possuíam sobre o conteúdo, anteriormente à aplicação da sequência.

As questões do Pós-Teste eram semelhantes às questões do Pré-Teste quanto à quantidade e a apresentação dos conteúdos. A diferença ocorreu apenas em relação aos pontos localizados no plano cartesiano e aos valores dos pares ordenados, embora os números pertencessem ao mesmo conjunto numérico. As alterações nestes aspectos fizeram as respostas serem diferentes, mas a dinâmica das avaliações em relação ao texto e sua interpretação foram exatamente iguais.

Com relação às atividades 1, 2, 3, 4, 5 da sequência, a Atividade 1 era composta por sete questões, tinha como objetivos identificar pares ordenados representados no plano cartesiano e localizar coordenadas no plano com o gráfico cartesiano sobre o mapa da cidade de São Paulo, que se apresentava dividido por regiões: central, norte, sul, oeste e leste. A atividade integrou dados reais como nome de bairros e locais conhecidos na cidade pelo público em geral, com as representações de gráfico cartesiano.

A Atividade 2 tinha seis questões, sendo a primeira composta por doze pares de coordenadas para serem localizados no plano cartesiano e traçados seus respectivos segmentos. A segunda solicitava o cálculo da medida do segmento com a proposta de verificação dos resultados observando a distância entre os valores presentes nos eixos. Já as questões seguintes trataram dos segmentos verticais, horizontais e inclinados sugerindo que o participante observasse os valores das coordenadas e verificasse se havia relações entre os dados numéricos e a posição relativa do segmento. Havia também um espaço denominado “para refletir” sobre como associar o Teorema de Pitágoras aos cálculos da medida dos segmentos inclinados, não sendo uma questão em específico, mas um tópico introdutório para a próxima atividade da sequência.

A Atividade 3 iniciava com a relação entre a medida dos segmentos inclinados e o Teorema de Pitágoras, resultando na construção de um triângulo retângulo, no qual os catetos eram os segmentos verticais e ou horizontais e a hipotenusa, o segmento inclinado. A atividade foi totalizada em sete questões que solicitavam o cálculo da distância entre dois pontos por meio da Fórmula e do Teorema de Pitágoras.

A Atividade 4 possuía oito questões que tratavam do ponto médio, mediana e baricentro. Por meio de repetidas, porém, diversificadas localizações de segmentos no plano cartesiano e suas observações quanto à movimentação dos valores numéricos dos seus pontos extremos e do ponto médio, foi pedido para que o participante representasse de forma geométrica e buscasse uma forma para generalizar o cálculo do ponto médio. Ao ser identificada a forma genérica ou fórmula na sexta questão, havia a necessidade de calcular o ponto médio.

As duas últimas questões da Atividade solicitavam uma pesquisa para localizar a definição da mediana e do baricentro de um triângulo, a representação geométrica das medianas e do baricentro, além do cálculo do baricentro.

Finalmente a Atividade 5 era composta por quatro questões sobre o alinhamento de três pontos, com o objetivo de identificar por meio de representações distintas a existência de alinhamentos.

Além disso, a Sequência de Ensino utilizou recortes do Caderno do Aluno da SEE-SP que foram tratados na pesquisa como exercício, com o objetivo de promover questionamentos e inserir perguntas em um contexto que envolvesse todos os conteúdos pertinentes. Foram selecionadas duas questões: a primeira exigia a identificação de dois pares de coordenadas e solicitava que, por meio do cálculo algébrico, fosse representada a distância entre os dois pontos. A segunda questão solicitava a representação de pontos no sistema de coordenadas inclusive os pontos médios dos segmentos e a determinação das coordenadas destes pontos médios em pares ordenados.

A avaliação intermediária possuía cinco questões sobre localização, distância entre dois pontos, ponto médio, mediana e baricentro, todas dependendo da imagem de um mapa com os indicadores das estações do metrô sobre o plano cartesiano e da problematização. Havia também uma sexta questão que solicitava um *feedback* do participante sobre a aplicação da sequência: pontos positivos, negativos, sugestões e reclamações. Por questão de espaço, neste artigo apresentaremos os resultados gerais e nos focaremos principalmente nos dados da avaliação intermediária.

Utilizamos os recursos presentes da sala do Acessa Escola, que faz parte da estrutura arquitetônica da unidade escolar e a sala de aula comum. Devido à quantidade de computadores na sala do Acessa Escola, optamos por trabalhar em duplas com as duas turmas, tanto na sala do Acessa como na sala de aula.

Nosso interesse era verificar se o GeoGebra poderia contribuir para as aprendizagens dos alunos e o trabalho do professor. Em geral as aprendizagens são avaliadas em provas elaboradas interna ou externamente a escola, realizadas de forma individual e sem nenhuma consulta ou apoio a outros materiais. Mantivemos essas premissas na realização da pesquisa: as aulas da Sequência foram desenvolvidas em duplas nas duas turmas, as da T1 tiveram apoio do *software* e a forma de avaliar ambas as turmas seguiu o modo usual pelo qual os alunos são avaliados na escola.

Dessa forma, apenas as avaliações foram feitas individualmente e sem nenhum tipo de consulta ou utilização do *software*, uma vez que as cinco atividades e os exercícios foram instrumentos utilizados para trabalhar os conteúdos e as avaliações serviram para verificar se houve aprendizagem.

Nesta sequência priorizamos a competência leitora e escritora com atividades impressas ou em arquivos enviados via correio eletrônico da sala. Estes recursos foram escolhidos com o objetivo de introduzir a leitura e interpretação de textos nas aulas de matemática, com ênfase na capacidade de compreensão de mapas, de explicações para aplicação de fórmulas, de imagens que representam percursos e de definições para tomada de decisões na escolha de qual operação realizar. A capacidade de expressão ocorreu por intermédio das respostas dissertativas e dos questionamentos orais.

3 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Nesta seção apresentamos o perfil dos participantes, o desempenho das duas turmas nos instrumentos aplicados e analisamos mais detalhadamente a avaliação intermediária, que marcou o final do primeiro módulo em que foram desenvolvidos os conceitos de plano cartesiano, representações de pontos, segmentos de reta, distância entre dois pontos, ponto médio do segmento, mediana e baricentro de um triângulo.

3.1 Perfil dos participantes

As turmas eram homogêneas em relação ao gênero, os participantes tinham idade entre 16 e 17 anos e em geral moravam nas proximidades da unidade escolar, tendo estudado na mesma escola desde o início do segundo ciclo do Ensino Fundamental.

Aproximadamente 80% dos participantes possuíam computadores em suas residências, utilizando em sua maioria com frequência de uma a três vezes por semana para entretenimento, destacando-se em relação ao estudo e trabalho.

Os participantes afirmaram que a inserção de recursos tecnológicos digitais auxiliava satisfatoriamente em suas aprendizagens e que já haviam tido experiências na utilização destes recursos nas disciplinas das quatro áreas do conhecimento, a saber: Ciências da Natureza e Suas Tecnologias, Matemática e Suas Tecnologias, Linguagens, Códigos e Suas Tecnologias, Ciências Humanas e Suas Tecnologias, por meio de apresentações do *Power Point*, em videoconferências, em pesquisas e não conheciam o *software* GeoGebra.

3.2 Análise das avaliações

Devido às condições estruturais do lócus da pesquisa, trabalhamos com os participantes em duplas durante as atividades da sequência (AT1, AT2, AT3, AT4, AT5) e o Exercício do Caderno do Aluno (EX). Os instrumentos individuais verificadores de aprendizagem foram o Pré-Teste, a Avaliação Intermediária (AVI) e o Pós - Teste. Estes foram realizados sem consulta e nem interferência do professor da turma e da pesquisadora e a nota poderia variar de zero a dez em qualquer um deles

As médias, os valores mínimos e máximos e o desvio padrão (DP) obtidos nestes instrumentos constam na Tabela 1 de acordo com a ordem em que foram aplicados.

Tabela 1: Média das turmas por instrumento verificador de aprendizagem

Turma	Medida	Pré-teste	AVI	Pós-teste
1	Média	1,06	9,02	7,90
	DP	0,85	1,16	1,88
	Mínimos	0,00	6,00	3,66
	Máximos	2,50	10,00	9,75
2	Média	0,91	7,68	7,19
	DP	0,96	2,41	2,40
	Mínimos	0,00	0,00	1,66
	Máximos	2,82	10,00	9,50

Fonte: adaptado de Silva (2016, p. 146)

A Tabela 1 mostra que no Pré-Teste a diferença entre as turmas era de 0,15 pontos e no Pós-Teste, 0,71 pontos. Observa-se que a Turma 1, iniciou a sequência com pequena vantagem em relação ao número de acertos e esta vantagem foi aumentando, principalmente na Avaliação Intermediária onde a diferença chegou a 1,34 pontos. Os valores mínimos e máximos do Pós-Teste indicam que os participantes da Turma 1 apresentaram a menor e a maior nota da amostra.

Constatamos ainda por meio dessas médias, uma gradativa elevação do desempenho dos alunos nas avaliações o que sugere nível de aprendizagem com índices satisfatórios para as duas turmas.

As médias apresentadas no Pós-Teste confirmaram a atuação do GeoGebra como facilitador de aprendizagem nas habilidades relacionadas às questões que não necessitaram diretamente dos cálculos. Nas questões 3, 7 e 10 em que havia necessidade de realizar cálculos de distância entre dois pontos ou comprimento de segmentos, a Turma 2 obteve resultados melhores, como se observa na Tabela 2.

Tabela 2: Médias e desvio padrão das notas por turma e questões do Pós -Teste

Turma	Medida	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	GERAL
1	Média	0,95	0,95	0,72	1,00	0,91	0,92	0,63	0,64	0,68	0,53	7,90
	DP	0,17	0,13	0,26	0,00	0,21	0,20	0,39	0,37	0,36	0,42	1,88
2	Média	0,89	0,91	0,73	0,77	0,85	0,78	0,65	0,50	0,53	0,57	7,19
	DP	0,28	0,15	0,22	0,42	0,28	0,30	0,34	0,37	0,41	0,43	2,40
Geral	Média	0,92	0,93	0,73	0,89	0,88	0,86	0,64	0,58	0,62	0,54	7,58
	DP	0,22	0,13	0,24	0,29	0,24	0,25	0,36	0,37	0,38	0,42	2,12

Fonte: Silva (2016, p. 131)

Acreditamos que esses resultados possam ser explicados pelo fato de que como a Turma 1 teve acesso ao *software* que lhe apresentava as medidas dos comprimentos e distância, os alunos não encontraram dificuldades na realização dos cálculos, o que ocorreu apenas nas atividades de verificação. Já a Turma 2 foi necessário realizar todos os cálculos à mão, então puderam cometer erros e esclarecê-los nas aulas, antes das atividades de verificação.

A avaliação intermediária (AVI) trazia o seguinte contexto, no registro de representação semiótica "*língua natural*": "João e Pedro são amigos e utilizam o metrô de segunda a sexta-feira e se encontram na Avenida Paulista em frente à estação Trianon Masp. João utiliza a linha azul do metrô, saindo da estação Liberdade e faz baldeação na estação Paraíso seguindo pela linha verde, até a estação Trianon Masp. Já Pedro, sai da estação Consolação se dirigindo ao ponto de encontro. Considerando a Praça da Sé como marco zero e a unidade de medida em quilômetros (Km), observe a imagem e responda às questões..."

Utilizamos um contexto real, identificando as estações do metrô e parte do trajeto das linhas verde e azul (Figura 1) com os registros de representação semiótica *"figura geométrica"* e "*gráfico cartesiano",* de modo a apresentar ao participante uma problemática contextualizada.

Figura 1: Imagem das estações de metrô- Linhas Azul e Verde

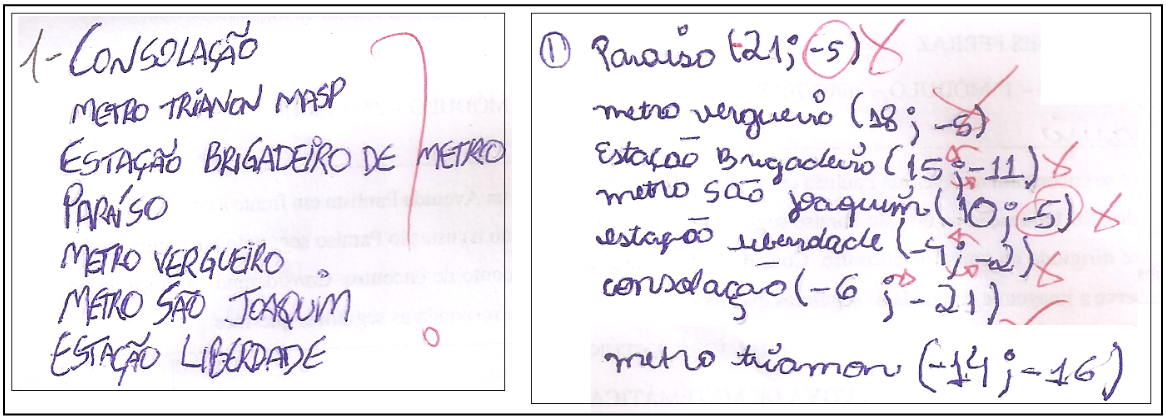
Fonte: Google Maps

Nessa situação, o participante precisava interpretar o enunciado (registro de representação "*língua natural*") reconhecendo os seus símbolos e partir do "*sistema gráfico cartesiano"* (no qual as estações eram apenas um ponto e o trajeto entre elas, segmentos) para o "*sistema de escritas"*, representando as estações em coordenadas, realizando, portanto, *conversões entre registros* (DUVAL, 2013). Ao calcular as medidas dos segmentos, as coordenadas do ponto médio e do baricentro, realizavam *tratamentos* entre registros (DUVAL, 2013), pois permaneciam em um mesmo tipo de registro de representação.

Desde o início da sequência, ao examinarmos qualitativamente os protocolos do pré-teste, observamos que ocorreram basicamente dois tipos de erros nas questões que solicitavam a representação dos pontos em coordenadas cartesianas e a escrita das coordenadas dos pontos: a inversão dos números correspondentes às ordenadas com as abcissas e a escrita das coordenadas com um único valor.

Ao analisarmos esse conceito na Avaliação Intermediária, constatamos que os participantes das Turmas 1 e 2, apresentaram melhoria nesse aspecto. Contudo a Figura 2 apresenta os extratos das respostas do participante 26 que escreveu apenas os nomes das estações e do participante 29 que escreveu as coordenadas de forma incorreta e/ou invertidas.

Figura 2: Resposta dos participantes 26 e 29 à Questão 1 da Avaliação Intermediária



Fonte: Protocolo dos participantes 26 e 29

Nesta questão era solicitada a *conversão* entre o registro *figura geométrica* e as coordenadas do registro *gráfico cartesiano*, ou seja, os participantes precisavam escrever as coordenadas dos pontos que representavam sete estações do metrô, a saber: Consolação, Trianon Masp, Brigadeiro, Paraíso, Vergueiro, São Joaquim e Liberdade. Após análise, observamos que 73,68% dos participantes da Turma 1 responderam à questão corretamente e 26,32%, responderam-na parcialmente correta. Já 50 % dos participantes da Turma 2 solucionaram a questão corretamente, 37,5% responderam parcialmente correto e 12,5% responderam errado.

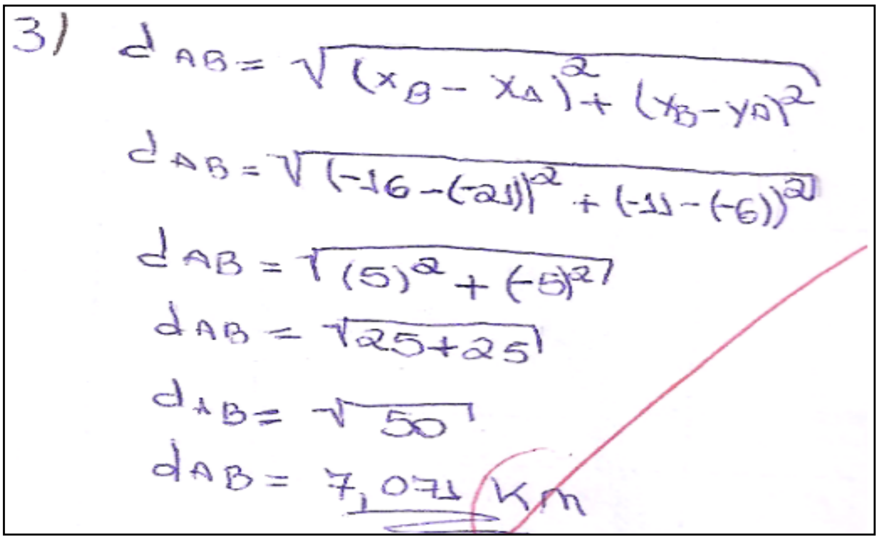
As respostas corretas para a questão 1 deveriam ser as seguintes: Consolação: (-21, -6); Trianon–Masp:(-10, -11); Brigadeiro:(-11, -15); Paraíso:(-5,-21); Vergueiro: (-5, -16) São Joaquim: (- 4, -10) e Liberdade: (-2, -4).

Na questão 2, solicitava-se o inverso: dadas as coordenadas do registro *gráfico cartesiano* o participante deveria realizar a *conversão* desse registro no de *figura geométrica*. O objetivo era localizar no plano cartesiano os pontos correspondentes às três estações de metrô, sendo Consolação: C(-21, -6), Paraíso: P(- 5, -21) e Liberdade: L(-2, -4). Na primeira turma, 94,74% realizaram corretamente a localização e 5,26% solucionaram parcialmente a questão. Para a Turma 2, os resultados foram de 87,50% de acertos, 6,25% de resoluções parcialmente certas e 6,25% com resolução totalmente errada.

Na situação da questão 3, os participantes deveriam verificar a distância do trajeto realizado por Pedro, que sai da estação Consolação para a estação Trianon - Masp, onde encontra com João. Para desenvolver esta questão, os participantes poderiam contar as unidades entre os pontos aplicando estes valores ao Teorema de Pitágoras ou a fórmula da distância entre dois pontos.

Constatamos que entre os 35 participantes presentes 8,57% não responderam à questão, 68,93% responderam por meio da fórmula da distância entre dois pontos, 14,28% solucionaram utilizando o módulo da diferença entre os valores finais e iniciais, finalizando com o Teorema de Pitágoras e 8,57% observaram as distâncias contando as unidades nos eixos e introduzindo estes valores no Teorema de Pitágoras. Tais realizações podem ser observadas nas Figuras 3, 4 e 5, que são extratos dos protocolos dos participantes 20, 15 e 36, respectivamente.

Figura 3: Resposta do participante 20 à Questão 3 da Avaliação Intermediária



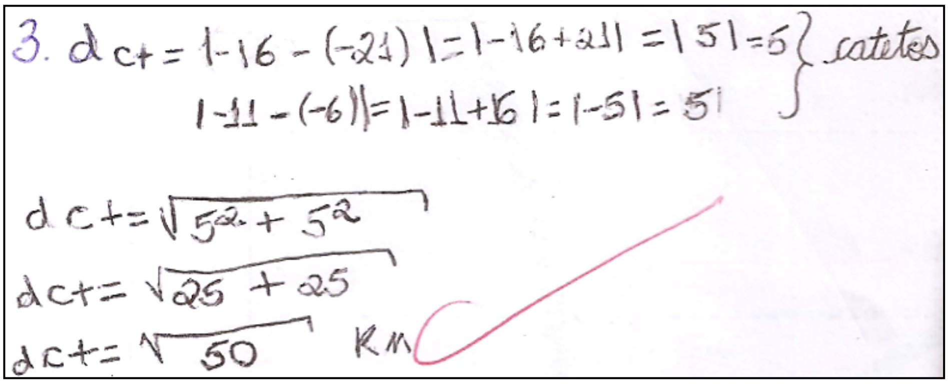
Fonte: Protocolo do participante 20

O participante 20 solucionou a questão por meio da fórmula da distância entre dois pontos, em que realiza uma *conversão* ao substituir a forma algébrica pelos valores correspondentes às abcissas e ordenadas dos pontos referentes às estações Consolação e Trianon- Masp. Após realizar vários *tratamentos*, consegue calcular a medida do trajeto realizado por Pedro.

Já o participante 15 utilizou parcialmente a mesma fórmula, conforme ilustra a Figura 4.

A resolução se deu por *tratamentos no sistema de escritas numérico*, sendo iniciada pelo módulo da diferença das abscissas e ordenadas dos pontos, que resultaram nos valores dos catetos, que foram usados na fórmula da distância.

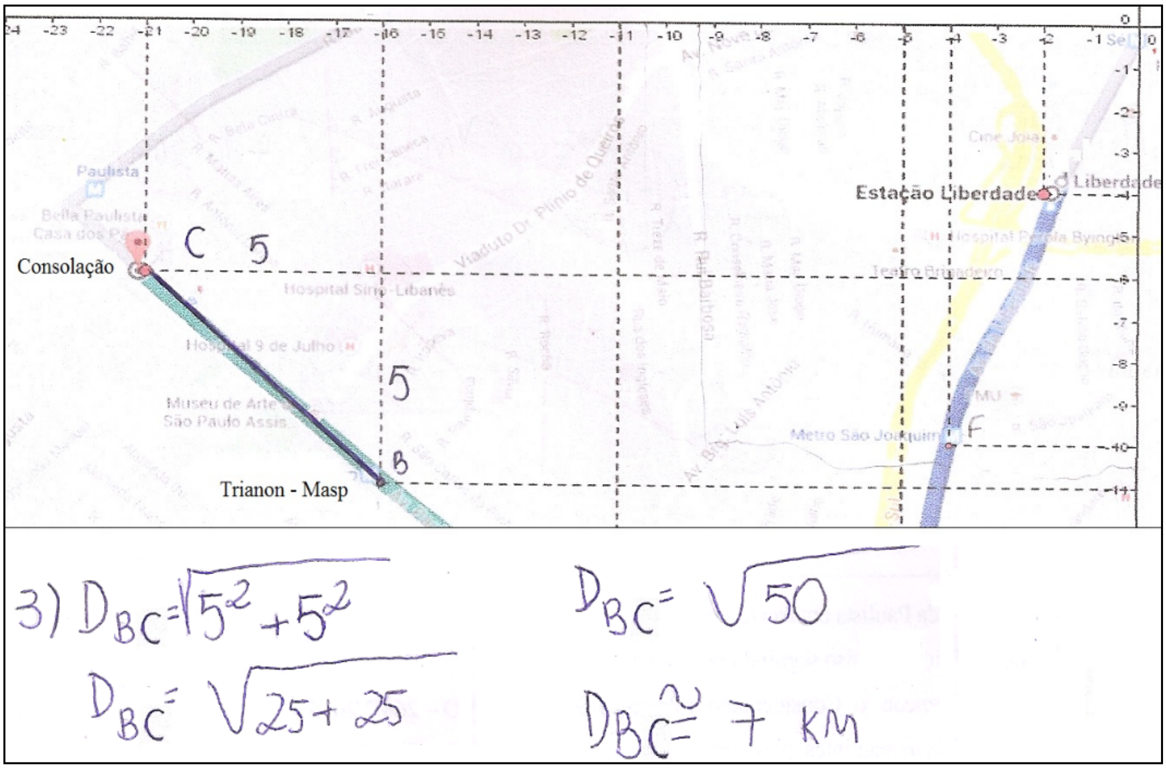
Figura 4: Resposta do participante 15 à Questão 3 da Avaliação Intermediária



Fonte: Protocolo do participante 15

O participante 36 observou a partir da imagem do mapa das estações do metrô que o trajeto realizado por Pedro era um segmento inclinado que sugeria a formação de um triângulo retângulo, e contando as unidades no próprio eixo, identificou os valores dos dois lados do triângulo e os chamou de catetos. A Figura 5 ilustra os dois tipos de registros utilizados pelo participante.

Figura 5: Resposta do participante 36 à Questão 3 da Avaliação Intermediária



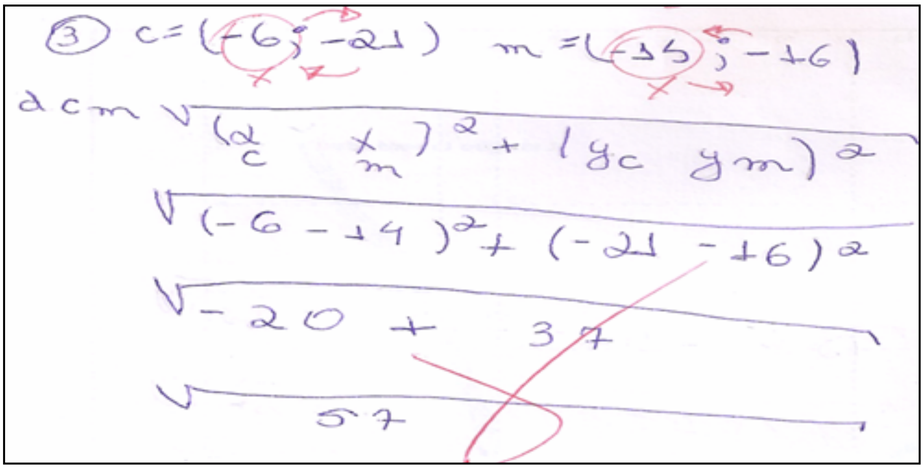
Fonte: Protocolo do participante 36

A Figura 6 apresenta a *conversão do sistema gráfico cartesiano para o sistema de escritas numérico.* Comparada às outras resoluções, esta necessitou de menos cálculos e integrou de forma mais evidente o conhecimento geométrico, na relação entre o triângulo retângulo, o Teorema de Pitágoras e os registros de representação *numérico* e *gráfico cartesiano*, incluindo *os tratamentos em registros de representação numérica* com potenciação, adição e radiciação.

Verificamos a compreensão de parte do processo do cálculo da medida do comprimento dos segmentos por alguns participantes, como o participante 29, que mesmo aplicando a fórmula da distância, por inverter os valores das coordenadas e escrever a fórmula incorretamente, como se observa na Figura 6, não obteve êxito no processo de resolução.

A habilidade de calcular as coordenadas do ponto médio e representá-las sobre o segmento era o objetivo da Questão 4. A resolução iniciava-se ao representar no plano cartesiano os segmentos de reta que compreendiam da estação Consolação à estação Paraíso (CP), da estação Paraíso à Liberdade (PL) e da estação Liberdade à Consolação (LC), determinando os seus respectivos pontos médios M, N e H. Nessa questão, os participantes da Turma 1 alcançaram 52,63% de acertos totais e 47,37% acertaram parcialmente. Na Turma 2, 37,50% conseguiram solucionar a questão corretamente, 56,25% solucionaram parcialmente e 6,25% não conseguiram solucionar. A porcentagem expressiva de acertos parciais ocorreu devido a não representação dos pontos médios sobre os segmentos, isto é devido ao insucesso em realizar a *conversão* do registro de representação *figura geométrica* para o registro *gráfico cartesiano*.

Figura 6: Resposta do participante 29 à Questão 3 da Avaliação Intermediária



Fonte: Protocolo do participante 29

Na Questão 5, era solicitado ao participante a construção de um triângulo com vértices nas estações Consolação, Paraíso e Liberdade, para calcular e localizar no plano as coordenadas do baricentro do triângulo, além de identificar se o baricentro se localizava próximo à Avenida Brigadeiro Luís Antônio. Após análise dos resultados, a Turma 1 apresentou 52,63% de acertos totais e 47,37% de acertos parciais. Já para a Turma 2, os resultados alcançados foram 37,5% de respostas corretas, 56,25% de respostas parcialmente corretas e 6,25% de respostas incorretas para a questão.

Os valores percentuais coincidiram com os dados da questão anterior, porque, os pontos médios M, N e H eram aqueles que deveriam ser utilizados para construção dos segmentos que determinavam o baricentro, como na questão 4 já haviam deixado de representar os pontos médios, na Questão 5, não conseguiram representar no plano cartesiano o baricentro do triângulo.

Confrontando os dados das questões por turma com base na Tabela 3, podemos afirmar que os objetivos e habilidades esperados para a Avaliação Intermediária foram atingidos satisfatoriamente, principalmente com a turma que fez uso do GeoGebra durante a aplicação da Sequência de Atividades. O campo visual e manipulável das ações entre as janelas do *software* nas construções dos pontos e segmentos parece ter favorecido a aprendizagem, fato que refletiu em maior número de acertos.

Tabela 3: Médias e desvio padrão das notas por turma e questões da Avaliação Intermediária.

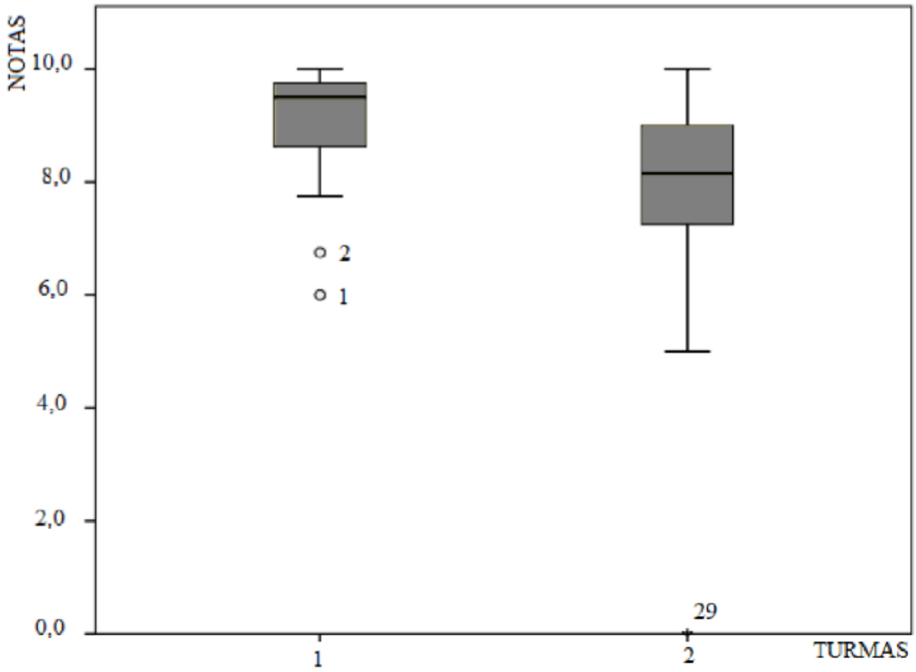
Turma	Medida	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	GERAL
1	Média	1,93	0,99	1,70	2,58	1,83	9,02
	DP	0,13	0,58	0,55	0,62	0,25	1,16
2	Média	1,64	0,92	1,36	2,31	1,45	7,68
	DP	0,66	0,25	0,79	0,85	0,63	2,41
Geral	Média	1,80	0,95	1,54	2,45	1,66	8,41
	DP	0,47	0,18	0,68	0,74	0,49	1,93

Fonte: Silva (2016, p. 119)

O desempenho das duas turmas por questões pode ser considerado bom. A Tabela 3 mostra média de 9,02 para a Turma 1 e 7,68 para Turma 2, uma diferença de 1,34 pontos percentuais.

Comparando as médias gerais das turmas na Avaliação Intermediária com as do Pré -Teste que eram de 1,06 para a Turma 1 e 0,91 para a Turma 2, verifica-se que houve crescimento de 7,96 para a Turma 1 e de 6,77 para a Turma 2. Julgamos que houve expressiva e satisfatória aprendizagem nas duas turmas. Dentre os participantes da Turma 1, três alunos obtiveram nota máxima (10), contribuindo para elevar a média das notas da turma, cuja variação pode-se observar melhor na Figura 7.

Figura 7: Box-plot da distribuição das notas da Avaliação Intermediária das duas Turmas



Fonte: Silva (2016, p. 119)

Como se observa na Figura 7, as notas da Turma 1 foram mais homogêneas, apenas os participantes 1 e 2 se diferenciaram do seu grupo, porque não realizou a questão 3 e teve nota parcial na questão 4 (participante 1) e conseguiu quase por unanimidade notas parciais em todas as questões, acertando totalmente apenas a questão 3 (participante 2). Na Turma 2, o *outlier* foi o participante 29 que não acertou questão alguma, embora tenha solucionado todas as questões, mas com coordenadas diferentes das que foram dadas.

As notas da Turma 1 na avaliação intermediária situaram-se entre 6 e 10 pontos. Já as notas da Turma 2, variaram entre 0 e 10 pontos. O que pode explicar a superioridade da Turma 1 nesta avaliação são as representações corretas das coordenadas cartesianas que eram a base para solucionar a avaliação. Inferimos que a visualização e a observação do comportamento das coordenadas ao movimentar os pontos sobre a malha quadriculada, proporcionada pelo *software* durante a sequência, foi um dos diferenciais para essa turma ter obtido resultados mais expressivos, corroborando os estudos de Santos (2011), Maltempi e Faria (2012) que apresentavam o *software* contribuindo para a apreensão de diferentes tipos de registro, graças ao seu sistema dinâmico, com visualizações simultâneas de um mesmo objeto matemático.

Finalmente, registramos que durante a aplicação da Sequência indagamos os participantes sobre o uso da ferramenta tecnológica e tivemos tanto participantes que foram favoráveis quanto participantes desfavoráveis a utilização do GeoGebra, ainda que em menor número, porque segundo eles, no vestibular ou outros exames de seleção não podem usar ferramentas tecnológicas para ajudar.

As aulas com método diferente das aplicadas pelo professor das turmas com o uso do *software* e as apenas com o recurso lápis e papel foram agradáveis de serem aplicadas e os participantes em geral gostaram da Sequência de Atividades.

A Turma 2 manifestou-se favorável às atividades da Sequência devido a atenção mais individualizada, com maior frequência de explicações às duplas. A Turma1 gostou da utilização do GeoGebra por proporcionar facilidade na realização das construções e ajudar na visualização possibilitando maior autonomia.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O momento histórico segundo Miskulin (2010) é favorável a mudanças por estarmos descontentes com os métodos comumente utilizados no ensino de Matemática que raramente contextualizam os conteúdos ou se utilizam de recursos tecnológicos digitais, ou ainda integrem conhecimentos formais e vivência prática, aproximando-se das relações cotidianas dos educandos com o meio sociocultural.

Os dados obtidos revelam que o GeoGebra influenciou positivamente na aprendizagem do conteúdo de Ponto e Reta, à medida que as habilidades requeriam visualização, construção, reconstrução, observação, comparação, mobilidade, autonomia, representações simultâneas, análises de resultados, reforços para definições ou verificação de soluções. Todavia, não observamos contribuições diretas nas que requeriam cálculos, sejam eles de quaisquer conteúdos trabalhados nas atividades.

A relação entre as janelas algébrica e geométrica do GeoGebra, favoreceu a transição entre os registros de representação semiótica (DUVAL, 2013). Representar os pontos como pares ordenados e localizá-los no plano, foi uma das principais dificuldades durante o desenvolvimento das atividades iniciais da sequência, sendo compreendida mais rapidamente pela Turma 1, o que facilitou o desenvolvimento das outras atividades por ser esta a base estrutural para o desenvolvimento de todo o conteúdo.

Outro favorecimento que a ferramenta proporcionou foi o deslocamento dos objetos na janela de visualização e a possibilidade de fazer e refazer as construções dispendendo menos tempo e com mais facilidade que nas construções com papel, lápis e régua.

De uma forma geral, verificamos que nas questões que tratavam das habilidades de visualização (localize e identifique) e nas relacionadas à construção (trace e represente), a Turma 1 apresentou média ligeiramente superior, e nas atividades que envolviam a habilidade de calcular, a Turma 2 obteve médias relativamente melhores. Assim, caracterizamos o *software* como um recurso favorável a aprendizagem por potencializar a representação dos objetos matemáticos em diferentes registros. Consideramos ainda que os educadores podem utilizá-lo de maneira mais adequada como um recurso agregado a outros em sua prática pedagógica.

Enfatizamos a necessidade de utilizar conjuntamente outros materiais e metodologias que contribuam para compreensão e apropriação da habilidade de cálculo pelos alunos, em situações, como as desta pesquisa, em que o uso do *software* não favoreceu o desenvolvimento de tal habilidade.

Embora consideremos que a aplicação da sequência tenha sido exitosa é importante destacar que os métodos de ensino no decorrer das aulas precisam ser alternados a fim de não se tonarem rotineiros.

REFERÊNCIAS

AGUIAR. A. L. Moodle e GeoGebra como apoio virtual ao ensino de Trigonometria segundo a nova Proposta Curricular do Estado de São Paulo. 2011. 153f. **Dissertação** (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Exatas)– Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2011. Disponível em: <http://www.bdtd.ufscar.br/htdocs/tedeSimplificado//tde_busca/arquivo.php?codArquivo=4631>. Acesso em: 15 jan. 2015.

BRASIL. Lei nº 9. 394, de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. **[Código civil]**. Brasília, DF, 20 de dez. de 1996. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/Leis/L9394.htm>. Acesso em: 15 out. 2014.

BRASIL. Secretária da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio**: matemática e suas tecnologias. Brasília: Mec./SEE, 1998.

DUVAL, R. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, S. D. A. (Org.). **Aprendizagem matemática registro da representação semiótica**. Campinas: Papirus, 2013. p. 11-33.

MACHADO, S. D. A. **Aprendizagem matemática registro da representação semiótica.** Campinas: Papirus, 2013.

MALTEMPI, M. V.; FARIA, R. W. S. Manipulação e análise de padrões fractais no processo de generalização de conteúdos matemáticos por meio do software GeoGebra. In: CONFERÊNCIA LATINO AMERICANA DE GEOGEBRA, 1., 2012, São Paulo. **Anais...** São Paulo, 2012. p.1-15. Disponível em: <http://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/article/view/8393 >. Acesso em: 25 maio 2014.

MORAN, J. M. **A educação que desejamos**: novos desafios e como chegar lá. Campinas: Papirus, 2012.

MISKULIN, R. G. S. As potencialidades didático-pedagógicas de um laboratório em educação matemática mediado pelas TICs na formação de professores. In: Organizadores X. (Org.). **O laboratório de ensino de matemática na formação de professores**. Campinas: Autores Associados, 2010. p. 153-178.

SANTAELLA, L. **O que é semiótica**. São Paulo: Brasiliense, 1983.

SANTOS, I. N. Explorando conceitos de geometria analítica plana utilizando tecnologias da informática e comunicação: uma ponte do ensino médio para o ensino superior construída na formação inicial de professores de matemática. 2011. 163f. **Dissertação** (Mestrado em Educação Matemática)–Instituto de Ciências Exatas e Biológicas, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2011. Disponível em: <http://www.ppgedmat.ufop.br/arquivos/dissertacoes_2011/Diss_Ivan_Nogueira_dos_Santos.pdf>. Acesso em: 10 abr. 2015.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação. **Currículo do Estado de São Paulo**: matemática e suas tecnologias. Coordenação de Maria Inês Finl e Nilson José Machado. 1. ed. atual. São Paulo, 2012. p. 72.

SILVA, G. M. Um estudo sobre o uso do GeoGebra na aprendizagem de geometria analítica no ensino médio. **Dissertação.** Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2016. Disponível em: <https://repositorio.ufscar.br/bitstream/handle/ufscar/8870/DissGMS.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em: 13 set. 2015.

CÁLCULO INTERATIVO: UM AMBIENTE VIRTUAL DE SUPORTE ÀS AULAS DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

INTERACTIVE CALCULUS: A SUPPORT VIRTUAL ENVIRONMENT FOR DIFFERENTIAL AND INTEGRAL CALCULUS CLASSES

COUTO, Alan Franco do[1]
TREVISAN, André Luís[2]

RESUMO

Este artigo relata a experiência da "Construção de um site interativo para aulas de Cálculo Diferencial e Integral", trabalho de iniciação científica vinculado ao projeto de pesquisa "Investigação de um ambiente educacional para o Cálculo Diferencial e Integral em condições reais de ensino". A construção inicial do site deu-se em meados de julho e agosto de 2016, sendo constantemente modificado para readequação de conteúdos e melhorias didático-pedagógicas diversas. Uma pesquisa quantitativa realizada por meio de um questionário foi realizada no final do segundo semestre de 2016, contando com a participação de 31 estudantes. Com os dados obtidos percebemos que a maior parte desses estudantes, de fato, pouco aproveitou dos conteúdos disponibilizados diretamente nas páginas, entretanto, essa mesma fração fez bastante uso das listas de tarefas. Tratando-se de um projeto em andamento, os dados analisados forneceram subsídios para ajustes no site.
Palavras-chave: Ensino de Cálculo Diferencial e Integral. Tarefas Matemáticas. Recursos Tecnológicos. Ambiente Virtual de Ensino e Aprendizagem.

ABSTRACT

This article reports the experience of "Construction of an interactive website for Differential and Integral Calculus classes", a scientific initiation work linked to the research project "Investigation of an educational environment for Differential and Integral Calculus in real teaching conditions". The initial construction of the site took place in mid-July and August 2016, being constantly modified for re-adaptation of contents and various didactic-pedagogical improvements. A quantitative research through a quiz about the site was made at the end of the second semester of 2016, counting on the participation of 31 students. With the data obtained it was possible to notice that most of them, in fact, did not take advantage of the available contents directly in the pages, however, this same fraction made a lot of use of the tasks lists. Being an ongoing project, the analyzed data provided subsidies for future site adjustments.
Keywords: Differential and Integral Calculus Teaching. Mathematical Tasks. Technological Resources. Virtual Teaching and Learning Environment.

1 INTRODUÇÃO

Da nossa experiência na condição tanto de estudante quanto de professor, temos observado que aulas de Cálculo Diferencial e Integral (CDI) costumam resumir-se no ciclo teorema – problema – exemplo, explorando fortemente o caráter algébrico e procedimental, e deixando de lado aspectos intuitivos que outras formas de representação podem proporcionar aos estudantes. Um problema proveniente dessa prática é o fato dos estudantes saberem calcular uma derivada, mas não serem capazes de enxergá-la como uma ferramenta para investigar a taxa de variação de determinada grandeza em relação à outra. Isso faz com que cheguem a resultados inesperados e, por estarem

[1]Graduando em Engenharia de Materiais pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), Londrina, Paraná, Brasil. Endereço para correspondência: Rua Piauí, 1374, apto. 501, Centro, CEP 86020-390, Londrina, PR, Brasil. Endereço eletrônico: alanfcouto@gmail.com.
[2]Doutor em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL), Londrina, Paraná, Brasil. Docente do Departamento de Matemática e do Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), Londrina, Paraná, Brasil. Endereço para correspondência: Avenida dos Pioneiros, 3131, CEP 86036-370, Londrina, Paraná, Brasil. Endereço eletrônico: E-mail: andrelt@utfpr.edu.br.

atuando mecanicamente, não realizem uma análise da resposta a fim de observar se ela tem sentido no contexto do problema. Propostas para inserção de recursos gráficos no ensino de CDI ganharam força nas últimas décadas, em especial ao considerarmos as potencialidades dos recursos tecnológicos. Entretanto, estes devem ser usadas como recursos para exploração, aliados a propostas didáticas que proporcionem, aos estudantes, oportunidades para investigação (CUEVAS; MEJÍA, 2005).

As abordagens didáticas usualmente observadas em aulas de CDI são bastante lineares e desconsideram a presença de recursos tecnológicos como aliados à aprendizagem dessa disciplina. Na maioria das vezes, inicia-se o curso com uma breve recapitulação do conjunto dos números reais, passando para o estudo de funções reais de uma variável e os conceitos de limite, derivadas e integrais. Entretanto, embora as origens do Cálculo remontem a meados dos séculos XVI e XIX, ideias que remetem aos conceitos de derivadas e integrais foram exploradas intuitivamente muito antes disso. A definição formal dos números reais e, como consequência, a formulação de limites como hoje a utilizamos foram os últimos tópicos (dentre os presentes nas ementas de CDI) a serem sistematizados (VALLEJO; PLUVINAGE, 2009). Evidencia-se, então, que a organização curricular de aulas de CDI não deveria, necessariamente, seguir a ordem apresentada nos índices dos livros, mas iniciar por meio de questões que possam ser exploradas intuitivamente, sem a necessidade da apresentação, por parte do professor, de um conceito ou definição, aproveitando os saberes que os estudantes trazem ao ingressar no Ensino Superior.

Nas aulas de CDI, nos diferentes cursos em que essa disciplina se faz presente (mas, especialmente em cursos de engenharia, foco do nosso trabalho), é importante saber dosar o rigor matemático e a intuição dos estudantes, uma vez que eles não irão trabalhar com Análise Matemática ao longo de suas carreiras. De acordo com Reis (2009), resgatando uma obra do matemático francês Jean Dieudonné, a intuição é fator preponderante desde os primórdios do Cálculo, enquanto definições e conceitos formais da forma como hoje são apresentados em sala de aula resultam de um processo de construção histórica dessa disciplina; sendo assim, os matemáticos do século XVIII enfrentavam dificuldades para descrever, de forma precisa, conceitos que eles conheciam muito bem *intuitivamente*. Tal aspecto deveria ser levado em conta ao planejarmos nossas aulas de CDI.

A metodologia de ensino é um fator determinante quando se pensa em aspectos que contribuem para o sucesso ou o insucesso dos estudantes em aulas de CDI. Na busca de tornar os estudantes protagonistas de seu processo de aprendizagem, temos adotado em aulas de CDI uma metodologia de trabalho baseada na organização de *episódios de resolução de tarefas* (adaptação para o português da expressão *shift-problem lessons,* proposta por Palha, Dekker e Gravemeijer (2015)). A dificuldade em resolver problemas de matemática é um obstáculo já conhecido e, assumindo que a maioria dos estudantes é cultuada a resolver os problemas baseando-se em similaridades, desestimula-se o pensamento matemático criativo (LITHNER, 2008).

Visando contribuir para uma exploração dinâmica e intuitiva dos conceitos e proporcionar um material de estudo alternativo aos livros-texto usuais, construímos um ambiente virtual de ensino e aprendizagem (www.calculointerativo.com.br) como recurso de apoio aos estudantes, na qual apresentamos os conceitos do modo como são sistematizados em sala de aula (sempre partindo da exploração intuitiva) pelo professor e segundo autor deste artigo, organizado em textos, tarefas e gráficos interativos, numa estrutura curricular não-usual que temos adotado na disciplina.

Este trabalho relata parte da experiência do projeto de iniciação científica do primeiro autor, intitulado “Construção de um site interativo para aulas de Cálculo Diferencial e Integral”, vinculado ao projeto de pesquisa “Investigação de um ambiente educacional para o Cálculo Diferencial e

Integral em condições reais de ensino" (CNPq, Processo 457765/2014-3), em desenvolvimento junto ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática de uma Universidade Federal do estado do Paraná. O texto tem por objetivo relatar essa experiência, bem como discutir as potencialidades desse ambiente e avaliar sua aceitação na perspectiva dos estudantes que dele fizeram uso. Apresentamos o referencial teórico que sustenta nossa proposta de trabalho por meio de *episódios de resolução de tarefas*, seguido da descrição do processo e organização do ambiente virtual de ensino e aprendizagem (site) como suporte às aulas. Por fim, são apresentados e analisados quantitativamente dados oriundos da aplicação de um questionário a 31 estudantes calouros de um curso de engenharia que cursaram a disciplina de CDI-1 no segundo semestre de 2016.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Em diversas situações do cotidiano nos deparamos com palavras que, embora diferentes, são utilizadas para o mesmo contexto. É o caso, por exemplo, de *tarefas* e *atividades*. Na área de ensino e aprendizagem, é fundamental que saibamos diferenciar essas palavras. Tarefa diz respeito ao objetivo atrelado a uma situação problemática, enquanto atividade é tudo aquilo que se realiza a fim de se atingir esse objetivo. Estreitando-se o termo para a área de educação matemática, Ponte (2014, p.14) define como *tarefa de investigação* aquela que "serve para compreender, de modo aprofundado, as capacidades, processos de pensamento e dificuldades dos alunos". Dessa forma, pode-se dizer que as tarefas de investigação são instrumentos de apoio para a aprendizagem dos estudantes, assim como uma fonte de dados para os professores analisarem quais mudanças pedagógicas e metodológicas podem ser pertinentes.

Durante os processos de resolução de tarefas na forma escrita, é possível perceber como os alunos conduzem suas ideias para chegarem às suas conclusões. Esta é a definição de Lithner (2008) para o *raciocínio*, termo que comumente não é definido pelos pesquisadores em educação matemática e tem seu significado aceito de forma "universal". Nesta obra, o autor produz o que seria um *framework,* ou um quadro de ideias, para que se investiguem os processos de raciocínio dos alunos na matemática. Além disso, caracteriza, define e cita as origens e consequências de cada um dos dois tipos principais de raciocínio: o imitativo (o memorizado e o algorítmico e suas subdivisões) e o criativo. Ainda de acordo com o autor, o próprio meio social e boa parte dos atuais livros didáticos estimulam os processos de raciocínio imitativos, fazendo com que os estudantes resolvam seus problemas por questões de similaridades e não de forma inteligente, criativa, baseados em seus conhecimentos das propriedades matemáticas envolvidas. É neste quesito que as tarefas de investigação contribuem para a aprendizagem dos estudantes, pois em geral seus objetivos não são "encontrar o x da questão", mas sim avaliar a situação e descrever o melhor desenvolvimento lógico que lhe cabe.

Para que se tornem mais intuitivas e dinâmicas, as tarefas de investigação podem ser aliadas às Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC), como a internet e *softwares* matemáticos. Com os avanços da tecnologia, especialmente no ramo dos computadores e celulares, esse *link* entre TIC e educação tem se tornado promissor. Batista (2012) relata resultados positivos de dois estudos de caso onde tarefas matemáticas foram auxiliadas por aplicativos de celular, enfatizando, também, grande aceitação da metodologia por parte dos estudantes. Vale ressaltar que, na época, ao menos entre os estudantes envolvidos na pesquisa, a plataforma predominante nos celulares era a Java ME, em que aplicativos eram limitados, principalmente os didáticos. Hoje, é notório que a gama de aplicativos e recursos interativos disponíveis online aumentou consideravelmente com a popularização dos smartphones e da internet.

Inspirados pelas perspectivas de Borba, Silva e Gadanidis (2015), utilizamos o GeoGebra[3] como principal ferramenta de ambientação de aprendizagem nas tarefas atribuídas aos estudantes, em especial por ser um software gratuito e de código aberto, fácil manuseio, popularidade, leveza e possuir um ambiente online[4] exclusivo e rico em aplicativos sobre os mais variados conteúdos do CDI.

Embora as tecnologias possam contribuir para a aprendizagem dos estudantes, é importante salientar que outros fatores didático-pedagógicos não podem ser deixados de lado. A *análise da produção escrita* por parte dos docentes também pode auxiliar o estudante a aprofundar seu raciocínio e, consequentemente, sua investigação matemática. É o que evidencia o trabalho de Couto, Trevisan e Fonseca (2016a), onde se relatam dados obtidos de uma tarefa proposta a estudantes de CDI-1. O objetivo era que os estudantes escrevessem o que julgassem pertinente conforme observavam e manipulavam um gráfico[5]. Investigações mais aprofundadas foram realizadas pelos estudantes depois que os pesquisadores recolheram as tarefas e as retornaram a eles com questionamentos que os estimulavam a irem além do que já haviam escrito. Como continuação desse estudo, em outra ocasião, Couto, Trevisan e Fonseca (2016b) reformularam a proposição da mesma tarefa, que agora continha questões denominadas "aberto-controladas". Essa reformulação mostrou um melhor engajamento dos estudantes no desenvolvimento de suas resoluções desde o primeiro contato com elas, o que deixa claro que a própria maneira como uma tarefa é *proposta* aos estudantes pode influenciar nas asserções que eles fazem e nos caminhos que adotam para resolvê-la.

Para evadir do formato de ensino genérico de CDI, trabalhamos com uma metodologia diferenciada, adaptada das *shift-problem lessons* descritas por Palha, Dekker e Gravemeijer (2015). Os conteúdos são ensinados sem seguir a ordem padrão conhecida – limite, derivadas e integrais – num ambiente real de aprendizagem[6], envolvendo o papel ativo do estudante e também do professor. Uma tarefa abordando os conteúdos da disciplina é proposta em sala, geralmente em grupos, iniciando um episódio de resolução de tarefas. Isso é feito antes da formalização do conteúdo pelo professor na lousa e, por isso, é importante ter em mente que os estudantes desenvolverão uma resolução informal a respeito do problema. Essa metodologia pauta-se numa dinâmica de ensino de matemática que procura lançar mão dos conhecimentos prévios dos estudantes e valorizar os aspectos intuitivos do raciocínio. Depois da resolução e consequente discussão sobre a tarefa é que os conceitos são apresentados e uma sistematização do conteúdo é realizada. Ramos, Fonseca e Trevisan (2016) retratam um episódio de resolução de tarefas proposto no primeiro dia de aula do primeiro semestre de 2016, envolvendo o conteúdo de sequências numéricas (caso particular de função), onde os estudantes deveriam investigar qual empresa de publicidade garantiria maior lucro a uma provedora de internet. Tarefas como essa e outros recursos são utilizados em nosso ambiente virtual de apoio ao ensino de Cálculo, como será mostrado a seguir.

---

[3]Software de matemática dinâmica para todos os níveis de educação que combina elementos da álgebra, geometria e cálculo. Disponível em: <https://www.geogebra.org/about>. Acessado em 23 fev. 2017.
[4]Antigamente denominado GeoGebra Tube, essa extensão online do *software* GeoGebra é muito utilizada em nossos trabalhos, em especial no site desenvolvido como suporte para o estudo de Cálculo. É possível acessar a extensão através do endereço https://www.geogebra.org/materials.
[5] <https://www.geogebra.org/m/SsHZEhan>.
[6]Por ambiente real de aprendizagem estamos tomando o conjunto de elementos presentes em nosso contexto de trabalho como, por exemplo, turmas numerosas, estudantes com dificuldades que provém de sua formação na Educação Básica e extenso currículo a cumprir.

3 O AMBIENTE VIRTUAL DE ENSINO E APRENDIZAGEM

O site[7] foi construído na plataforma Blogger[8], da Google Inc., por alguns motivos que incluem desde a gratuidade de criação até a facilidade de manuseio da plataforma, já que não é necessário muito conhecimento de programação para mantê-lo ativo e atualizado. Essa etapa de criação, na verdade, não se encerrou até hoje, porque um dos nossos objetivos é constantemente atualizar e melhorar o site, seja nos quesitos estéticos, seja no conteúdo. De qualquer forma, pode-se dizer que a montagem principal do que seria nosso ambiente virtual de ensino ocorreu nos meses de julho e agosto de 2016. A partir daí, mais conteúdos e seções foram inseridos ao longo do tempo, enquanto os estudantes já tinham acesso e poderiam complementar seus estudos.

3.1 Recursos e características

Esteticamente, o site possui[9] um menu na lateral esquerda e uma área de conteúdos no restante da tela. Na época deste estudo, o menu de navegação contava com quatro divisões: conteúdos, monitoria, autores e contato. A guia de conteúdos possuía opções de navegação num menu deslizante vertical e é nela que os estudantes acessavam os materiais de apoio para a disciplina. Já na seção da monitoria, os estudantes podiam baixar e resolver listas de tarefas como recurso de estudo extraclasse, de forma independente ou com o auxílio do monitor (estudante de graduação) em seus devidos horários de atendimento. Na seção dos autores estão nossos contatos e Currículo Lattes.

Como explicitado anteriormente, as páginas para cada conteúdo da disciplina não seguem o currículo linear usualmente presente nas aulas de Cálculo, como mostra o Quadro 1, mas procuram manter alguma similaridade com o desenvolvimento histórico dos conceitos.

Quadro 1: Reprodução de parte da seção de conteúdos. Cada tema possui um *link* para acesso e página própria.

NOÇÕES INTRODUTÓRIAS	Teorema Fundamental do Cálculo
Funções	LIMITES
Taxa média de variação e concavidade	Limites no infinito
Sequências convergentes	Funções racionais e limites infinitos
ESTUDO DAS VARIAÇÕES	Limite de uma função em um ponto
Somas acumuladas	REGRAS DE DERIVAÇÃO E INTEGRAÇÃO
Método da exaustão	A derivada como um limite
Integrais definidas	Derivadas e integrais envolvendo composições
Taxa de variação instantânea	Exponenciais e logaritmos
Função derivada e suas aplicações	Técnicas alternativas de integração envolvendo exponenciais e logaritmos
Polinômios	Funções trigonométricas

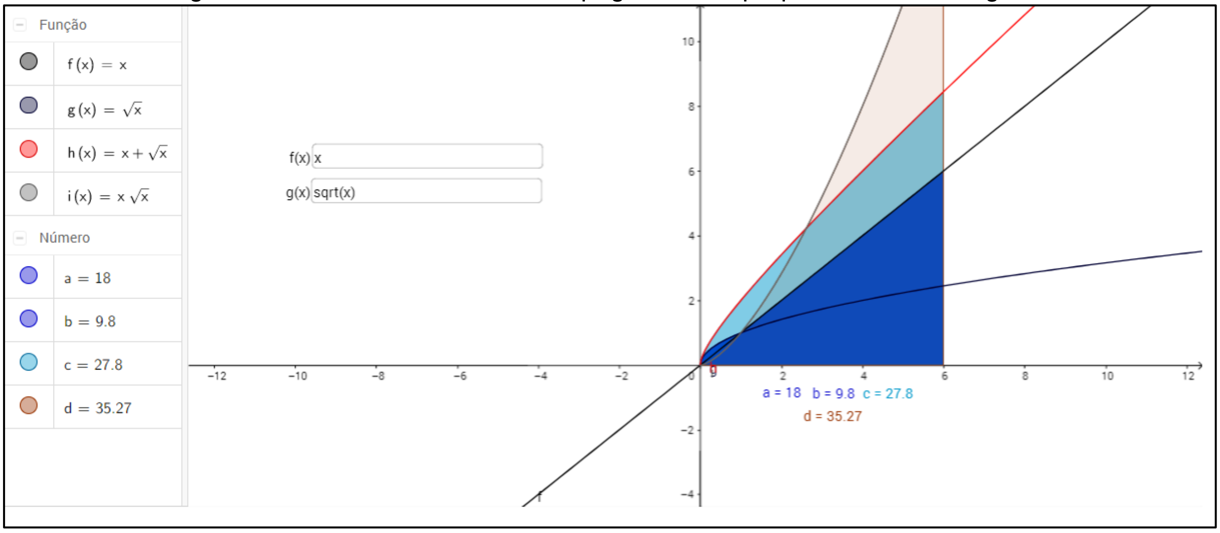
Fonte: autores (2017).

Na maioria das vezes, as páginas, além de textos explicativos sobre os conteúdos, possuem gráficos interativos que podem contribuir para o entendimento dos estudantes. Outros

[7] <www.calculointerativo.com.br>. Domínio privado adquirido pelos autores.
[8] <https://www.blogger.com/>.
[9] Alguns verbos nesta seção estão no passado pois, atualmente, muitos aspectos estéticos e organizacionais foram alterados. Este artigo limita-se ao uso do site durante o segundo semestre de 2016. O Quadro 1 retrata como o menu de navegação era em julho de 2017.

recursos bastante explorados são *gif*[10] e vídeos. Na Figura 1 exibe-se o recorte de uma página que explica algumas propriedades básicas de integrais.

Figura 1: Gráfico utilizado em uma página sobre propriedades de integrais.



Fonte: autores (2017).

Com este gráfico, o estudante pode plotar duas funções quaisquer f(x) e g(x) e investigar a derivada da soma, da diferença, do produto e do quociente delas. Tanto graficamente quanto aritmeticamente, ele pode observar que a integral da soma é a soma das integrais, mas que o mesmo não vale para o produto, por exemplo.

No site também convidamos os estudantes a resolverem tarefas, em geral adaptadas de livros e materiais didáticos disponíveis na internet, no intuito de se tornarem, sempre que possível, investigativas (FONSECA; TREVISAN, 2016). Ao final de cada conteúdo foram apresentadas algumas propostas[11], como mostrado abaixo.

> O quadro abaixo fornece um conjunto de dados que relacionam a pressão P (atm) e a temperatura T (°C) de uma quantidade fixa de dióxido de carbono em um cilindro fechado.
>
> Tarefa proposta numa das páginas da seção de modelos de crescimento.

Pressão (atm)	Temperatura (°C)
2,54	0
3,06	50
3,46	100
4,00	150
4,41	200

> a) Os dados sugerem uma relação linear entre a pressão e a temperatura. Explique o porquê.
> b) Há inúmeras opções de retas para aproximar esses pontos. Determine a equação de uma delas.

[10]Os *gif* são imagens de pouca resolução, mas que podem constituir animações. Na página http://www.calculointerativo.com.br/2016/10/distancia-percorrida.html é possível ver um *gif* que ilustra a soma de Riemann, onde procuramos explicar que a integral é uma soma de variações acumuladas.

[11]Observamos que os estudantes procuravam o site, em geral, por conta de “listas de exercícios”. Como estratégia para melhor aproveitarem os recursos disponibilizados, essas listas passaram a ser colocadas no final de cada respectivo conteúdo, ao invés da página inicial do site.

c) Use o modelo obtido no item b) para prever a temperatura na qual a pressão do gás seria nula.

Neste exemplo, o estudante deveria investigar a situação proposta, que basicamente envolve uma relação aproximadamente linear entre duas grandezas. No item a), é possível que o estudante explique o porquê dessa relação simplesmente plotando o gráfico pressão *versus* temperatura ou observando como ambas variam. Esse é um típico caso em que o estudante pode ainda não conhecer a ferramenta derivada, mas intuitivamente consegue descrever o fenômeno da taxa de variação aproximadamente constante observando que, de um valor para o outro, os valores mudam quase que na mesma proporção. Observe que, no item b), não há apenas uma resposta certa e, portanto, em c) também não há. Esse exemplo ilustra o que descrevemos como uma *tarefa de investigação* conforme Ponte (2014) e que valoriza a *intuição* como apontado por Reis (2009).

3.2 Opinião discente

O questionário era completamente anônimo e voluntário, constituindo-se de nove questões objetivas e uma discursiva. A primeira questão regia a continuação no questionário: “Você acessou o site durante seus estudos na disciplina?”, sendo as questões restantes respondidas apenas por quem houvesse marcado “sim”. De 33 estudantes, a maioria (31 - 94%) afirmou ter acessado o ambiente virtual. De acordo com comentários feitos pelos dois estudantes que disseram não terem acessado o site, os motivos foram: falta de tempo e dificuldade de acesso. Um ponto importante a partir daqui é *que agora o universo estatístico conta com 31 estudantes*, e não mais 33, pois os dois que responderam que não acessavam o site não continuaram respondendo o questionário.

A segunda questão abordava o quesito facilidade de acesso: “O site possui facilidade de acesso e navegação?”. As respostas possíveis eram *plenamente, parcialmente, não* ou *não sei responder.* 24 estudantes (77,4%) responderam *plenamente,* enquanto sete deles (22,6%) anotaram *parcialmente.* Não houve comentários ou sugestões para melhorias.

Na terceira questão: “Esteticamente o site está bem construído?”, objetivamos saber a opinião deles a respeito do *layout* do site. 22 estudantes (71%) *plenamente* concordam que está bem construído e nove deles (29%) opinaram que *parcialmente.* Nenhum comentário ou sugestão foi recebido.

A quarta questão indagava: “A forma como os conteúdos estão dispostos está adequada?”. 18 estudantes (58%) concordaram *plenamente* que está. 13 deles (42%) concordaram apenas *parcialmente.* Três dos estudantes que concordaram apenas parcialmente deixaram comentários que *fazem alusão à sua necessidade de resolver exercícios que possuem uma resposta única*, ou seja, que contam com gabarito: *“Talvez fosse um pouco melhor ter o gabarito de um ou outro exercício”; “As listas de exercícios devem ter respostas”.* A opinião de tais estudantes reflete uma expectativa bastante usual no sentido de o gabarito “validar” suas resoluções. Salientamos que a não disponibilização de gabaritos tinha por intenção incentivar os estudantes a procurarem o monitor ou o professor para discutirem suas resoluções ou, ainda, usar o GeoGebra como recurso computacional para “conferência de respostas”. Um terceiro comentário apresentado foi *“acredito que a matéria deveria ser disponibilizada de forma mais "cronológica": limite, integral, derivada...”*, que ilustra um certo “incômodo” por parte dos estudantes frente a uma proposta de trabalho que difira do usual.

Na quinta questão, perguntamos: “Os textos estão escritos de forma que as ideias principais de cada conteúdo sejam compreensíveis?”. Essa foi a primeira questão em que houve uma resposta diferente de plenamente ou parcialmente. 16 estudantes (51,6%) responderam *plenamente,* enquanto 14 (45,2%) concordaram apenas *parcialmente.* Destes, dois fizeram comentários que sustentam a ideia de que os conteúdos poderiam ser melhor explicados: *"Quem busca material complementar tem dificuldade em compreender a matéria e precisa de um conteúdo o mais claro possível"*; *"Existem conteúdos que estão escritos de uma forma confusa, em minha opinião"*. Um estudante *não soube responder,* comentando que *"apenas entrava para baixar as listas"* [de exercício].

A sexta questão perguntava: "Os materiais interativos foram capazes de auxiliar suas compreensões?". Nela, 19 estudantes (61,3%) concordaram *plenamente*, nove deles (29%) concordaram *parcialmente* e três (9,7%) *não souberam responder.* Entretanto, não houve comentários a respeito dessa discordância de alguns estudantes em relação aos materiais interativos.

Para a sétima questão: "Você resolveu as listas disponibilizadas na seção de monitoria?" as opções disponíveis foram: *plenamente, parcialmente* e *não.* 22 estudantes (70,9%) fizeram uso *pleno* das listas disponibilizadas na seção de monitoria; seis deles (19,4%) fizeram uso *parcial;* dois (6,4%) disseram que *não utilizaram;* um (3,2%) *não respondeu.* De acordo com um estudante que resolveu as listas *"faltaram as respostas",* dando a entender que deveríamos ter disponibilizado os gabaritos. Não houve comentários dos que não utilizaram as listas ou não responderam a essa questão. Um estudante que afirmara ter feito apenas algumas listas comentou que "*nem sempre é possível comparecer às monitorias. Se tentarmos responder em casa, não possuímos o gabarito para nos orientar. Sei que perguntando ao monitor ou ao professor obteria ajuda, mas a matéria corre e a dúvida torna-se obsoleta"*. Tal comentário fez-nos refletir e repensar a questão da disponibilização dos gabaritos, uma vez que os estudantes se sentem desmotivados a resolver as listas de tarefas. Assim, para o semestre seguinte optamos por inserir, para as questões mais "fechadas", as respostas finais esperadas, e para as questões mais "abertas", alguma indicação de respostas possíveis.

"Houve algum problema no acesso das páginas, listas etc.?" foi a questão oito. As opções de resposta eram *sim* e *não.* 29 estudantes (93,5%) afirmaram *não* ter tido problema algum com o acesso aos recursos do site, enquanto que a opção *sim* contou com apenas um (3,2%). Um estudante *não respondeu* (3,2%). O estudante que marcou sim relatou, em seu comentário, que teve *"problemas de acesso aos gráficos, poucas vezes".* É bem provável, entretanto, que esse problema técnico tenha sido com a internet ou navegador do estudante, pois os gráficos (que são incorporados às páginas através de *iframes*[12]) foram testados por nós em 3 navegadores diferentes[13], funcionando perfeitamente.

A última questão objetiva (nove), perguntava: "As tarefas ao final das páginas foram resolvidas?". Dentre as respostas possíveis estavam: *plenamente, parcialmente* e *não.* Apenas seis estudantes (19,3%) resolveram *plenamente,* enquanto 19 (61,3%) fizeram apenas *parcialmente* e quatro (13%) afirmaram *não* terem feito nenhuma delas. Um estudante que resolveu parcialmente as listas comentou que *"Estas devem ser respondidas sozinho, fora de aula. Seria bom se estes exercícios estivessem com o gabarito para nos orientar e vir se estamos seguindo um bom caminho."*. Ainda nesse espectro, contamos com dois estudantes (6,4%) que

[12] *Iframes* são códigos de programação para incorporação de recursos de terceiros em uma página da web. Cada aplicativo do ambiente online do GeoGebra possui um código *iframe* específico.

[13] Os navegadores testados foram o Google Chrome, da Google Inc., o Mozilla Firefox, da Mozilla Foundation e o Opera, da Opera Software A.S.A. Na página principal do site recomendamos que os estudantes utilizem o Google Chrome (por facilidade e comodidade).

não responderam à pergunta. Um estudante que não resolveu as listas e outro que não respondeu à pergunta deixaram comentários onde relatam que não viram essas tarefas, uma vez que apenas acessavam o site para baixar as listas da monitoria.

A décima questão era de cunho discursivo: "Cite aspectos que, em sua opinião, poderiam ser melhorados no site.". 14 estudantes (45,2%) deixaram relatadas suas opiniões (das quais destacamos algumas a seguir) e o restante deles (17 - 54,8%), não: *"Talvez fotos dos exercícios resolvidos", "Algumas vídeo aulas, para melhores esclarecimentos dos conteúdos", "Simulados de cada matéria", "Em minha opinião está perfeito", "Mais listas de exercícios", "O desenvolvimento das explicações de conteúdos", "Estruturação do site e explicações mais detalhadas", "Um pouco mais de exemplos resolvidos, se possível".*

4 DISCUSSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS

Podemos notar que o ambiente virtual foi bem visto por boa parte dos estudantes. Além disso, a aplicação de um questionário como forma de obtenção de dados para eventuais melhorias pode ser considerada uma "boa ideia", pois como o público-alvo da pesquisa são nossos estudantes, suas opiniões a respeito do site são de extrema importância. Outra forma de obtenção de dados que poderia ser utilizada é a entrevista, porém, esta demandaria mais tempo e eventualmente não seria tão confortável aos estudantes, já que estreitariam suas opiniões diretamente com os pesquisadores, fato que não ocorre em um questionário voluntário e anônimo.

Pela análise dos questionários percebemos que a forma de trabalho diferenciada em aulas de CDI não é consonante à expectativa de parte dos estudantes, seja pela organização não-usual dos conteúdos, seja pela proposta com tarefas de caráter investigativo, seja pela proposição de uma dinâmica de aula que objetiva fomentar o raciocínio criativo. Como analisado, muitos nos questionaram e requisitaram gabaritos nas questões, algo que se torna limitado já que prezamos que eles se engajem na situação-problema e prossigam por caminhos diferentes até uma possível resposta. De toda forma, é um ponto a se considerar, pois objetivamos não substituir completamente a forma tradicional de estudos, mas dar outras perspectivas para o ensino de CDI. Gabaritos podem ser adicionados às tarefas "padrão", aquelas onde os estudantes querem praticar os algoritmos de derivação ou integração, mas é *imprescindível* que não se limitem a esse tipo de abordagem.

Outro ponto que nos chama a atenção nos relatos dos estudantes é a requisição de mais exercícios resolvidos. Essa tendência vem de encontro às ideias de Lithner (2008), ao discutir o raciocínio imitativo. No caso de exercícios resolvidos, os estudantes sentem-se seguros ao fazer pequenas alterações num exercício semelhante que estavam com problemas e não sabiam prosseguir. Ele pode até acertar a resposta final, mas isso desestimula o raciocínio criativo. Ora, se nosso objetivo é estimular a criatividade matemática, a ideia de adicionar mais exercícios resolvidos parece não ser uma alternativa metodológica de ensino viável.

Também foi possível observar que os estudantes parecem não se acostumar com a forma de apresentação dos conteúdos. Não ver seções específicas sobre Limites, Derivadas e Integrais provocou um ligeiro desconforto em alguns deles.

Em linhas gerais, muitas opiniões mostraram-se produtivas para alguns aspectos do nosso ambiente virtual, como melhorias no acesso devido a problemas técnicos e a adição de gabaritos em algumas questões, enquanto outras deixaram transparecer a expectativa dos estudantes com um ensino de caráter mais "conservador" na disciplina.

Não dispomos de dados que possibilitem inferir uma possível influência/contribuição do site na aprendizagem dos estudantes, uma vez que este é parte de uma proposta de trabalho mais ampla, que inclui uma mudança na dinâmica das aulas de CDI, no contrato didático "usual" de trabalho em sala de aula e fora dela e na avaliação. Entretanto, da experiência docente, temos observado que nossos estudantes, em geral, mostram-se mais ativos, com iniciativa para resolver as tarefas propostas em aula e permanecem vindo às aulas por mais tempo, sentindo-se “capazes de aprender” em qualquer momento do curso, diminuindo o índice de desistência na disciplina.

Temos buscado construir, por meio do trabalho com episódios de resolução de tarefas e lançando mão de recursos como o site interativo aqui apresentado, uma cultura de aulas de CDI diferente da usual. Pouco ainda sabemos, porém, sobre condições necessárias para realizar o tipo de tarefas que propomos numa sala de aula formada por estudantes habituados a um ensino tradicional, onde existem valores e crenças já arraigados sobre a matemática e a sua aprendizagem. Temos nos debruçado em investigar ações que contribuam para alterar essas culturas, valores e crenças existentes.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao CNPq (Processo 457765/2014-3) pelo auxílio à realização do projeto do qual resulta este artigo.

REFERÊNCIAS

BATISTA, S. C. F. Aplicativos para dispositivos móveis: recursos para aprendizagem de cálculo. In: SIPEMAT, 3., 2012, Fortaleza. **Anais**... Fortaleza: UNI7, 2012. v. único. P. 1-14.

BORBA, M. C.; SILVA, R. S. R.; GADANIDIS, G. **Fases das tecnologias digitais em educação matemática:** sala de aula e internet em movimento. 1. ed., 1. reimpr. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2015. p. 45-73.

CUEVAS, C. A.; MEJÍA, H. R. Un acercamiento alternativo al Cálculo Diferencial. In: **Acta Latinoamericana de Matemática Educativa**, México, v. 18, p. 741-747, jun. 2005.

COUTO, A. F.; TREVISAN, A. L.; FONSECA, M. O. S. Análise de uma tarefa envolvendo o uso de um aplicativo do GeoGebra Tube no ensino de função exponencial. In: CONGRESSO BRASILEIRO DO GEOGEBRA, 1., 2016, Natal. **Anais...** Mossoró, RN: Edufersa, 2016a. v. 1. p. 55-59.

COUTO, A. F.; TREVISAN, A. L.; FONSECA, M. O. S. Análise de uma tarefa investigativa proposta a estudantes de Cálculo por meio de questões do tipo 'aberto-controladas'. In: SIMPÓSIO NACIONAL DE ENSINO E APRENDIZAGEM - SEA, 3., 2016, Londrina. **Anais....** Londrina: Editora da UTFPR, 2016b. v. 1. p. 1-9.

FONSECA, M. O. S.; TREVISAN, A. L. Caracterização e encaminhamento de tarefas matemáticas em aulas de Cálculo Diferencial e Integral. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA - ENEM, 12., 2016, São Paulo. **Anais...** São Paulo: SBEM, 2016. v. único. p. 1-12.

LITHNER, J. A research framework for creative and imitative reasoning. **Educational Studies in Mathematics**, v. 67, n. 3, p. 255-276, 2008.

PALHA, S.; DEKKER, R.; GRAVEMEIJER, K. The effect of shift-problem lessons in the mathematics classroom. **International Journal of Science and Mathematics Education**, Taiwan, v. 13, p. 1589-1623, 2015.

PONTE, J. P. da. Tarefas no ensino e na aprendizagem da Matemática. In: PONTE, J. P. da (Org.). **Práticas profissionais dos professores de matemática.** Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, 2014. p. 13-27.

REIS, F. S. Rigor e intuição no ensino de cálculo e análise. In: FROTA, Maria Clara Rezende e NASSER, Lilian. **Educação matemática no ensino superior**: pesquisa e debates. Recife: SBEM, 2009. p. 81-97.

RAMOS, N. S.; FONSECA, M. O. S.; TREVISAN, A. L. Ambiente de aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral pautado em episódios de resolução de tarefas In: SINECT, 5., 2016, Ponta Grossa. **Anais...** Ponta Grossa, PR: Editora da UTFPR, 2016. v.1. p. 1-11.

VALLEJO, C. A. C.; PLUVINAGE, F. Cálculo y Tecnología. **El cálculo y su enseñanza**, México, v. 8, p. 45-59, jan./jun. 2009.

MODOS OUTROS DE EXPRESSÃO DOS CÁLCULOS DIFERENCIAL E INTEGRAL NOS RASTROS DE EUDOXO E ARQUIMEDES: POSSIBILIDADES E LIMITES PARA O ENSINO[1]

MODOS OTROS DE EXPRESIÓN DE LOS CÁLCULOS DIFERENCIAL Y INTEGRAL EN LAS HUELLAS DE EUDOXO Y ARQUÍMEDES: POSIBILIDADES Y LIMITACIONES PARA LA ENSEÑAZA

GONDIM, Diego de Matos[2]

RESUMO

Neste artigo, pretendo apresentar modos outros de expressão dos Cálculos Diferencial e Integral tomando como referência as formas como Eudoxo e Arquimedes compreendiam os infinitésimos e de como essas formas podem ser pensadas como fundantes no que hoje se entende por Cálculo Diferencial e Integral. Para tanto, apresento os processos históricos pelos quais a sociedade foi atravessada do Renascimento à Ciência Moderna. Esta concisa apresentação vislumbra criar um território de desenvolvimento das ciências, sobretudo a Matemática e suas produções nos Cálculos Diferencial e Integral. Por fim, concluo este trabalho apresentando algumas justificativas de potencialidade e limitações do uso da História da Matemática como recurso didático para o ensino de Matemática, tomando em conta os rastros de expressões dos Cálculos Diferencial e Integral de Eudoxo e Arquimedes aqui apresentado.
Palavras-chave: Educação Matemática. História da Matemática como recurso didático. Ensino de Cálculo Diferencial e Integral.

RESUMEN

En este artículo, pretendo presentar modos otros de expresión de los Cálculos Diferencial e Integral tomando como referencia los modos como Eudoxo y Arquímedes comprendían los infinitos y de cómo esas formas pueden ser pensadas como fundantes en lo que hoy se entiende por Cálculo Diferencial e Integral. Para eso, presento los procesos históricos por los cuales la sociedad fue atravesada del Renacimiento a la Ciencia Moderna. Esta concisa presentación vislumbra crear un territorio de desarrollo de las ciencias, sobre todo de la Matemática y sus producciones en los Cálculos Diferencial e Integral. Por fin, concluyo este trabajo presentando algunas justificativas de las potencialidad y limitaciones del uso de la Historia de la Matemática como recurso didáctico para la enseñanza de Matemáticas tomando en cuenta los rastros de expresiones de los Cálculos Diferencial e Integral de Eudoxo y Arquímedes aquí presentado.
Palabras-chave: Educación Matemática. Historia de la Matemática como recurso didáctico. Ensañaza de Cálculo Diferencial y Integral.

1 INTRODUÇÃO

O estudo dos conceitos de limite, continuidade, derivada e integral deu-se historicamente de maneira inversa, ou seja, o Cálculo Integral desenvolveu-se primeiro que o Cálculo Diferencial, e, no século XVII, percebeu-se a relação que ambos possuíam devido à integração ser uma propriedade inversa da diferenciação (EVES, 2011). A integração, de acordo com Eves (2011), está intimamente ligada ao cálculo de áreas, volumes e comprimentos e, apesar de ser a relação inversa da integração, a diferenciação está ligada a problemas de tangentes de curvas, máximos e mínimos.

---

[1]Este artigo é parte da produção do Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) intitulado como “A História da Matemática como recurso didático para o ensino de Cálculo Diferencial e Integral”.

[2]Discente do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Estadual Paulista “Júlio Mesquita Filho” (UNESP), Rio Claro, SP, Brasil. Endereço para correspondência: Av. 24 A, 1515, Bela Vista, Rio Claro, São Paulo, Brasil. Endereço eletrônico: gondiminit@hotmail.com.

No entanto, esse pensamento se deu devido a vários períodos históricos que remontam à Idade Média (entre os séculos V e XV) até o desenvolvimento da Ciência Moderna (século XVII). Dentre esses períodos históricos, destaca-se o Renascimento, ocorrido entre os séculos XIV e XVI. Esse período fez da Matemática Renascentista e da Matemática Moderna fiéis aliadas[3].

Neste artigo, será apresentado, de forma concisa, o movimento histórico do Renascimento para pensar suas contribuições (ou produções) junto ao surgimento da Ciência Moderna, na Matemática. Ressalto, no entanto, que muito poderia ser dito sobre este período. Porém, o objetivo do presente trabalho é apresentar algumas contribuições de Eudoxo e Arquimedes para as ciências, principalmente para a Matemática e, sobretudo, para os Cálculos Diferencial e Integral, a fim de abordá-las como possibilidades para o ensino do Cálculo Diferencial e Integral.

Desse modo, contextualizo os períodos históricos citados – não tendo como objetivo aprofundá-los – para apresentar algumas de suas contribuições na Matemática. As contribuições sobre os trabalhos de Newton e Leibniz para os Cálculos Diferencial e Integral é breve, pois se intenciona apresentar Eudoxo e Arquimedes e, sobretudo, algumas de suas contribuições, em destaque: o método de exaustão de Eudoxo e o método de Arquimedes para o cálculo de área. A apresentação dos métodos supracitados não tem a intenção de explorar todas as suas características, mas tão somente de apresentá-las como possibilidades para a introdução de ideias fundamentais no ensino de Cálculo Diferencial e Integral, a saber: infinitésimos, continuidade, limite, cálculo de áreas etc.

Por fim, é deixado como considerações que, apesar de não ser possível realizar aqui um estudo aprofundado dos métodos supracitados, os mesmos podem favorecer a produção de signos no processo de ensino de Cálculo Diferencial e Integral. Como justificativa, são apresentadas algumas possibilidades e limitações para o uso da História da Matemática como recurso didático. Destacam-se, para tanto, as possibilidades apresentadas por Miguel (1993): História-motivação; História-dialética; História-unificação.

2 O RENASCIMENTO E O SURGIMENTO DA CIÊNCIA MODERNA

Segundo Pedroso (2009, p.209), “[...] o renascimento foi caracterizado por profundas transformações ocorridas na vida e na visão de mundo do homem europeu”. Essas mudanças, citadas pelo autor, estão relacionadas com o desenvolvimento social, econômico, filosófico e cultural.

De acordo com o autor, “a verdade é que os homens estavam se relacionando dentro de novas coordenadas e a visão do mundo não mais poderia seguir a orientação teocêntrica [...]” (PEDROSO, 2009, p.209). Para Boyer (1981, p.197), essas transformações citadas por Pedroso (2009) estão intimamente relacionadas com a recuperação da Europa: no que tange ao “[...] do choque físico e espiritual da peste negra, e a impressão com tipos móveis tornava possível uma difusão muito maior do que em qualquer período anterior de obras eruditas”. Isso, segundo Eves (2011, p. 287), direcionou a civilização moderna a trilhar o caminho da modernidade, que, por sua vez, “[…] começou com uma renovação de interesse pela arte e pela ciência antigas”.

Cabe destacar que o desenvolvimento científico foi impulsionado, a partir do século XI, pela criação das primeiras universidades, como Bolonha (1088), Paris (1170), Cambridge (1209) e Oxford (1249). Além disso, influenciadas pelas escolas monásticas e episcopais após as reformas educativas de Carlos Magno no século VIII, essas universidades firmavam seus ensinamentos na

[3]Em Boyer (1971), Eves (2011), Gondim e Sapunaru (2016) é possível ter contato com esses desenvolvimentos de forma geral e local.

tradição clássica grega. Em outras palavras, os currículos eram alicerçados nas sete artes antigas, divididas pelo chamado *trivium* ou ensino literário (gramática, retórica e lógica), e pelo *quadrivium*, ensino científico (aritmética, geometria, música e astronomia). Nessa época, a gramática, a retórica e a lógica eram consideradas estudos elementares, enquanto a aritmética, a geometria, a música e a astronomia eram consideradas estudos avançados. Gottlieb (2007, p.424) destaca que, nessa época, "[...] a maior parte da literatura clássica, inclusive a romana, era completamente desconhecida, exceto de um escasso número de monges […]".

No entanto, em uma análise histórica, é possível perceber que o ensino, na maioria dos casos, era direcionado àqueles que ocupariam posições de destaque na igreja e no estado, pois as universidades seguiam uma espécie de lógica aristotélica. Porém, o período estava sendo marcado por diversas rupturas políticas e econômicas, o que fez com que esses currículos também fossem mudados. Por exemplo, o ensino de lógica, medicina e o *quadrivium* matemático passaram a fazer parte dos currículos. Um questionamento filosófico sobre este acontecimento, talvez, seria sobre a necessidade de tal mudança, conforme temos em *quê emergências estavam passando o conhecimento para que tais mudanças fossem necessárias?* Gottlieb (2007, p.429), ao falar sobre a inclusão da lógica na formação curricular, afirma que "[...] essa disciplina oferecia uma completa teoria da análise e do debate, que ia do sistema técnico de definição e classificação ao estudo dos ardis usados na discussão".

Ainda que os currículos fossem constituídos por fontes cristãs, a intensificação da tradução em latim e grego de obras como *Elementos*, de Euclides, a *Álgebra*, de Al-Khwarizmi, o *Almagesto*, de Ptolomeu e vários outros (EVES, 2011) começou a influenciar os currículos. Gottlieb (2007, p.425) destaca que, entre os séculos XIII e XIV, "[…] a influência de Aristóteles era, de fato, suprema. Seus conceitos e terminologia, tal como traduzidos para o latim, eram correntes na maioria dos debates acadêmicos". Desse modo, ainda que os currículos fossem notadamente influenciados pelos valores religiosos do cristianismo, nesta época ocorre a descentralização da visão cristã para uma visão mais racionalista.

Notadamente, o Renascimento estava em toda parte. De acordo com Pedroso (2009, p. 210), esses debates, essas investigações e esse novo modo de pensar da renascença "[...] ganharia contornos definidos com os trabalhos científicos de Leonardo da Vinci e de outros pensadores, a prenunciar a física de Galileu e Newton, desenvolvidas no século XVII". Além desses, Pedroso (2009) cita, por exemplo, a Teoria Heliocêntrica de Copérnico, as observações feitas por Tycho Brahe sobre os movimentos dos astros e a descoberta da lei gravitacional de Newton. Esse "[…] ímpeto dado à matemática no século XVII foi partilhado por todas as atividades intelectuais e se deveu, em grande parte, sem dúvida, aos avanços políticos, econômicos e sociais da época" (EVES, 2011, p.340).

2.1 Algumas contribuições na Matemática

Apesar desse fértil período da Renascença e da Revolução Industrial, que revolucionou o pensamento moderno, havendo grande desenvolvimento na Filosofia, Astronomia, Biologia e, sobretudo, na Matemática, como apresentado por Pedroso (2009), Eves (2011) e Gondim e Sapunaru (2016), os Cálculos Diferencial e Integral se tornaram o advento mais prodigioso do referido período.

O apogeu dessas áreas foi impulsionado pelos acontecimentos dos séculos XVI e XVII com as criações de cientistas como René Descartes, Pierre de Fermat, Blaise Pascal, Cavalieri, John Wallis, Isaac Barrow, entre outros. De acordo com Eves (2011), já existiam muitos resultados de natureza infinitesimal nesses séculos, mas era preciso sistematiza-los. Esse processo deu início ao que hoje é conhecido como Matemática Moderna e culminou com o estabelecimento dos Cálculos Diferencial e Integral nos trabalhos de Newton e Leibniz.

Segundo Pedroso (2009), a revalorização do homem – conhecido como pensamento antropocêntrico[4] – que, anteriormente era rejeitado pelo pensamento teocêntrico, tornou-se interesse das investigações científicas entre os séculos do Renascimento. Em suas palavras, "a verdade é que os homens estavam se relacionando dentro de novas coordenadas e a visão do mundo não mais poderia seguir a orientação teocêntrica, que prevalecera durante séculos na Idade Média" (PEDROSO, 2009, p. 2009). Essas investigações ganharam contornos em meados do século XVII nos modos em que diversos matemáticos expressavam os infinitesimais[5].

Newton nasceu em numa propriedade rural de Lincolnshire em Woolsthorpe – Inglaterra. Mais tarde foi estudar em Cambridge onde se tornou primeiramente bacharel e, em seguida, doutor. Na mesma universidade, foi substituto de seu amigo e mestre Isaac Barrow, em 1669, quando assumiu a cátedra de matemática. Não se pode negar que Barrow, amigo e mestre de Newton na universidade, teve papel muito importante na obra de Newton, o que leva alguns historiadores a fazer aproximações entre algumas de suas ideias como, por exemplo, "a ideia de curvas geradas pelo movimento de um ponto no espaço, conceito base que diferencia seu cálculo do de Leibniz, indica uma forte participação de Barrow na construção do cálculo de Newton" (GONDIM; SAPUNARU, 2016, p. 123).

Há relatos históricos que, no período compreendido entre 1665 e 1666, em virtude da peste bubônica, a Universidade de Cambridge fechou as portas e Newton refugiou-se em sua casa de campo onde desenvolveu algumas de suas ideias, como o Teorema do Binômio, o Método das Fluxões, as primeiras ideias sobre atração gravitacional e outras que podem ser vistas, resumidamente, em Pedroso (2009) e, de forma mais aprofundada, em Gondim e Sapunaru (2016).

Segundo Eves (2011), suas pesquisas em óptica tiveram tanta repercussão que incitou discussões e veementes ataques de outros cientistas. Isso levou Newton a jurar que jamais publicaria suas pesquisas em óptica. Por essa razão, somente em 1742 foi publicada sua obra *Methodus fluxionum et serierum infinitorum – O método de fluxões e séries infinitas* – escrita em 1671, onde eram apresentados o método das fluxões que, segundo Pedroso (2009) estavam ligados a estudos feitos por Wallis sobre séries infinitas. Outra importante obra de Newton para o Cálculo Diferencial e Integral, citada por Boyer (1974), Pedroso (2009) e Eves (2011) é o *Tractus de Quadratura Curvarum – Um tratado sobre a quadratura de curvas* – onde foram feitas abordagens da derivada.

Já o alemão Leibniz, nascido em Leipzig, conhecido por seu interesse em história, teologia, linguística, biologia, geologia, matemática, entre outros saberes, de acordo com Pedroso (2009, p. 277), foi à procura de um método universal para que "[...] pudesse obter conhecimentos, fazer invenções e compreender a unidade essencial do universo". Essa procura direcionou-o à elaboração do cálculo no período de 1673 a 1676, em Paris, sob a influência pessoal de Huygens, presidente da *Real Sociedade Francesa de Ciência*.

Huygens apresenta a Leibniz diversas obras, dentre elas *A Geometria de Descartes* e muito do que Fermat vinha produzindo. No entanto, cabe ressaltar que, além dessas obras, Leibniz teve contato com muitas outras produções de diversos pensadores daquela época, a saber: Cavaliere,

---

[4] Em linhas gerais, o antropocentrismo entende que o homem é o centro de todas as coisas, ou seja, o universo existe para a satisfação humana.

[5] Em Gondim e Sapunaru (2016) o leitor pode ter contato com essas outras expressões dos infinitesimais em diversos atores, como Descartes, Fermat, Pascoal, Hudde, Sluse e outros.

Pascal, van Haurent.[6] Pedroso (2009, p.278) pressupõe que Leibniz se lança a esses estudos, impulsionado por Huygens, porque havia rumores de que Newton possuía o método para solucionar problemas que explicasse ou compreendesse àquela unidade essencial do universo.

Devido a isso, Leibniz intencionava tornar seus cálculos mais acessíveis e, então, criou diversos símbolos e abordou suas ideias através de uma interpretação geométrica, diferentemente de Newton, que abordou suas ideias sob uma interpretação cinemática. Além disso, a critério de curiosidade, Leibniz criou vários símbolos muito conhecidos e utilizados hoje no ensino de Cálculo Diferencial e Integral nas universidades, como – *summa* – conhecido hoje como integral e, também, e usados no processo de diferenciação.

Apesar de não ser o objetivo direto deste artigo, cabe ressaltar que, aqui, o leitor pode perceber que, junto a diversos historiadores da matemática – como Howard Eves, Carl Boyer e outros – é possível afirmar que a discussão de quem foi o inventor do Cálculo Diferencial e Integral – se Leibniz, Newton ou os dois – trata-se de uma discussão infrutífera para a história e filosofia das ciências. Gondim e Sapunaru (2016), por exemplo, apesar de não voltarem à baixa Idade Média, produzem diversos modos-outros de expressão de personagens da história da matemática que atravessam os cálculos de Leibniz e Newton, como Fermat, Descartes, Hudde, Sluse, Mercator, Pascal, Cavalieri, Barrow, Wallis e outros. Devido a isso, os autores chamam de *Cálculos Diferencial e Integral*, assumindo os diversos modos de expressá-los.[7]

Não acreditando na possibilidade de apenas um inventor do Cálculo Diferencial e Integral, mas na produção de Cálculos Diferencial e Integral, este artigo se lança à aventura de trazer um pouco de modos outros de expressões dos cálculos em alguns rastros de Eudoxo e Arquimedes, mais especificamente no Método de Exaustão de Eudoxo e no Método de Cálculo de Áreas de Arquimedes. Segundo Brolezzi (1996, p.28), essa escolha se justifica quando se entende que “[...] o surgimento do Cálculo no século XVII está em plena conexão com a busca de meios de simplificar os métodos gregos, como o método da exaustão”.

No entanto, é preciso antes ressaltar que não se trata de um estudo aprofundado de todas as produções de Eudoxo e Arquimedes – o que não seria exequível em um artigo – mas, como já declarado no título, apenas alguns rastros para apresentar possibilidades de introduzir noções do Cálculo Diferencial e Integral como infinito, limite, continuidade e etc. Porém, antes disso, segue uma história concisa das personagens supracitadas.

2.2 Eudoxo de Cnido (408 – 355 a.C.)

De acordo com Pedroso (2009), Eudoxo foi aluno do pitagórico Arquitas quando viajou para Tarento, atual Itália, e, em sua visita a Atenas, acredita-se que estudou com Platão. Atualmente, é considerado um dos maiores matemáticos do período helênico[8]. Cabe ressaltar que, além de ter sido matemático, Eudoxo foi também astrônomo e físico. (PEDROSO, 2009, p.92).

Pedroso (2009) acredita que Eudoxo ficou famoso por realizar diversas contribuições na ciência, sobretudo quando defendeu a ética baseada na noção de prazer. Em Matemática,

---

[6]Em Gondim e Sapunaru (2016) há uma apresentação muito dedicada ao modo como a produção do Cálculo de Leibniz estava atravessada por estes autores; é possível encontrar como, por exemplo, Leibniz compõe sua compreensão sobre os infinitésimos junto ao método de sobreposição para os indivisíveis de Cavaliere.

[7]Além disso, cabe ressaltar que os conceitos abordados por Newton e principalmente por Leibniz foram, mais tarde, muito importantes para matemáticos como Jakob Bernoulli (1654-1705), Johann Bernoulli (1667-1748), Euler (1707–1783) e outros matemáticos que – em seus trabalhos – deram continuidade ao processo de tornar os cálculos mais acessíveis e palatáveis (PEDROSO, 2009).

[8]De acordo como Eves (2011), o período helênico ou *Era Helenística* foi caracterizado como *oikoumene* (semelhante ao grego) que visava o ideal de Alexandre, ou seja, a difusão da cultura grega nos territórios conquistados. Nesse período, a Filosofia a História, a Ciência e a Matemática provaram seu primeiro desenvolvimento.

desenvolveu a conhecida teoria das proporções, desenvolveu um estudo a respeito da divisão áurea – seus estudos possibilitaram-no alcançar importantes resultados na geometria dos sólidos. Além dessas contribuições, Eudoxo resolveu a teoria das proporções entre quatro grandezas apresentadas no quinto livro dos *Elementos* de Euclides[9]. (PEDROSO, 2009).

Quando voltou para Cnido, Eudoxo ocupou um importante cargo legislativo, tornou-se professor de Teologia, Astronomia e Meteorologia, escreveu vários livros e influenciou diversos cientistas que se tornaram seus discípulos, como os irmãos Manaecmus e Teaetetus (BOYER, 1974). Segundo Boyer (1974, p.69), "Eudoxo deve ser lembrado na História da Matemática, não só pelo seu trabalho, mas também pelo de seus discípulos".

De acordo com Boyer (1974) e Pedroso (2009), Eudoxo realizou outras importantes contribuições para a Matemática ao relacionar diretamente sua Teoria das Proporções, que mais tarde é utilizado por Arquimedes, para provar áreas e volumes de figuras curvilíneas (PEDROSO, 2009). Boyer (1974) até acredita que, por motivo dessas contribuições, Eudoxo poderia ser concebido como o provável originador do Cálculo Integral.

Como já se pode notar, Eudoxo – mesmo desconhecendo os infinitésimos – realizou diversas contribuições para o que hoje é chamado de Cálculo Diferencial e Integral. Dentre essas contribuições, destacam-se o Método de Exaustão, que se relaciona de forma muito próxima ao que conhecemos por limite.

Segundo Boyer (1974), a proposição, chamada de propriedade de exaustão, base do método de exaustão de Eudoxo, era expressa da seguinte maneira:

> Se de uma grandeza qualquer subtrairmos uma parte não menor que sua metade e do resto novamente subtrair-se não menos que a metade e se esse processo de subtração é continuado, finalmente restará uma grandeza menor que qualquer grandeza de mesma espécie. (BOYER, 1974, p. 67).

Antônio Carlos Brolezzi afirma que, para isto, Eudoxo

> propôs então uma outra definição de proporção, de caráter mais geral, permitindo que os quatro termos da proporção fossem todos grandezas geométricas, evitando por completo qualquer extensão à ideia pitagórica de número. Desse modo, Eudoxo constrói um instrumento útil que podia ser manuseado sem haver misturas entre números e grandezas geométricas, isto é, sem ferir o modo de pensar grego. (BROLEZZI, 1997, p. 26).

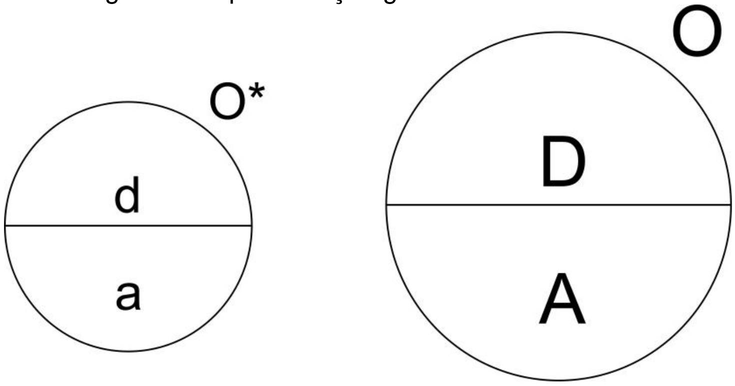
Essa definição de proporção, para Brolezzi (1996), pode ser muito bem relacionada à noção de limite utilizando um procedimento geométrico, ou seja, demonstrando a proporção entre as áreas e os diâmetros. Desse modo, considerando duas circunferências O e O^*, tal que O possui área A e diâmetro D e O^*possui área a e diâmetro d, é possível obter a seguinte proporção:

$$a: A :: d^2: D^2$$ [10]

[9]Em Pedroso (2009, p. 92-93) essa ideia de proporcionalidade está apresentada, resumidamente, da seguinte forma: supõe-se que A e B sejam grandezas de mesma espécie e que C e D também o sejam, é possível dizer que $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$? Para Eudoxo, $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ sempre que, tomando um m e n inteiros positivos quaisquer, $ma < nb$. Então $mc < nd$; se $ma = nb$, então $mc = nd$; se $ma > nb$, então $mc > nd$.

[10]O símbolo :: na linguagem matemática atual significa igual ou (=) e o símbolo : significa razão, ou seja, a está para A ou (a/A).

Figura 1: Representação geométrica de O e O^*



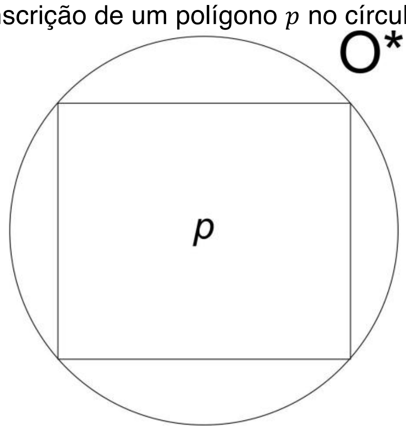
Fonte: Adaptação do autor na figura de Brolezzi (1996)

Segundo Boyer (1997), para demonstrar essa proporção é preciso mostrar que $\frac{a}{A} < \frac{d^2}{D^2}$ e que $\frac{a}{A} > \frac{d^2}{D^2}$ são possibilidade falsas, ou seja, é preciso utilizar o que se conhece na Matemática como demonstração por absurdo.

Usando a demonstração por absurdo e dizendo que esta proporção não funciona deste modo dir-se-ia que haveria outra área a' onde $a' : A :: d^2 : D^2$. No entanto, "[...] se a' for *menor* que a, então no círculo de área a podemos inscrever um polígono de área p tal que p seja *maior* que a' e *menor* que a" (BROLEZZI, 1996, p.27).

Para ilustrar esse processo, suponha que o polígono de área p seja um quadrado, como mostra a figura 2.

Figura 2: Inscrição de um polígono p no círculo de área a



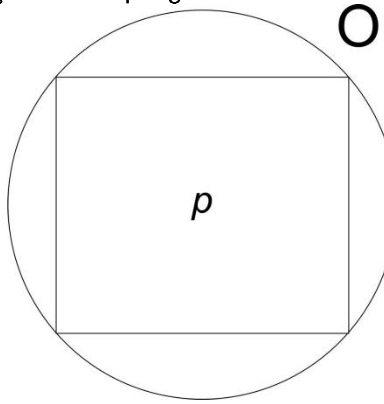
Fonte: Gondim (2014)

Boyer (1974) destaca que seja a grandeza prefixada $a - a'$ então $\varepsilon > 0$.

No círculo O^* foi inscrito um polígono de área P com o mesmo número de lados do polígono de área p, onde são consideradas as áreas fora dos polígonos, mas dentro do círculo, conforme Figura 1; ou seja, se P é a área de um polígono semelhante inscrito no círculo O, então sabemos que $p : P :: d^2 : D^2 :: a' : A$.

No entanto, se $p > a'$, então $P > A$. Logo, isso nos leva a um absurdo, pois o polígono está inscrito no círculo e não pode ter área maior que ele. Essa demonstração pode ser utilizada para mostrar também que a suposição $a' > a$ também é um absurdo, o que significa dizer que a única possibilidade verdadeira é $a : A :: d^2 : D^2$ (BROLEZZI, 1996).

Figura 3: Inscrição de um polígono P no círculo de área A



Fonte: Gondim (2014)

É possível notar aqui, pelo método de exaustão, que, ainda que o polígono não coincida com a circunferência, pode-se ter uma diferença tão pequena quanto se queira quando se aumenta o número de lados do polígono inscrito. Essa noção, intuitivamente, relaciona-se com a ideia de limites.

Segundo Brolezzi (1996, p.27), ao considerar as áreas dos polígonos inscritos como uma "[...] sequência infinita $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n, \ldots$, teríamos um limite C tal que, dado qualquer número positivo ε, podemos encontrar um outro inteiro positivo N, tal que para $n > N$". Com isso, é possível demonstrar que:

$$|C - Pn| < \varepsilon$$

Segundo Brolezzi (2006, p.28), os limites são trabalhados de forma mecânica, ou seja, ao ensinar "[...] limites não se faz uso de noções intuitivas de área, [...] que ilustrem o que está acontecendo em cada passo." Nesse aspecto, pode-se perceber a História da Matemática como instrumento de justificação dos porquês, como apresenta Miguel (1993), e de intuição.

2. 3 Arquimedes de Siracusa (287 – 212 a.C.)

Passando de Eudoxo a Arquimedes, em seu livro *Episódios da História antiga da Matemática*, datado de 2013, o historiador da Universidade de Yale, Asger Aaboe, ao falar de Arquimedes, inicia com a fala de Plutarco, dizendo:

> Não é possível encontrar em toda a geometria problemas mais difíceis e complicados, ou explicações mais simples e lúcidas. Alguns atribuem isso à sua genialidade; enquanto outros acham que foram produzidos por esforço e trabalho incríveis, embora aparentemente sejam resultados fáceis e obtidos sem esforço (AABOE, 2013, p.89).[11]

Essa genialidade e esforço realçados no texto de Plutarco fazem de Arquimedes um dos principais pensadores da Antiguidade Clássica[12]. Talvez seja pelas suas engenhosas máquinas bélicas ou pelos seus trabalhos na Matemática, na Física, na Astronomia e na Engenharia que Arquimedes se torna "o maior sábio da Antiguidade e um dos mais famosos de toda a história da ciência [...]" (PEDROSO, 2009, p.119).

[11]De acordo com Aaboe (2013), Plutarco viveu na metade do século I d.C. e escreveu esse trecho no seu livro *Vidas Ilustres*.
[12]Ocorreu, aproximadamente, do século VIII a.C. até século V d.C.

De acordo com Eves (2011), provavelmente Arquimedes tenha estudado na Universidade de Alexandria, pois Cônon, Dositeo e Eratóstenes[13] compunham seu quadro de amigos. No entanto, a sua fama não se deu apenas pelo fato de relacionar-se com grandes cientistas de Alexandria, mas também e principalmente pela sua genialidade e contribuições nas ciências. Segundo Pedroso (2009, p.119), Arquimedes "enriqueceu a geometria euclidiana, [...], introduziu importantes progressos na álgebra, lançou os fundamentos da mecânica e até prenunciou o Cálculo Diferencial e Integral".

Aaboe (2013) menciona que essas contribuições matemáticas citadas por Pedroso (2009) se deram em diversos trabalhos que, provavelmente, em ordem cronológica, são: "Sobre o Equilíbrio das Figuras Planas, I"; "A Quadratura da Parábola"; "Sobre o Equilíbrio das Figuras Planas II"; "Sobre a Esfera e o Cilindro"; "Sobre as espirais"; "Sobre os Cones e os Esferóides"; "Sobre os Corpos Flutuantes I, II"; "A Medida de um Cilindro"; "O Contador dos Grãos de Areia". Para Eves (2011, p.194), esses trabalhos são "[...] obras-primas de exposição matemática e lembram, consideravelmente, artigos de revistas especializadas modernas". Ao continuar sua explanação, conclui que a matemática arquimediana é provavelmente "[...] a mais notável das contribuições feitas à matemática por [e que] esses tratados se traduzam no desenvolvimento inicial de alguns métodos do cálculo integral" (EVES, 2011, p. 194).

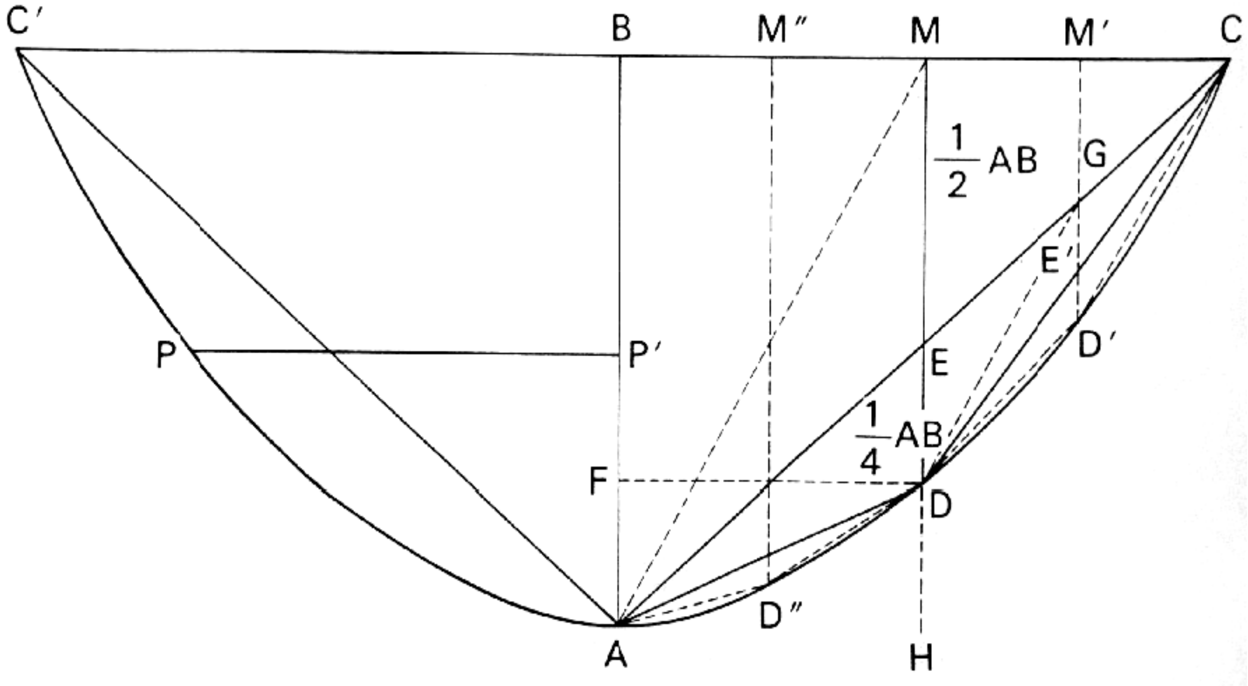
Nos livros *Sobre o Equilíbrio das Figuras Planas*, encontra-se a demonstração da Lei das Alavancas em simples teoremas, que posteriormente é utilizada para encontrar o centro de gravidade de várias lâminas. No livro *Corpos Flutuantes I*, Arquimedes justifica a Lei da Flutuação. No entanto, segundo Aaboe (2013, p.96) "[...] os livros de Arquimedes estão devotados à matemática pura", principalmente os que envolvem os Cálculos Diferencial e Integral. Por exemplo, em seu livro *Sobre a Esfera e o Cilindro*, Arquimedes demonstra que "[...] o volume de uma esfera é dois terços do volume do cilindro circunscrito, enquanto que a área da sua superfície é igual à área de quatro círculos máximos" (AABOE, 2013, p.97). Já nos livros *A Medida de um Círculo*, *A quadratura da Parábola* e *Sobre os Espirais*, vê-se uma dedicação à geometria plana, buscando demonstrar o que hoje conhecemos por π, o Método de Exaustão (cálculo integral) e *espiral de Arquimedes*, respectivamente (AABOE, 2013).

Arquimedes utilizou-se do Método de Exaustão de Eudoxo para encontrar a quadratura da parábola, hoje conhecido como Cálculo Integral, no qual, segundo Pedroso (2009, p.122), ele descobre que a "[...] área de um segmento parabólico é $\frac{4}{3}$ da área do triângulo inscrito de mesma base e altura".

Nesse processo, segundo Pedroso (2009), Arquimedes supôs que uma porção de parábola determinada por CC', que possui o eixo AB perpendicular, tal que AP' seja proporcional a $(PP')^2$. Segundo Pedroso (2009, p.122), "Arquimedes mostrou que essa porção de parábola é $\frac{4}{3}$ da área do triângulo $C'AC$, o que equivale a dizer que a área limitada por AB, BC, e a parábola é $\frac{4}{3}$ da área do triângulo " Isso pode ser observado na Figura 4.

[13]De acordo com Eves (2011), Cônon e Dositeo eram sucessores de Euclides, enquanto que Eratóstenes era bibliotecário da Universidade.

Figura 4: Parábola determinada por CC'



Fonte: Pedroso (2009, p.122).

Arquimedes somou a área dos triângulos ADC e ABC, onde D é o ponto de uma das paralelas de AB, onde M é ponto médio de BC. Nesse processo, mostra-se que $ADC = \frac{1}{4}ABC$. Em continuidade ao processo, foram construídas paralelas a AB por M' e M'', que são pontos médios de D' e D'', respectivamente, o que levou Arquimedes a mostrar que:

$$AD''D + DD' = \frac{1}{4}ADC = \frac{1}{4^2}ABC$$

Realizando esse processo por exaustão, de acordo com Pedroso (2009), é possível concluir que a área parabólica é dada aproximadamente por:

$$ABC + \frac{1}{4}ABC + \frac{1}{4^2}ABC + \cdots + \frac{1}{4^n}ABC$$

Aaboe (2013) menciona que esse tipo de problema está relacionado com o que é chamado de integração, e acredita que a “utilidade de tais raciocínios está ligada ao processo de intuição que, posteriormente, favorece no processo de generalizações”. Em suas próprias palavras:

> [...] estudo da Matemática grega mostra como as ideias originais do cálculo têm início em considerações que envolvem tanto noções de grandezas discretas quanto de grandezas contínuas, servindo ambas para se chegar aos resultados do Cálculo [...] (BROLEZZI, 1996, p.29).

3 PARA FINALIZAR

Tomando em conta esses modos outros de expressão dos Cálculos Diferencial e Integral, junto a Pedroso (2009), Eves (2011), Boyer (1974), Gondim e Sapunaru (2016) e, sobretudo Brolezzi (1996; 1999), acredita-se que os rastros de Eudoxo e Arquimedes podem potencializar os processos pelos quais perpassam o ensino de Cálculo Diferencial e Integral nas nossas instituições de ensino superior, pois, tomando essas ideias iniciais do pensamento grego para o Cálculo Diferencial e Integral – ou os outros modos de expressão dos cálculos – Brolezzi (1999) acredita que é possível ensiná-lo apropriando-se da História da Matemática, uma vez que, para o pesquisador, através dos problemas fundantes dos cálculos, é possível encaminhar os estudantes à intuição dos conceitos atuais.

Ao propor discussões sobre os limites e as possibilidades da História da Matemática como recurso didático, Fauvel e Maanen (2002) declara que o ICMI (Comissão Internacional de Instrução Matemática)[14], em seu contexto mais amplo, propõem uma importante problemática sobre os limites e as possibilidades da História da Matemática como recurso didático. Essas discussões foram publicadas na obra *História na Educação Matemática: o estudo ICMI*[15], na qual pesquisadores como Fauvel, Maanem, Menghini, Grunet, Rogers, Philippou, Christou, Bussi, Sierpinska e outros procuraram apresentar as discussões a respeito da inserção da História da Matemática em sala de aula. Além disso, a obra buscou apresentar o desenvolvimento da História da Matemática como campo de pesquisa em vários países como Argentina, Áustria, Brasil, China, Israel, Itália, França e outros. Nas discussões realizadas pelos pesquisadores supracitados, são apresentadas possibilidades e limitações do uso pedagógico da História da Matemática.

Em se tratando das possibilidades do uso da História da Matemática como recurso didático, dentre as apresentadas por Miguel (1993) em sua tese[16], destacam-se as que assumem que i) a História é uma fonte de motivação para o ensino e aprendizagem de Matemática; ii) a História é um instrumento de promoção do pensamento independente e crítico; iii) a História é um instrumento unificador dos vários campos da Matemática. Esses potenciais da História da Matemática como instrumento pedagógico são caracterizados, respectivamente, por Miguel (1993) como História – Motivação, História – Dialética e História – Unificação.

3.1 História – motivação

Pesquisadores como Tzanakis e Arcavi (2002), Barbin (2002) e Miguel (1993) defendem que a História da Matemática é uma “fonte de motivação”, pois “[...] a matemática exige o pensamento e a seriedade, enquanto que a história alivia a tensão e conforta [...]” (MIGUEL, 1993, p. 64). Esse caráter “aliviador” de tensões é considerado por Miguel (1997) como uma ação “motivadora”, ou seja, a História da Matemática nos “[...] encoraja a pensar em matemática como um processo contínuo de reflexão e de melhoria ao longo do tempo, e não como uma estrutura definida composta de verdades irrefutáveis e imutáveis” (BARBIN et al., 2002, p. 64, tradução nossa).

Essa motivação acontece quando a História da Matemática é “vista como contraponto momentâneo necessário aos momentos formais do ensino, que exigiria grande dose de concentração e esforço por parte do aprendiz” (MIGUEL, 1997, p. 75). De acordo com Simons (1923 apud MIGUEL, 1993, p. 62), a “História da Matemática e as recreações despertam e mantêm o interesse pela matéria” e “[...] suplanta o puro efeito de motivação que toda história bem contada e interessante pode causar” (BROLEZZI, 1991, p. 104). No entanto, “pode-se acrescentar que o interesse provocado pelo uso da história vai além de seu ser apenas um fator de motivação” (BARBIN et al., 2002, p. 69).

3.2 História – dialética

Além de seu caráter motivador, Miguel (1993) acredita que a História da Matemática pode levar o aluno a desvencilhar-se de um pensamento “mecânico”, “dependente” e “acrítico”, pois ela “[...]

[14]Trecho original: [International Comission Mathematical Instrucion].
[15]Trecho original: [History in Mathematics Education: the ICMI Study].
[16]Miguel (1993) apresenta outras possibilidades do uso da História da Matemática como recurso didático que, por questões de contexto, foram omitidas neste artigo.

excita a curiosidade dos alunos e incentiva-os a *questionar*" (BARBIN et al., 2002, p. 67, tradução nossa). É nessa possibilidade questionadora e dialética da História da Matemática que, segundo Barbinet al. (2002), o aluno começa a intuir significados e adquire o que Miguel (1993) caracteriza como pensamento "independente" e "crítico".

Nesse processo de intuição para o aprendiz, a "Matemática se torna viva, ela não é mais um objeto rígido. É o objeto da investigação, controvérsia, contém erros e usa métodos de tentativa e erro" (BARBIN et al., 2002, p. 67), ou seja, dialético.

De acordo com Miguel (1997, p. 85), o senso comum pedagógico é desvencilhado quando acreditamos que a formação de "[...] cidadãos com base na construção de um pensamento independente exige uma concepção [...] pedagógica do conhecimento matemático que ultrapasse os aspectos meramente lógicos e epistemológicos [...]", e – nessa construção do pensamento crítico, investigativo e independente – Barbinet al. (2002) acredita que o aluno se torna um ator de seus próprios métodos, seguindo o caminho da intuição.

3.3 História – unificação

Para Miguel (1997) e Fauvel e Maanen (2002), a História da Matemática está intrinsecamente ligada a outros campos do saber, seja a Física, a Astronomia, a Biologia, a Química e outras.

Segundo Miguel (1997), a história como possibilita uma conexão e uma interconexão da Matemática com todas as áreas do conhecimento. Em outras palavras, o autor defende que "apenas a história [...] poderia fornecer uma perspectiva globalizadora da matemática [...]" (MIGUEL, 1997, P. 85). Apesar de ser uma opinião radical, Demattê (2004, p. 218, tradução nossa) realça que "a História da Matemática contribui para caracterizar a matemática que, ensinada [...] como uma orientação humanista, uma vez que pode *atravessar* as disciplinas através da exploração dos seus objetivos comuns". De acordo com Baroni e Bianchi (2007), essa característica da História da Matemática como instrumento de unificação, em suas palavras possibilita um "elo entre a Matemática e outros sujeitos: a Matemática com outras disciplinas, a interdisciplinaridade [...]" (BARONI; BIANCHI (2007, p. 32), e, sobretudo, o contato dos alunos com problemas, textos, pesquisas orientadas historicamente podem direcionar os alunos a discussões que, consequentemente, "podem desenvolver melhor o seu lado pessoal" (BARONI; BIANCHI, 2007, p. 32). Ou seja, para esses pesquisadores, ensinar matemática utilizando este instrumento pedagógico pode contribuir para oportunizar aos alunos à compreensão do desenvolvimento matemático, bem como um desenvolvimento *sócio-político-cultural*.

3.4 Limitações do uso da História da Matemática como recurso didático

Apesar das possibilidades mencionadas, existem diversas opiniões que apontam obstáculos para utilizar a História da Matemática como recurso didático. No congresso *History and Pedagogy of Mathematics*, Siu (2006) apresentou uma pesquisa em que foram entrevistados 360 professores de Matemática de 41 escolas em Hong Kong.

Após diversas conversas com professores de diferentes escolas sobre a avaliação do valor da História da Matemática e de sua utilização em suas salas de aula – lista dezesseis limites ou fatores desfavoráveis para o uso da História da Matemática no ensino. Dentre eles, destacam-se: "Eu não tenho tempo para isso em sala de aula!"; "Os alunos consideram como história e eles odeiam aula de história!"; "Isso não é matemática!"; "Os alunos consideram tão chato quanto os próprios assuntos de matemática!"; "Há uma falta de formação de professores em História da Matemática!" e "Há uma falta de recursos materiais nele!". No artigo apresentado por Siu (2006), percebe-se que há grande preocupação, dos professores pesquisados, com a classificação dos alunos em atividades avaliativas. Os professores também consideram o uso da história uma proposta pedagógica difícil e desafiadora devido à sua falta de formação.

Corroborando com os argumentos apresentados por Siu (2006), Tzanakis e Arcavi (2002) e Baroni e Bianchi (2007) destacam que alguns educadores têm dificuldades ao utilizar a História como recurso didático, pois não encontram uma literatura adequada e que nem sempre a História tem um caráter motivador, pois existem alunos que não possuem interesse por História e, consequentemente, acarretará num desinteresse pela Matemática (BAGNI, 2002).

No entanto, Baroni e Bianchi (2007, p. 36) acreditam que, “do ponto de vista pedagógico, a forma mais interessante e eficiente da inserção da História da Matemática [...] seja sua presença dentro do contexto, como parte integrante do conteúdo.”. Para realizar essa inserção, “[...] exige vontade, material apropriado e coragem” (Ibid., 2007, p. 36), pois a História “[...] quando devidamente reconstituída e organicamente articulada – pode e deve desempenhar um papel subsidiário em educação Matemática” (MIGUEL, 1993, p. 107).

Diante destas colocações, pode-se tomar em conta que os modos outros de expressão dos cálculos diferencial e integral oferecem possibilidades e limitações no processo de ensino. No entanto, fica claro que se pode afirmar que **esses** pontos da História da Matemática podem possibilitar ao aluno pensar nos processos de rupturas de determinados discursos matemáticos e nas transformações pelos quais tais ideias passaram até chegarmos aos conceitos hoje abordados nos livros didáticos. Ou seja, o estudo histórico parece favorecer uma análise mais próxima aos conceitos e, sobretudo, mais íntima com as ideias deixadas nos rastros dos matemáticos envolvidos na invenção dos Cálculos Diferencial e Integral. O método de exaustão de Eudoxo e o cálculo de áreas de Arquimedes, aqui apresentados, parecem oferecer essas potencialidades destacadas pelos pesquisadores. No entanto, também podem limitá-las se se tomar em conta as outras variantes aqui apresentadas.

REFERÊNCIAS

AABOE, A. **Episódios da história antiga da matemática**. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

BAGNI, G. T. Difficulties with series in history and in the classroom. In: **History in mathematics education**: the ICMI study. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002. p. 82-86.

BARBIN, E. et al. Integrating history: research perspectives. In: **History in mathematics education**: the ICMI study. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002. p. 63-70.

BARONI, R. L. S.; BIANCHI, M. I. Z. (Org.). **História da matemática em livros didáticos**. Rio Claro: SBHMat, 2007.

BOYER, C. **História da matemática**. Tradução de Elza F. Gomide, São Paulo: Edgard Blücher; EDUSP, 1974.

BROLEZZI, A. C. **A tensão entre o discreto e o contínuo na história da matemática e no ensino de matemática**. 1996. 95 f. Tese (Doutorado em Educação)–Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1996.

BROLEZZI, A. C. Raízes do cálculo na Grécia Antiga. **Revista Pesquisa e Pós-Graduação**, Ouro Preto, ano 1, v. 1, n. 1, p. 38-41, jan./jun. 1999.

DEMATTÊ, A. A questionnaire for discussing the “strong” role of the history of mathematics in the classroom. In: INTERNATIONAL STUDY GROUP ON THE RELATIONS BETWEEN THE HISTORY AND PEDAGOGY OF MATHEMATICS & FOURTH EUROPEAN SUMMER UNIVERSITY HISTORY AND EPISTEMOLOGY IN MATHEMATICS EDUCATION, 4., 2004, Uppsala. **Anais...** Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/271215291>. Acesso em: 22 abr. 2014.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Tradução de Hygino H.

Domingues. Campinas, SP: Ed. da UNICAMP, 2011.

FAUVEL, J.; MAANEN, J. V. **History in mathematics education**: the ICMI study. Dordrecht. Kluwer Academic Publishers, 2002. Embora

GONDIM, D. M. **A história da matemática como recurso didático para o ensino de cálculo diferencial e integral**. 2014. 82f. Trabalho de Conclusão de Curso–Instituto Federal de Minas Gerais, São João Evangelista, 2014.

GONDIM, D. M.; SAPUNARU, R. A. **Os atores (des)conhecidos dos cálculos.** Porto Alegre, RS: Fi, 2016.

GOTTLIEB, A. **O sonho da razão**: uma história da filosofia ocidental da Grécia ao Renascimento. Rio de Janeiro: DIFEL, 2007.

MIGUEL, A. **Três estudos sobre a história e educação matemática**. 1993. 361f. Tese (Doutorado em Educação)–Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1993. Disponível em: <http://www.bibliotecadigital.unicamp.br/document/?code=vtls000069861>. Acesso em: 22 abr. 2014.

MIGUEL, A. As potencialidades da história da matemática em questão: argumentos reforçadores e questionadores. **Revista de Educação Matemática**: Zetetiké, Campinas, v. 5 n. 8, p. 73-89, jul./dez., 1997.

MOREY, B. Fontes históricas nas salas de aula de matemática: o que dizem os estudos internacionais. **Revista Brasileira de História da Matemática**, v. 13, n. 26, p. 73-83, abr. 2013. Disponível em: <http://www.rbhm.org.br/vo13-no26.html>. Acesso em: 10 mar. 2014.

PEDROSO, H. A. **História da matemática**. São Paulo: [s.l.], 2009.

A BALESTILHA: UM INSTRUMENTO NÁUTICO COMO RECURSO PARA ABORDAR CONCEITOS MATEMÁTICOS

THE CROSS-STAFF: A NAUTICAL INSTRUMENT AS A RESOURCE FOR APPROACHING MATHEMATICAL CONCEPTS

BATISTA, Antônia Naiara de Sousa[1]
PEREIRA, Ana Carolina Costa[2]

RESUMO

Dentre as várias possibilidades de unir teoria à prática no ensino de matemática, o estudo de instrumentos históricos surge no intuito de contribuir para o entendimento de uma matemática prática incorporada ao longo da história, oportunizando assim um ensino diferente do tradicional. Assim, em meio aos vários instrumentos inseridos entre os séculos XVI e XVIII, destacamos neste trabalho a Balestilha, um dispositivo náutico, de origem desconhecida, cuja finalidade era mensurar a altura de uma estrela em relação à linha do horizonte, ou distância entre dois astros, sendo essa medida de caráter angular. Logo, o intuito desse artigo é conhecer a percepção dos professores, em formação, sobre a viabilidade do uso da Balestilha para abordagem de conceitos matemáticos na Educação Básica. No primeiro momento, fizemos uso de metodologia qualitativa com aporte bibliográfico, buscando assim, trabalhos que tratassem sobre instrumentos históricos de medida. Em seguida, fizemos um levantamento de todos os instrumentos históricos, mais especificamente, os náuticos, usados entre os séculos XV e XVIII, isto feito, escolhemos apenas um deles para trabalhar de forma mais aprofundada, a Balestilha. No segundo momento, fizemos uso de uma metodologia de estudo de caso, para fundamentar e conduzir o trabalho realizado dentro do Curso de Extensão. A proposta de utilização da Balestilha para abordagem de conceitos matemáticos na sala de aula foi bem acolhida pelos participantes, no intuito de agregar, às suas aulas, práticas diferentes de se ensinar os conhecimentos matemáticos, de maneira a torná-los mais significativos e claros para os estudantes.

Palavras-chave: História da Matemática. Balestilha. Conceitos Matemáticos.

ABSTRACT

Among the various possibilities of uniting theory and practice in mathematics teaching, the study of historical instruments arises aiming to contribute for the understanding of a practical mathematics incorporated throughout history, then giving the opportunity to an education different from the traditional. Therefore, in the middle of several instruments introduced between the 16th and 18th centuries, we highlight, in this study, the Cross-staff, a nautical device, with unknown origin, whose purpose was to measure the height of a star in relation to the horizon, or the distance between two stars, being this measure the angular distance. Therefore, this article aims to know the perception of the teachers-in-training about the viability of using the Cross-staff to introduce mathematical concepts in primary and secondary education. At first, we used a qualitative research methodology with bibliographic contributions, searching studies that talked about historical measurement instruments. After, we did a survey about every historical instrument, specifically, the nautical ones, used between the 15th and 18th centuries, and then we chose only one of them to work with in a deeper way, the Cross-staff. Posteriorly, we used the case study methodology to justify and conduct the work made during the extension course. The proposal of using the Cross-staff to introduce mathematical concepts in the classroom was well received by the participants, in order to gather in their practical classes, different ways to teach the mathematical knowledge, in order to make them more meaningful and clear to the students.

Keywords: History of Mathematics. Cross-staff. Mathematical concepts.

[1]Discente do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática do Instituto Federal do Ceará (IFCE), Fortaleza, Ceará, Brasil. Endereço eletrônico: antonianaiarabatista@yahoo.com.br.
[2]Doutora em Educação pela Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN), Natal, Rio Grande do Norte, Brasil. Docente do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Ceará (UECE), Fortaleza, Ceará, Brasil e do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática do Instituto Federal do Ceará (IFCE), Fortaleza, Ceará, Brasil. Endereço eletrônico: carolina.pereira@uece.br.

1 INTRODUÇÃO

No ensino de Matemática são inúmeras as possibilidades de promover aulas diferenciadas do método "tradicional". Para isso, apoiamo-nos nas tendências pedagógicas como: a Etnomatemática, a Tecnologia da Informação e Comunicação, a Modelagem, a Resolução de Problemas, a História da Matemática, jogos, entre outros. Destas, destacaremos a História da Matemática, por ser uma das áreas que tem sido amplamente discutida no Brasil em relação a sua inserção no ensino de matemática, visando melhorar a abordagem e contextualização dos conceitos matemáticos.

A História da Matemática possibilita conhecer outras civilizações e culturas que tiveram influência na formação dos conceitos matemáticos e, além disso, esta atua como um recurso explicativo para exposição do desenvolvimento da matemática ao longo dos anos. Por meio dela, podemos compreender fatos históricos que justificam, ou nos fazem compreender, de maneira mais clara, como se desenvolveu tais estruturas de cálculo produzidas em períodos passados e os motivos de sua realização de forma especifica. D'Ambrosio (1996, p. 10) nos apresenta alguns propósitos de utilização da história da matemática no ensino:

> 1. para situar a Matemática como uma manifestação cultural de todos os povos em todos os tempos, como a linguagem, os costumes, os valores, as crenças e os hábitos, e como tal diversificada nas suas origens e na sua evolução;
> 2. para mostrar que a Matemática que se estuda nas escolas é uma das muitas formas de Matemática desenvolvidas pela humanidade;
> 3. para destacar que essa Matemática teve sua origem nas culturas da antiguidade mediterrânea e se desenvolveu ao longo da Idade Média e somente a partir do século XVII se organizou como um corpo de conhecimentos, com um estilo próprio;
> 4. para saber que desde então a Matemática foi incorporada aos sistemas escolares das nações colonizadas, se tornou indispensável em todo o mundo em consequência do desenvolvimento científico, tecnológico e econômico, e avaliar as consequências socioculturais dessa incorporação.

Na visão do autor, percebemos que ele não engloba só apenas aspectos conteudistas da História da Matemática, mas apresenta o lado humanista da ciência apontando sua composição como uma união cultural de diversos povos, mostrando que seu desenvolvimento se deu de maneira distinta em cada período histórico, e que ao longo do tempo se transformou em um corpo de conhecimento unificado, tornando-se essencial para o desenvolvimento da ciência moderna.

Com o propósito de incorporar a História da Matemática na sala de aula, podemos recorrer a diversas situações que nos permitam através delas realizar a integração entre História da Matemática, Matemática e Ensino. Dentre elas, podemos destacar: aplicação de projetos na sala de aula que envolvam a História da Matemática; abordar concepções matemáticas específicas de uma cultura; trabalhar tópicos inerentes à matemática de maneira mais aprofundada; utilizar a história da matemática para complementar o conhecimento matemático. (BARONI, TEXEIRA E NOBRE, 2004).

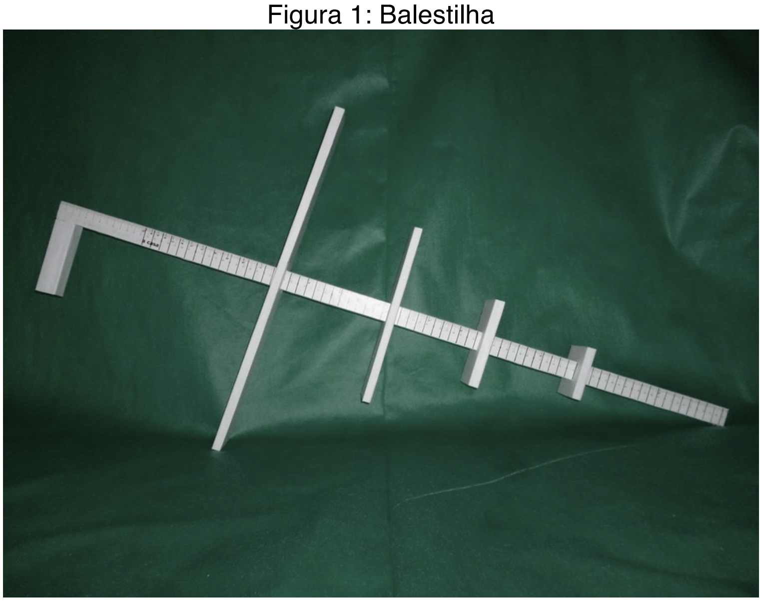
Diante dessas possibilidades, vislumbramos nos instrumentos históricos de medida, mais especificamente nos náuticos, a possibilidade de explorar conceitos matemáticos incorporados, mobilizados e disseminados por eles. Escolhemos, portanto, a Balestilha, um instrumento náutico, usado entre os séculos XVI e XVIII. Para aplicação dessa proposta, elaboramos um Curso de Extensão Universitária na Universidade Estadual do Ceará (UECE), que foi ofertado pelo Laboratório de Matemática e Ensino (LabMatEn). Deste modo, essa pesquisa tem o intuito de conhecer a percepção dos professores, em formação, sobre a viabilidade do uso da Balestilha, para abordagem de conceitos matemáticos na Educação Básica.

2 MATERIAIS E MÉTODOS

Durante a Era das Grandes Navegações e Descobrimentos Marítimos, século XV e XVI, portugueses e espanhóis aventuraram-se pelos oceanos na busca por novas rotas marítimas para se chegar até as Índias e conquistar novas terras (FERNANDES; LONGHINI, 2011). Assim, ao longo dessas viagens os pilotos precisavam se afastar de terra à vista e encontrar recursos que os auxiliassem em sua localização em alto-mar (PINTO, 2010).

Foi, então, que vários instrumentos náuticos passaram a ser utilizados por esses navegantes, como o astrolábio, o quadrante, a balestilha, a tábua da Índia, entre, outros. Neste trabalho, iremos tratar da Balestilha (figura 1): um instrumento náutico, caracteristicamente considerado simples do ponto de vista físico. Sua origem é desconhecida e pouco se sabe, precisamente, quando passou a ser adotado pelos marinheiros em alto-mar.

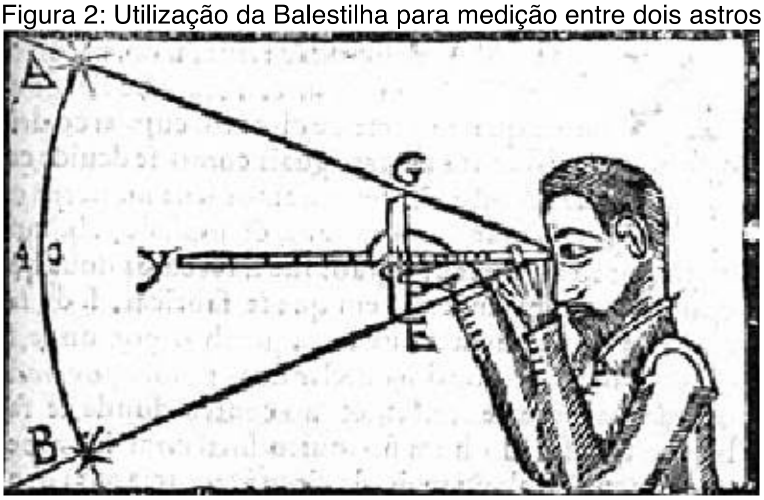
Figura 1: Balestilha



Fonte: Autoras

Sua primeira aparição foi constatada no Livro de Marinharia, de João de Lisboa. Todavia, o documento não estava datado, mas, segundo Albuquerque (1988), podemos situá-lo no primeiro quartel do século XVI, não muito posterior a 1514. A função da Balestilha era basicamente medir a altura do astro em relação à linha que delimita o mar do horizonte, ou a distância entre dois astros (figura 2), sendo essa medida de caráter angular.

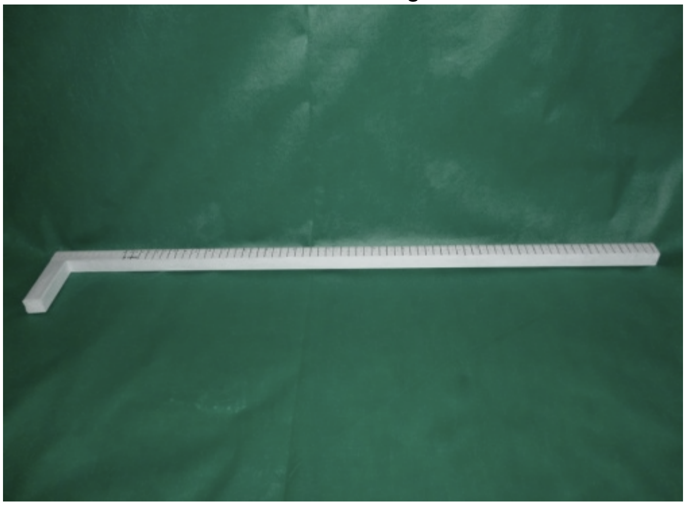
Figura 2: Utilização da Balestilha para medição entre dois astros

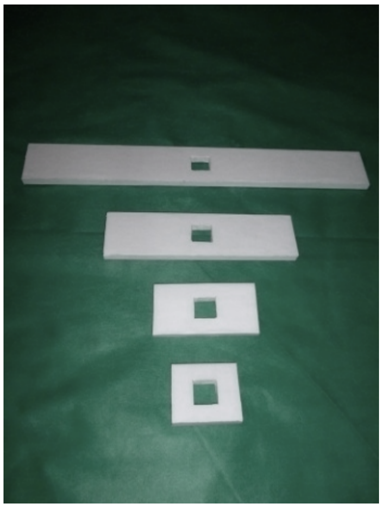


Fonte: (MOREY; MENDES, 2005, p. 23)

O instrumento é composto por uma vara de madeira de secção quadrada chamada de virote, com tamanho arbitrário (figura 03, à esquerda). Porém, um virote com mais de quatro palmos de comprimento sofreria certa desvantagem em relação a outro com pouco menos ou exatamente quatro palmos, pois durante as navegações ocorreriam muitas ventanias que o impossibilitavam mirá-la na linha do horizonte (PIMENTEL, 1762). Outro componente do instrumento seria as soalhas (figura 03, à direita), pedaços de madeira menores que o virote e com um orifício no seu centro, onde ele seria introduzido.

Figura 3: Virote e Soalhas





Fonte: Autoras

Segundo Pimentel (1762), as soalhas deveriam ter tamanhos na seguinte ordem: a primeira seria 1/2 do virote, a segunda 1/4 do virote, a terceira 1/8 do virote e finalmente a quarta, chamada também de martinete, teria como medida 1/16. Em seguida, vem o processo de graduação do virote que poderia ser executado de duas maneiras:

> A Balestilha se póde graduar ou geometricamente, ou por via de numeros. A graduação Geometrica tem muita difficuldade na execução, e necessita de huma diligencia, e circumspecção extraordinaria, pela qual razão he melhor, e mais facil usar de padrão Arithmetico por meio da taboada seguinte, de cujo uso, e fabrica logo trataremos (PIMENTEL, 1762, p. 142)[3].

De acordo com o autor, existiam dois tipos de graduação, sendo o primeiro deles, de forma geométrica, que foi descartado devido aos empecilhos encontrados durante sua realização, sendo substituído pela graduação trigonométrica. Diante dessas graduações, verificamos que, por meio da graduação geométrica[4], podemos abordar os conceitos de retas paralelas e perpendiculares, secção e medida de ângulos, entre outros. Além de fazer uso de ferramentas do tipo, esquadro, transferidor e compasso, para realizar a marcação dos ângulos no virote.

No processo de graduação trigonométrica[5], constatamos a presença de conceitos de seno, cosseno, tangente e complemento de um ângulo, razões trigonométricas na circunferência e transformações. Além de que, na aplicação do instrumento, podemos explorar a trigonometria no triângulo retângulo.

3 PERCURSO METODOLÓGICO

No primeiro momento desta pesquisa, utilizamos uma metodologia qualitativa com aporte bibliográfico, conforme menciona Marconi e Lakatos (2010, p. 166):

[3]A citação está igual ao trecho da obra do autor, sem modificações ortográficas.
[4]Vide Batista e Pereira (2014).
[5]Vide Batista e Pereira (2015).

> A pesquisa bibliográfica, ou de fontes secundárias, abrange toda bibliografia já tornada pública em relação ao tema de estudo, desde publicações avulsas, boletins, jornais, revistas, livros, pesquisas, monografias, teses, material cartográfico, etc., até meios de comunicação oral: rádio, gravações em fita magnética e audiovisuais: filmes e televisão. Sua finalidade é colocar o pesquisador em contato direto com tudo o que foi escrito, dito ou filmado sobre determinado assunto, inclusive conferências seguidas de debates que tenham sido transcritos por alguma forma, quer publicadas, quer gravadas.

Nesse sentido, iniciamos uma busca por artigos, revistas, livros, sites, entre outros, que trouxessem em seu conteúdo o conhecimento acerca dos instrumentos históricos de medida. Em seguida, realizamos um levantamento de todos os instrumentos históricos, mais especificamente de origem náutica, utilizados entre os séculos XV e XVIII.

Posteriormente, escolhemos apenas um único instrumento para explorá-lo de maneira mais aprofundada. Nesse caso, foi a Balestilha, da qual buscamos conhecer seus criadores, descrição, construção, graduação, aplicação, o contexto em que estava inserida, etc. Nesse momento, demos ênfase aos conhecimentos matemáticos que estavam presentes no instrumento.

No segundo momento, utilizamos uma metodologia de estudo de caso com um auxílio qualitativo citado por Fiorentini e Lorenzato (2009, p. 110):

> O estudo de caso busca retratar a realidade de forma profunda e mais completa possível, enfatizando a interpretação ou análise do objeto, no contexto em que ele se encontra, mas não permite a manipulação das variáveis e não favorece a generalização. Por isso, o estudo de caso tende a seguir uma abordagem qualitativa. Mas isso não significa abandonar algumas quantificações necessárias. Essas quantificações podem ajudar a qualificar melhor uma análise.

A escolha da metodologia de estudo de caso para esta pesquisa justifica-se devido à intervenção ter sido realizada com um grupo de professores em formação, por meio da oferta de um Curso de Extensão Universitária com os alunos dos cursos de Licenciatura em Matemática. Esse curso foi intitulado “O uso de artefatos históricos para a exploração dos conceitos matemáticos: a Balestilha como instrumento de medição”, visando mostrar a confecção da Balestilha e a possibilidade de aplicação dela na Educação Básica para explorar conceitos matemáticos.

Durante o curso, utilizamos como coleta de dados, fotos, gravações de áudio e vídeo, aplicação de atividades complementares e dois questionários. O curso ocorreu na UECE e foi ofertado pelo LabMatEn. Teve como carga horária total 36h/a, sendo 24h/a presenciais e 12h/a à distância, no horário 17h10min às 18h20min, com 25 vagas. No entanto, somente 21 vagas foram preenchidas.

Ao longo da formação, foram ministradas aulas sobre: o uso de artefatos históricos para o Ensino de Matemática; a Matemática nos séculos XV e XVI; a Matemática e as Navegações; instrumentos de medições utilizados na época das grandes Navegações; conceitos iniciais de astronomia; a história e a construção da Balestilha; realização da graduação geométrica e trigonométrica; e por fim, a aplicação do instrumento em situações do cotidiano.

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Como foi dito anteriormente, para recolher os dados no Curso de Extensão Universitária, fizemos gravações de áudio e vídeo, retiramos fotos, entregamos atividades complementares e aplicamos dois questionários, um no início do curso, e o outro ao fim dele. No entanto, neste artigo iremos apresentar apenas uma breve análise dos questionários. Neste tópico apresentaremos a natureza dos questionários, relatando acerca dos seus objetivos, organização e perguntas. Ademais, iremos apresentar uma breve análise das respostas encontradas em cada um dos questionários.

4.1 Descrição dos questionários

O primeiro questionário foi dividido em duas partes. A parte introdutória continha indagações acerca do perfil dos participantes, como: sexo e idade, rede de ensino, onde concluiu o ensino médio, o semestre que estava cursando, caso já tenha lecionado ou leciona, entre outras. Cabe ressaltar que esses discentes não tiveram seus nomes identificados.

A segunda parte era composta por questões abertas nas quais os alunos poderiam expor suas opiniões. Nessa etapa, o foco era conhecer o que teriam os motivados a participarem do curso; se conheciam a História da Matemática e de que forma eles haviam aplicado o referido conhecimento em suas aulas; se conheciam um artefato histórico; se acreditavam que, por meio da construção dele, seria possível apropriar-se de conhecimento matemático; e quais seriam as suas expectativas nesse primeiro momento.

No questionário final, realizou-se um total de sete questões, das quais duas eram fechadas, com opção de "sim" ou "não", voltada para avaliar se, ao final dos dez encontros, o curso ajudaria na formação/complementação; e, se a partir das atividades distribuídas no decorrer do curso, os alunos perceberiam a História da Matemática como uma fonte para auxiliar o trabalho docente.

Posteriormente, as cinco restantes foram abertas e buscavam resultados baseados nos diversos momentos do curso, por exemplo: em que aspectos as atividades propostas pelo curso o ajudaram a melhorar sua metodologia de ensino? Ou, após essa experiência, quais foram as contribuições para a formação do discente; e se agora, depois da explanação da teoria, da construção, graduação e aplicação do instrumento, seja visível uma possibilidade de apropriação do conhecimento matemático?

4.2 Analisando o primeiro questionário

No primeiro momento, teve-se um total de 21 questionários respondidos, ou seja, 21 participantes, entre homens e mulheres, com idades entre 19 e 36, sendo dois deles do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE) e os outros pertencentes à UECE, ambos cursando o curso de Licenciatura em Matemática.

Notamos que a maioria dos discentes concluiu seus estudos em escolas públicas, somando um total de 62%. Dos 21 estudantes, aproximadamente 52% nunca atuaram na sala de aula, enquanto 48% já exerceram ou exercem o cargo de magistério. Atualmente, 24% lecionam, mais especificamente, 3 atuam no ensino fundamental, 1 no ensino médio e 1 em ambas as modalidades, todos nas escolas localizadas em Fortaleza/CE.

Inicialmente, tínhamos o interesse de saber por quais motivos esses participantes se matricularam no curso de extensão. E dentre as várias justificativas, destacamos: a obtenção de horas extracurriculares para complementar as atividades acadêmicas[6] e oportunidade de enriquecer o processo de ensino-aprendizagem por meio do uso da Balestilha.

Ademais outros interesses foram aludidos, como adquirir mais conhecimento sobre os artefatos históricos, em especial sobre a Balestilha (origem, função, entre outros); ampliar o conhecimento de modo geral; curiosidade pelo tema em questão; aprender a utilizar esse recurso para aplicar na sala de aula; nortear a pesquisa para o Trabalho de Conclusão de Curso (TCC).

Durante o curso de Licenciatura em Matemática, sabemos que os discentes têm a oportunidade de cursar disciplinas contidas em ambas as grades curriculares, tanto da UECE como do IFCE, voltadas para aperfeiçoarem a prática do professor na sala de aula. E também

[6]Essas horas extracurriculares correspondem a 200 (duzentas) horas para outras formas de atividades acadêmico-científico-culturais que o aluno de licenciatura deve obter até o final do curso.

proporcionarem o conhecimento de novos recursos que auxiliem esses futuros e atuais docentes na explanação dos conteúdos matemáticos de forma mais contextualizada, manipulativa e dinâmica. Essas disciplinas são: Prática de Ensino, Estágio Supervisionado, História da Matemática, entre outras.

Logo, interessava-nos saber se até o presente momento, dentre o total de graduandos matriculados no curso, quantos tiveram contato com docentes que os incentivasse a utilizar algum recurso didático nas aulas de matemática. O resultado foi de aproximadamente 52% que foram influenciados a utilizar algum recurso no ensino de Matemática. A seguir, encontram-se listados (Tabela 1):

Tabela 1: Tendências pedagógicas.

Recursos Didáticos	Qtd. (Alunos)
Material concreto e manipulável	5
Tecnologia da informação	2
História da matemática	2
Peças teatrais	1
Data show	3
Debates	1
Jogos	5

Fonte: Autoras

Destacamos que cada discente citou mais de um recurso. Observando a tabela acima, podemos perceber que as categorias mais citadas foram o material concreto e manipulável, e os jogos. Na concepção de Fiorentini e Miorim (1990), o uso desses recursos na sala de aula não assume o ensino de conteúdos matemáticos por completo. No entanto, quando usados em segundo plano e com um objetivo de tornar o ensino mais significativo, estimulando, assim, o raciocínio, a compreensão e o emprego desses conceitos matemáticos em situações problemas que façam parte da realidade desse aluno podem agregar um conhecimento mais sólido e construtivo.

No caso dos 48% discentes que responderam “não” anteriormente, podemos pressupor que um dos motivos pelos quais esses partícipes não tenham sido incitados a usar algum recurso didático estaria possivelmente ligado ao fato de que, até o atual momento, eles não teriam cursado disciplinas da grade curricular dos cursos de Licenciatura em Matemática voltadas para essa perspectiva, como: Prática de Ensino, Laboratório de Matemática, dentre outras.

Dando continuidade à análise do questionário, dos 21 discentes, 48% já atuaram ou atuam na sala de aula, sendo que 34% fizeram uso da história da matemática como um recurso pedagógico nas suas aulas, e os outros 14, não. A seguir, iremos expor a maneira como a história da matemática foi utilizada pelos discentes.

Ressaltamos que cada participante citou mais de uma categoria. Logo, por meio da Figura 4, podemos verificar que a forma mais citada para a utilização da história da matemática na sala de aula foi por meio do uso de biografias de matemáticos. Entretanto, essa não é a única maneira de trabalhá-la.

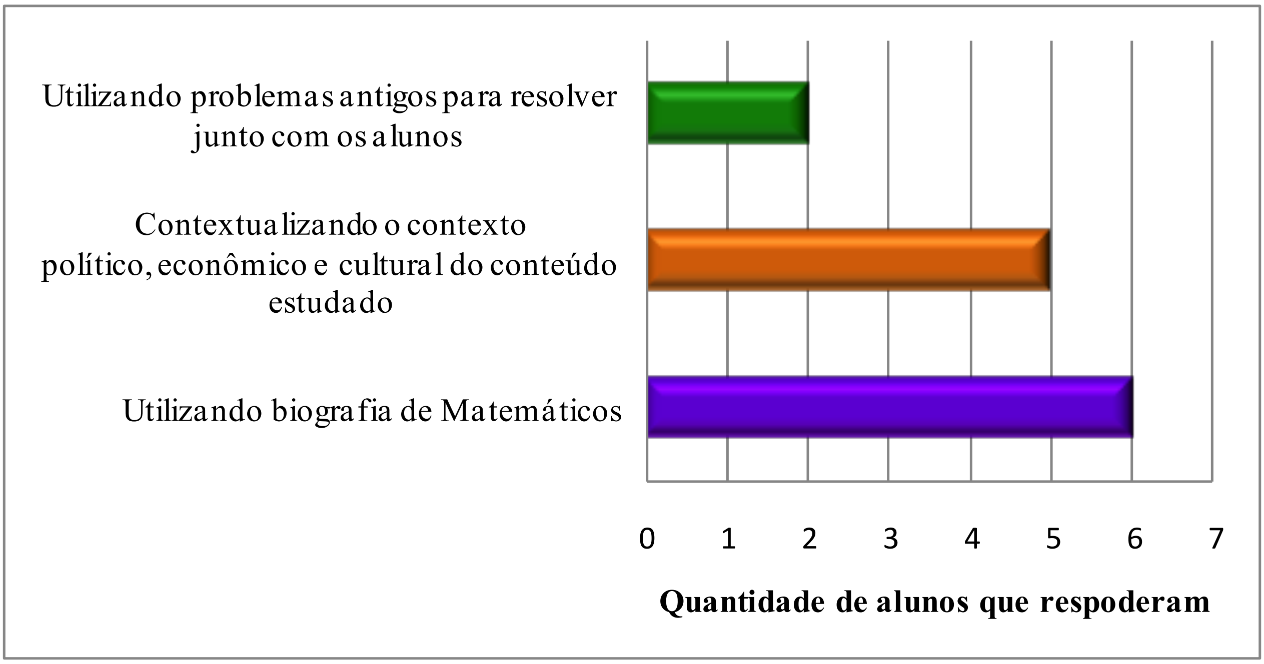
Na concepção de Baroni, Texeira e Nobre (2004, p. 172-173), a história da matemática pode ser empregada em diferentes situações e de diversas maneiras:

> a) apresentar a História da Matemática como elemento mobilizador em salas de aulas numerosas ou com alunos que apresentam dificuldades de aprendizagem;
> b) usar a História da Matemática na educação de adultos, promovendo a oportunidade ao aluno de observar, ao longo da história, o esforço de pessoas

> para superar dificuldades semelhantes àquelas que eles próprios possam estar vivenciando;
> c) apresentar as ideias da História da Matemática a alunos bem dotados, que possam estar se sentindo desestimulados perante a classe, satisfazendo ou dando respostas a questionamentos tais como "o quê?", "como?", "quando?";
> d) utilizar a História da Matemática como estímulo ao uso da biblioteca;
> e) humanizar a Matemática, apresentando suas particularidades e figuras históricas;

Diante da visão do autor, percebemos que o uso da história da matemática vai muito além do que apenas empregar datas, fatos isolados, curiosidades de matemáticos, entre outros, na sala de aula. Sua adequada utilização proporciona ao aluno da Educação Básica a superação de algumas dificuldades de aprendizagem e lhe permite se familiarizar e se envolver melhor com o ambiente escolar e com seus respectivos colegas.

Figura 4: Formas de utilização da história da matemática em sala de aula



Fonte: Autoras

No entanto, ao referir-se ao papel do curso para o aperfeiçoamento da formação docente, aproximadamente 57% dos participantes indicaram que o assunto irá tornar as suas aulas mais produtivas, atrativas e interessantes com a utilização desse instrumento para o ensino de conteúdos matemáticos; melhorar a prática docente; e conhecer uma metodologia diferenciada para aplicar em sala de aula.

Os outros 24% dos discentes mencionaram que adquirir mais conhecimento para repassar aos alunos e aprender a utilizar a História da Matemática como um recurso para melhorar a prática de ensino, enquanto 14% dos partícipes estavam interessados em conhecer a parte histórica do instrumento, aprender a construí-lo e manuseá-lo, além de ter uma noção de como usá-lo em sala de aula.

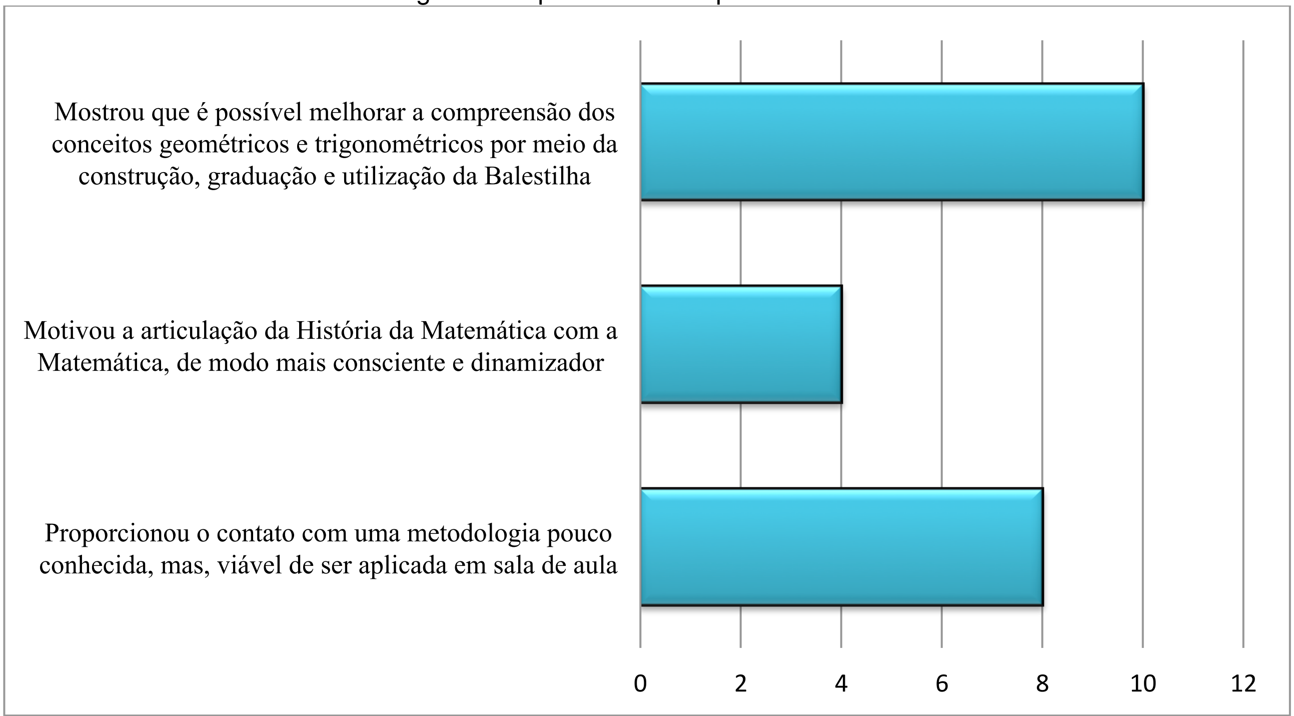
Um participante chamou nossa atenção ressaltando que: “O curso permite que haja um link entre disciplinas vistas durante a graduação, como Desenho Geométrico, História da Matemática e Geometria Plana” (PARTICIPANTE A, 2015). Essa fala está relacionada ao conhecimento incorporado a instrumentos e aparatos matemáticos, pois, segundo Saito (2015), o instrumento vai além do materialismo, mostrando-nos que há um conhecimento matemático incorporado e que nos remota ao período no qual estava inserido, possibilitando, assim, fazer uma ligação com os conceitos matemáticos explorados nas disciplinas da Licenciatura.

Diante dessas opiniões, percebemos o quanto nossos participantes tinham o anseio por conhecimentos novos que viessem a complementar sua formação docente para os desafios encontrados em sala de aula, como a abordagem diferenciada dos conceitos matemáticos, no intuito de deixar um pouco de lado as aulas tradicionais.

4. 3 Analisando o segundo questionário

Ao término do curso, vislumbramos saber se realmente o curso de extensão colaborou para a formação/complementação desses discentes. Nesse quesito, após a análise dos questionários finais, foi obtido um retorno de 100% por parte dos participantes afirmando que "sim" sobre o enriquecimento de sua prática pedagógica na sala de aula. Diante disso, visamos conhecer em que aspectos o curso cooperou na melhoria do ensino de conceitos matemáticos (Figura 5):

Figura 5: Aspectos citados pelos discentes



Fonte: Autoras

Ao final da análise, duas respostas não se encaixaram nas categorias anteriores, mas foram de extrema importância para enriquecer o nosso ponto vista a respeito da utilização de artefatos históricos nas aulas de matemática:

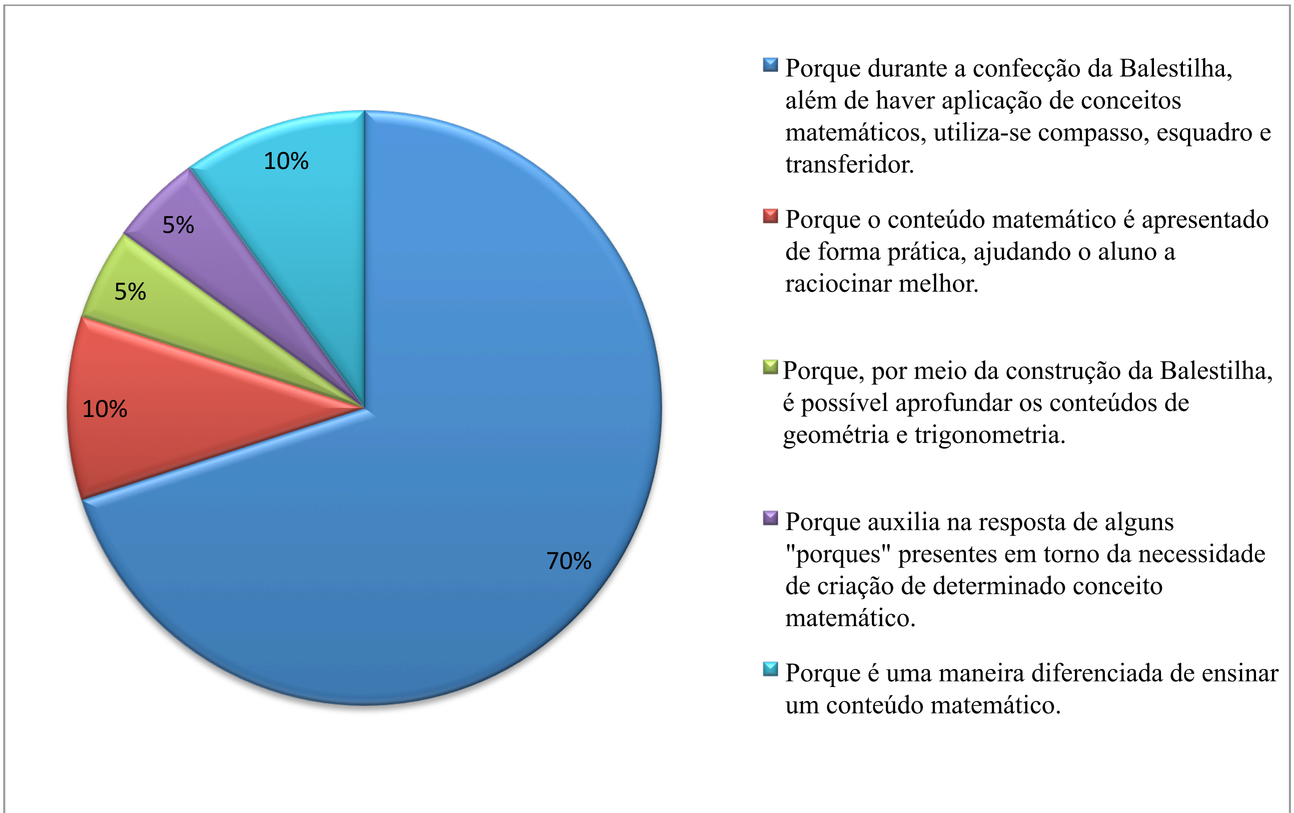
a) PARTICIPANTE B: "Através da graduação e aplicação da Balestilha, podemos entender como se dá o raciocínio do aluno".
b) PARTICIPANTE C: "Propôs um novo caminho para trabalhar conceitos geométricos, relacionando-os com outras áreas do conhecimento".

Diante da resposta do partícipe B, podemos enfatizar o quanto é importante o docente estimular a construção do conhecimento matemático no aluno, não apenas recorrendo a fórmulas e cálculos pré-prontos, apresentando-os na sala de aula sem que o discente possa ter uma participação ativa neste processo de construção do conhecimento matemático no qual estão inseridos professor/aluno/conteúdo.

E o participante C trouxe à tona o caso da interdisciplinaridade, em que o professor pode trabalhar em sala de aula não só com a história da matemática e a própria Matemática, mas tem a possibilidade de estabelecer um elo com outras disciplinas, visando, com isso, edificar um novo ambiente de ensino, no qual desperte nesse aluno a curiosidade e o interesse por outro conteúdo explorado.

No intuito de finalizar nossa análise, perguntamos aos nossos participantes se, após a conclusão do curso, eles acreditam que realmente é possível se apropriar de conhecimento matemático por meio da confecção de um artefato histórico, no caso a Balestilha. De antemão, todos responderam que “sim” e a seguir segue-se a Figura 6 com a disposição das justificativas citadas pelos nossos participantes:

Figura 6: Justificativas dos participantes



Fonte: Autoras

Destacamos que apenas um participante não respondeu a pergunta. Além da possibilidade de se aprender conteúdos matemáticos por meio do instrumento, é necessário conhecer as vantagens que colaboram para a efetivação da proposta quanto ao ensino, ao material utilizado e à prática na sala de aula. Logo, destacamos as percepções dos nossos participantes acerca desse recurso:

a) a junção entre a história da Matemática e a confecção da Balestilha apresenta a origem e a construção de determinados conceitos, além de responder alguns porquês presentes nas aulas de Matemática;
b) a confecção do instrumento permitiu uma maior interação entre professor/aluno/conteúdo;
c) a construção do instrumento permitiu entrar em contato com ferramentas, como compasso, esquadro, transferidor e etc., que muitas vezes são pouco utilizados no Ensino Básico;
d) o uso do instrumento é um recurso diferenciado para abordar determinados conteúdos matemáticos, como a trigonometria no triângulo retângulo, conceito de seno, cosseno, tangente e complemento de um ângulo, razões trigonométricas na circunferência e transformações;

e) utilização de um material de baixo custo para a confecção da Balestilha;
f) o professor torna as aulas mais atrativas devido à inserção do instrumento e aplicação prática do conteúdo estudado em sala de aula;
g) o instrumento pode fazer uma relação entre conceitos aritméticos e geométricos, permitindo, assim, uma ligação entre vários conteúdos matemáticos.

Deste modo, percebeu-se que a utilização de instrumentos náuticos, no caso a Balestilha, pode ser agregada às aulas de Matemática na forma de uma metodologia diferenciada para abordagem de diversos conteúdos relacionados, desde a Trigonometria até a Geometria. Ressalta-se que essa ferramenta didática oferece ao professor a liberdade de utilizá-la para abordar inicialmente um conteúdo, ou, em um momento posterior, explorar um assunto já ministrado em sala de aula.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Na busca de incorporar a história da matemática na Educação Básica, o professor universitário depara-se com o desafio de preparar futuros professores que irão atuar no ambiente escolar. Diante de tal constatação, percebemos que a preocupação acadêmica, não se limita apenas em propor a inserção de conteúdos em suas matrizes curriculares e evidenciar uma aplicação de fatos históricos relacionados à Matemática, como datas, nomes e períodos.

Tem-se, na verdade, a preocupação de apresentar o conteúdo matemático de maneira contextualizada com o período histórico no qual estava inserido, de forma que conheçamos quais os aspectos sociais, políticos, econômicos e culturais dessa época que tiveram influência sobre ele. Mantendo, assim, um constante diálogo com a matemática apresentada hoje nas escolas, no intuito de que o aluno a compreenda não como uma evolução cronológica, mas como um processo em constante desenvolvimento e diálogo entre o passado e o presente.

Desta maneira, vimos nos instrumentos históricos de medida, mais especificamente, na Balestilha, um recurso que possibilitasse aos futuros docentes proporcionar aos seus alunos uma aprendizagem sobre uma perspectiva de uma matemática incorporada ao instrumento, de maneira mais significativa e construtiva, e que os levassem a refletir sobre seu processo de construção.

Dessa forma, percebeu-se o acolhimento e a satisfação pela maior parte dos discentes em relação a essa nova proposta metodológica. Em vista disso, constatou-se que a produção de cursos de extensão voltados para formação inicial e continuada de professores é um excelente meio de divulgação de novas metodologias, além de ser uma maneira de validar determinadas pesquisas.

REFERÊNCIA

ALBUQUERQUE, L. **Instrumentos de navegação.** Lisboa: Comissão Nacional para as Comemorações dos Descobrimentos Portugueses, 1988. p. 10-29.

BARONI, R. L. S.; TEIXEIRA, M. V.; NOBRE, S. R. A investigação científica em história da matemática e suas relações com o programa de pós-graduação em educação matemática. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani; BORBA, Marcelo de Carvalho. **Educação matemática:** pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez Editora, 2004. p. 164-185.

D'AMBROSIO, U. História da matemática e educação. In: **Cadernos CEDES 40.** História e Educação Matemática. 1. ed. Campinas, SP: Papirus, 1996, p.7-17.

FERNANDES, T. C. D.; LONGHINI, M. D. **A construção de um antigo instrumento para navegação marítima e seu emprego em aulas de astronomia e matemática**. In: SIMPÓSIO NACIONAL DE EDUCAÇÃO EM ASTRONOMIA, 1., 2011, Rio de Janeiro. Disponível em: <http://revistas.pucsp.br/index.php/hcensino/article/download/5485/5770>. Acesso em: 15 set. 2012.

FIORENTIHI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática:** percursos teóricos e metodológicos. 3. ed. São Paulo: Autores Associados, 2009.

MARCONI, M. de A.; LAKATOS, E. M. **Fundamentos de metodologia científica**. 7. ed. São Paulo: Atlas, 2010.

MIORIM, M. A.; FIORENTINI, D. Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no Ensino da Matemática. **Boletim da SBEM-SP**, São Paulo, v. 4, n. 7, p. 5-10, 1990.

MOREY, B.; MENDES, I. A. **História da matemática para professores:** conhecimentos matemáticos na época das navegações. Natal: Sociedade Brasileira de História da Matemática, 2005.

PIMENTEL, M. **Arte de navegar.** Lisboa: Officina de Miguel Manescal da Costa, Impressor do Santo Officio, 1762.

PINTO, M. M. **Os instrumentos náuticos de navegação e o ensino da geometria.** Lisboa: Sociedade Portuguesa de Matemática, 2010. 80 p.

SAITO, Fumikazu. Instrumentos e o “saber-fazer” matemático no século XVI. **Revista Tecnologia e Sociedade**, São Paulo, v.9, n. 18, 2013.

FUX, J. **Literatura e Matemática:** Jorge Luís Borges, George Perec e o OULIPO. 1. ed. São Paulo: Perspectiva, 2016.

MONTOITO, Rafael[1]

É comum ouvirmos, de alunos que fazem Licenciatura em Matemática, que escolheram este curso porque não gostam de ler – ou, pelo menos, que não gostam do que comumente é entendido como *literatura*. Alguns trabalhos que temos feito nos últimos anos[2] sobre as inter-relações entre Matemática e Literatura revelam, via de regra, alunos e professores – e, em alguns casos, futuros professores em processo de graduação – que imaginam não haver uma região comum entre estas duas áreas do conhecimento, o que é um equívoco: o conhecido discurso do senso comum de que a Matemática, principalmente a escolar, é útil para resolver problemas do dia a dia não faz jus à toda sua potencialidade latente e, se por um lado suas conhecidas aplicações à Arte (pintura, arquitetura e escultura) aparecem facilmente nos livros didáticos e nos textos e vídeos disponíveis na internet, o modo como ela pode integrar-se ao campo literário ainda é pouco conhecido, explorado e divulgado[3].

Mas e se um aluno aficionado por Matemática descobrisse diversas de suas estruturas "escondidas" em alguns romances, ou, até mesmo, como "geradoras" da narrativa? Será que existe a possibilidade de criar uma história ou poema a partir da combinação de elementos matemáticos (conteúdos, teoremas, problemas etc.)? E, se há, seria essa estrutura matemática capaz de despertar o interesse de um leitor costumaz, não tão inclinado às disciplinas exatas? Há diálogos possíveis entre Matemática e Literatura que podem ser aproveitados pelo professor para mobilizar a aprendizagem do aluno? E qual seria a relevância de se coadunar Matemática e Literatura?

Um texto literário que "fale" de Matemática pode mobilizar o aluno a debruçar-se sobre o conteúdo matemático enquanto incrementa, também, sua relação com a língua materna[4]. Na contemporaneidade, onde as informações mudam constantemente e há uma valorização acadêmica da palavra escrita na produção de trabalhos científicos, não é possível pensarmos em formar alunos que separem a Matemática da língua materna, que não consigam usar bem a segunda para falar da primeira. Ensinar a ler e escrever devem ser compromissos assumidos por todas as disciplinas, em qualquer nível escolar[5], como uma aposta numa formação mais plural do

---

[1]Doutor em Educação para Ciência pela Universidade Estadual Paulista (UNESP), Bauru, São Paulo, Brasil. Docente do Instituto Federal Sul-rio-grandense (IFSUL), Pelotas, Rio Grande do Sul, Brasil. Endereço eletrônico: xmontoito@gmail.com.

[2]Referimo-nos, aqui, dentre outros dos nossos trabalhos, às oficinas de Literatura e Matemática, desenvolvidas no projeto *Oficinas de Matemática para Professores das Séries Iniciais de Escolas Públicas* (IFSUL, Campus Pelotas, 2013-2014), posteriormente apresentadas na comunicação *Oficinas de Literatura e Geometria: Outras Maneiras de Ensinar Matemática nas Séries Iniciais* (XXIX RELME, Panamá, 2015), além da mesa *Literatura Infantil e o Ensino em Diferentes Áreas: Propostas e Reflexões*, organizada pelo grupo de estudos CONTAR (UFRN, Faculdade de Educação, 2016) e ao capítulo *À Procura de Inter-relações entre Literatura e Matemática: Resolvendo e Criando Problemas* (do livro *Leituras e Escritas: Tecendo Saberes em Educação Matemática*, EDUFRN, 2016).

[3]Se pensarmos em paradidáticos, há vários livros que se propõem a ensinar Matemática via Literatura; contudo, quando o assunto é teorizar ou discutir a Matemática "oculta" na Literatura, não se encontram tantos exemplos. Além do aqui comentado livro de Fux, podemos sugerir ao leitor *Juegos Matemáticos Ocultos en la Literatura* (ODIFREDDI, P; Barcelona: Octaedro, 2007), *Dante e la Matemática* (D'AMORE, B; Mião: Giunti, 2017) e *Chá com Lewis Carroll* (MONTOITO, R; Jundiaí: Paco, 2011).

[4]Referimo-nos às relações entre Matemática e língua materna como as expostas no livro *Matemática e Língua Materna: Análise de uma Impregnação Mútua* (MACHADO, N.; São Paulo: Cortez, 2001).

[5]Esta opinião é defendida nos livros *Ler e Escrever: Compromisso de Todas as Áreas* (NEVES, I. *et al*; Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2011) e *Escritas e Leituras em Educação Matemática* (NACARATO, A. *et al;* Belo Horizonte:

aluno; a Matemática, com suas especificidades de escrita, significados e encadeamento de ideias não pode deixar a cargo dos professores de Língua Portuguesa a responsabilidade de ensinar os alunos a ler, entender e produzir textos relativos aos objetos matemáticos estudados.

O livro aqui resenhado, *Literatura e Matemática: Jorge Luis Borges, Geroges Perec e o OULIPO*, de Jacques Fux, estabelece uma ponte entre essas duas disciplinas e pode ajudar a responder as questões anteriormente postas. Fruto de sua tese[6], cujos estudos foram feitos em cotutela com a Universidade de Lille 3, na França, o livro analisa e discute as inter-relações possíveis entre Literatura e Matemática na obra de diversos escritores[7]. O objetivo principal do autor (e também o nosso com essa resenha) é fomentar, no leitor, o desejo por conhecer os *entrelugares* (FUX, 2016, p. 244) onde a Matemática e a Literatura coabitam harmoniosamente, chamando-o a conhecer as obras estudadas, à procura de novas experiências matemáticas e literárias.

O primeiro capítulo do livro fala do OULIPO[8], um grupo que surgiu na França na década de 1960, formado por escritores que se opunham à visão mítica do poeta inspirado, herdada pelos românticos e absorvida pelos surrealistas, para os quais a escrita tinha relação com as manifestações do inconsciente e fluía vinda de outras sensações do ser. Aos oulipianos, interessa incorporar, em trabalhos literários, alguns métodos restritivos, chamados de *contraintes*[9], que são alicerçados nas estruturas matemáticas e nos jogos com palavras. A expressão *literatura potencial* diz respeito à ideia de que as obras assim produzidas permitem *mais de uma leitura*, pois as *contraintes*, ao serem decifradas pelos leitores, possibilitam diferentes interações e percepções acerca das histórias; contudo, não as decifrar não invalida a compreensão da história, mas o leitor conhecerá apenas uma dentre as diversas possibilidades narrativas.

Raymond Queneau (1903 – 1976), poeta e escritor francês que pode ser considerado um matemático amador, publicou um conjunto de axiomas, à maneira euclidiana, que aproximou muito a Matemática da escrita literária. Ele diz que "existe uma frase que contém duas palavras dadas", que "não existe mais de uma frase que contém duas palavras dadas", que "se em uma frase uma palavra se encontra entre duas palavras colocadas em uma ordem dada, encontra-se ela, igualmente, em sentido inverso, entre essas duas palavras" e que "dadas duas palavras de uma frase, existe pelo menos uma terceira palavra tal que a segunda esteja entre a primeira e a terceira" (OULIPO *apud* FUX, 2016). Cada um desses axiomas tem sua veracidade comentada e o resultado é o estabelecimento de uma relação entre os elementos básicos da geometria (pontos, retas e planos) com os básicos da escrita (palavras, frases e parágrafos).

Queneau é autor do poema *Cent mille milliard de poèmes*, o qual "pode ser considerado como a primeira tentativa consciente de utilização da análise combinatória na literatura" (FUX, 2016, p. 41). Esse poema é composto por 10 sonetos, com 14 versos cada um e é possível fazer com cada primeiro verso de cada soneto a correspondência com outros 10 versos diferentes.

Autêntica, 2009), dentre outros. No entanto, vale ressaltar aqui que o livro de Fux, pelas estruturas matemáticas que comenta, é adequado a alunos do ensino superior.

[6]Fux é mineiro, formado em Matemática e mestre em Ciência da Computação (ambos os títulos obtidos na UFMG). Sua tese foi galardoada como a melhor de 2010 do Programa de Pós-Graduação em Estudos Literários da UFMG.

[7]Devido ao subtítulo "Jorge Luis Borges, Georges Perec e o OULIPO", comentaremos apenas estes escritores mais pormenorizadamente, pois cada um deles é um capítulo do livro. Outros autores apresentados por Fux (Italo Calvino, Lewis Carroll, Edgar Allan Poe e o brasileiro Osman Lins) aparecem de maneira mais superficial e têm relação direta ou indireta com o grupo OULIPO, motivo pelo qual não serão comentados em detalhes mas estão, de certo modo, contemplados neste texto, uma vez que dialogam com a visão oulipiana da produção de textos literários.

[8]*Ouvroir Littérature Potentielle* (em tradução livre, *Oficina de Literatura Potencial*)

[9]Uma *contrainte* pode ser entendida como uma restrição inicial imposta à escrita de um texto ou livro, sendo as mais básicas de caráter linguístico. Existem, porém, outras restrições artificiais, que podem ser de caráter matemático" (FUX, 2016, p. 20).

Sendo assim, lido qualquer primeiro verso, sua sequência pode ser qualquer segundo verso, gerando 100 possibilidades (10^2); para ler o terceiro verso, há 1000 possibilidades (10^3), e assim sucessivamente, até a espantosa marca de 10^{14} diferentes opções de leitura do soneto. Esse *poema combinatório*, nas palavras de seu autor, é uma "pequena obra que permite a cada um compor à vontade cem mil bilhões de sonetos, todos normalmente bem entendidos. É um tipo de máquina de fabricar poemas" (OULIPO *apud* FUX, 2016, p. 42).

Jacques Roubaud (1932 – atualmente), outro poeta oulipiano que vê a *contrainte* como "o princípio de criação da literatura voluntária e antiacaso" (OULIPO *apud* FUX, 2016, p. 57), é autor do livro *Trente et un au cube*, uma coleção de 31 poemas, cada um com 31 versos de 31 sílabas (31^3) que, juntos, formam um longo canto de amor. Em sua homenagem, uma *contrainte* foi batizada com seu nome: o "princípio de Roubaud" é atingido quando um texto escrito seguindo uma *contrainte* fala sobre essa *contrainte* – tal princípio foi usado no livro de George Perec, *La Disparition*[10].

Georges Perec (1936 – 1982), um dos cernes do estudo detalhado de Fux, é o tema do capítulo dois. Perec faz uso de diversos palíndromos, lipogramas e anagramas, além de estruturas matemáticas, para a elaboração de suas obras. Em *La Disparition*, o autor narra a história do desaparecimento da letra *e* e, para tal, escreve toda sua narrativa com palavras que não possuam essa letra[11]. Outras variações lipogramáticas, assumidas como *contraintes* por Perec, aparecem na história de um prisioneiro que deseja escrever a maior carta possível, mas dispõe de pouco papel: sua opção então é eliminar as letras que ultrapassam a linha (como o *p*, o *b*, o *i* e o *e* acentuado); em outro momento, Perec resolve utilizar palíndromos verticais, no qual só são admitidas letras que, após uma rotação de 180º, continuam iguais (*o*, *s*, *x*, *z*, *i* sem o pingo) ou se transformam em outras (*a* → *e, b* → *q, d* → *p, n* → *u*). Impondo estas restrições simétricas, cria a frase *andin basnoda a une epouse qui pue*[12].

Mas a obra mais impressionante de George Perec é um romance chamado *A Vida Modo de Usar*[13]. O cenário desse livro é um prédio cuja estrutura se assemelha a um *bicarré latin orthogonal d'ordre 10*[14], onde cada quadradinho representa um apartamento (contudo, respeitando a ficção literária, eles não são todos exatamente do mesmo tamanho). Em cada capítulo do livro, isto é, em cada "apartamento", são impostas 42 restrições que provêm de um total de 420, originalmente separadas em 42 tabelas com 10 possibilidades cada. Cada tabela é um grupo de possibilidades referentes a uma temática como, por exemplo, a *posição* do personagem (ajoelhado, agachado ou abaixado, de bruços, sentado, em pé, subir ou mais alto que o solo, entrar, sair, deitado sobre as costas e um braço no ar) e a *atividade* que desenvolve (pintura, entrevista, limpeza, erótico, classificar/arrumar, se servir de um mapa, reparar, ler ou escrever, ter um pedaço de madeira, comer)[15], de modo que a conjunção desses elementos gera a "micro-história" daquele capítulo. Cada capítulo, portanto, "utiliza uma das 10 possibilidades de cada um dos 42 tipos, dando um total de 10^{42} possibilidades de inserção de elementos, um número incrivelmente grande" (MAGNÉ, HARTJE e NEEFS *apud* FUX, 2016, p. 104).

---

[10] Já está disponível a tradução deste livro (PEREC, G. *O Sumiço*, Belo Horizonte: Autêntica, 2016).

[11] A aplicação deste "princípio de Roubaud" – usar a omissão da vogal para contar a história dessa omissão – é extremamente difícil, uma vez que a letra *e* é a mais utilizada na formação de palavras da língua francesa.

[12] Em português: Andin Basnoda tem uma esposa que fede.

[13] PEREC, G. *A Vida Modo de Usar.* São Paulo: Companhia de Bolso, 2009

[14] Assemelha-se a um quadrado mágico de ordem 10.

[15] A lista de *posição* e *atividade*, ainda que apresente quebra de paralelismo nas suas descrições, está aqui reproduzida conforme a tabela apresentada por Fux.

Além disso, para não permitir que fosse feita a esmo a escolha de quais restrições seriam utilizadas em cada capítulo, Perec utiliza a *pseudo-quenine*, que podemos tomar como um "caso particular" da *quenine* que seus amigos do OULIPO já conheciam. A *quenine*, por sua vez, é uma generalização da *sextina*, um modo antigo de escrever poemas, utilizado pelo francês Arnaut Daniel[16]: uma *sextina* é um poema formado por 6 estrofes (cada uma delas composta por 3 versos), seguidas de um parágrafo de 3 versos, no qual as palavras finais de cada verso são as mesmas, mas aparecem em versos distintos[17]. Essa permutação pode ser expressa por uma função matemática para construir poemas com *n* versos (*quenine*) e foi adaptada por Perec na *pseudo-quenine*, que distribui as restrições impostas a cada capítulo de seu livro.

Há, ainda, uma terceira *contrainte* matemática – um circuito Hamiltoniano – da qual o autor se vale para compor a *ordem* da narrativa: a *polygraphie du cavalier*.

> Teria sido cansativo descrever um prédio andar por andar e apartamento por apartamento. Mas a sucessão de capítulos não poderia, portanto, ser ao acaso. Eu decidi aplicar um princípio derivado de um velho problema bem conhecido pelos amadores de xadrez: a poligrafia do cavalo: trata-se de fazer com que um cavalo percorra as 64 casas de um tabuleiro sem jamais parar mais de uma vez na mesma casa. Existem milhares de soluções, das quais algumas como as de Euler, formam um quadrado mágico. No caso particular de *A Vida Modo de Usar*, era necessário encontrar uma solução para um tabuleiro 10 x 10. Eu a atingi de maneira milagrosa (PEREC *apud* FUX, 2016, p. 113).

No capítulo três, Fux comenta detalhadamente a obra do argentino Jorge Luis Borges, em cujos contos se percebe várias referências matemáticas: alguns exemplos, dentre tantos, podem ser encontrados no conto "O Disco", quando fala da faixa de Moebius, ou em "O Livro de Areia" e "O Aleph", quando o escritor faz menção aos números transfinitos de Cantor.

Diferentemente de Perec, "Borges não tinha muitos conhecimentos teóricos em matemática, mas, mesmo assim, aplicou-os exaustivamente em sua ficção" (FUX, 2016, p.140). Um dos seus contos mais conhecido, "A Biblioteca de Babel", aborda aquele que talvez seja seu tema mais recorrente: *o infinito*. Nessa biblioteca, composta de um número indefinido (e talvez infinito) de galerias hexagonais, Borges sugere, ao leitor, a ideia de que há uma quantidade infinita de livros disponíveis para a leitura – mas Fux demonstra que existem, aproximadamente, "apenas" $10^{1834097}$ deles.

Há também alusões ao infinito em "Tlön, Uqbar, Orbis Tertius", no qual o autor cria um paradoxo em *looping*, e em "O Labirinto", como se observa a seguir:

> Este é o labirinto de Creta. Este é o labirinto de Creta cujo centro foi o Minotauro. Este é o labirinto de Creta cujo centro foi o Minotauro, que Dante imaginou como um touro com cabeça de homem e em cuja rede de pedra se perderam tantas gerações. Este é o labirinto de Creta cujo centro foi o Minotauro, que Dante imaginou como um touro com cabeça de homem e em cuja rede de pedra se perderam tantas gerações como Maria Kodama e eu nos perdemos. Este é o labirinto de Creta cujo centro foi o Minotauro, que Dante imaginou como um touro com cabeça de homem e em cuja rede de pedra se perderam tantas gerações

[16]Poeta que viveu entre os séculos XII e XIII, em Ribérac.

[17]O modo de permutar as palavras finais de cada verso obedece à matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, na qual a primeira linha da matriz representa a primeira estrofe e, a segunda linha, a segunda estrofe. Assim, vê-se que a última palavra do primeiro verso (1) da primeira estrofe (linha 1) será a última palavra do sexto verso da segunda estrofe (1 na linha 2); a última palavra do segundo verso (2) da primeira estrofe (linha 1) será a última palavra do primeiro verso da segunda estrofe (2 na linha 2); e assim sucessivamente. A matriz serve para comparar quaisquer duas estrofes seguidas, com relação à distribuição das palavras finais dos versos. Para tal, é suficiente considerar que a linha superior representa uma determinada estrofe e, a inferior, a estrofe seguinte.

> como Maria Kodama e eu nos perdemos naquela manhã e continuamos perdidos no tempo, esse outro labirinto (BORGES *apud* FUX, 2016, p.213).

Vale observar que, neste extrato, Borges descreve o labirinto de Creta tratando-o como um diagrama de árvore, isto é, "percorre-se" o mesmo caminho (mesma frase) antes de se caminhar um trecho novo (nova frase). A extensão do parágrafo (do labirinto) pode chegar ao infinito. Esses são apenas alguns exemplos que mostram que, caso o leitor tenha bom conhecimento de Matemática, estabelecerá uma relação diferenciada com os livros de Borges, podendo atribuir-lhes múltiplas significações.

No último capítulo de seu livro, Fux traça paralelos e divergências entre as obras de Borges e as de Perec e conclui que, "ainda que o conhecimento matemático de ambos seja limitado e superficial, isso não impediu que tentassem esgotá-lo em sua produção literária: Borges utilizou em seus trabalhos o problema do infinito e dos paradoxos de autorrecorrência; Perec trabalhou exaustivamente os *carrés*" (FUX, 2016, p. 193).

Voltamos, neste fim, àqueles questionamentos iniciais: Fux mostra que há, sim, inter-relações possíveis entre Matemática e Literatura e que, muitas delas, não são elementares. Pensamos, então, que seu livro pode contribuir não só para a discussão sobre esses *entrelugares*, mas também para investir numa maneira de se trabalhar, com nossos alunos, a Matemática associada com a língua materna. E como *Literatura e Matemática* aponta alguns escritores sem, contudo, esgotar a temática, o livro do Fux pode ser uma porta de acesso a outros títulos que exploram a Matemática por meio da Literatura.

LORENZATO, S. (Org.). **Aprender e ensinar geometria.** Campinas, SP: Mercado das Letras, 2015. – (Série Educação Matemática)

CAMPOS, Marcelo Bergamini[1]

A obra é organizada por Sérgio Lorenzato, pesquisador com vasta produção em Educação Matemática incluindo o ensino de Geometria na Educação Básica. Lorenzato é coordenador do Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática nos/dos Anos Iniciais (Gepemai) e, em uma ação conjunta com os integrantes do grupo, professores que atuam em diferentes segmentos de ensino, discute o trabalho que vêm desenvolvendo com essa área do conhecimento, com o propósito de torná-la mais significativa e interessante para os alunos.

O prefácio do livro é de autoria da Dra. Celi Espasandin Lopes que, além de fazer uma breve apresentação da obra, corrobora com o posicionamento dos autores quando defendem os grupos de estudos colaborativos como um importante espaço para a formação continuada de professores. Lopes ressalta ainda que, apesar de verificarmos um crescente volume de pesquisas voltadas para o ensino de Geometria, elas ainda não têm contribuído de forma efetiva para o trabalho docente.

O primeiro capítulo do livro é intitulado *Como aprendemos e ensinamos geometria* e tem por autor Sérgio Lorenzato. Ele questiona o início do ensino de Geometria a partir da ótica euclidiana, uma vez que pesquisas indicam que a criança considera primeiro as noções topológicas. Outras perspectivas do ensino tradicional também são criticadas e o autor sinaliza possibilidades de mudanças relacionando-as à uma eficaz formação docente.

Lorenzato percebe a formação dos professores como processo contínuo e indispensável. No entanto, faz ponderações sobre o modelo oferecido pelas universidades, alertando que não tem produzido os resultados esperados e necessários. Como proposta alternativa, discute as ações desenvolvidas junto ao Gepemai, que é percebido como um espaço onde docentes que atuam em diferentes segmentos de ensino podem compartilhar experiências e refletir sobre a prática pedagógica.

O autor faz ainda uma apreciação dos projetos que são discutidos nos capítulos subsequentes, observando que se transformaram em experiências ricas em descobertas e aprendizagens não apenas para os alunos, mas também para os professores. Dedica particular atenção à análise da linguagem usada pelos estudantes, afirmando que ela revela a percepção que eles têm da realidade.

No segundo capítulo, apresentado com o título *O cilindro "feio" e outras formas geométricas espaciais*, as professoras Adriana Franco de Camargo Augusto e Simone B. Queiroz Guimarães apresentam e discutem um projeto desenvolvido em uma turma do primeiro ano do Ensino Fundamental e que teve por objetivo explorar os sólidos geométricos comumente abordados nesta etapa de escolarização.

Buscando perceber noções geométricas que podem ser desenvolvidas pelos estudantes, as autoras propuseram uma série de atividades que são descritas ao longo do capítulo. Os alunos manipularam, agruparam e nomearam diferentes sólidos reconhecendo propriedades comuns, ouviram e debateram uma história associada ao tema e tiveram oportunidade de confeccionarem

[1]Mestre em Educação Matemática pela Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF), Juiz de Fora, Minas Gerais, Brasil. Docente na Escola Municipal Sebastião Francisco do Vale, Barbacena, Minas Gerais, Brasil. Endereço eletrônico: marcelo.bergamini@hotmail.com.

os próprios sólidos. Ao final do capítulo, ainda que de forma breve, citam diversos pesquisadores destacando a importância e as potencialidades do ensino de geometria nos anos iniciais.

No terceiro capítulo, intitulado *Uma proposta didática para a Geometria*, Rosana Prado Biani relata uma experiência desenvolvida com os seus alunos do quinto ano do Ensino Fundamental. Foram explorados diversos conceitos geométricos e o projeto culminou com a produção de um filme e a exposição de trabalhos.

Biani apresenta os cinco passos da pedagogia histórico-crítica que orientaram o projeto. A partir desses pressupostos teóricos, faz um diagnóstico dos conhecimentos e das dificuldades dos estudantes bem como dos seus interesses relacionados ao tema. Dessa forma, articula os desejos dos alunos com os seus propósitos, com a intenção de torná-los corresponsáveis pelo trabalho. Buscando contribuir com a aprendizagem significativa dos conteúdos, a autora discute o uso da problematização, estratégia didática que é caracterizada no texto.

Outro aspecto a ser destacado no capítulo é o posicionamento da autora ao defender a necessidade de romper com a fragmentação do ensino. Por meio de várias situações vivenciadas em sala de aula, ela evidencia sua intenção de articular de forma mais consistente a Geometria com as outras disciplinas e os demais conteúdos matemáticos.

O quarto capítulo, apresentado com o título *As (re)descobertas do ensino de geometria*, é escrito por Conceição Aparecida Cruz Longo. Ela descreve um projeto desenvolvido com alunos do 8º ano do ensino fundamental que teve por alvo o estudo de formas poligonais e poliédricas.

Objetivando que os estudantes associassem relações entre Geometria e cotidiano, a autora solicitou que registrassem imagens do entorno que, na sequência, foram organizadas e associadas às formas geométricas. No trabalho com os sólidos, os alunos tiveram oportunidade de manusear modelos disponibilizados, reconhecer semelhanças e/ ou diferenças e verificar propriedades comuns.

Merece destaque a forma com que a professora apropriou-se da curiosidade dos estudantes para fazer um interessante e proveitoso desdobramento das ações planejadas. Ao ser questionada sobre a razão da existência de apenas cinco poliedros regulares, propôs uma sequência de atividades que permitiram, aos alunos, explorar diversas propriedades geométricas e elaborar conjecturas que foram validadas ou refutadas com o apoio de eficientes intervenções. A partir da percepção das condições para a construção de um ângulo poliédrico, ela possibilitou aos estudantes constatar que, de fato, é possível construir somente cinco poliedros regulares.

A autora enfatiza a importância do desenvolvimento de atividades que não priorizem a memorização, mas que permitam ao aluno fazer as suas próprias descobertas e, dessa forma, compreender o significado das propriedades. Ela aponta ainda mudanças de atitudes dos estudantes ao perceberam a Geometria como um tema mais interessante e associado ao cotidiano.

A leitura da obra torna evidente que os autores dos quatro capítulos compartilham pressupostos teóricos ao discutirem o ensino de geometria, conferindo, dessa forma, uma coerência interna ao discurso. De fato, propostas como conectar os conteúdos e conceitos geométricos ao cotidiano, construir e manipular sólidos com o propósito de alcançar o abstrato a partir do concreto permeiam o livro. Também na discussão dos projetos realizados, os autores defendem e desenvolvem um diagnóstico dos conhecimentos dos estudantes com a intenção de tomar como ponto de partida o que os alunos já sabem na abordagem de novos conceitos.

Os autores concordam que a linguagem usada pelos estudantes pode trazer importantes informações para o professor. Em consonância com essa constatação, conseguem entremear, ao longo da obra, discussões teóricas com recorte de falas dos estudantes, uma escolha que facilita a compreensão do leitor e torna o texto ainda mais instigante, estabelecendo uma conexão entre a teoria e a prática em sala de aula.

Portanto, mais do que modelos de atividades que podem ser aplicadas em sala de aula, a obra proporciona consistentes discussões teóricas que podem impactar nas ações docentes, por meio de reflexões que contribuem para repensar e reavaliar o trabalho desenvolvido. Essas considerações permitem afirmar que a leitura do livro é de grande importância, principalmente para o professor que atua nos dois segmentos do ensino fundamental.

SKOVSMOSE, O. **Educação Matemática crítica:** a questão da democracia. Campinas: Papirus, 2001, Coleção Perspectivas em Educação Matemática, SBEM, 160 p.

CARDOSO, Virgínia Cardia[1]

Ole Skovsmose, professor emérito na Universidade de Aalborg (Dinamarca) e pesquisador no curso de pós-graduação em Educação Matemática da UNESP[2], *campus* Rio Claro, é um dos precursores do Movimento da Educação Matemática Crítica. Com inúmeras publicações no Brasil e em outros países, Skovsmose tem parcerias com vários pesquisadores em Educação Matemática. As ideias do pesquisador são conhecidas no Brasil desde a década de 1980, mas suas primeiras publicações em português, em revistas brasileiras, ocorreram no início dos anos 2000. A partir de então, sua produção em português[3] é bastante vasta, contando com 5 livros publicados em editoras brasileiras, 7 capítulos de livros, (2 portugueses e 5 brasileiros) e 10 artigos públicos em periódicos científicos brasileiros.

A obra “*Educação Matemática Crítica: a questão da democracia”* foi o seu primeiro livro publicado no Brasil, em 2001. Atualmente, esta obra está na sexta edição, na mesma editora. Trata-se de uma coletânea de cinco textos, anteriormente publicados em outras línguas, em revistas internacionais, e aqui traduzidos por Abgail Lins (os quatro primeiros textos) e Jussara de Loiola Araújo (o quinto texto). A obra é prefaciada pelo Prof. Dr. Marcelo de Carvalho Borba, professor Livre Docente da UNESP, no *campus* Rio Claro (SP), que também é coautor em um dos textos.

Revisitar essa obra, após tantos anos de publicação, oferece-nos uma perspectiva da importância das ideias apresentadas. Apesar de não ser uma publicação recente, ela continua necessária para a compreensão do papel da Matemática no sistema escolar, considerando as demandas sociais atuais. Por exemplo, em uma época em que, no Brasil, falava-se de alfabetização funcional apenas quanto à compreensão de textos escritos, Skovsmose discute sobre a Alfabetização Matemática, dentro da perspectiva crítica.

O livro nos oferece um panorama das ideias do autor, inseridas no Movimento da Educação Matemática Crítica: um movimento de cunho metodológico e filosófico da Educação Matemática, surgido na década de 80, cujo interesse fundamental é o estudo das relações entre a Educação Matemática e o poder. No prefácio, somos apresentados às propostas gerais desse movimento e aos principais autores atuantes nele, como Marilyn Frankenstein, Arthur Powell, Ole Skovsmose e Ubiratan D´Ambrósio.

Nos textos publicados, o autor aborda a questão da democracia na Educação Matemática, a fim de fazer emergir os aspectos políticos da tarefa de educar matematicamente. No prefácio da obra, Borba descreve a proposta de trabalho de Skovsmose ao relatar a cooperação científica que se estabeleceu entre ambos:

> Nosso interesse comum em modelagem (na acepção que Rodney Bassanezi trouxe para a educação matemática brasileira) ou projetos, usando a terminologia

[1]Doutora em Educação pela Faculdade de Educação da Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), Campinas, São Paulo, Brasil. Docente da Universidade Federal do ABC (UFABC), Santo André, São Paulo, Brasil. Endereço para correspondência: Avenida dos Estados, 5001, bloco A, torre 2, sala 516-2, Santa Terezinha, Santo André, São Paulo, Brasil, CEP: 09210-580, Endereço eletrônico: virginia.cardoso@ufabc.edu.br.
[2]Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Brasil.
[3]Fonte: CV Lattes de Ole Skovsmose. http://buscatextual.cnpq.br/buscatextual/visualizacv.do?id=K4329008J3, acesso em 22/01/17.

> dinamarquesa, em informática e em aspectos políticos da educação matemática foram as bases dessa cooperação (SKOVSMOSE, 2001, pg. 8).

No primeiro capítulo – *"Educação matemática versus educação crítica"* – Skovsmose caracteriza a Educação Crítica como aquela em que os professores e os alunos se envolvem conjuntamente no processo educacional por meio do diálogo, de forma a desenvolver a democratização do saber. Para isso, os conteúdos de um currículo não devem ser selecionados previamente e sim discutidos criticamente por todos os envolvidos, de acordo com a relevância social do problema, sua aplicabilidade, os interesses e as necessidades reais dos alunos. Tradicionalmente, na escola brasileira, planejamos as práticas didáticas a partir de um conjunto de conhecimentos selecionados previamente, o que dificulta pensar o trabalho escolar dentro da perspectiva proposta pelo autor. Para Skovsmose, o processo de ensino e aprendizagem precisa ser voltado à resolução de problemas. Tais problemas devem mostrar-se importantes aos estudantes, serem acessíveis aos seus conhecimentos prévios e relacionados com os problemas sociais existentes.

O título desse texto se justifica pelo fato das principais tendências em Educação Matemática da década de 80 não considerarem como relevante o desenvolvimento crítico da competência democrática. O autor, mostrando a necessidade de aliar a Educação Crítica à Educação Matemática, apresenta o trabalho com projetos, exemplificando uma forma de desenvolver a competência crítica.

Para Skovsmose, a organização curricular reflete as relações de poder no meio social. A sociedade atual é imersa, cada vez mais, na tecnologia, a ponto de esta estabelecer ou intensificar as relações de poder. Dominar um conjunto de conhecimentos, dentre os quais os conhecimentos matemáticos, implica dominar a tecnologia necessária para exercer a cidadania. Daí a questão: como a Educação Matemática serve aos interesses de uma sociedade tecnológica? Tal tópico é debatido, de forma mais profunda, nos textos seguintes.

Em *"Educação Matemática e Democracia"*, o segundo capítulo do livro, o autor aprofunda o argumento de que a Educação Matemática tem um papel importante no desenvolvimento das competências democráticas nos estudantes em uma sociedade tecnológica. Uma vez que a Matemática tem inúmeras aplicações para a sociedade e exerce uma função social, ela torna-se necessária e insubstituível. O domínio desse conhecimento determina um poder nesse tipo de sociedade.

O que se quer é direcionar a educação para que a sociedade seja democrática. Todavia, para desenvolver uma competência democrática, não basta que os alunos tenham habilidades em resolução de problemas. É necessário que as atividades educacionais estejam de acordo com a Educação Crítica. O autor, então, discorre sobre o que é a competência democrática e como ela é abordada em algumas tendências educacionais. Ele propõe o desafio de como desenvolver materiais e situações de ensino e aprendizagem que sejam, ao mesmo tempo, abertos e capacitadores. São citados, como exemplos, os trabalhos desenvolvidos pelo IOWO[4].

No terceiro capítulo – "*Competência Democrática e o Conhecer Reflexivo na Matemática"* – Skovsmose coloca a questão da Alfabetização Matemática como um pré-requisito para desenvolver a democracia numa sociedade tecnológica. Por Alfabetização Matemática entende-se a capacidade de utilização de técnicas matemáticas e formais, enraizada no espírito crítico, que

---

[4]IOWO: Institute voor de Ontwikkeling van het Wiskunde Onderwijs (Instituto de Desenvolvimento da Educação Matemática). Trata-se de um instituto de pesquisas em Educação Matemática, fundado em 1971, na Holanda, por Hans Freudenthal. Mais tarde passou a ser chamado de Instituto Freudenthal.

permita aos estudantes compreender e transformar a sociedade. Nesse artigo, o autor conceitua Democracia dentro de sua perspectiva teórica e coloca em discussão as relações entre democracia e Educação Matemática.

Skovsmose (2001) apresenta a tese de que a Matemática formata a sociedade, isto é, ela fornece modelos prescritivos, que podem servir para intervir na vida em sociedade, como por exemplo, uma nova forma de calcular impostos. Aprofundando a reflexão sobre as relações possíveis, o autor afirma que o foco da discussão epistemológica da Educação Matemática deve ser o das funções da aplicação da Matemática na sociedade e não somente na modelagem.

No quarto capítulo, *"Em direção à Educação Matemática Crítica",* o autor relata uma experiência realizada em 1988, na Dinamarca, com 20 alunos de 14 a 15 anos que participaram do Projeto *Educação Matemática e Democracia em Sociedades Altamente Tecnológicas (Dinamarca)*. O objetivo é atribuir significados à ideia de que a Matemática formata a sociedade e, portanto, a alfabetização matemática é necessária na Educação Crítica. O autor também discute como a Educação Matemática pode ser associada à tecnologia. Para Skovsmose (2001), pensar em tecnologia não implica, necessariamente, a utilização de computadores ou outros tipos de equipamentos ou ferramentas, mas considerar a tecnologia como parte de todos os aspectos da vida social. A Matemática deve ser vista como elemento deste desenvolvimento tecnológico.

A experiência apresentada foi desenvolvida em atividades escolares, nas quais os estudantes deveriam criar um modelo de distribuição de auxílios financeiros para famílias em uma microssociedade. O valor total distribuído era limitado, mas o quanto cada família receberia poderia variar, de acordo com critérios que seriam decididos pelos alunos. Assim, os alunos deveriam: descrever, de modo mais completo possível, as famílias desta microssociedade (as famílias tinham perfis bastante diferentes); criar um banco de dados em um computador; decidir quais seriam os dados relevantes para a criação de um modelo; criar algoritmos de distribuição de renda; comparar e discutir os diferentes resultados obtidos pelos algoritmos; decidir sobre qual seria a "melhor" forma de distribuição e informar os critérios de cálculo às famílias que receberiam o auxílio. Por fim, discutiriam como os fatores políticos e técnicos influenciaram as escolhas feitas.

A partir deste relato, Skovsmose abre a discussão sobre três tipos de conhecimentos que devem ser desenvolvidos na Educação Matemática Crítica. O primeiro é o conhecimento matemático, que é o domínio dos conceitos, resultados e algoritmos matemáticos. Trata-se de conhecer os símbolos e as regras matemáticas e usá-los adequadamente. O segundo é o conhecimento tecnológico: a habilidade de aplicar a Matemática e construir modelos, estratégias de resolução de problemas ou algoritmos, com os conhecimentos matemáticos. O terceiro é o conhecimento reflexivo: competência de refletir e avaliar, criticamente, a aplicação matemática na situação-problema. Para o autor, o conhecimento tecnológico é incapaz de predizer e analisar os resultados de sua própria produção. Só o conhecimento reflexivo pode dar uma dimensão crítica à alfabetização matemática.

Nesse projeto, os estudantes lidaram com a transição da linguagem natural, de descrição das famílias, para uma linguagem matemática sistematizada (as informações arquivadas em um banco de dados) desenvolvendo o conhecimento matemático. Na criação de um modelo para a distribuição de auxílios (escolher os dados relevantes e a construção de algoritmos), desenvolveram o conhecimento tecnológico. A etapa final, na qual os estudantes deveriam discutir os padrões formulados e decidir pela melhor forma de distribuição de auxílios, acabou não ocorrendo, por motivos alheios ao projeto. Neste ponto, o autor discute o poder que a Matemática tem em formatar a sociedade: o algoritmo escolhido passa a ser a diretriz para as ações posteriores. Certos aspectos da realidade são estruturados a partir das diretrizes formais: como será esta microssociedade após determinar-se a distribuição destes auxílios? Ao longo do processo, apareceram conflitos quanto às escolhas das soluções: as soluções tecnológicas coincidem com as soluções sociais ideais? Ao se discutir sobre estas possibilidades, pode-se chegar ao conhecimento reflexivo.

Para concluir este capítulo, Skovsmose se pergunta: a experiência foi um exemplo efetivo de Educação Matemática Crítica? Ele afirma que, para responder a isso, seria necessário saber se os estudantes desenvolveram, de fato, a capacidade de refletir e realizar interpretações, a partir da construção de modelos matemáticos e suas aplicações. Então, o autor não considera que este relato seja um exemplo do que a Educação Matemática Crítica deva ser, mas sim um exemplo de como se pode atribuir significados a termos como a Alfabetização Matemática.

Finalmente, em *"A Ideologia da Certeza",* escrito com o Prof. Dr. Marcelo de Carvalho Borba, são discutidas as dimensões políticas da Educação Matemática. Resultados matemáticos ou estatísticos são usados, frequentemente, como o argumento final e irrefutável de declarações políticas, administrativas e técnicas, ou seja, a Matemática é parte da "linguagem do poder": atribui certeza ao discurso e não dá margens para manifestações contrárias. O seu aprendizado discrimina os que terão acesso e condições de apropriar-se das informações necessárias para se chegar ao poder ou para mantê-lo.

Os autores conceituam ideologia como um sistema de crenças e conhecimentos que atua como filtro no reconhecimento de problemáticas em certos grupos sociais. A ideologia pode camuflar ou suavizar uma situação, evitando que se reconheça o problema. É tarefa da crítica explicitar a ideologia.

Os autores chamam de "ideologia da certeza" ver a Matemática como um sistema perfeito, infalível, não influenciado por qualquer interesse político, social ou ideológico. Também faz parte da ideologia da certeza considerar que uma solução matematizada de um problema é sempre superior às soluções não matematizadas. Esta é a visão hegemônica, não apenas no senso comum, mas também nas discussões acadêmicas e científicas. Eles atribuem a construção de tal ideologia à educação acrítica, reforçada por atividades escolares com uma única solução, problemas com dados inventados que não são reais, e pseudo-aplicações da Matemática na realidade. Essa ideologia promove a Matemática pelo seu enorme poder de aplicação, porém não incita a discussão acerca das hipóteses, ou dos modelos alternativos e das soluções diferentes.

Uma educação moldada na ideologia da certeza não pode favorecer a democracia. É tarefa dos educadores críticos desafiar tal ideologia. Para isso, não basta trabalhar com resolução de problemas ou projetos de modelagem. Mas podemos desafiá-la incluindo no currículo o trabalho com situações abertas, nas quais surgem ambiguidades, evidenciando os limites da Matemática na solução de um problema real.

De modo geral, dizemos que um modelo descreve uma realidade e avaliamos sua eficácia pelas aproximações deste modelo a esta realidade. Entretanto, os autores afirmam que um modelo também pode ser prescritivo, isto é, projetar uma realidade ainda não existente. As decisões sobre o problema real são tomadas a partir do modelo aplicado. Um modelo deste tipo foi exemplificado no capítulo 4, atribuindo um sentido à afirmação de que a Matemática formata a realidade.

Enfim, nos cinco capítulos desta obra, somos apresentados a uma discussão epistemológica fundamental na Educação Matemática: uma educação para dominar conhecimentos e tecnologias, a fim de construir uma sociedade verdadeiramente democrática. Ao imaginarmos tal educação, devemos considerar que, em primeiro lugar, a Educação Matemática é necessária para desenvolvermos as competências democráticas no indivíduo. A Alfabetização

Matemática é uma condição essencial para que a educação possa promover a democracia. Em segundo lugar, precisamos desafiar a ideologia da certeza, buscando desenvolver os conhecimentos matemático, tecnológico e reflexivo, por meio de atividades de projetos que considerem os problemas reais. Em terceiro lugar, a tecnologia não pode ser esquecida, pois a sociedade é tecnológica e a Matemática é um produto tecnológico.

Concluindo, trouxemos uma citação dos autores do último texto, que nos serve de inspiração para reflexões sobre a Educação Matemática. Ao discutir acerca de um problema real, numa educação democrática, Skovsmose e Borba afirmam: “Não existe nenhuma decisão final que possa ser dada pelos números ou pelos fatos históricos” (SKOVSMOSE, 2001, pg. 142).