HIPÁTIA

Υπατία

REVISTA BRASILEIRA DE HISTÓRIA, EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA

ISSN 2526-2386

v.1, n.1, dezembro 2016

Instituto Federal de São Paulo

Câmpus Campos do Jordão

HIPÁTIA

Υπατία

Gphem

INSTITUTO FEDERAL
São Paulo

HIPÁTIA

$\Upsilon\pi\alpha\tau\acute{\iota}\alpha$

REVISTA BRASILEIRA DE HISTÓRIA, EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA

v.1, n.1, dezembro 2016

Instituto Federal de São Paulo

HIPÁTIA	Campos do Jordão (SP)	v. 1	n. 1	p. 1-96	dez. 2016

LINHA EDITORIAL

A HIPÁTIA - Revista Brasileira de História, Educação e Matemática, conforme sugere seu nome, aceita trabalhos de História da Matemática, Educação Matemática e de Matemática (pura e aplicada). A revista foi oficialmente criada em 8 de março de 2016. Duas concepções principais nos norteiam: ajudar a ampliar o espaço da mulher na ciência no Brasil; abrir um espaço para jovens pesquisadores (mestres, doutorandos ou doutores que tenham obtido título há, no máximo, cinco anos). Isso significa que procuramos dentro da composição de nosso Conselho Editorial, Conselho Científico e em nossas edições, obter uma maioria de pesquisadores ou de trabalhos cujos autores atendam a pelo menos um desses quesitos. É salutar destacar que, no entanto, contribuições de outros pesquisadores continuam sendo de grande valia. A revista é composta por quatro seções : **1) Artigos**, na qual são aceitos trabalhos completos de pesquisadores; **2) Comunicações Científicas**, na qual são aceitos trabalhos com resultados parciais contundentes em nível de pós-graduação ou trabalhos concluídos decorrentes de pesquisas em nível de graduação (iniciação científica, trabalho de conclusão de curso, monografias resultantes de trabalhos orientados por docentes etc.); **3) Relatos de Experiência**, na qual são publicados textos que descrevam precisamente uma dada experiência que possa contribuir de forma relevante para as áreas da HIPÁTIA; **4) Resenhas**, na qual são aceitas resenhas de livros, dissertações e teses, ou outros formatos de interesse publicados preferencialmente há não mais que cinco anos.

SUMÁRIO

EDITORIAL

S. César **Otero-Garcia**
Editor Chefe

Caras leitoras e leitores, com muita alegria, neste último dia de 2016, publicamos o primeiro número da HIPÁTIA – Revista Brasileira de História, Educação e Matemática.

A HIPÁTIA foi oficialmente criada em 8 de março de 2016, dia Internacional da Mulher, a partir de duas concepções principais: ajudar a ampliar o espaço da mulher e do jovem pesquisador (mestres, doutorandos ou doutores que tenham obtido título há, no máximo, cinco anos) na ciência no Brasil.

A primeira das concepções é relevante não só porque historicamente as mulheres normalmente foram deixadas à margem da ciência, como também, mesmo quando isso não ocorreu, acabaram tendo seus nomes apagados ou relegados a segundo plano pelos historiadores da ciência.

A segunda porque, por um lado, há revistas de iniciação científica, por outro, os periódicos já consolidados acabam por privilegiar trabalhos de pesquisadores já com carreiras consolidadas: há uma lacuna entre esses dois momentos.

Nesse contexto, a escolha pelo nome da matemática grega Hipátia (370-415) para a nossa Revista Brasileira de História, Educação e Matemática mostra-se relevante. Hipátia é a primeira matemática que se tem registro na história, tendo se destacado também pela sua condição de defensora da liberdade de pensamento e pela sua atuação dentro da educação na Grécia: a sua escola de filosofia atraia jovens estudantes de todas as partes do mundo romano.

Quando falamos em *ampliar espaço* estamos nos referindo à composição de nossos conselhos editorial e científico e dos autores dos artigos que publicamos: procuramos obter maioria de pesquisadores que atendam a pelo menos uma das concepções. No caso desta primeira edição, isso não foi particularmente difícil. Neste momento, do total de 48 conselheiros, 37 são jovens pesquisadores e 29 são mulheres. Com relação aos trabalhos, dos 10 autores, 8 são jovens pesquisadores e 7 são mulheres.

Em termos de temáticas, esta primeira edição está bem distribuída entre as três que ajudam a dar título à nossa revista: temos 3 trabalhos de história da matemática (ALGUNS ASPECTOS DO DESENVOLVIMENTO HISTÓRICO DO CONCEITO DE FUNÇÃO, de Edna Maura Zuffi; O QUINTO POSTULADO DE EUCLIDES COMO HISTÓRIA DE PROBLEMAS, de Línlya Sachs; e PRIMEIRO COLÓQUIO BRASILEIRO DE MATEMÁTICA: UMA BREVE APRESENTAÇÃO DA PARTICIPAÇÃO FEMININA, de Angelica Raiz Calabria e Mariana Feiteiro

Cavalari); 2 trabalhos de educação matemática (QUERIDO DIÁRIO: O QUE DIZEM AS NARRATIVAS SOBRE A FORMAÇÃO E A FUTURA PRÁTICA DO PROFESSOR QUE ENSINARÁ MATEMÁTICA NOS ANOS INICIAIS, de Américo Júnior Nunes da Silva e Carmen Lúcia Brancaglion Passos; e AS RELAÇÕES COM O SABER ESTABELECIDAS NA AÇÃO DO PROFESSOR EM SALA DE AULA: INVESTIGAÇÕES REALIZADAS COM O USO DA MATRIZ 3X3 ENTRE OS ANOS DE 2011 A 2014, de Diego Fogaça Carvalho e Vanessa Largo; 1 trabalho de matemática (OS TRIKERNELS DE STRATONOVICH E DE BEREZIN PARA J=1 E J=3/2, de Nazira Hanna Harb); e 1 resenha de um trabalho de educação matemática (por Henrique Rizek Elias).

Esperamos que tenham uma boa leitura e agradecemos a todos que contribuíram direta ou indiretamente para que esta edição pudesse ser publicada.

Campos do Jordão, 31 de dezembro de 2016

ALGUNS ASPECTOS DO DESENVOLVIMENTO HISTÓRICO DO CONCEITO DE FUNÇÃO[1]

SOME ASPECTS OF THE HISTORICAL DEVELOPMENT OF THE FUNCTION CONCEPT

ZUFFI, Edna Maura[2]

RESUMO

O conhecimento da gênese histórica dos conceitos matemáticos pode ser uma ferramenta de grande valia para a elaboração da linguagem matemática e para uma compreensão mais profunda desses conceitos. Em particular, a ideia de função, tendo percorrido muitos séculos desde as suas primeiras noções intuitivas, e tendo chegado à sua elaboração mais recente apenas no século XX, mostra uma grande riqueza histórica a ser explorada, principalmente na formação de professores de Matemática. Nossa intenção, neste artigo, é trazer à tona alguns fatos da gênese histórica desse conceito, propondo também breves reflexões, obtidas em nossa pesquisa com professores, ao desenvolverem essa ideia no Ensino Médio.

Palavras-chave: Funções. Gênese histórica. Linguagem matemática. Professores.

ABSTRACT

The knowledge of the historical genesis of mathematical concepts can be a valuable tool for the development of mathematical language, and therefore, for a deeper understanding of these concepts. In particular, the idea of function has covered many centuries since its first intuitive notions, and has arrived at its latest development only in the twentieth century. This idea shows a great historical wealth to be exploited, particularly for the training of mathematics teachers. Our intention in this article is to bring to light some facts of the historical genesis of this concept, as well as to propose brief reflections obtained from our research with High School teachers that developed it.

Keywords: Functions. Historical genesis. Mathematics language. Teachers.

1 INTRODUÇÃO

Neste artigo não pretendemos fornecer uma análise minuciosa de todos os aspectos ligados ao desenvolvimento histórico do conceito de função, mas acreditamos que o compartilhar de alguns desses fatos com os colegas professores possa ser de grande utilidade na compreensão das diferentes definições propostas para o mesmo.

A partir dessas definições, e com a constatação de que nem todas as motivações históricas que surgiram para seu aprimoramento podem estar presentes em sala de aula, os professores poderão fazer uma análise crítica dos modos pelos quais essas ideias são desenvolvidas com seus alunos.

Uma de nossas pesquisas (ZUFFI, 1999) mostrou que há uma diversidade de conceituações para as funções, apresentadas pelos professores do Ensino Médio, que variam com o contexto em que são propostas. Mais ainda, revelou que nem sempre os professores têm consciência dessas diferenças.

---

[1] Este artigo foi originalmente publicado pela Sociedade Brasileira de Educação Matemática-SBEM, na *Educação Matemática em Revista*, ano 8, n.9/10, em abril de 2001, a qual autorizou previamente sua republicação neste periódico.

[2] Doutora pela Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo (USP), São Paulo, Brasil. Docente no Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação (ICMC) da USP, São Carlos, São Paulo, Brasil. Endereço para correspondência: Av. Trabalhador São-carlense, 400, Centro, CEP:13566-590, São Carlos, SP, Brasil. Endereço eletrônico: edna@icmc.usp.br.

A análise histórica, então, vem nos auxiliar a compreender que a criação em Matemática não se dá em um momento único. Há fatores socioculturais influenciando fortemente essa criação, todos dependendo dos problemas que as sociedades de cada época propõem como relevantes, juntamente com a comunidade científica. Da mesma maneira, na sala de aula, a elaboração das ideias matemáticas depende de problemas levantados pelos alunos e pelo professor, bem como das formas de expressão, através da linguagem matemática, com as quais essas ideias são abordadas.

2 UM POUCO DE HISTÓRIA

No trabalho de Sierpinska (1992), encontramos alguns momentos da evolução da ideia de função, como também a ressalva de que os papéis exercidos pelos conjuntos 'domínio' e 'contradomínio', envolvidos em sua definição, não são simétricos:

> Esta condição não nos parece um problema agora, mas foi necessário muito tempo na história para atingi-la como algo importante para se distinguir a ordem das variáveis. [...] Os historiadores atribuem a discriminação entre as variáveis dependentes e independentes a Descartes, mas parece que os papéis das coordenadas em sua 'Geometrie' eram bastante simétricos (SIERPINSKA, 1992, p. 38)[3].

Não parece existir um consenso, entre os diversos autores, a respeito da origem do conceito de função. Alguns deles consideram que os babilônicos já possuíam um "instinto de funcionalidade". (YOUSCHKEVITCH, 1976, apud MACHADO, 1998). Podemos encontrar este "instinto de funcionalidade", que precede uma ideia mais geral de função, desde cerca de 2000 A.C., em cálculos babilônicos com tabelas sexagesimais de quadrados e de raízes quadradas, podendo ser tomadas como "funções tabuladas", destinadas a um fim prático.

Entre os gregos, as tabelas que faziam a conexão entre a Matemática e a Astronomia mostravam evidências de que estes percebiam a ideia de dependência funcional, através da interpolação linear (YOUSCHKEVITCH, 1976, apud MACHADO, 1998).

Segundo Boyer (1974), na França, há indícios de ideias primárias de função anteriores a 1361, quando Nicole Oresme, um dos maiores escritores e professores de sua época, descreveu graficamente um corpo movendo-se com aceleração uniforme no tempo. Porém, o trabalho de Oresme resumia-se a ilustrar aspectos qualitativos, sem se utilizar de medidas (YOUSCHKEVITCH, 1976, apud MACHADO, 1998).

Para Youschkevitch (1976), há três fases principais do desenvolvimento da noção de função: 1) a Antiguidade, na qual o estudo de casos de dependência entre duas quantidades ainda não havia isolado as noções de variáveis e de função; 2) a Idade Média, quando as noções eram expressas sob uma forma geométrica e mecânica, mas em que ainda prevaleciam, em cada caso concreto, as descrições verbais ou gráficas; 3) o período Moderno, a partir do século XVII, principalmente, que comporta, a seguir, um melhor detalhamento.

Galileu Galilei (1564-1642) contribuiu para a evolução da ideia de função, ao introduzir o quantitativo nas suas representações gráficas. Nessa época, o aprimoramento dos instrumentos de medida propiciou a busca de resultados inspirados na experiência e na observação.

[3] Todas as traduções, neste artigo, são de nossa autoria.

Já Descartes (1696-1650) utilizou-se de equações em x e y para introduzir uma relação de dependência entre quantidades variáveis, de modo a permitir o cálculo de valores de uma delas, a partir dos valores da outra.

Entretanto, compreendemos que foi com dos trabalhos de Newton (1642-1727) e Leibniz (1646-1716) que surgiram as primeiras contribuições efetivas para o delineamento desse conceito.

Na teoria de Newton sobre "fluentes" – esse era o termo que ele usava para descrever as suas ideias de funções – estas encontravam-se bastante ligadas à noção de curva e às "taxas de mudança" de quantidades variando continuamente. E mais ainda, restringiam-se a "imagens geométricas de uma função real, de variável real" (CARAÇA, 1952).

Newton desenvolveu também uma grande habilidade em expressar estes "fluentes" em termos de séries infinitas, relacionadas a taxas de variação, para o cálculo de comprimentos, áreas, volumes, distâncias, temperaturas, enfim, grandezas variando continuamente. Isso acabou por resultar em sua tentativa de definir limite de uma função, falando em "quantidades" e "taxas de quantidades" (BOYER, 1974), termos que são bastante imprecisos e distantes da noção de limite que conhecemos hoje.

Foi Leibniz, na década de 1670, quem usou o termo "função" para se referir a "certos segmentos de reta cujos comprimentos dependiam de retas relacionadas a curvas". Logo depois, o termo foi usado para se referir a quantidades dependentes ou expressões (ITÔ, 1987).

Notamos que as primeiras definições do conceito revelam um certo encantamento pela álgebra, na qual a função era dada por uma expressão algébrica, como veremos a seguir, na definição dada por Jean Bernoulli (1667-1748): "Função de uma quantidade variável é uma quantidade composta de alguma maneira desta variável e de quantidades constantes" (SIERPINSKA, 1992, p. 45).

Jean Bernoulli estava interessado em funções que fossem bem-comportadas, devido à natureza dos problemas para os quais contribuiu, como o aprimoramento da utilização da regra de L'Hospital para formas indeterminadas de limite, que envolviam funções diferenciáveis. Este matemático também deu grandes contribuições à Geometria Diferencial, com seus estudos sobre geodésicas em uma superfície. Estudou curvas como a catenária, trajetórias cáusticas e funções exponenciais simples: $y = a^x$, e gerais: $y = x^x$. Para essa última, propôs também sua expansão em séries de exponenciais e, integrando-a termo a termo, achou a área sob essa curva. Jean experimentou várias notações para uma função de x, das quais a mais próxima da notação em uso é "ϕx" (BOYER, 1974).

Outra definição interessante é a de Leonard Euler (1707-1783), que foi discípulo de Jean Bernoulli:

> Uma função de uma quantidade variável é uma expressão analítica, composta de alguma maneira desta mesma quantidade e números ou quantidades constantes. Assim, qualquer expressão analítica a qual, além da variável z, contém também quantidades constantes, é uma função de z. Por exemplo: $a + 3z$; $az - 4zz$; $az + b/aa - zz$; cz etc; são funções de z (SIERPINSKA, 1992, p.45).

Euler, a partir de seu *Introductio in analysin infinitorum*, de 1748, organizou o cálculo diferencial, ampliando a ideia de "fluentes" de Newton para um ramo mais amplo da Matemática – a Análise, a qual se caracteriza pelo estudo de processos infinitos (BOYER, 1974). A partir daí, a ideia de função tornou-se fundamental para esta área, enquanto esteve implícita na Geometria Analítica de Fermat e Descartes, e nos estudos de Newton e Leibniz.

Entretanto, a definição dada por Euler não explicita o que é uma "expressão analítica". Não podemos, porém, deixar de observar que este matemático trouxe grandes contribuições para a linguagem simbólica e as notações que utilizamos hoje, entre elas, o "$f(x)$" para denotar uma função de x (além da letra e, para a base de logaritmos naturais, π para o perímetro da circunferência dividido por seu diâmetro, i para $\sqrt{-1}$, Σ para somatório etc.).

Em seu *Introductio*, Euler estabeleceu um tratamento estritamente analítico para as funções trigonométricas (em termos de expansão das mesmas em séries de potências), introduzindo abreviações para estas funções que são próximas às que conhecemos hoje. Também trabalhou com séries fracionárias infinitas, estabelecendo relações entre a Análise e a Teoria dos Números. Estudou particularmente as funções exponenciais e os logaritmos. Com D'Alembert, trocou correspondências sobre o "problema das cordas vibrantes", que envolvia equações diferenciais e funções diferenciáveis (e, portanto, bem-comportadas).

A imprecisão da definição de limite de uma função proposta por Euler, que se utilizava de ideias dúbias sobre os diferenciais, parece refletir a própria imprecisão em sua definição de função e de variável. Segundo Euler, os diferenciais eram símbolos para "quantidades que são zero" e também "quantitativamente diferentes de zero". Esta sua proposta foi criticada por D'Alembert, o qual tentou melhorar o conceito de limite, mas essa questão só foi bem resolvida no século XIX (BOYER, 1974).

A nosso ver, um detalhe interessante que pode ter indiretamente contribuído para o aperfeiçoamento da definição de função – e, particularmente, para a de funções logarítmicas e exponenciais – foi que Euler esclareceu que os logaritmos de números negativos não são números reais. Isto era bastante confuso, até então, e acabou por levar a se pensar em restrições para os domínios destas funções e para as bases consideradas. Euler também trabalhou com as funções seno e cosseno para números complexos, o que, juntamente com os estudos de D'Alembert a este respeito, serviu como antecipação de um ambiente favorável para o desenvolvimento da teoria de funções de variáveis complexas de Cauchy, no século XIX.

Outra definição interessante de função é a do matemático francês Jean-Louis Lagrange (1736-1813) ~~e~~ que já incorpora ao conceito a possibilidade de termos várias variáveis:

> Chama-se função de uma, ou várias quantidades, toda expressão de cálculo na qual estas quantidades entram de uma maneira qualquer, misturadas ou não com outras quantidades, que se veem como valores dados e invariáveis, de modo que as quantidades da função podem receber todos os valores possíveis. Assim, nas funções considera-se somente as quantidades que se consideram variáveis, sem consideração às constantes que podem estar aí misturadas. (SIERPINSKA, 1992, p.45).

A Segunda metade do século XVIII foi uma época de importantes publicações que serviram de livros-texto para cursos de Matemática, que surgiram particularmente na França. Em 1788, Lagrange publicou seu *Mecanique Analytique*, no qual apresentou a Análise por meio de um tratamento por postulados (BOYER, 1974). Utilizou as notações $f'(x), f''(x), \dots, f^n(x)$ para a 1ª, 2ª, ..., n-ésima derivada da função $f(x)$. Também trabalhou com a expansão de funções em séries de potências, mas deixou lapsos quanto à convergência destas séries e também no estudo de funções que não eram expressas em séries infinitas. Lagrange publicou resultados sobre mecânica e teoria de equações, contribuindo com o "método da variação dos parâmetros" para a solução de equações diferenciais lineares não-homogêneas, e com os "multiplicadores de Lagrange", para máximos e mínimos condicionados de uma função $f(x, y, z, w)$ – aqui, relembramos que sua definição de função tem o cuidado de incluir funções de várias variáveis. Também se interessou pela Teoria dos Números e, na Álgebra, contribuiu com o teorema que diz que a ordem de um subgrupo divide a ordem do grupo em que este se insere.

Percebemos que esta foi uma época de grande entusiasmo pelo Cálculo, porém isto não foi suficiente para que se extinguissem por completo as confusões sobre seus princípios básicos. No entanto, as discussões geradas nesse período parecem ter tido fortes influências no desenvolvimento da "era do rigor", no século seguinte.

Outro matemático francês a quem se atribui muito desse rigor, é Augustin Cauchy (1789-1857), o qual influenciou marcadamente a Matemática do início do século XIX. Embora Gauss (1777-1855) o tivesse acompanhado em termos do rigor empregado em seus trabalhos, o fato de Cauchy ter publicado mais e apresentar maior aptidão para o ensino parece ter-lhe rendido mais créditos.

A definição de função, segundo Augustin Cauchy, era: "Chamam-se funções de uma ou várias quantidades variáveis às quantidades que se apresentam, no cálculo, como resultados de operações feitas sobre uma ou várias outras quantidades constantes ou variáveis" (SIERPINSKA, 1992, p.45).

Embora lhe seja atribuído o rigor do século XIX, observando com o olhar atual, não nos parece que esta definição seja muito precisa, pois não esclarece, de pronto, qual seria a natureza dessas "operações" feitas sobre as variáveis. Apesar disso, a teoria de funções de uma variável complexa foi desenvolvida por Cauchy, a partir de 1814.

Notamos que esse matemático já incorporava, como fundamento de suas teorias, o conceito de limite de D'Alembert, olhando os infinitesimais como variáveis dependentes. Ele também forneceu uma definição mais satisfatória de função contínua e sua definição para a derivada deixava claro que funções descontínuas em um ponto não seriam aí diferenciáveis, embora gráficos descontínuos pudessem determinar uma área bem definida.

Podemos observar algumas similaridades nos trabalhos de Cauchy e Bolzano (1781-1848). Este último, por volta de 1840, parecia reconhecer que os números reais não são enumeráveis, ou seja, que seu "infinito" é diferente daquele dos conjuntos de números naturais e inteiros.

Enquanto Newton, à sua época, preocupava-se com curvas suaves e contínuas, que representavam movimentos e fenômenos mecânicos, Bolzano, em 1834, apresentava uma função que era contínua, mas que não era diferenciável em nenhum ponto do intervalo em que se definia. Este exemplo, nada "comportado", passou despercebido até ser redescoberto e difundido por Weierstrass (1815-1897).

Segundo Boyer (1974), o termo "função" é uma palavra-chave em Análise, e foi especialmente na clarificação deste termo que o processo de aritmetização da Análise surgiu, tendo Fourier um papel destacado nesse processo.

As diferenças de opinião entre D'Alembert e Euler, na metade do século XVIII, sobre a solução do "problema da corda vibrante", e a solução apresentada por Daniel Bernoulli (que parecia implicar periodicidade e ser menos geral que a solução dada pelos primeiros), foram eliminadas em 1824, por Fourier (1768-1830), quando esse último mostrou não ser este o caso.

Para Fourier, qualquer função $y = f(x)$ poderia ser representada por uma série do tipo:

$$y = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx),$$

e esta conferiria maior generalidade ao tipo de função que poderia ser estudada. A série de Taylor, por exemplo, exigia funções diferenciáveis, enquanto que para a representação de Fourier, bastaria que as funções fossem contínuas e diferenciáveis por partes, podendo apresentar, assim, infinitos pontos de descontinuidade na reta.

Em 1837, Peter Gustav Lejeune-Dirichlet (1805-1859) propôs a seguinte definição geral de função, que foi amplamente aceita até meados do século XX:

> Se uma variável y está relacionada a uma variável x de modo que, ao se atribuir qualquer valor numérico a x, existe uma regra de acordo com a qual um único valor de y é determinado, então y é dito ser uma função da variável independente x (SIERPINSKA, 1992, p.46).

Embora esta última chegue próximo à noção moderna de função, àquela época, os conceitos de "conjunto" e de "número real" ainda não haviam sido precisamente estabelecidos. Mas a "regra" proposta por este matemático poderia ser bastante arbitrária. Dirichlet propôs a seguinte função real: $f(x) = c$, para os valores de x irracionais, e $f(x) = d \neq c$, para os valores de x racionais, o que determinava, já àquela época, uma função bastante "mal comportada" e não visualizável num gráfico (BOYER, 1974).

Foi esse matemático quem forneceu as primeiras provas rigorosas para a convergência das séries de Fourier, para funções restritas a certas condições.

Segundo Boyer (1974), o ano de 1872 foi crucial para a aritmetização da Análise, com a investigação da natureza das funções e da noção de número (faltava, à época, uma definição mais precisa para "número real"), que se iniciou com a proposta das séries de Fourier.

Bolzano já apresentara provas puramente aritméticas para seus resultados e a redescoberta de seu exemplo de função contínua e não-diferenciável, por Weierstrass, levou este último a elaborar o teorema de Bolzano-Weierstrass[4]. Por outro lado, Riemann havia exibido uma função $f(x)$ que era descontínua em quase toda parte de um intervalo e cuja integral existia e definia uma função contínua.

Somando-se a estes fatos, em 1844, Liouville exibia uma classe de números reais não-algébricos: os "números de Liouville"[5] e os números da forma $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{n!}}$. A transcendentalidade de π, π^2, e, e^2 foi mostrada por essa ocasião, provando-se que estes números não são algébricos.

Em 1872, cinco matemáticos, incluindo-se Weierstrass, propuseram uma teoria de números reais como limites de sequências de números racionais. Weierstrass viu a necessidade de se dar uma definição de número irracional que corrigisse o erro lógico de Cauchy. Este último definia todo limite de sequência como número real e, por outro lado, um número real como limite de uma sequência (de racionais). Weierstrass tentou adequar a questão, propondo a existência de um limite para a sequência convergente e fazendo desse limite o número real correspondente.

Também em 1872, um argumento mais completo para o problema dos números reais foi dado por Dedekind (1831-1916). Este chegou à conclusão de que a essência da continuidade de um segmento de reta não é a ideia vaga de "estar próximo", mas uma propriedade oposta, em certo sentido: a natureza da divisão do segmento em duas partes, por um ponto do segmento (ideia de "cotas superiores e inferiores"). Com os "cortes de Dedekind"[6] no sistema de números

---

[4] Todo conjunto limitado S, contendo infinitos elementos (pontos ou números) contém no mínimo um ponto limite.

[5] Para maiores detalhes, ver Marchiori (2013).

[6] Para toda divisão dos números racionais em duas classes A e B, tais que cada número da primeira classe, A, é menor do que todo número da segunda classe, B, existe um só número real produzindo este 'Schnitt', ou corte de Dedekind. Se

racionais, o conjunto dos números reais mostrou-se realmente como uma construção intelectual humana e pouco intuitiva.

Ainda no ano de 1872, surgiu a definição precisa de um conjunto infinito, dada por Dedekind (na condição de que um de seus subconjuntos próprios esteja em correspondência biunívoca com o conjunto dado). Também Heine forneceu a definição de limites em termos de ε's e δ's que conhecemos hoje, resolvendo o problema de termos ainda imprecisos usados por Cauchy, como: "valores sucessivos", "aproximar indefinidamente" e "tão pequeno quanto se queira". A partir daí, os teoremas fundamentais de limites poderiam ser provados rigorosamente.

Georg Cantor (1845-1918) também apresentou contribuições sobre a noção de "infinito", mostrando que os infinitos dos naturais e dos reais não eram os mesmos.

O matemático italiano, Giuseppe Peano (1858-1932) também deixou contribuições à noção de número, que, a nosso ver, podem ter influenciado na elaboração final do conceito de função. Peano tentou desenvolver uma linguagem que deveria conter não somente a lógica, mas todos os ramos mais importantes da Matemática. Fez uma escolha feliz para vários símbolos matemáticos que utilizamos ainda hoje $\in, \cup, \cap, \supset$. Porém, sua maior contribuição talvez esteja nos três conceitos primitivos que estabeleceu em seus fundamentos de aritmética: o zero, o conceito de número (inteiro não-negativo) e a relação de "ser sucessor de", os quais, junto com seus cinco postulados, forneceram uma construção rigorosa do conjunto dos números naturais.

Em seu *Sulla definizione de funzione, Atti dei Lincei*, de 1911, Peano propõe reduzir o conceito de função ao conceito de relação unívoca (SIERPINSKA, 1992, p.48).

Na primeira metade do século XX, surgem as publicações de Bourbaki, que era o pseudônimo de um grupo de matemáticos do qual participavam André Weil e Jean Dieudonné. É de Bourbaki a definição de função, usada atualmente nos meios matemáticos e científicos, e que foi proposta em 1939: "uma função é uma tripla ordenada (X, Y, f), em que X e Y são conjuntos e f é um subconjunto de $X \times Y$, tal que, se $(x, y) \in f$ e $(x, y') \in f$, então $y = y'$" (SIERPINSKA, 1992, p.30).

Com esta definição mais geral – na qual o conceito de função pode ser definido de uma maneira simbólica, formal e quase que sem usar palavras da língua materna – e com a eliminação dos problemas lógicos que envolviam a construção do conjunto dos números reais, hoje é possível elaborar funções muito mais abrangentes. Por exemplo, aquelas usadas no sentido de "aplicações", definidas em conjuntos quaisquer, ou em estruturas da Álgebra, onde os domínios e imagens são "grupos", "corpos", "anéis" etc. Dentro da própria Análise, o conceito se estende à ideia de "funcional", quando o seu domínio é um espaço de funções, ou seja, quando temos, a grosso modo, "função de funções". As sequências, numéricas ou mais gerais, passam agora a ser vistas como exemplos de funções, cujo domínio é o conjunto dos números naturais.

Com o que foi anteriormente exposto, observamos que os problemas que ocupavam os matemáticos, em cada época, exerceram forte influência na elaboração do conceito de função. Na Antiguidade, a preocupação de Aristóteles era apenas a de descrever mudanças e relações que ocorriam na natureza de uma maneira qualitativa (CARAÇA, 1952). Com Newton e Leibniz, houve uma quebra nesta visão da ciência e os problemas que preocupavam os matemáticos, até a época de Cauchy, estiveram relacionados com funções bem-comportadas (contínuas e diferenciáveis), com as quais se pretendia resolver aspectos quantitativos a eles relacionados.

A contém um ponto de máximo como elemento, ou B contém um mínimo, então o corte define um número racional. Caso contrário, o corte define um número irracional (BOYER,1974).

A necessidade de estender a noção de função para além daquelas “expressáveis analiticamente”, ou visualizáveis com o recurso de um gráfico, apareceu na história com a polêmica gerada entre Euler, D´Alembert e Bernoulli, sobre o “problema da corda vibrante”. Esta polêmica teve seu desfecho com o estudo das séries de Fourier, que foram aperfeiçoados por Dirichlet, na busca de condições mais rigorosas para sua convergência.

As consequências lógicas da definição de Dirichlet e da posterior elucidação da questão da definição dos números reais acabaram por gerar exemplos que estão fora do protótipo do que era originalmente concebido como função. Hoje, esse conceito não se reduz apenas a aspectos numéricos e quantitativos. Segundo Sierpinska (1992), uma função não se concebe nem como lei, nem como valor, na definição atual, mas como a síntese desses dois aspectos, juntamente com os conceitos de domínio e contradomínio.

3 ALGUMAS REFLEXÕES SOBRE O ENSINO DO CONCEITO DE FUNÇÃO

A partir dos resultados obtidos com uma de nossas pesquisas com professores do Ensino Médio (ZUFFI, 1999), vimos que, ao fazerem uso da linguagem matemática para expressar suas próprias concepções sobre o conceito de função, esses professores apresentaram visões diferenciadas quando se reportavam às definições informalmente e quando eram solicitados a fornecer definições formais. Cada uma dessas visões identificou-se com um momento histórico diferente para o conceito. Maiores detalhes dessa pesquisa podem ser acessados em Zuffi e Pacca (2000).

No caso formal, as definições foram elaboradas de maneira a atingir as mais recentes propostas históricas, muito próximas às definições de função de Dirichlet e Bourbaki, enquanto que no tratamento informal, ou com exemplos e resoluções de problemas/exercícios, as ideias propostas para as funções estavam muito mais próximas da definição de Euler, dando destaque para as expressões analíticas (algébricas) que representavam as funções. Assim, pudemos notar que os professores do Ensino Médio que foram investigados, à época, faziam uma separação bastante dicotômica entre o “teórico” e o “prático”, relegando ao primeiro, um papel muito menor. Em geral, as definições formais eram colocadas na introdução do assunto (funções) e depois eram abandonadas ao tratarem dos exemplos, exercícios e problemas relativos ao tema (em geral, nesta ordem), sem que houvesse uma aproximação mais detalhada das ideias que cada uma delas destacava. Acreditamos que essas práticas ainda persistam para muitos professores, ao tratarem dessa temática em sala de aula.

Vimos, também nessa investigação, que obstáculos epistemológicos que ocorriam com alunos, apontados por Sierpinska (1992), também surgiram com os professores acompanhados. É comum que estes pensem nas funções somente em termos de equações e de elementos desconhecidos a serem extraídos delas e que as ideias que estas englobam, de conjuntos, relação e variabilidade fiquem perdidas, muitas vezes. Outro obstáculo evidenciou-se quando esses professores mostraram dificuldades em determinar quais eram as variáveis dependentes e independentes, para alguns casos propostos. Vemos que isso se assemelha ao fato de que as primeiras aproximações históricas da ideia de função também não faziam clara distinção entre variáveis dependentes e independentes – estas consagradas após o maior desenvolvimento da Análise e da Teoria de Conjuntos – e, ainda, identificavam mais a função com uma expressão analítica (parte mais completa de uma equação, como na definição de Euler), do que com uma relação especial entre duas variáveis.

Esses professores também tiveram dificuldades em perceber os papéis não simétricos dos conjuntos de domínio e contradomínio, talvez devido ao fato de não considerarem relevantes as definições mais atuais e formais para funções. Isso não seria um problema, se os vários exemplos fornecidos pelos professores deixassem mais evidentes essas diversas nuanças da definição formal. Mesmo exemplos de relações entre variáveis, que não se adequam à presente ideia de funcionalidade, apareceram muito raramente entre os professores observados em suas práticas de sala de aula.

Com relação à noção de número, os resultados evidenciaram um outro obstáculo: embora a grande maioria dos casos de funções envolvesse o conjunto dos reais, as variações de valores, propostas pelos professores pesquisados em sala de aula e nas entrevistas, ocorriam sempre (e apenas) dentro de um conjunto reduzido de números racionais, ou mais frequentemente ainda, de um subconjunto pequeno de números inteiros. Constatamos que isso ocorria mesmo após os professores fazerem, em classe, o estudo do conjunto dos números reais.

Vemos novamente que, do ponto de vista histórico, as construções formais do conjunto dos números reais e da ideia de continuidade da reta real, e consequentemente da própria continuidade das funções mais usuais, também demoraram para se solidificar. Talvez por esse motivo persistam, no ensino desse conceito, abreviações para os tratamentos em conjuntos numéricos finitos e com elementos esparsos (naturais e inteiros), uma vez que os contextos em que as funções são apresentadas no nível básico se assemelham aos contextos históricos mais remotos, de estudos de funções bem-comportadas que representavam movimentos simples, no início do período moderno. Para os alunos do Ensino Médio, em geral, isso não deve se constituir num grande problema; entretanto, se o professor tiver consciência desses fatos históricos que envolvem a gênese e o desenvolvimento do conceito matemático de função, poderá trabalhar mais adequadamente os casos em que não temos continuidade (por exemplo, em situações de dados estatísticos isolados, em que se traça uma curva de aproximação contínua para esses dados, mas não se pode afirmar que todos os pontos se adequem a essa curva, expressando uma tendência, apenas).

A transposição didática (CHEVALLARD, 1991) para o conceito de função nos pareceu ocorrer de maneira oblíqua, de modo que é essencialmente a definição formal de Dirichlet, proposta no final do século XIX e, portanto, mais recente, que chega à sala de aula do Ensino Médio hoje, quando esses professores se reportam aos seus aspectos mais formais. Ao mesmo tempo, perderam-se as conceituações históricas intermediárias, mas algumas dessas (como a de Euler), ainda que sem o conhecimento do professor, refletem-se nos exemplos apresentados.

As imagens conceituais (VINNER, 1991) – grosso modo, imagens mentais mais imediatas que os indivíduos evocam ao ouvirem o nome de um conceito – que identificamos para os professores investigados, através de um questionário, resumiram-se aos casos presentes no currículo do Ensino Médio (funções polinomiais de 1º, 2º e no máximo (em poucos casos) 3º graus, funções trigonométricas, exponenciais e logarítmicas). Ou seja, suas imagens conceituais para funções resumiam-se àquelas com expressões analíticas "bem comportadas" e que, em geral, ensinavam na primeira série desse ciclo. Os raros casos, que apenas dois dos sete professores observados exemplificaram com funções descontínuas, nas aulas observadas, ofereceram dificuldades de tratamento por esses professores.

Nossa pesquisa apontou que os entrevistados não pareciam estar cientes dessa separação didática que faziam entre o formal e o prático. Ao conhecerem alguns dos processos históricos que evidenciam a gênese do conceito de função, como uma construção humana que se altera no tempo e no espaço, talvez pudessem trazer à tona uma maior consciência de suas próprias concepções a este respeito e também do modo como ensinam sobre esse assunto.

Diante das considerações anteriormente levantadas, podemos concluir que a formação que temos proporcionado aos professores de Matemática do Ensino Médio, seja ela inicial ou continuada, e do modo como a efetivamos, ainda não os tem conduzido a uma adequada reflexão sobre o uso que fazem da linguagem matemática. Nossa pesquisa trouxe indícios de que essa linguagem não é vista por eles nem como uma construção histórica e dinâmica da Matemática, como área do conhecimento humano, nem como ferramenta para resolver problemas, da vida prática ou de outras ciências.

Este passeio pela gênese histórica do conceito de função mostra o quanto sua elaboração foi complexa e quantos estudiosos contribuíram para essa gênese, em cada período, imersos num ambiente de problemas matemáticos que era característico de cada época. Os conhecimentos históricos podem, então, colaborar com os professores para uma reflexão mais profunda sobre as ideias matemáticas. Particularmente com relação às funções, eles podem auxiliar o professor a refletir sobre suas concepções pessoais do assunto, dentre as diversas formalizações matemáticas propostas ao longo dos séculos, e sobre como essas concepções se relacionam à sua atividade em sala de aula e podem influenciar no aprendizado de seus alunos.

REFERÊNCIAS

BOYER, C. **História da matemática.** Tradução Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher; EDUSP, 1974.

CARAÇA, B. J. **Conceitos fundamentais da matemática**. Lisboa: Gradiva, 1952.

CHEVALLARD, Y. **La transposition didactique**: du savoir savant au savoir enseigné. 12e éd. Grenoble: La Pensée Sauvage, 1991.

ITÔ, K. (Ed.). **Encyclopedic dictionary of mathematics**. 2nd ed. Cambridge, Massachusetts: MIT Press; Mathematical Society of Japan, 1960.

MACHADO, A. C., **A aquisição do conceito de função**: perfil de imagens produzidas pelos alunos. 1998. Dissertação (Mestrado) – Faculdade de Educação da UFMG, Belo Horizonte, 1998.

MARCHIORI, R. M. **Números transcendentes e de Liouville**. 2013. 36 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – IGCE, Universidade Estadual Paulista – UNESP, Rio Claro, 2013. Disponível em: <http://www.rc.unesp.br/igce/pos/profmat/arquivos/dissertacoes/N%C3%BAmeros%20Transcendentes%20e%20de%20Liouville.pdf> . Acesso em: 26 abr. 2016.

SIERPINSKA, A. On understanding the notion of function. In: DUBINSKY, E.; HAREL, G. (Ed.) **The concept of function**: aspects of epistemology and pedagogy. Washington, USA: Mathematical Association of America, 1992. p. 25-58.

VINNER, S. The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In: TALL, D. (Ed.). **Advanced mathematical thinking**. Dordrecht, NED: Kluwer, 1991. p. 65-81. (Mathematical Education Library, 11).

YOUSCHKEVITCH, A. P. The concept of function. **Archive for History of Exact Sciences**, vol. 16, n. 1, p. 37-85. 1976.

ZUFFI, E. M. **O tema 'funções' e a linguagem matemática de professores do ensino médio:** por uma aprendizagem de significados. 1999. 307 f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, USP, São Paulo, 1999.

ZUFFI, E. M.; PACCA, J. L. A. Sobre funções e a linguagem matemática de professores do ensino médio**. Zetetiké**, Campinas, v. 9, n. 13/14, p. 7-28, jan/dez. 2000.

O QUINTO POSTULADO DE EUCLIDES COMO HISTÓRIA DE PROBLEMAS[1]

EUCLID'S FIFTH POSTULATE LIKE PROBLEMATIC HISTORY

SACHS, Línlya[2]

RESUMO

Neste artigo, temos como propósito apresentar uma reconstrução histórica feita com fins historiográficos do surgimento das geometrias não euclidianas como resultado das discussões em torno do quinto postulado de Euclides. Para isso, recorremos à história de problemas, por entendermos que ela se adequa ao tema em questão e ao propósito historiográfico. Utilizamos fontes historiográficas, traduções e edições de fontes primárias, textos matemáticos posteriores ao período histórico e textos filosóficos. Apresentamos a reconstrução histórica em três partes, que retratam fases no desenvolvimento do problema e das tentativas de solucioná-lo. A primeira contextualiza a escrita do livro *Os Elementos*, por Euclides, e as questões iniciais em torno do quinto postulado – como, por exemplo, outras formas de enunciá-lo. A segunda apresenta as tentativas de prova do quinto postulado, em períodos e locais diversos e por que elas não foram bem-sucedidas. A terceira e última parte mostra o surgimento das geometrias não euclidianas a partir das discussões anteriores.

Palavras-chave: Educação Matemática. Reconstrução histórica. Historiografia. Geometrias não euclidianas. Quinto postulado.

ABSTRACT

This paper aims to show a historical reconstruction, for historiographical purposes, of the appearing of the non-Euclidian geometries, involving the Euclid's fifth postulate. We employ the problematic histories to do this, because we understand it is appropriate to topic and to historiographical purpose. We use historiographical sources, translations and editions of primary sources, later mathematical texts to the historical period and philosophical texts. The historical reconstruction is divided in three parts, which show the phases in the problem development and the attempts to solve it. The first one contextualize the writing of the book The Elements by Euclid and initial questions around the fifth postulate – as, for example, other forms of state it. The second one shows the successful and unsuccessful attempts to prove the fifth postulate, in different places and periods and why they are unsuccessful. The third one presents the appearing of the non-Euclidian geometries from previous discussions.

Keywords: Mathematics Education. Historical Reconstruction. Historiography. Non-Euclidian Geometries. Fifth Postulate.

1 INTRODUÇÃO

> Quando lerem a obra de um historiador, prestem atentamente atenção à sua voz. Se não ouvirem nada, é porque são surdos ou porque o vosso historiador é um perfeito maçante. Não, na verdade, os fatos não se assemelham aos peixes expostos na banca do comerciante. Assemelham-se aos peixes que nadam no oceano imenso e muitas vezes inacessível; o que o historiador apanhará depende em parte do acaso, mas sobretudo da região do oceano que tiver escolhido para a sua pesca e da isca de que se serve. Estes três fatores são, evidentemente, determinados pelo tipo de peixes que se propões apanhar. Em geral, o historiador

[1] Este trabalho é decorrente da pesquisa de mestrado da autora (BARBOSA, 2011).

[2] Doutora em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista (UNESP), Rio Claro, São Paulo, Brasil. Docente na Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), Cornélio Procópio, Paraná, Brasil. Endereço para correspondência: Avenida Alberto Carazzai, 1640, CEP 86300-000, Cornélio Procópio, Paraná, Brasil. Endereço eletrônico: linlyasachs@yahoo.com.br.

> obterá o tipo de fatos que deseja encontrar. História significa interpretação (CARR, 1962, apud SCHAFF, 1996, p. 235).

A metáfora acima reflete o entendimento que temos de que a história é uma atividade humana interpretativa. Não há história por si, livre de interpretações, de escolhas, de relações e de objetivos, como se ela existisse antes da atividade humana; aquele que constrói a história – e ela é construída –, necessariamente, faz suas interpretações e relações, realiza escolhas e tem seus objetivos, assim como carrega consigo suas teorias e sofre influências do meio em que vive.

O que nos propomos a fazer aqui é uma reconstrução histórica sobre o quinto postulado de Euclides – e assim a chamamos, "reconstrução", pois valemo-nos de construções históricas já realizadas – e, como toda (re)construção histórica, temos objetivos específicos e esclarecemos a seguir. Antes, gostaríamos de destacar dois objetivos distintos e representativos em (re)construções históricas no âmbito da Educação Matemática, abordados por Barbosa e Silva (2013): o objetivo historiográfico e o objetivo pedagógico.

Enquanto uma (re)construção histórica com objetivo historiográfico visa à constituição de uma história para o registro de fatos e do estabelecimento de relações entre eles, a (re)construção histórica com objetivo pedagógico tem fins de ensino, de aprendizagem e de formação humana. Neste caso, Miguel e Miorim (2005) diferenciam, ainda, argumentos de caráter ético, que são aqueles que propõem que a história contribua para a construção de valores e atitudes na formação integral do cidadão, dos argumentos de caráter epistemológico, que focalizam o conhecimento (no caso, matemático) propriamente dito, sendo a história potencial para sua compreensão.

Neste artigo, temos objetivo especificamente historiográfico. Porém, entendemos que uma (re)construção com objetivo historiográfico pode ser pedagogicamente útil, apesar de não ser uma "história pedagogicamente vetorizada" (MIGUEL; MIORIM, 2005).

Nesse sentido, alguns pesquisadores indicam que professores que querem utilizar uma abordagem histórica em suas aulas reclamam da ausência de materiais nos quais possam se basear. Siu (2006), por exemplo, mostra que 64% de 608 professores entrevistados concordam que há a ausência de material para que incrementem historicamente suas aulas de matemática. Situação semelhante é relatada por Martins (2007), que indica que a maior dificuldade encontrada por 88 professores (nesse caso, de Física) entrevistados para o trabalho com história e filosofia da ciência é a falta de material adequado.

Assim, neste artigo, temos como propósito apresentar uma reconstrução histórica feita por nós, com fins historiográficos, do surgimento das geometrias não euclidianas como resultado das discussões em torno do quinto postulado de Euclides.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICO-METODOLÓGICA

Para fazermos a reconstrução histórica pretendida, optamos aqui pela abordagem da *história de problemas*, proposta por Mayr (1998). Entendemos que esse tipo de historiografia, em comparação com outras quatro apresentadas pelo autor, é a mais adequada aos nossos objetivos.

Mayr (1998) identificou algumas regularidades na escrita da história das ciências e isso o levou a agrupar esses modos de escrita em cinco tipos: história lexicográfica; história cronológica; história biográfica; história cultural e sociológica; e história de problemas.

A *história lexicográfica* é, essencialmente, descritiva e busca responder questões como "o quê?", "quando?" e "onde?" – o que dá um caráter superficial, pontual e fragmentado à reconstrução histórica. A *história cronológica* foca em períodos e nos acontecimentos lá situados. Um exemplo de obra historiográfica da história da matemática com esse aspecto é o livro *Introdução à História da Matemática*, de Eves (1995). Um ponto fraco desse tipo é não abarcar a longevidade dos problemas, como é o caso que apresentamos neste artigo: o quinto postulado de Euclides caracteriza-se como um problema que durou mais de 2000 anos, como veremos na seção seguinte. A *história biográfica* apresenta o desenvolvimento das ciências a partir de personagens, isto é, da vida de pessoas. Obviamente, a ciência é uma atividade humana e as pessoas envolvidas têm importância fundamental nos resultados alcançados; porém, nortear-se pela questão "quem?" pode ofuscar questões contextuais e reforçar a construção de mitos e gênios nas ciências. A *história cultural e sociológica* situa a ciência em seu meio cultural, social, econômico, político e intelectual, o que, por um lado, contribui para a compreensão de relações entre os acontecimentos, sem isolar a ciência de seu entorno, por outro lado, dificulta a atividade do historiador, que deve, nesse caso, vincular a atividade científica a aspectos externos muito diversificados. Para exemplificar essa dificuldade, Mayr (1998) faz perguntas que, nessa perspectiva, seriam respondidas pelos historiadores: Por que os gregos tinham interesse em questões científicas? Qual o efeito do protestantismo na ciência? Entendemos que as relações existem e devem ser explicitadas, contudo sublinhamos a imensa dificuldade em estabelecê-las. Por fim, a *história de problemas* parte de problemas científicos, de questões relativas a métodos que podem ser empregados e ferramentas conceituais e intelectuais disponíveis para a resolução do problema, além de considerar tentativas bem-sucedidas e fracassadas, situando-as no contexto social e intelectual.

O surgimento das geometrias não euclidianas, antecedido pela tentativa de demonstração do quinto postulado de Euclides, adequa-se à proposta de historiografia da história de problemas, por ser, justamente, um problema. Foi um problema matemático que mobilizou muitas pessoas em busca de soluções, com abordagens distintas, dependendo da atividade de outros matemáticos, das condições filosóficas, das influências de fatores externos à matemática – como a religião, em especial na Idade Média, e as condições econômicas que permitiam que alguns se dedicassem prioritariamente a atividades intelectuais na Grécia Antiga.

Assim, a abordagem que utilizamos na reconstrução histórica buscará situar o problema em seu meio e considerar tentativas que não solucionaram o problema – e por que não –, mas que se relacionam com outras e com aquelas que solucionaram.

Utilizamos, principalmente, fontes historiográficas para a nossa reconstrução, como textos de história da matemática (BARKER, 1969; CHABERT, 1997; KATZ, 1998; STRUIK, 1992; D'AMBROSIO, 1996; EVES, 1995; JAOUICHE, 1986; TRUDEAU, 1987; BONOLA, 1955; NOBRE, 2009; ROSENFELD, 1988; SMITH, 1958); mas, também, utilizamos textos matemáticos, sejam traduções e edições de fontes primárias (EUCLIDES, 2009; HEATH, 1968; EINSTEIN, 2005) ou obras mais recentes, que abordam, matematicamente, essas questões (WOLFE, 1945; GREENBERG, 2001; ARCARI, 2008). Apoiamo-nos, ainda, em textos filosóficos, que fundamentaram parte de nossas análises na reconstrução histórica (BARKER, 1969; KUHN, 1988; CARNAP, 1995; CROWE, 1975; CORRY, 1996).

Nossa posição relativa à constituição da história considera a importância do historiador, não apenas como aquele que "relata" os fatos históricos, mas aquele que os constrói. Schaff (1996) diferencia dois tipos de entendimentos sobre fatos históricos: (i) como ponto da partida, em que existem fatos "brutos" e o historiador parte deles para fazer seu trabalho – a história; e (ii) como consequência, em que o historiador parte de suas teorias para escrever a história e, assim, constitui os fatos históricos. Assumimos o segundo posicionamento. Nas palavras do autor, "não há portanto 'fatos brutos': estes, por definição, não podem existir. Os fatos com que lidamos na ciência, e mesmo em geral no conhecimento, trazem sempre a marca do sujeito" (SCHAFF, 1996, p. 228).

Esse autor também afirma que não há acontecimentos que se destacam por si só, "a 'importância', o 'significado' de um acontecimento é uma qualificação valorizante que precisa da existência não só do objeto valorizado, mas também do sujeito valorizador" (SCHAFF, 1996, p. 234). Porém, como ele reforça, isso não significa que essa escolha seja arbitrária, ou seja, que o historiador pode tornar *qualquer* fato um fato histórico. Esse tipo de atividade, de constituição da história, não é arbitrário, pois, primeiro, os acontecimentos são objetivos, segundo, porque o historiador tem mãos atadas pela teoria e, terceiro, porque o historiador está condicionado socialmente pelos interesses de sua época, de sua classe social etc.

Com essa compreensão da história, fundamentamo-nos teoricamente e metodologicamente para a reconstrução histórica do quinto postulado de Euclides, como história de problemas.

3 O QUINTO POSTULADO COMO HISTÓRIA DE PROBLEMAS

A reconstrução histórica que fizemos em torno do problema do quinto postulado de Euclides pode ser dividida em três partes e foi assim que organizamos o texto: Euclides e *Os Elementos*; Tentativas de prova do quinto postulado; e Geometrias não euclidianas. Antes de ser uma divisão cronológica, apesar de refletir as questões temporais, retrata uma divisão de fases no desenvolvimento do problema e das tentativas de solucioná-lo. Apresentamos a seguir essa reconstrução, como uma história de problemas.

3.1 Euclides e *Os Elementos*

A obra *Os Elementos* é atribuída a Euclides, mas pouco se sabe sobre ele. Há três grandes hipóteses sobre sua autoria, apresentadas por Nobre (2009): Euclides vivera entre os anos aproximados de 325 a.C. e 265 a.C., na Alexandria, e fora realmente quem escrevera essa obra e outros trabalhos; Euclides fora o líder de um grupo de matemáticos de Alexandria e juntos escreveram vários trabalhos, mas assinavam em seu nome; as obras atribuídas a Euclides foram escritas por um grupo de matemáticos que adotara o nome de Euclides em referência a Euclides de Megara, que vivera cerca de cem anos antes. "Acontece com Euclides o mesmo que com outros matemáticos da Grécia Antiga: restam-nos apenas macérrimas informações sobre a vida e a personalidade do homem" (BICUDO, 2009, p. 41).

Seguindo a primeira dessas hipóteses, como indica Brito (1995, p. 34), acredita-se que Euclides tenha sido um funcionário do Museu, uma instituição subsidiada pelo Estado onde deveria ser organizado todo o conhecimento científico existente nessa fase alexandrina da cultura grega[3]. Por isto, a obra *Os Elementos* ser composta de compilações de trabalhos de outros autores anteriores a Euclides. Essa obra ainda foi por muito tempo um modelo do que o pensamento científico deveria ser (BARKER, 1969, p. 28).

Da mesma forma, não se sabe ao certo o que pertencia de fato ao original de *Os Elementos*, já que não existe nenhum texto original da obra. Existem apenas os manuscritos em

[3] Alexandria, cidade do Egito, nessa época, era uma cidade cosmopolita habitada tanto por egípcios quanto por gregos (BRITO, 1995, p. 33).

grego, latim e árabe que chegaram à Europa no século XII. Por isto, não se sabe o que pertencia ao original e o que pertencia aos vários comentaristas, tradutores e copistas (CHABERT, 1997, p. 287). De qualquer maneira, a importância dessa obra é indiscutível: apenas a Bíblia tem mais edições no mundo ocidental que *Os Elementos* (KATZ, 1998, p. 59) e, antes da imprensa, cópias manuscritas dominavam o ensino de geometria (STRUIK, 1992, p. 90).

De todo modo, essa obra foi escrita em um momento peculiar da história da Grécia: depois do fim da Guerra do Peloponeso (431-404 a.C.) marcado pela queda de Atenas na sua disputa com Esparta. Nesse novo período, houve um aumento da desigualdade econômica entre os gregos: as classes sociais mais altas acumulavam riquezas, enquanto crescia a miséria e a insegurança dos pobres. Estes eram responsáveis por todo trabalho manual e sustentavam a ociosidade de seus dirigentes, que podiam, dessa forma, dedicar-se aos estudos da filosofia (STRUIK, 1992, p. 83).

O primeiro dos treze livros de *Os Elementos* contém 23 definições, 5 postulados e 9 noções comuns[4]. São os postulados:

> 1. Fique postulado traçar uma reta a partir de todo ponto até todo ponto. 2. Também prolongar uma reta limitada, continuamente, sobre uma reta. 3. E, como todo centro e distância, descrever um círculo. 4. E serem iguais entre si todos os ângulos retos. 5. E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontram-se no lado no qual estão os menores que dois retos (EUCLIDES, 2009, p.98).

O quinto postulado, também conhecido como o postulado das paralelas, parece ter sido evitado por Euclides: Proclo (século V), grande comentarista de *Os Elementos*, notou que as primeiras 28 proposições – das 465 de todos os livros da obra – são demonstradas sem que ele fosse citado, sendo que muitas dessas proposições seriam muito mais facilmente demonstradas se utilizado o quinto postulado (MORENO; BROMBERG, 1987 apud BRITO, 1995).

O quinto postulado de Euclides é muitas vezes enunciado de outra forma: para toda reta l e todo ponto P fora de l, pode-se traçar uma única reta paralela a l que passe por P. Este é o chamado postulado de Playfair, pois, de acordo com Greenberg (2001, p. 19), apareceu dessa forma em um trabalho de John Playfair em 1795, apesar de já ter aparecido, muito antes, nos trabalhos de Proclo.

Não há problema em enunciar assim o quinto postulado de Euclides, pois ele e o postulado de Playfair são logicamente equivalentes, ou seja, de um infere-se outro. Vejamos a demonstração da equivalência, apresentada por Arcari (2008), utilizando os outros quatro postulados e as proposições que seguem desses quatro (as 28 primeiras de *Os Elementos*). Enunciaremos estes no momento que for necessário durante a demonstração. Para facilitar, indicaremos por $P5$ o postulado enunciado em *Os Elementos* e por $P5'$ o postulado de Playfair.

* * *

Demonstração da equivalência de $P5$ e $P5'$:

[4] Na edição *Os Elementos* (EUCLIDES, 2009) aqui utilizada usa-se o termo *postulado* para afirmações referentes à geometria que são aceitas sem demonstração e *noções comuns* para outras afirmações que são aceitas sem demonstração, não especificamente referentes à geometria. O mesmo acontece na edição inglesa (HEATH, 1968). Porém, dentre as inúmeras edições da obra, há muitas que, ao invés de *noções comuns*, utilizam o termo *axioma* para as afirmações aceitas sem demonstração que não se referem à geometria em particular. Aqui utilizaremos os termos *postulado* e *axioma* como sinônimos, sendo as afirmações (específicas ou não à geometria) aceitas sem demonstração.

$P5$: Caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontram-se no lado no qual estão os menores que dois retos.

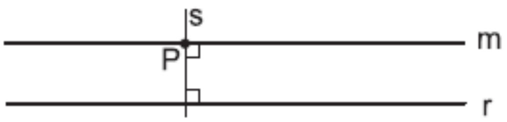
$P5'$: Para toda reta l e todo ponto P fora de l, pode-se traçar uma única reta paralela a l que passe por P.

I. $P5 \Longrightarrow P5'$.

Seja P um ponto e r uma reta tal que $P \notin r$.

Tracemos uma perpendicular s a r passando por P e, então, uma perpendicular m a s, também passando por P.

Figura 1: Equivalência de $P5$ e $P5'$

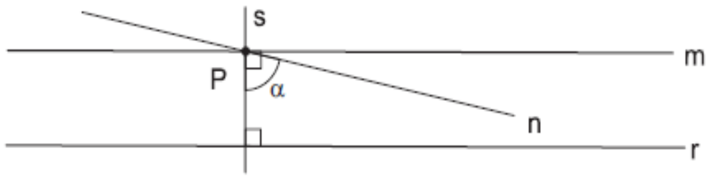


Fonte: Arcari (2008, p. 22)

Pela proposição I.28 (Caso uma reta, caindo sobre duas retas faça o ângulo exterior igual ao interior e oposto no mesmo lado, ou os interiores e no mesmo lado iguais a dois retos, as retas serão paralelas entre si)[5], temos m paralela a r e isso prova a existência da paralela m.

Quanto à unicidade, suponhamos que exista n paralela a r passando por P e n diferente de m e seja α o ângulo formado entre as retas n e s.

Figura 2: Equivalência de $P5$ e $P5'$



Fonte: Arcari (2008, p. 22)

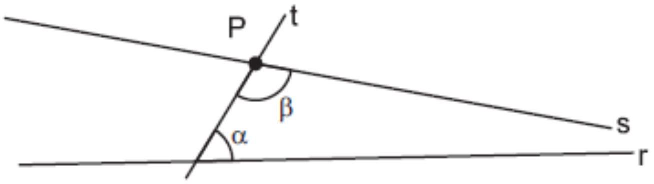
Logo, $\alpha + 90° \neq 180°$. Sem perda de generalidade, suponhamos que $\alpha + 90° < 180°$. Por $P5$, temos que n e r se encontram, o que contradiz a hipótese de que n seja paralela a r. Concluímos, então, que m e n não podem ser distintas. Portanto, m é única.

II. $P5' \Longrightarrow P5$.

Sejam as retas r e s cortadas por uma reta t, de tal modo que os ângulos colaterais internos, α e β, sejam somados menores que dois retos e seja P o ponto de intersecção entre as retas s e t.

[5] Proposição 28, do Livro I, de Euclides (2009, p. 119).

Figura 3: Equivalência de $P5$ e $P5'$

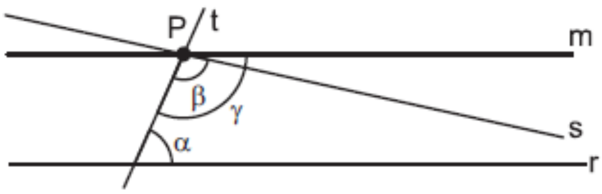


Fonte: ARCARI (2008, p. 22)

Devemos mostrar que r e s se encontram.

Consideremos uma reta m passando por P tal que os ângulos colaterais internos, α e γ, sejam somados iguais a dois retos, isto é, $\alpha + \gamma = 180°$.

Figura 4: Equivalência de $P5$ e $P5'$



Fonte: ARCARI (2008, p. 23)

Pela proposição I.28, temos m paralela a r. Suponhamos que s também seja paralela a r e seja β o ângulo formado entre as retas s e t. Por $P5'$, temos a unicidade da paralela, ou seja:

$$m = s \Longrightarrow \gamma = \beta \Longrightarrow \alpha + \gamma = \alpha + \beta.$$

Porém, isso contradiz a hipótese que $\alpha + \beta < 180°$. Concluímos, então, que s não é paralela a r.

Portanto, de I e II, $P5 \Leftrightarrow P5'$.

* * *

Desde os tempos de Euclides, inúmeras foram as tentativas de provar o quinto postulado, transformando-o assim em uma proposição. Apresentaremos aqui algumas dessas tentativas de prova, seguindo uma ordem cronológica. Não por isso essa reconstrução historiográfica tomaria a forma de história cronológica (MAYR, 1998), visto que este será o critério de organização a ser aqui utilizado e não uma história com questões norteadoras do tipo daquelas da história cronológica.

3.2 Tentativas de prova do quinto postulado

A Idade Média foi marcada pelo objetivo, como aponta D'Ambrosio (1996, p. 40), de construir as bases filosóficas do cristianismo e, assim, a matemática abstrata e filosófica pouco poderia contribuir para tal fim. Para a criação da doutrina cristã, foram fundados os mosteiros – como alternativa às academias gregas – onde não havia espaço para o estudo da matemática, pelo menos a matemática grega.

De acordo com Nascimento Junior (2003), havia ainda pensadores neoplatônicos que faziam sobreviver o pensamento grego na Idade Média, mas sempre sob a proteção da Igreja. Dentre eles, estão os comentaristas. O comentário era na Idade Média o modo que se abordava e se ensinava uma obra: "um comentário ou exposição do pensamento de algum autor era um dos métodos básicos de ensino nas escolas medievais" (BICUDO, 2009, p. 63). Um importante comentarista de Euclides foi Proclo, que, como indica Eves (1995), viveu entre os anos de 410 e 485 e apontou *Os Elementos* como uma verdadeira base filosófica, em contraposição ao cristianismo. Nessa direção, Bicudo (2009, p. 70) diz que, para Proclo, a natureza do mundo espiritual é o reflexo da matemática e que pode ser compreendida por meio do estudo das figuras geométricas. Outro neoplatônico que se destaca, Beda, viveu entre os anos de 673 e 735 e, entre outros trabalhos, traduziu parte de *Os Elementos*, o que não teve grande repercussão (D'AMBROSIO, 1996).

É interessante notar por que as tentativas de se provar o quinto postulado de Euclides falharam. Em geral, elas se utilizavam de argumentos equivalentes ao próprio quinto postulado, tornando as provas inválidas. Apresentaremos brevemente aqui algumas tentativas de prova, seguindo a ordem cronológica dos fatos.

Proclo é um dos que tenta provar o postulado das paralelas. Para provar que "caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontram-se no lado no qual estão os menores que dois retos" (EUCLIDES, 2009, p. 98), isto é, o quinto postulado, Proclo dividiu a demonstração em duas partes. Primeiro tenta provar que se uma reta corta uma de duas paralelas, então ela cortará a outra, para depois tentar provar o quinto postulado (HEATH, 1968).

* * *

I. Se uma reta corta uma de duas paralelas, então ela cortará a outra.

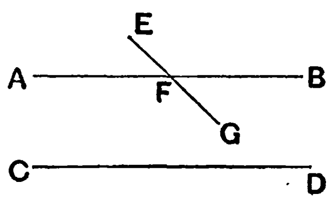
II. Caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontram-se no lado no qual estão os menores que dois retos.

Demonstração:

I. Sejam AB e CD retas paralelas e seja EFG a reta tal que corte AB.

EFG cortará a reta CD também, pois as retas BF e FG, ambas passando pelo ponto F, quando produzidas indefinidamente têm uma distância maior que qualquer magnitude, inclusive que o intervalo entre as retas paralelas. Como as retas BF e FG se distanciam uma da outra mais que a distância entre as paralelas, então FG cortará CD.

Figura 5: Demonstração de Proclo



Fonte: Heath (1968, p. 207)

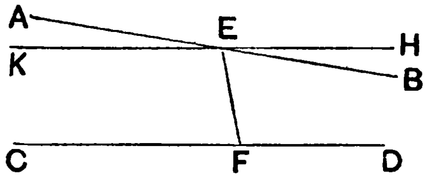
II. Sejam AB e CD duas linhas retas e seja EF a reta que cai sobre elas fazendo os ângulos BEF e DFE, que juntos são menores que dois ângulos retos. Quero provar que as retas AB e CD se encontrarão no lado em que os ângulos são menores que dois ângulos retos.

Como os ângulos BEF e DFE são juntos menores que dois retos, seja o ângulo HEB igual ao que falta para que BEF e DFE sejam iguais a dois retos e seja produzida a reta HE passando por K.

Como EF passa por KH e por CD fazendo os ângulos interiores HEF e DFE juntos iguais a dois retos, estas retas HK e CD são paralelas.

Além disto, como AB corta KH, também cortará CD (pelo que mostramos em I). Portanto, AB e CD se encontrarão no lado em que os ângulos formados são menores que dois retos. Desta forma, está demonstrado.

Figura 6: Demonstração de Proclo



Fonte: HEATH (1968, p. 208)

* * *

Porém, há um argumento na parte I que não está provado: duas retas distintas que passam por um ponto, quando produzidas indefinidamente têm uma distância maior que qualquer magnitude. Segundo Heath (1968), essa tentativa de prova foi criticada, pois, da mesma forma que não se pode assumir que duas linhas que continuamente se aproximam uma da outra se encontrarão, não se pode assumir que duas linhas que continuamente divergem terão uma distância maior que qualquer distância atribuída.

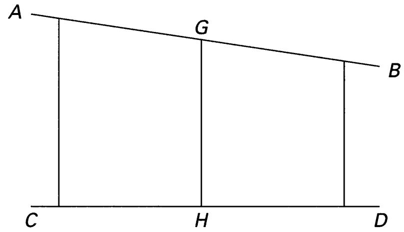
O século VII é marcado pelo advento do islamismo no mundo árabe e pelo fim da hegemonia grega. A partir de então, como mostra Silva (2010), foram fundadas escolas e universidades – como a Casa da Sabedoria (*Bait al-hikma)* – e, dessa forma, reuniram-se sábios e eruditos que se dedicavam ao estudo, entre outras coisas, da matemática. O árabe passa a ser a língua oficial – ao invés do grego ou do latim – e obras importantes foram traduzidas do grego para o árabe, entre elas *Os Elementos*.

Dois matemáticos do mundo árabe merecem destaque nas tentativas de prova do quinto postulado: Omar al-Khayyam (1048-1131) e Nasir ad-Din al-Tusi (1201-1274).

Al-Khayyam não tinha dúvida sobre a demonstrabilidade do quinto postulado. Para ele, o quinto postulado ainda não estava provado por dois motivos principais: os antigos o consideravam tão evidente e, por isto, omitiam a demonstração e os modernos – como os matemáticos árabes al-Hazin e an-Nayziri – falharam nas suas tentativas de prova, pois deixaram de levar em conta certas premissas fundamentais (JAOUICHE, 1986, p. 87). Ele criou, então, oito novas proposições para provar o postulado das paralelas. Uma delas dizia que se um quadrilátero simétrico possui dois ângulos retos, então os outros dois são também ângulos retos. O problema estava justamente nesta proposição: equivalente ao quinto postulado (CHABERT, 1997). Esse quadrilátero foi o ponto de partida para os estudos de Saccheri, no início do século XVIII.

Nasir ad-Din, da cidade de Tus, publicou em 1250 sua tentativa de prova do quinto postulado no livro intitulado "Discussão que elimina dúvidas sobre as linhas paralelas". Ele considerou o mesmo quadrilátero de al-Khayyam. Em um manuscrito datado de 1298 (provavelmente escrito pelo seu filho), há um novo argumento, porém também equivalente ao quinto postulado: se uma linha GH é perpendicular a CD em H e oblíqua a AB em G, então as perpendiculares são maiores do que GH do lado em que GH faz um ângulo obtuso com AB e menores do outro lado (KATZ, 1998, p. 271).

Figura 7: Demonstração de Nasir ad-Din



Fonte: Katz (1998, p. 271)

A transição entre a Idade Média e a Idade Moderna no mundo ocidental é marcada por profundas transformações na economia, na cultura, nas relações com a religião, com a ciência. É o chamado Renascimento. Surgem, paralelas às universidades, academias destinadas, entre outras coisas, à recuperação de obras gregas e romanas (D'AMBROSIO, 1996, p. 47). Para Chabert (1997), os primeiros comentaristas europeus na geometria na época do Renascimento, como Clavius, Cataldi, Borelli e Vitale, não trouxeram nada novo de fato aos resultados gregos. Apenas o britânico John Wallis (1616-1703) produziu realmente uma contribuição original. Wallis propôs um novo postulado, aparentemente mais plausível, para realizar a prova do quinto postulado de Euclides: dado um triângulo ABC e um segmento de reta DE, existe um triângulo DEF tal que ABC e DEF são semelhantes. Para a infelicidade de Wallis, este é mais um argumento equivalente ao quinto postulado (CHABERT, 1997).

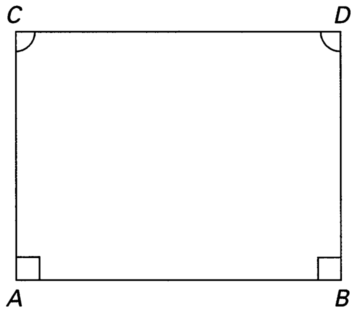
Giovanni Girolamo Saccheri (1667-1733) foi um padre jesuíta e lógico italiano. Um pouco antes de morrer, publicou o livro *Euclides ab omni naevo vindicatus*[6], que não foi muito reconhecido até um século e meio depois, quando o matemático italiano Eugenio Beltrami o redescobriu (GREENBERG, 2001, p. 154).

Diferente das tentativas anteriores de mostrar que o quinto postulado de Euclides era, na verdade, um teorema, Saccheri não tentou demonstrá-lo diretamente. Ele propôs uma prova usando a redução ao absurdo: assumia a negação do postulado das paralelas e tentava chegar a uma contradição[7]. Para isso, utilizou a hipótese (já utilizada por Omar al-Khayyam e por Nasir ad-Din al-Tusi) de que se um quadrilátero simétrico possui dois ângulos retos, os outros dois são iguais entre si. Há, portanto, três possibilidades para estes ângulos chamados por ele de ângulos de topo: I. ambos serem ângulos retos; II ambos serem ângulos obtusos; III. ambos serem ângulos agudos.

[6] Euclides livre de toda mácula

[7] Partindo de uma hipótese Φ, deriva-se uma contradição, podendo, então, descartar a hipótese e inferir não Φ.

Figura 8: Quadrilátero de Saccheri



Fonte: Katz(1998, p. 624).

Saccheri, em sua prova, admitia que apenas uma dessas possibilidades devesse ser correta. Para provar que a primeira opção era a verdadeira, Saccheri admitia, de início, que ela era falsa (de acordo com a redução ao absurdo) e, então, tentava provar que as outras duas eram falsas. Caso chegasse a uma conclusão como esta – que as três possibilidades eram falsas – teria chegado ao absurdo e, portanto, inferiria o contrário de sua hipótese inicial. Assim, provaria que os ângulos de topo eram ambos retos; logo, estaria provado o quinto postulado.

A hipótese dos ângulos obtusos ele afirmava ser falsa, pois contradizia o segundo postulado de Euclides e, por consequência, o Teorema de Saccheri-Legendre (que diz que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é menor ou igual a 180º). Mas não conseguiu encontrar contradição na hipótese dos ângulos agudos, apenas resultados estranhos. Disse, então, que a hipótese do ângulo agudo era falsa porque era repugnante à natureza da linha reta. Tentava assim chegar à conclusão de que a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é igual a quatro ângulos retos, o que equivale ao quinto postulado (GREENBERG, 2001, p. 155). Sem notar, Saccheri obteve as consequências de uma geometria que negasse o quinto postulado sem, contudo, ser inconsistente.

Adrien-Marie Legendre (1752-1833) propôs várias provas para o quinto postulado de Euclides. Lobachevsky estudou essas tentativas de prova e elas foram o que, talvez, finalmente o convenceu da realidade da geometria não euclidiana (CHABERT, 1997). Em uma das provas, Legendre concluiu que a soma dos três ângulos internos de um triângulo é igual a dois ângulos retos. Há, porém, um argumento em sua prova que não está demonstrado: por um ponto qualquer situado no interior de um ângulo pode-se desenhar uma reta que corta os dois lados do ângulo. E esse também é um argumento equivalente ao quinto postulado (CHABERT, 1997). Por isso, a prova de Legendre não é válida.

Essas são algumas tentativas de prova do quinto postulado de *Os Elementos*. Muitas outras não foram aqui apresentadas, como as de an-Nayziri, no século IX, Clairaut e Lambert, no século XVIII, Taurinus e Bolyai, no século XIX.

3.3 Geometrias não euclidianas

Muitas vezes, algo interessante ocorre na ciência: quando o momento histórico é favorável para uma nova ideia se manifestar, essa nova ideia pode ocorrer a várias pessoas mais ou menos ao mesmo tempo. Foi isso que aconteceu no século XIX, com o surgimento das geometrias não euclidianas (GREENBERG, 2001, p. 177). Notou-se que o quinto postulado de Euclides, além de não poder ser provado – de fato tratava-se de um postulado –, poderia ser negado, sem que contradições ocorressem. Três matemáticos merecem grande destaque nesse episódio: Nikolai Ivanovich Lobachevsky (1792-1856), János Bolyai (1802-1860) e Carl Friedrich Gauss (1777-1855).

Este momento histórico favorável relaciona a geometria com outras ciências, com a lógica, por exemplo. O desenvolvimento da lógica simbólica (ou moderna) foi fundamental para a possibilidade de desenvolvimento das geometrias não euclidianas.

A lógica aristotélica (ou antiga) estava em consonância com o raciocínio de Kant (1958), que relacionava o conhecimento geométrico com a intuição. Isso significa que certos postulados e certos argumentos podiam ser autoevidentes, ou seja, não podiam ser provados, mas a intuição bastava para serem aceitos como verdades. Já na lógica simbólica, desenvolvida nos séculos XVIII e XIX, não existem evidências intuitivas: axiomas são aceitos (por conveniência) simplesmente; não tratam da verdade. De acordo com Einstein (2005, p. 665), "o progresso alcançado pela axiomática consiste em ter separado claramente aquilo que é lógico-formal daquilo que constitui o seu conteúdo objetivo ou intuitivo".

Além disso, Carnap (1995, p. 127) afirma que, sem uma lógica suficientemente poderosa para estabelecer regras estritamente lógicas para demonstrações geométricas, as falhas nas tentativas de prova do quinto postulado eram muito difíceis de serem detectadas. Havia sempre algum apelo a uma premissa apoiada na intuição e não decorrente dos outros postulados. Muitas vezes, essa premissa tratava justamente de algo equivalente ao próprio quinto postulado, como mostramos aqui.

Com o desenvolvimento da lógica simbólica, muda-se o conceito de axioma (ou postulado). Deixa de ser a verdade indemonstrável e passa a ser a definição daquilo que é aceito. Deixa de fazer sentido, então, tentar demonstrar algo que é tomado como axioma. Desta forma, abre-se a possibilidade para a geometria não baseada na intuição, mas baseada em axiomas.

Um matemático alemão, Abraham Gotthelf Kästner (1719-1800), esteve muito envolvido nos estudos que culminaram no surgimento das geometrias não euclidianas. Orientou a tese de doutorado de Georg Simon Klügel, em que ele examina 28 tentativas de prova do quinto postulado, indicando a deficiência de cada uma delas e sugerindo, por fim, que se tratava mesmo de um postulado, isto é, indemonstrável (TRUDEAU, 1987). Kästner também foi orientador de Gauss, professor de Farkas[8] Bolyai (pai de János Bolyai) e professor do professor de Lobachevsky (NOBRE, 2004).

Com relação ao momento favorável ao desenvolvimento das geometrias não euclidianas, podemos citar uma frase dita por Farkas Bolyai: "Muitas coisas têm uma época na qual elas são descobertas em vários lugares ao mesmo tempo, assim como as violetas aparecem por todos os lados na primavera" (BONOLA, 1955, p. 99).

O matemático russo Lobachevsky, desde os anos de 1820, estava convicto da possibilidade de uma geometria sem que o quinto postulado fosse afirmado. Em 1829 publicou seu trabalho – o primeiro publicado – sobre a geometria não euclidiana, *Sobre os princípios da geometria*, inicialmente chamada de geometria imaginária. O nome de *geometria imaginária* indica a relação feita por Lobachevsky entre a geometria imaginária e a geometria euclidiana como similar à relação entre os números imaginários (ou complexos) e os números reais (ROSENFELD, 1988, p. 207).

[8] Em alemão muitas vezes referido como Wolfgang (SMITH, 1958, p.528).

Antes disso, em 1826, em uma palestra na Universidade de Kazan ele fez a primeira proclamação pública sobre essa nova geometria com uma palestra intitulada *Uma breve exposição dos princípios da Geometria incluindo uma demonstração rigorosa do teorema das paralelas*. Este título continha certa ironia com relação à demonstração rigorosa. Ele dizia que baseado em dados experimentais seria impossível determinar qual geometria, a euclidiana ou a imaginária, seria a que melhor descreveria o mundo real.

Lobachevsky afirmava que a soma dos ângulos internos de um triângulo retilíneo era sempre menor ou igual a π: quando igual a π, tratava-se da geometria de uso comum e quando menor que π, era a geometria imaginária. Ele mostrou que nenhuma contradição advém da possibilidade da soma ser menor que π, ao contrário de Saccheri, que, ao se deparar com essa possibilidade, disse que isso seria repugnante à natureza da linha reta e, então, assumiu que a soma deveria ser igual a π.

Para Lobachevsky, a geometria não estaria relacionada com a ideia de intuição de Kant (1958), mas com convenções e com resultados lógico-formais. Isso fica evidente em sua palestra de 1826 quando diz que os conceitos da geometria devem ser aprendidos pelos sentidos e que não devemos acreditar nos conceitos inatos, ou seja, aqueles baseados na intuição (ROSENFELD, 1988).

O trabalho de Lobachevsky, porém, não foi bem aceito pelos acadêmicos. Em 1832, então reitor da Universidade de Kazan, enviou seu artigo para revisão da Academia de Petersburgo, que ignorou as questões geométricas ali presentes e afirmou que esse não era um artigo digno de atenção. No ano de 1834, jornais literários de Petersburgo publicaram textos insultando o trabalho de Lobachevsky. Diziam que ele era o insolente de falsas invenções e que o título de seu artigo, ao invés de *Sobre os princípios da geometria*, deveria ser *Uma sátira na geometria* ou *Uma caricatura da geometria*. Acredita-se que esses textos publicados nos jornais tenham sido escritos por alunos do revisor da Academia de Petersburgo, Ostrogradsky, que desprezou o pedido de revisão feito por Lobachevsky dois anos antes (ROSENFELD, 1988, p. 208-209).

Apesar das críticas, ele continuou seu trabalho e escreveu diversos artigos sobre a geometria imaginária, a saber, *Geometria Imaginária* em 1835, *Aplicações da Geometria Imaginária a certas integrais* em 1836, *Novos princípios da geometria com uma completa teoria das paralelas* entre os anos de 1835 e 1838, *Pesquisas geométricas sobre a teoria das retas paralelas* em 1840 e *Pangeometria* em 1855. Este último título, como indica Rosenfeld (1988, p. 210), mostra a sua concepção de geometria universal que inclui a geometria euclidiana como sendo um caso especial.

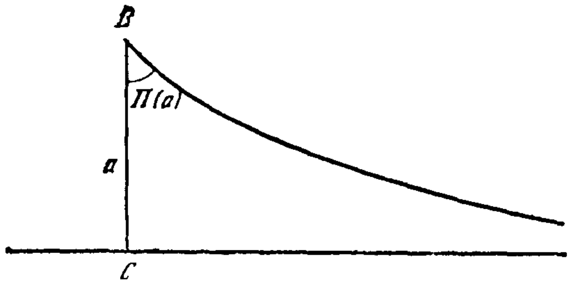
Lobachevsky propôs uma geometria hiperbólica, em que o postulado das paralelas fosse substituído por: para toda reta l e todo ponto P fora de l, há pelo menos duas paralelas distintas a l que passam por P. O nome de geometria hiperbólica foi dado futuramente pelo matemático Felix Klein em 1871, pois, de acordo com a etimologia, a palavra hipérbole está relacionada a excesso e, nesta geometria, o número de paralelas a uma reta dada passando por um ponto excede o número (um) da geometria euclidiana (TRUDEAU, 1987, p. 159).

Entre as bases de sua geometria imaginária, Lobachevsky definiu o ângulo de paralelismo. Isso porque em um plano, na geometria hiperbólica, todas as retas que saem de um ponto, com relação a outra reta, podem ser divididas em duas classes, as que a cortam e as que não a cortam. As retas que estão no limite entre uma classe e outra são chamadas *paralelas* à reta dada.

Notemos que o fato de uma reta não cruzar outra, nesta terminologia, não indica que sejam paralelas; as paralelas são aquelas que formam o ângulo de paralelismo com a perpendicular à reta dada, ou seja, as retas que estão no limite entre as que cruzam a reta dada e as que não cruzam. Como mostra Greenberg (2001, p. 200), outras nomenclaturas são usadas para essas retas que não cruzam a reta dada: por exemplo, "ultraparalelas", "hiperparalelas" e "superparalelas", para aquelas que possuem um ângulo maior que o de paralelismo; e "paralelas assintóticas", para aquelas que formam o ângulo de paralelismo. Optamos aqui por usar a palavra "paralela" nos dois sentidos, isto é, para todas as retas que não cortam a reta dada.

Assim, dada uma reta, traçava-se uma perpendicular de tamanho a, passando pelo ponto C (pertencente à reta inicial) e por um outro ponto, B. Em B, passava uma paralela à reta inicial. O ângulo entre a perpendicular e a paralela foi chamado de ângulo de paralelismo. No caso da geometria euclidiana, esse ângulo era sempre $\frac{\pi}{2}$, enquanto na geometria imaginária, esse ângulo dependia de a, isto é, era uma função de a, que inicialmente Lobachevsky denotou por $F(a)$ e, posteriormente, por $\pi(a)$.

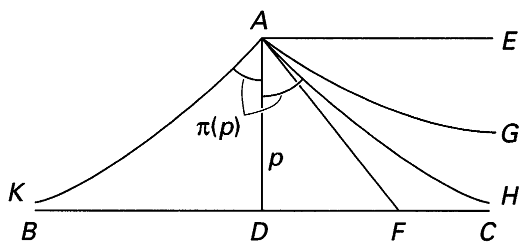
Figura 9: Ângulo de paralelismo



Fonte: Rosenfeld (1988, p. 221)

Assim, na figura 10, AH é uma paralela à BC, pois dada a distância de A a D, p, tem-se $\pi(p)$ como o ângulo de paralelismo. No plano hiperbólico, então, as retas AE e AG não cortam a reta BC, mas formam com AD ângulos maiores que o de paralelismo, ou seja, na terminologia de Lobachevsky não são paralelas à reta BC, assim como a reta AF, que não é paralela à reta BC por cruzar com ela. A reta AH se encontra no limite entre as retas que cortam e as que não cortam a reta BC e, portanto, é paralela à reta BC. Da mesma forma, do outro lado da perpendicular AD, tem-se AK como paralela à BC devido ao seu ângulo de paralelismo $\pi(p)$.

Figura 10: Ângulo de paralelismo



Fonte: Katz (1998, p. 775)

Tem-se, então, $\lim_{a \to 0} \pi(a) = \frac{\pi}{2}$ e $\lim_{a \to \infty} \pi(a) = 0$. Isso quer dizer que, quanto menor o valor de a, mais próximo se está da geometria euclidiana, isto é, quando as distâncias são pequenas, o plano hiperbólico se assemelha muito ao euclidiano. Lobachevsky mostrou, ainda, que, para todo ângulo A, há um valor a, tal que $A = \pi(a)$ (ROSENFELD, 1988, p. 221).

Importantes consequências são decorrentes do axioma hiperbólico: I. Para toda reta l e todo ponto P fora de l, há infinitas paralelas a l que passam por P; II. Retângulos não existem – a existência de retângulos implica no postulado das paralelas de Hilbert (Para toda reta l e todo ponto P fora de l, há no máximo uma reta m que passa por P, tal que m é paralela a l.); III. Na geometria hiperbólica, todos os triângulos têm a soma dos ângulos internos menor que 180º; IV. Por consequência, na geometria hiperbólica, todos os quadriláteros convexos têm a soma dos ângulos internos menor que 360º; V. Não existem triângulos semelhantes não congruentes, ou seja, é impossível ampliar ou reduzir um triângulo sem distorção; VI. O ângulo determina o tamanho do lado de um triângulo.

O matemático húngaro János Bolyai desenvolveu seu interesse por geometria por influência de seu pai, o matemático Farkas Bolyai. O pai tentou exaustivamente provar o postulado das paralelas sem sucesso, como diz em carta ao filho:

> Eu acreditei que sacrificaria a mim mesmo por causa da verdade. Eu estava pronto para me tornar um mártir que removeria a falha da geometria e a devolveria purificada à humanidade. [...] Minhas criações foram melhores que as de outros e ainda assim não alcancei completa satisfação... (GREENBERG, 2001, p. 161-162).

Porém, o filho János teve uma ideia completamente nova e falou sobre isso em 1823 em uma carta ao pai, dizendo que planejava publicar seu trabalho sobre as paralelas assim que o terminasse. Naquele momento, o que ele poderia dizer é que, do nada, havia criado um estranho novo universo!

Em 1832 escreveu um apêndice de 26 páginas ao livro do pai *Tentamen*, intitulado *Apêndice contendo a absoluta verdade científica do espaço, independente da veracidade ou falsidade do XI axioma de Euclides*[9] *(que nunca poderá ser decidido* a priori*)*. Bolyai apresenta, então, um sistema geométrico baseado no oposto da hipótese de Euclides, o postulado das paralelas, denominado *sistema S*. O sistema geométrico conhecido como geometria euclidiana, ele denomina *sistema* Σ. O que Bolyai chama de verdade científica absoluta do espaço, em seu título, refere-se ao sistema geométrico absoluto, que, para ele, inclui ambos sistemas, *S* e Σ.

Farkas Bolyai mandou, ansioso pela resposta e sem o consentimento do filho, uma cópia desse apêndice para seu amigo, o matemático Carl Friedrich Gauss. Ambos trocavam frequentemente correspondências e, inclusive, quando Farkas acreditou ter provado o postulado das paralelas, enviou a demonstração para Gauss que, por sua vez, mostrou a ele a falha que cometera. Gauss respondeu à correspondência em que Farkas mostrava o trabalho do filho, dizendo que não poderia elogiar o trabalho de János, pois estaria elogiando a si mesmo, já que o caminho que János havia tomado e os resultados aos quais havia chegado coincidiam quase exatamente com suas próprias reflexões que ocupavam sua mente há 35 anos (GREENBERG, 2001, p. 178).

János Bolyai ficou profundamente desapontado com a resposta e com o fato de Gauss estar, segundo ele, tentando se apropriar de suas ideias e, depois disso, não publicou mais nada de suas pesquisas. Em 1848, recebeu a informação de que outro matemático, Lobachevsky, havia chegado a resultados semelhantes a ele. Depois de uma análise cuidadosa das publicações,

[9] Refere-se ao postulado das paralelas de Euclides, apresentado aqui como o quinto postulado.

János se sentiu instigado a competir com Lobachevsky e, então, retomou intensamente seus estudos que culminariam em uma grande obra sobre o assunto que, contudo, nunca foi terminada (WOLFE, 1945, p.53).

O notório matemático Carl Friedrich Gauss muito pouco publicou sobre seus estudos envolvendo esta nova geometria, por ele chamada inicialmente de *antieuclidiana*, depois de *geometria astral* e, finalmente, de *não euclidiana*. A maior parte dos registros históricos desses estudos está nas cartas que trocava com outros matemáticos e em algumas notas entre seus artigos. Segundo Bonola (1955, p. 65), desde 1792 ele estudava a possibilidade de uma geometria que negasse o quinto postulado de Euclides, visto que a demonstração lhe parecia muito distante. Em uma carta datada de 1817 ao amigo Heinrich Wilhelm Olbers, Gauss escreve que estava cada vez mais convencido que o postulado não poderia ser provado (ROSENFELD, 1988, p. 215).

Em outra correspondência, de 1824, agora para o matemático Franz Taurinus, Gauss diz que a hipótese da soma dos três ângulos internos de um triângulo ser menor que 180° conduz a uma curiosa geometria, muito diferente da euclidiana, mas totalmente consistente. Diz que os teoremas dessa geometria parecem ser paradoxais, "mas calma, constantes reflexões revelam que eles não contêm nada de todo impossível". Segue descrevendo essa geometria e, então, diz: "Todos meus esforços para descobrir uma contradição, uma inconsistência, nesta geometria não-Euclidiana têm sido sem sucesso" (WOLFE, 1945, p. 47). Conclui dizendo ao amigo que aquela era uma comunicação privada e que ele não deveria torná-la pública.

Em 1829, Gauss escreveu para outro amigo matemático, Friedrich Wilhelm Bessel, que temia os gritos dos beócios[10], caso publicasse seus estudos sobre a nova geometria (GREENBERG, 2001, p. 182). Esse receio da reação da comunidade de matemáticos se deve principalmente ao conceito de espaço de Kant (1958), relacionado à ideia de intuição, ainda muito forte no século XIX.

Como pudemos ver, na primeira metade do século XIX cresceu a convicção em duas coisas: não é possível provar o quinto postulado sem admitir outro postulado equivalente a ele e é possível construir geometrias sem manter o quinto postulado (CHABERT, 1997).

Essa nova situação, com a possibilidade de geometrias que neguem a euclidiana, poderia ser considerada fruto de uma mudança revolucionária, em termos de Thomas S. Kuhn, pelo fato de ter sido necessário recusar componentes essenciais do conhecimento anteriormente admitidos, no caso, a ideia de intuição. Como apresenta Corry (1996, p. 173-174), em uma mudança normal (ou não revolucionária) o objetivo está em resolver problemas, sem suscitar dúvidas sobre a validade da teoria geral. Até o início do século XIX os matemáticos buscavam resolver um problema específico – a demonstração do quinto postulado de Euclides – sem questionar se este postulado poderia ser negado; a questão estava em saber se este postulado, tido como verdade, era demonstrável ou não. Abandonada a concepção de axiomas ou postulados como verdades, os fundamentos matemáticos são postos em cheque e, por isso, poderia ser este um momento de revolução. Para Kuhn (1998), as revoluções mudam a concepção de mundo que se tem: "na medida em que seu único acesso [dos cientistas] a esse mundo dá-se através do que veem e fazem, podemos ser tentados a dizer que, após uma revolução, os cientistas reagem a um mundo diferente" (KUHN, 1998, p. 146).

[10] De acordo com o dicionário Houaiss (2009), por extensão de sentido, refere-se àquele "que apresenta as características atribuídas (pelos atenienses) aos beócios, ou seja, espírito pouco cultivado, indiferença à cultura; grosseiro, boçal".

Apesar desses indícios de o surgimento das geometrias não euclidianas marcar um momento de revolução, é muito questionada a possibilidade de haver revolução científica – na forma como é apresentada por Kuhn (1998) – na história da matemática. Crowe (1975) é enfático ao dizer que, em matemática, nunca ocorrem revoluções, pois princípios são mantidos sem que sejam destruídas doutrinas anteriores. No caso das geometrias não euclidianas, o autor se baseia na preservação da geometria euclidiana, coexistindo às geometrias não euclidianas para descaracterizar o momento como o de uma revolução científica.

Surgiu, então, a dúvida sobre a consistência da geometria hiperbólica. Como mostra Barker (1969), "dizer que um sistema é inconsistente é dizer que dos axiomas desse sistema podemos deduzir dois teoremas que se contradizem mutuamente" (p. 63). Porém, não encontrar dois teoremas que se contradigam não quer dizer que o sistema seja consistente; é preciso provar. E essa prova pode ser realizada de diferentes modos. Um deles consiste em encontrar uma interpretação sob a qual todos os axiomas, e todos os teoremas deles decorrentes, sejam, sem sombra de dúvida, verdadeiros. Entretanto, é necessário que a verdade da interpretação dos enunciados esteja perfeitamente definida, o que, no caso das geometrias, seria uma limitação. Outro modo de provar a consistência do sistema é por meio de uma relativização da consistência: "mostramos que um dado sistema é consistente contanto que outro sistema, menos suspeito, também o seja" (BARKER, 1969, p. 64).

Então, Eugenio Beltrami propôs o teorema metamatemático: *Se a geometria euclidiana for consistente, então a geometria hiperbólica também será.* Assim, a consistência de uma geometria é relativa à outra. Para a realização dessa prova, não há necessidade de se verificar que a geometria hiperbólica é consistente de fato. Apenas se a geometria euclidiana for consistente, a hiperbólica também será e, da mesma forma, se a geometria hiperbólica for inconsistente, a euclidiana também será. E, como mostra Trudeau (1987, p.233), apesar de não haver boas razões para suspeitar da consistência da geometria euclidiana, ela nunca foi exaustivamente demonstrada. Beltrami provou o teorema em 1868, com o auxílio da geometria diferencial. Ele também foi provado por Klein em 1871, mas de outra forma: por meio da geometria projetiva (GREENBERG, 2001).

Como corolário desse teorema metamatemático, foi proposto que se a geometria euclidiana for consistente, então o quinto postulado não poderia, de fato, ser decorrente dos outros quatro, assim como ele não seria contradito pelos outros quatro. A demonstração desse corolário é decorrente do teorema: se assumirmos que o quinto postulado pode ser provado a partir dos outros postulados, então a geometria hiperbólica seria inconsistente, já que ela nega o postulado das paralelas. Mas se a geometria hiperbólica não for consistente, pelo teorema metamatemático, a geometria euclidiana também não será. Teríamos, então, que a geometria euclidiana seria inconsistente, o que nega a hipótese inicial (GREENBERG, 2001, p. 225).

Existem, além da geometria euclidiana e das geometrias hiperbólicas, as geometrias elípticas, que não apresentaremos neste artigo. Vale pontuar que, no caso das geometrias elípticas, o postulado das paralelas é substituído por: Não há reta paralela a l que passe por um ponto P fora de l. Essa substituição não pode ser feita sem alterar outro postulado de modo que ela seja consistente. Assim, o segundo postulado de Euclides, que afirma ser possível alongar arbitrariamente um dado segmento, deve ser alterado, pois, nessa geometria, cada segmento admite um comprimento máximo que pode atingir.

4 ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

O objetivo deste artigo foi apresentar uma reconstrução histórica, com fins historiográficos, do surgimento das geometrias não euclidianas como resultado das discussões em torno do quinto postulado de Euclides. Para isso, recorremos à história de problemas (MAYR, 1998), por entendermos que ela se adequa ao tema em questão e ao propósito historiográfico que tínhamos. Utilizamos, na reconstrução feita, fontes historiográficas, traduções e edições de fontes primárias, textos matemáticos posteriores ao período histórico e textos filosóficos.

Apesar do nosso propósito historiográfico, entendemos que a reconstrução feita pode ser útil ao professor que deseje utilizar a história da matemática em suas aulas. Isso não significa que haja algo pronto para atingir fins pedagógicos; ao contrário, o texto que apresentamos não deve ser, simplesmente, inserido em aulas de matemática, seja como apresentação oral do professor, seja com a leitura dos estudantes, seja com a inclusão de trechos do texto nas aulas, já que não foi constituído para isso.

O professor que desejar pode se valer desse material produzido para elaborar atividades ou planejar discussões para suas aulas de matemática. Por utilizarmos a história de problemas em nossa reconstrução, o texto não é superficial demais, de modo que não dê elementos suficientes ao professor, nem longo ou detalhista demais, de modo que inviabilize sua leitura e seu estudo.

Ainda, aproximamos o que se entende por história de problemas da *história-problema* (MIGUEL; MIORIM, 2005), porém esta tem um caráter educacional: “uma história que põe problemas, isto é, que parte de problemas que se manifestam em práticas pedagógicas e investigativas do presente e que preocupam, de certa forma, o professor de Matemática e/ou o pesquisador em educação matemática do presente” (p. 160).

Finalizamos destacando a necessidade de produção de trabalhos, na área da Educação Matemática, que possibilitem ou subsidiem propostas metodológicas com a inclusão da história em aulas de matemática, que superem a inserção superficial, apenas como curiosidade – como vemos em livros didáticos, por exemplo.

REFERÊNCIAS

ARCARI, I. **Um texto da geometria hiperbólica**. 2008. 127 p. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2008.

BARBOSA, L. N. S. C. **Uma reconstrução histórico-filosófica do surgimento das geometrias não euclidianas**. 2011. 68 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2011.

BARBOSA, L. N. S. C.; SILVA, M. R. A participação da história no ensino de matemática: pontos de vista historiográfico e pedagógico. **Zetetiké**, Campinas, v. 21, n. 39, p. 103-120, jan./jun. 2013.

BARKER, S. T. **Filosofia da matemática**. Tradução de L. Hegenberg e O. Silveira da Mota. Rio de Janeiro: Zahar, 1969.

BICUDO, I. Introdução e tradução. In: EUCLIDES. **Os elementos**. São Paulo: Editora UNESP, 2009.

BONOLA, R. **Non-euclidean geometry**: a critical and historical study of its development. Tradução de H. S. Carslaw. New York: Dover, 1955.

BRITO, A. J. **Geometrias não-euclidianas**: um estudo histórico-pedagógico. 1995. 187 p. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1995.

CHABERT, J. L. Proving the Fifth Postulate: true or false? In: THE INTER-IREM COMMISSION. **History of mathematics, histories of problems**. Paris: Ellipses, 1997. p. 285-305.

CARNAP, R. **An introduction to the philosophy of science**. New York: Dover, 1995.

CORRY, L. Paradigms and paradigmatic change in the history of the mathematics. In: AUSEJO, E.; HORMIGON, M. (Eds.). **Paradigms and mathematics**. Madrid: Siglo Veintiuno de España Editores, 1996. p. 169-192.

CROWE, M. J. Ten "laws" concerning patterns of change in the history of mathematics. **Historia Mathematica**, v.2, p. 161-166, nov. 1975.

D'AMBROSIO, U. **Educação Matemática**: da teoria à prática. Campinas: Papirus, 1996.

EINSTEIN, A. Geometria e experiência. Tradução de V. A. Bezerra. **Scientiae Studia**, São Paulo, v.3, n.4, p.665-675, 2005.

EUCLIDES. **Os elementos**. Tradução de I. Bicudo. São Paulo: Editora UNESP, 2009.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Universidade Estadual de Campinas, 1995.

GREENBERG, M. J. **Euclidean and non-euclidean geometries**: development and history. 3. ed. New York: Freeman, 2001.

HEATH, T. L. **The thirteen books of Euclid's elements**: translated from the text of Heiberg with introduction and commentary. Cambridge: Cambridge University Press, 1968.

HOUAISS, A. **Houaiss eletrônico**. Rio de Janeiro: Objetiva, 2009. CD-ROM.

JAOUICHE, K. **La Théorie des parallèles en Pays d'Islam**. Paris: VRIM, 1986.

KANT, E. **Crítica da razão pura**. Tradução de J. Rodrigues de Mereje. São Paulo: Edições e Publicações Brasil, 1958.

KATZ, V. J. **A history of mathematics**: an introduction. 2. ed. London: Addison-Wesley, 1998.

KUHN, T. S. **A estrutura das revoluções científicas**. Tradução de Beatriz Vianna Boeira e Nelson Boeira. São Paulo: Perspectivas, 1998.

MARTINS, A. F. P. História e filosofia da ciência no ensino: há muitas pedras nesse caminho... **Caderno Brasileiro de Ensino de Física**, Florianópolis, v. 24, n.1, p. 112-131, 2007.

MAYR, E. **O desenvolvimento do pensamento biológico**: diversidade, evolução e herança. Tradução de Ivo Martinazzo. Brasília: UNB, 1998.

MIGUEL, A.; MIORIM, M. A. **História na Educação Matemática**: propostas e desafios. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

NASCIMENTO JUNIOR, A. F. Fragmentos da história das concepções de mundo na construção das ciências da natureza: das certezas medievais às dúvidas pré-modernas. **Ciência & Educação**, Bauru, v. 9, n. 2, p. 277-299, 2003.

NOBRE, S. R. **Introdução histórica às geometrias não euclidianas**: uma proposta pedagógica. Belém: SBHMt, 2009.

NOBRE, S. R. Leitura crítica da história da matemática: reflexões sobre a História da Matemática. **Ciência & Educação**, Bauru, v.10, n.3, p.531-543, 2004.

ROSENFELD, B. A. **A history of non-euclidean geometry**: evolution of the concept of a geometric space. Translated by Abe Shenitzer. New York: Springer-Verlag, 1988.

SILVA, M. D. O declínio da cultura grega e o desenvolvimento da matemática até a idade média: em busca de uma compreensão sociológica. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10., 2010, Salvador. **Anais**... Ilhéus: Via Litterarum, 2010. 1 CD.

SIU, M. K. "No, I don't use history of mathematics in my class. Why?". In: FURINGHETTI, F.; KAIJSER, S.; TZANAKIS, C. (Ed). **Proceedings of HPM 2004 & ESU 4**. Iraklion, Greece: University of Crete, 2006, p. 268-277.

SMITH, D. E. **History of mathematics**. New York: Dover Publications, 1958. v.1.

STRUIK, D. J. **História concisa das matemáticas**. Tradução de J. C. S. Guerreiro. 2. ed. Lisboa: Gradiva, 1992.

TRUDEAU, R. J. **The non-euclidean revolution**. Boston: Birkhäuser, 1987.

WOLFE, H. E. **Introduction to non-euclidean geometry**. New York: The Dryden Press, 1945.

PRIMEIRO COLÓQUIO BRASILEIRO DE MATEMÁTICA: UMA BREVE APRESENTAÇÃO DA PARTICIPAÇÃO FEMININA

FIRST BRAZILIAN COLLOQUIUM OF MATHEMATICS: A BRIEF PRESENTATION OF FEMALE PARTICIPATION

CALABRIA, Angelica Raiz[1]
CAVALARI, Mariana Feiteiro[2]

RESUMO

Embora as mulheres brasileiras tenham adquirido o direito de cursar o nível superior no final do século XIX, o marco do acesso feminino a esse nível de ensino foi a criação da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de São Paulo, em 1934. Nessa faculdade, teve início o primeiro curso brasileiro de graduação em Matemática. Outros cursos de matemática foram criados nos anos 1930, 1940 e 1950. Dentre os egressos desses cursos, podem ser identificadas algumas mulheres. Em tal período, foram, também, obtidos, no Brasil, doutoramentos na área de Matemática e alguns destes doutores eram mulheres. Com base nestas informações, podemos afirmar que, o grupo de pesquisadores brasileiros que se dedicava à matemática estava crescendo e, nele, podiam ser identificadas algumas mulheres. Nesse contexto, iniciou-se a criação de eventos e periódicos científicos para que os matemáticos pudessem divulgar suas pesquisas e manter intercâmbio científico. O evento científico pioneiro, no Brasil, a reunir exclusivamente matemáticos foi o Colóquio Brasileiro de Matemática que teve sua primeira edição organizada, em 1957, em Poços de Caldas/MG. Assim, realizamos uma investigação com o intuito de identificar a presença das mulheres nesse evento. Com base em documentos e fotografias do Primeiro Colóquio Brasileiro de Matemática e em depoimentos de participantes desse evento, identificamos seis mulheres participantes: Eliana Rocha Henriques de Brito, Elza Furtado Gomide, Francisca Maria Rodrigues Torres, Júnia Borges Botelho, Lourdes de la Rosa Onuchic e Marília Chaves Peixoto. Elaboramos, então, breves biografias dessas professoras, apontando suas trajetórias acadêmicas e suas principais contribuições para a Matemática brasileira.

Palavras-chave: Mulheres na Matemática. História da Matemática no Brasil. Século XX.

ABSTRACT

Though the Brazilian women has acquired the right to attend the higher level at the end of the nineteenth century, the milestone of female access to this level of education was the creation of the Faculty of Philosophy, Science and Languages of São Paulo, in 1934. This college has started the first Brazilian course of Mathematics graduation. Other Mathematics courses were created in 1930, 1940 and 1950. Among these graduates some women may be identified. In this period, Doctorates were also obtained in the Mathematics area and some of these doctors were women. On the basis of this information we can say that, the group of Brazilian researchers who are dedicated to mathematics was growing and it could be identified some women. Duo to this, events and scientific journals has started to be created in order to mathematicians could disseminate their researches and maintain scientific exchange. The pioneer scientific event to meet exclusively mathematicians was the First Brazilian Colloquium of Mathematics which had its first edition in Poços de Caldas/MG, in Brazil in 1957. In this context, we carried out an investigation in order to identify the presence of women in this event. On the basis of documents and photography of the First Brazilian Colloquium of Mathematics and in statements from participants of this event we identified six women participants: Eliana Rocha Henriques de Brito, Elza Furtado Gomide, Francisca Maria Rodrigues Torres,

[1] Doutora em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista (UNESP), Rio Claro, São Paulo, Brasil. Docente do Centro Universitário Hermínio Ometto de Araras (UNIARARAS), Araras, São Paulo, Brasil. Endereço para correspondência: Avenida Doutor Maximiliano Baruto, 500, Jardim Universitário, CEP: 13607339, Araras, São Paulo, Brasil. Endereço eletrônico: angelica@uniararas.br.

[2] Doutora em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista (UNESP), Rio Claro, São Paulo, Brasil. Docente da Universidade Federal de Itajubá (UNIFEI), Itajubá, Minas Gerais, Brasil. Endereço para correspondência: Avenida BPS, 1303, Pinheirinho, CEP: 37500-903, Itajubá, Minas Gerais, Brasil. Endereço eletrônico: mfcavalari@unifei.edu.br.

Júnia Borges Botelho, Lourdes de la Rosa Onuchic e Marília Chaves Peixoto. We have put together brief biographies of these professors point to their academic trajectories and their main contributions to the Brazilian Mathematics.

Keywords: Women in Mathematics. History of Mathematics in Brazil. Twentieth Century.

1 INTRODUÇÃO

As mulheres brasileiras conquistaram o direito de frequentar cursos de nível superior e obter títulos acadêmicos em 1879, com a reforma Leôncio de Carvalho. Embora algumas mulheres tenham concluído esse nível de ensino, em especial em Medicina, até o final do Império e início da República, as mulheres não haviam, ainda, conquistado, efetivamente, seu lugar no ensino superior em nosso país.

O marco do acesso feminino ao Ensino Superior no Brasil[3], de acordo com Trigo (1994), ocorreu em 1934, com a criação da Faculdade de Filosofia Ciências e Letras da Universidade de São Paulo (FFCL da USP) e já no final da década de 1930, segundo Azevedo e Ferreira (2006), mulheres se encontravam matriculadas em todos os níveis de ensino, sobretudo nos cursos superiores.

A FFCL da USP, em seu ano de criação, ofereceu o curso de Matemática e, em 1935, foi iniciado o curso de Matemática da Escola de Ciências da Universidade do Distrito Federal UDF, posteriormente Faculdade Nacional de Filosofia (FNFi) da Universidade do Brasil (UB) (D'AMBROSIO, 2008). Nos anos 1930, 1940 e 1950, foram sendo criados outros cursos de Matemática no Brasil. Cavalari (2015) aponta que até o final dos anos 50 do século XX, encontrou registros da existência de cursos de graduação em Matemática no Rio Grande do Sul, no Paraná, na Bahia, no Ceará, em Pernambuco, em Minas Gerais e em São Paulo. Merece destaque o fato de termos encontrado registros de mulheres graduadas nesses cursos de Matemática desde o final da década de 1930.

Nesse período, embora não existissem programas de pós-graduação institucionalizados, foram realizadas pesquisas matemáticas de nível pós-graduado e foram obtidos doutoramento na área de Matemática em instituições brasileiras. Destacamos que, dentre os pesquisadores que obtiveram o título de doutor em Matemática, encontramos algumas mulheres, a saber: Marília Chaves Peixoto, Maria Laura Mouzinho Leite Lopes e Elza Furtado Gomide[4] (CAVALARI, 2007; SILVA, C.P., 2006).

Com base nessas informações, podemos afirmar que o número de pesquisadores que se dedicavam à Matemática em território nacional estava aumentando e que, dentre esses, tem-se registros de algumas mulheres.

Esses pesquisadores que se dedicavam à Matemática, de acordo com Cavalari (2012), participavam de sociedades/academias, como a Sociedade Brasileira para o Progresso da Ciência e a Academia Brasileira de Ciências. Os matemáticos passaram a se organizar para criar Sociedades, periódicos científicos e, também, centros de pesquisas. Dentre esses destacamos a Sociedade de Matemática de São Paulo, fundada em 1945, o periódico *Summa Brasiliensis*

[3] Para Trigo (1994), nos anos 1930 começou-se a cogitar, efetivamente, o ingresso da mulher no nível superior, o que significava mudanças nos ideários familiares. Afinal, nesse período, existia o receio de que os estudos e a posterior profissionalização das mulheres pudessem prejudicar um futuro casamento e a "profissão de mãe". No entanto, a estrutura da Faculdade de Filosofia contribuiu para que as famílias aceitassem os estudos de suas filhas, pois essa faculdade não visava a profissionalização e sim a divulgação de um "saber desinteressado".

[4] Destacamos que podem ter existido outras professoras que se tornam doutoras em Matemática no Brasil e que não tivemos acesso a seus nomes.

Mathematicae, criado em 1945, o Boletim da Sociedade de Matemática de São Paulo, iniciado em 1946, o Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas – CBPF, fundado em 1949 e o Instituto de Matemática Pura e Aplicada – IMPA, fundado em 1952.

Nesse contexto, foi realizado, em 1957, o I Colóquio Brasileiro de Matemática que se configurou como o evento pioneiro, em território nacional, a congregar exclusivamente matemáticos[5].

Considerando a importância desse evento para o desenvolvimento da Matemática brasileira e a crescente participação feminina na matemática nesse período, julgamos relevante a realização de uma investigação sobre a presença feminina no Primeiro Colóquio Brasileiro de Matemática, apontando as mulheres que participaram desse evento e destacando suas biografias.

Uma investigação dessa natureza é importante pois, segundo Smith (2003), a historiografia geralmente evita personalidades femininas e questões de gênero. Neste sentido, a presente investigação, ao resgatar dados biográficos de mulheres matemáticas e apontar suas contribuições para o desenvolvimento da Matemática no cenário científico brasileiro, pode contribuir para a escrita da História das mulheres na Matemática brasileira e da História da Matemática no Brasil.

Com vistas a apresentar os resultados desta investigação, dividimos o presente artigo em duas partes. Na primeira, expomos um breve histórico do Primeiro Colóquio Brasileiro de Matemática e, na segunda, apresentamos informações biográficas das matemáticas participantes desse evento.

2 O PRIMEIRO COLÓQUIO BRASILEIRO DE MATEMÁTICA: breve histórico

Os colóquios brasileiros de matemática, conforme já apontado, se constituem como o primeiro evento científico, destinado exclusivamente aos matemáticos, realizado em território nacional. A primeira edição desse evento, o Primeiro Colóquio Brasileiro de Matemática (I CBM) foi realizado no Palace Hotel, em Poços de Caldas, Minas Gerais, no período de 1º a 20 de julho de 1957.

Esse evento, de acordo com seu convite oficial, tinha como objetivos proporcionar contato entre pesquisadores experientes e iniciantes na área de Matemática, ofertar cursos sobre a matemática que estava sendo produzida no Brasil e estimular a colaboração entre pesquisadores de diversas áreas da Matemática.

O I Colóquio Brasileiro de Matemática foi idealizado e organizado pelo Professor Chaim S. Hönig[6] da FFCL da USP e, de acordo com esse professor, a ideia da criação de um evento, voltado exclusivamente a matemáticos no Brasil, surgiu na 8ª Reunião anual da Sociedade Brasileira para o Progresso da Ciência (SBPC), realizada em Ouro Preto em 1956. Nessa reunião, o Professor Chaim identificou que existiam diversos pesquisadores que se mostravam interessados em “Matemática Moderna”. Assim, ele idealizou a criação de um encontro cujo objetivo seria o de divulgar as pesquisas em matemática realizadas no Brasil, além de atrair novos talentos para essa área que ainda era muito recente em território nacional. (CAVALARI, 2012)

[5] De acordo com Cavalari (2012), o Professor Chaim S. Hönig, em entrevista, afirmou que em 1952 havia sido realizada no ITA uma reunião de pessoas interessadas em pesquisas na área de Matemática. Essa reunião foi organizada pelos Matemáticos L. Nachbin, F. D. Murnagham e Flávio Botelho Reis e teve duração de seis semanas. Entretanto, o professor Chaim enfatizou que esse evento não teve continuidade.

[6] Este professor é bacharel em Física e em Matemática pela USP/SP. É professor titular do IME-USP, membro titular da ABC e da Academia de Ciências de São Paulo. Foi o primeiro presidente da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) e sua área de pesquisa é à Análise Matemática, publicou vários artigos acadêmicos e é autor de vários textos matemáticos de graduação e pós-graduação.

A comissão organizadora desse evento foi composta pelo professor Chaim e por professores de várias instituições de ensino superior brasileiras, a saber: Alfredo Pereira Gomes (Instituto de Matemática da Universidade do Recife); Alexandre Augusto Martins Rodrigues (FFCL-USP); Antônio Rodrigues (Faculdade de Filosofia da Universidade do Rio Grande do Sul); Cândido Lima da Silva Dias (FFCL-USP); Carlos Benjamim de Lyra (FFCL-USP); Fernando Furquim de Almeida (FFCL-USP); José Barros Neto (Faculdade de Economia e Administração-FEA-USP); Lindolpho de Carvalho Dias (Escola Nacional de Engenharia da Universidade do Brasil – ENE-UB); Luiz Henrique Jacy Monteiro (FFCL-USP); Maurício Matos Peixoto (ENE-UB); Paulo Ribenboim (Instituto de Matemática Pura e Aplicada - IMPA) (CALABRIA, NOBRE, 2013). Essa comissão foi constituída de modo a contemplar, também, matemáticos de instituições de fora do eixo Rio-São Paulo.

Um fato interessante é que foram enviados convites aos possíveis participantes, ou seja, foram convidadas pessoas interessadas em pesquisas matemáticas de diversas instituições brasileiras e professores de instituições estrangeiras que, nesse período, estavam no Brasil (CALABRIA, NOBRE, 2013). Dos professores convidados, de acordo com as atas do Primeiro Colóquio Brasileiro de Matemática (1957), dez não puderam comparecer. Não obtivemos acesso aos nomes desses docentes e tampouco se existiam mulheres matemáticas entre eles. No quadro I, apresentamos os participantes do I CBM, que consta nos anexos das atas deste evento.

Quadro 1: Participantes do Primeiro Colóquio Brasileiro de Matemática (1957)

Participantes do Primeiro Colóquio Brasileiro de Matemática (1957)		
CIDADE/ESTADO	**PARTICIPANTE**	**CENTRO UNIVERSITÁRIO**
Rio de Janeiro/RJ	Alberto de Carvalho Peixoto de Azevedo	IMPA
	Djairo Guedes de Figueiredo	
	Paulo Ribenboim	
	Manoel Teixeira da Silva Filho	
	Carlos Alberto Aragão de Carvalho	FNFi-UB
	José Abdelhay	FNFi-UB
	Luiz Adauto da Justa Medeiros	FNFi-UB
	Constantino Menezes de Barros	FNFi-UB
	Eliana Rocha Henriques de Brito	ENE-UB
	Lindolpho de Carvalho Dias	ENE-UB
	Maurício Matos Peixoto	ENE-UB
	Jorge Alberto Álvares Gomes Barroso	Faculdade de Ciências e Estatística
São Paulo/SP	Alexandre Augusto Martins Rodrigues	FFCL-USP
	Candido Lima da Silva Dias	
	Carlos Benjamim de Lyra	
	Chaim Samuel Hönig	
	Elza Furtado Gomide	
	Fernando Furquim de Almeida	
	Luiz Henrique Jacy Monteiro	
	Omar Catunda	
	Waldyr Muniz Oliva	
	Domingos Pisanelli	Faculdade de Ciências Econômicas da USP
	José Barros Neto	
São José dos Campos/SP	Artibano Micali	Instituto Tecnológico de Aeronáutica
	Flávio Botelho Reis	

	Francisco Antônio Lacaz Netto	
	Geraldo Severo de Souza Ávila	
	Leo Huet Amaral	
	Nelo da Silva Allan	
	Nelson Onuchic	
Campinas/SP	Ubiratan D'Ambrosio	Faculdade Católica de Filosofia
São Carlos/SP	Gilberto Francisco Loibel	Escola de Engenharia
	Jorès Cecconi	
	Renzo Ângelo Antonio Piccinini	
	Rubens Gouvêa Lintz	
Porta Alegre/RS	Antônio Rodrigues	Faculdade de Filosofia da Universidade do Rio Grande do Sul
	Ary Nunes Tietböhl	
	Luiz Severo Motta	
	Ernesto Bruno Cossi	Centro de Pesquisas Físicas da Universidade do Rio Grande do Sul
	Francisca Maria Rodrigues Torres	
Recife/PE	Alfredo Pereira Gomes	Instituto de Matemática da Universidade do Recife
	Roberto Figueiredo Ramalho de Azevedo	
	Jônio Pereira de Lemos	Faculdade de Arquitetura da Universidade do Recife
	Manfredo Perdigão do Carmo	Faculdade de Filosofia da Universidade do Recife
Fortaleza/CE	Antônio Gervasio Colares	Faculdade de Filosofia da Universidade do Ceará
	Francisco Silva Cavalcanti	
	Milton Carvalho Martins	Escola de Engenharia da Universidade do Ceará
Grenoble/França	Georges Henri Reeb	Universidade de Grenoble
Tóquio/Japão	Morikuni Goto	Escola de Educação da Universidade de Tóquio

Fonte: Calabria, Nobre (2013)

O I CBM teve duração de três semanas e sua programação foi constituída de conferências e cursos que pudessem refletir as tendências da pesquisa em Matemática daquele momento. Foram proferidas 16 conferências por 10 matemáticos brasileiros. Para os cursos, foram escolhidos temas nos quais existiam pesquisadores em território nacional, a saber: Álgebra, Topologia Algébrica, Análise Funcional e Geometria Diferencial. Após tal escolha, a comissão organizadora convidou matemáticos brasileiros que estavam, naquele período, realizando pesquisas nessas áreas (ATAS, 1957). Posteriormente, foram incluídos na programação dois cursos, um seria proferido pelo professor M. Goto e o outro pelo matemático G. Reeb.

Destacamos que, segundo Toledo (2008), os cursos do I CBM possibilitaram aos graduados o contato com a matemática estudada após a graduação. Esse fato era relevante, de acordo com esse autor, pois, nas décadas de 1950 e 1960, não existiam disciplinas de pós-graduação no Brasil. Além disso, é importante ressaltar que os materiais a serem utilizados nesses cursos foram redigidos e entregues previamente para a comissão organizadora do I CBM, para que fosse possível a produção de exemplares mimeografados. Foram produzidos 100 exemplares que foram distribuídos para os participantes e conferencistas do evento, bem como para diversas universidades brasileiras. Posteriormente, a SMSP publicou mais 100 exemplares dessas notas. Esses materiais, para Lima (1995), contribuíram para o início de uma literatura matemática brasileira.

No I CBM, foram realizadas discussões e foram elaborados alguns planos de estudos a serem executados por matemáticos em diferentes localidades. Além disto, foram elaboradas pela comissão organizadora e pelos participantes do evento algumas sugestões para o aumento das pesquisas matemáticas no Brasil, a saber: a criação de uma literatura matemática brasileira de nível superior; a ampliação de intercâmbio entre os pesquisadores alocados em diferentes instituições; a contratação de professores estrangeiros para instituições em território nacional; a criação de novas bolsas para matemáticos realizarem pesquisas em instituições brasileiras e estrangeiras e, ainda, a ampliação de periódicos destinados a divulgar pesquisas matemáticas. Com base nessas informações, Cavalari (2012) aponta que o I CBM pode ser entendido como um marco no desenvolvimento da Matemática no Brasil.

Ao final das atividades do I CBM, os participantes definiram que as edições desse evento seriam realizadas bienalmente e teriam duração aproximada de duas a três semanas. Ficou estabelecido, também, que os futuros conferencistas dos colóquios deveriam entregar previamente as notas mimeografadas de seus cursos à comissão organizadora do evento que seria indicada pelo IMPA (ATAS, 1957).

Os colóquios brasileiros de Matemática são realizados bienalmente e sem interrupções desde sua primeira edição. Com exceção do III CBM, que fora realizado em Fortaleza, 1961, até sua décima quinta edição, todos os colóquios brasileiros de Matemática foram realizados na cidade de Poços de Caldas. A partir do XVI Colóquio Brasileiro de Matemática, em 1987, com a construção da atual sede do IMPA, os colóquios passaram a ser realizados no Rio de Janeiro.

Segundo Elon Lages Lima, com o tempo, os colóquios foram crescendo e se tornando grandes reuniões de excelente qualidade científica. “À medida que a qualidade do colóquio foi crescendo e o nível da Matemática brasileira foi ficando mais sofisticado, começaram a predominar as atividades de pesquisa” (IMPA 2003, p. 106). Atualmente, os colóquios brasileiros de Matemática são encontros que visam discutir e divulgar a Matemática produzida no Brasil, reúnem estudantes e pesquisadores das áreas de Matemática Pura e Aplicada como, também, da Estatística. Esse evento é organizado pelo IMPA, no Rio de Janeiro, entre os meses de julho e agosto, com duração de duas semanas e prevê, em sua programação, palestras, conferências, comunicações, além de cursos introdutórios e avançados.

Após essa breve explanação histórica sobre a primeira edição do Colóquio Brasileiro de Matemática, apresentaremos considerações acerca da presença de mulheres matemáticas nesse evento.

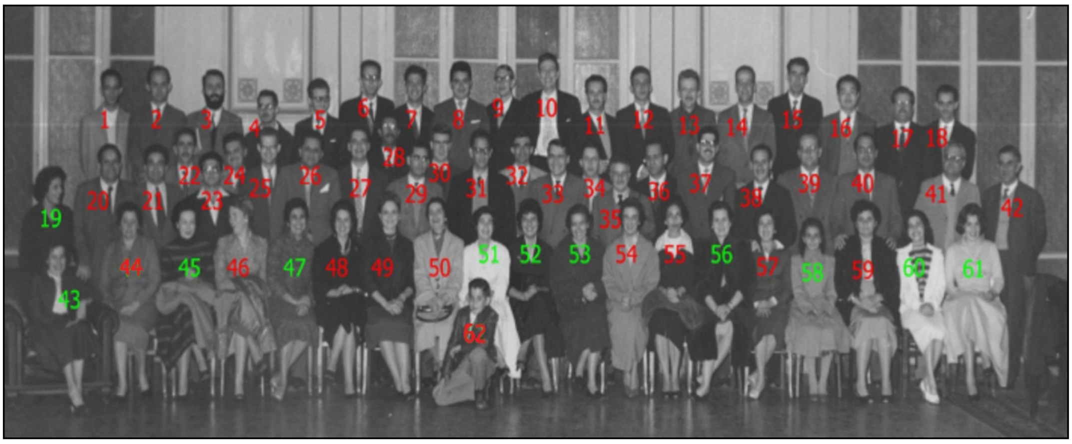
3 A PRESENÇA FEMININA NO PRIMEIRO COLÓQUIO

O Primeiro Colóquio Brasileiro de Matemática, de acordo com as informações apresentadas anteriormente, contou com a participação de 49 matemáticos. Dentre estes, três eram mulheres, a saber: Eliana Rocha Henriques de Brito, Elza Furtado Gomide e Francisca Maria Rodrigues Torres.

As professoras Eliana de Brito e Elza Gomide foram identificadas na fotografia oficial do primeiro Colóquio Brasileiro de Matemática (Ilustração 1). Já a Professora Francisca Torres não pode ser identificada nesta foto, isto significa que ou essa docente é uma das pessoas não identificadas ou ela não estava presente no momento no qual foi realizada a fotografia. Entretanto, destacamos que podemos observar outras mulheres na Figura 1.

Contudo, de acordo com Calábria (2010), essas mulheres, em sua grande maioria, eram as esposas dos matemáticos participantes, ou seja, acompanhantes deles. Esta autora aponta que era usual, na época, os participantes irem acompanhados de suas esposas e filhos nos congressos.

Figura 1: Fotografia Oficial do I Colóquio Brasileiro de Matemática e identificação de seus participantes



Fonte: Calábria e Nobre (2013)

1. Manoel Teixeira da Silva Filho	32. Flávio Botelho Reis
2. Artibano Micali	33. Chaim Samuel Hönig
3. Carlos Benjamim de Lyra	34. Alberto de Carvalho Peixoto de Azevedo
4. Lindolpho de Carvalho Dias	35. Jorès Cecconi
5. Djairo Guedes Figueiredo	36. José Abdelhay
6. Nelson Onuchic	37. José de Barros Neto
7. Renzo Ângelo Antônio Piccinni	38. Domingos Pisanelli
8. Antônio Gervásio Colares	39. George Henri Reeb
9. Gilberto Francisco Loibel	40. Francisco Silva Cavalcante
10. Ernesto Bruno Cossi	41. Candido Lima da Silva Dias
11. Alfredo Pereira Gomes	42. Fernando Furquim de Almeida
12. Roberto Figueiredo R. de Azevedo	43. ?
13. Milton Carvalho Martins	44. Maria A. Rodrigues
14. Luiz Henrique Jacy Monteiro	45. ?
15. Geraldo Severo de Souza Ávila	46. Huguette Ribenboim
16. Morikuni Goto	47. ?
17. Ary Nunes Tietböhl	48. Lise Rodrigues
18. Waldyr Muniz Oliva	49. Eliana Rocha Henriques de Brito
19. Lourdes de la Rosa Onuchic[7]	50. Marilia Chaves Peixoto
20. Antonio Rodrigues	51. ?
21. Luiz Severo Motta	52. ?
22. Manfredo Perdigão do Carmo	53. ?
23. Constantino Menezes de Barros	54. Elza Gomide

[7] Identificação realizada pela professora Lourdes Onuchic em 2016.

24. Carlos Alberto Aragão de Carvalho	55. Yolanda Abdelhay
25. Paulo Ribenboim	56. ?
26. Jônio Pereira de Lemos	57. Dora Pisanelli
27. Alexandre Augusto M. Rodrigues	58. ?
28. Nelo da Silva Alan	59. Maria B. da Silva Cavalcante
29. Mauricio Matos Peixoto	60. Esposa do Prof. Waldyr Muniz Oliva[8]
30. Ubiratan D'Ambrosio	61. ?
31. Omar Catunda	62. Paulo Roberto Rodrigues[9]

Entretanto, merece destaque o fato de que a professora Lourdes de la Rosa Onuchic (na foto identificada pelo número 19) era esposa do matemático Nelson Onuchic e era graduada em Matemática e que a professora Marilia Chaves Peixoto (na foto identificada pelo número 50) era esposa do matemático Maurício Matos Peixoto e realizava pesquisas matemáticas. A professora Marília também pode ser identificada em outra fotografia tirada durante o primeiro Colóquio Brasileiro de Matemática (Figura 2).

Nessa segunda fotografia, podemos identificar cinco mulheres, a saber: Lise Rodrigues (apresentada como Sra. A. A. Rodrigues) e as professoras Francisca Maria Rodrigues Torres, Elza Furtado Gomide, Eliana Rocha Henriques de Brito e Marilia Chaves Peixoto.

Presumimos que a Sra. Lise Rodrigues tenha sido identificada como Sra. A. A. M. Rodrigues e a Professora Marília C. Peixoto não tenha sido apresentada como Sra. M. M. Peixoto, pelo fato de que essa docente realizava pesquisas matemáticas. Neste sentido, conjecturamos que a Professora Marília Peixoto possa ter participado do I CBM.

Com base nestas informações, questionamo-nos acerca da participação, neste evento, de matemáticas, esposas de pesquisadores participantes. Desta forma, entramos em contato com a Professora Lourdes R. Onuchic, que, conforme já apontado, era esposa do matemático Nelson Onuchic[10] que foi, inclusive, membro da comissão organizadora do I CBM.

De acordo com o relato da Professora Lourdes Onuchic[11], ela e a Professora Marília Chaves Peixoto participaram das atividades do I CBM. Esta professora afirmou que seus nomes não constam na lista de participantes do evento devido ao fato de não terem apresentado conferências ou cursos e de não estarem, naquele momento, vinculada a nenhuma instituição de ensino superior. Em 1957, a professora Lourdes estava lecionando na educação básica.

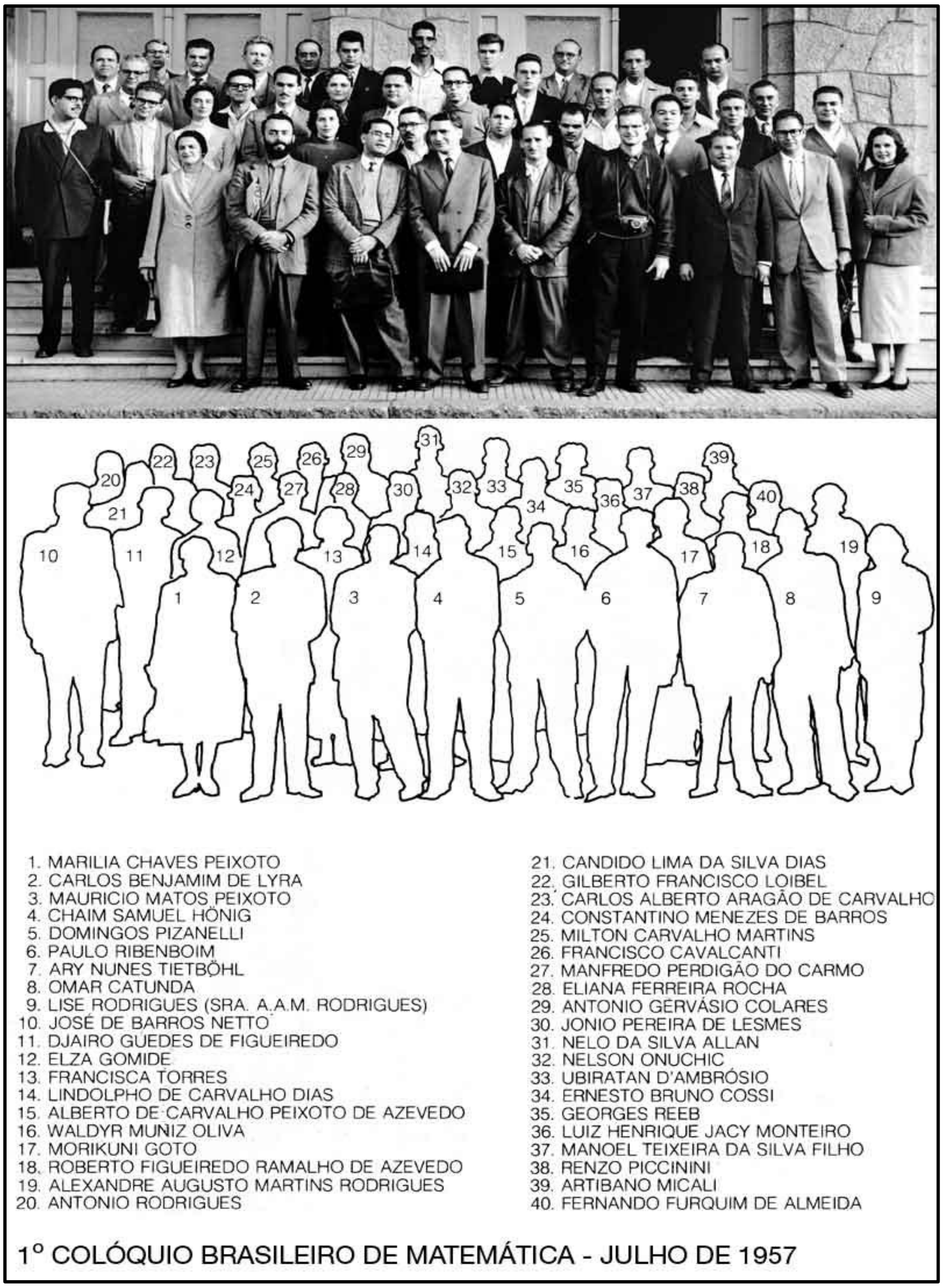
Também, a Professora Lourdes Onuchic apontou que a professora Júnia Borges Botelho participou do Primeiro Colóquio Brasileiro de Matemática, assistiu a cursos e conferências. Entretanto, seu nome não figura na lista de participantes pelo fato de que, assim como a professora Lourdes, a professora Júnia, naquele momento, não estava vinculada a uma instituição de ensino superior.

Com base nos relatos da Professora Lourdes, podemos afirmar que existiram matemáticos que participaram do I CBM e que seus nomes não estão na lista de participantes do evento. Podemos afirmar, também, que seis matemáticas participaram deste evento, a saber: Eliana de

[8] Idem.
[9] Filho de Antônio Rodrigues.
[10] Este professor formou-se em Licenciatura em Física. Começou sua carreira na Matemática como professor do Departamento de Matemática do ITA. Realizou seu doutorado em Matemática. Colaborou com a criação do curso de Matemática da FFCL de Rio Claro/SP. Foi professor Titular do ICMC-USP – São Carlos e membro fundador da Academia de Ciências de São Paulo. Também possui o título de Professor Emérito do ICMC de São Carlos e sua área de pesquisa era em Equações Diferenciais com Retardamento, na qual foi pioneiro no Brasil.
[11] Relato da Professora Lourdes Onuchic a Angélica Raiz Calábria em 10 de maio de 2016a.

Brito, Elza Gomide, Francisca Torres, Júnia Botelho, Lourdes de la Rosa Onuchic, Marília Chaves Peixoto. Neste sentido, destacamos que possam ter existido outras matemáticas que participaram do I CBM e que não puderam ser identificadas nos materiais disponíveis para a realização da presente pesquisa.

Figura 2: Fotografia do 1º Colóquio Brasileiro de Matemática



Fonte: Hönig e Gomide (1979)

Com relação à atuação nesse evento, destacamos que a professora Elza Furtado Gomide, vinculada a Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da USP, apresentou duas conferências sobre Somas de Gauss[12] (ATAS, 1957). Não encontramos registros de que as outras matemáticas participantes deste evento tenham apresentado conferências.

Após esta explanação sobre a presença feminina no I CBM, apresentaremos algumas informações biográficas sobre as professoras que participaram deste evento, destacando alguns aspectos de sua carreira acadêmica. Enfatizamos que com exceção da Profa. Elza Gomide, as informações relativas a vida e obra das matemáticas são escassas.

3.1 Eliana Rocha Henriques de Brito (1933-2002)[13]

Essa participante do Primeiro Colóquio bacharelou-se em Matemática pela FNFi-UB em 1955 e, no ano seguinte, graduou-se pela Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro em Licenciatura em Matemática.

Figura 3: Eliana Rocha Henriques de Brito

Fonte: UFRJ (s/d)

Iniciou sua carreira docente como Auxiliar de Ensino da cadeira Mecânica Racional da ENE-UB, regida por M. M. Peixoto, em 1956. No ano seguinte, tornou-se Auxiliar de Ensino da cadeira de Geometria Analítica e Superior da FNFi, regida pela Professora Maria Laura Leite Lopes[14].

No final dos anos 1950 e início de 1960, realizou estágios na Universidade de Chicago e na Faculdade de Ciências da Universidade de Paris. Nesta instituição, teve contato com Laurent Schwartz[15].

Em 1965 realizou concurso para Livre Docência, na ENE – UB, com a dissertação intitulada “Separação de Espaço e Tempo nas Distribuições Invariantes da Solução de Ondas”. Assim, obteve o título de doutora em Matemática. De acordo com Silva (2006), nesse período, em virtude do decreto no. 8.659 de abril de 1911, era concedido o grau de doutor ao candidato aprovado no concurso de Livre-Docência. Destacamos o fato da temática deste trabalho ter sido sugerida pelo Professor L. Schwartz em 1961.

[12] De acordo com Lima (1995), a professora Elza, ministrou no II CBM, juntamente com os professores Alexandre A. M. Rodrigues, Nelo Allan e Omar Catunda, o curso intitulado “Superfícies de Riemann”.

[13] Esta biografia foi elaborada com base em dados apresentados em: http://www.im.ufrj.br/doc/eliana.htm.

[14] Formada em Bacharelado e Licenciatura em Matemática pela FNFi-UB e Professora Emérita da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ). Foi uma das primeiras brasileiras a obter o grau de doutora em Ciências (Matemática) e se destaca, também, por suas grandes contribuições na área de Educação Matemática.

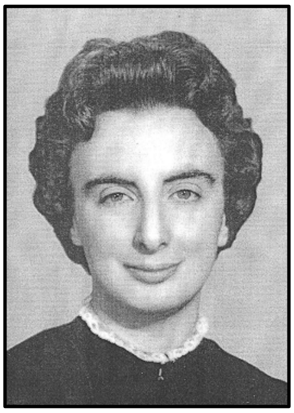
[15] Primeiro matemático francês a receber a *Medalha Fields.* Sua principal obra foi a Teoria das Distribuições e contribuiu para a área de Análise Funcional, Teoria da Medida, Equações Diferenciais Parciais e Probabilidade.

Atuou na graduação e Pós-Graduação em Matemática da UFRJ, instituição na qual se aposentou, como Professora Titular da UFRJ em 1990. Faleceu em 17 de outubro de 2002[16].

3.2 Elza Furtado Gomide (1925-2013)[17]

Elza Furtado Gomide nasceu em São Paulo em 20 de agosto de 1925. Formou-se bacharel em Física e em Matemática, em 1944 e 1946, respectivamente pela FFCL-USP.

Figura 4: Elza Furtado Gomide (1958)



Fonte: Cavalari (2012)

Em 1945, tornou-se professora assistente do professor Omar Catunda[18], na cadeira de Análise Matemática, na FFCL-USP. Em meados dos anos 1960, regeu a cadeira de Cálculo Infinitesimal[19] do Departamento de Matemática da FFCL-USP. Até o início da década de 1960, foi a única docente do departamento de Matemática desta faculdade. Posteriormente, a partir de 1970, tornou-se professora do Instituto de Matemática e Estatística da USP (IME-USP) (CAVALARI, 2012).

Elza Gomide também foi a primeira brasileira a receber o título de doutora em Matemática, mediante defesa de tese. Sua tese intitulada “A hipótese de Artin-Weil sobre corpos finitos e o número de soluções de tais equações” realizada, sob a orientação de Jean Delsarte[20], na USP, foi defendida em 27 de dezembro de 1950. Os resultados desta pesquisa foram publicados no Boletim da Sociedade Matemática de São Paulo, em dezembro de 1949 (vol. 4, fascículos I e II). De acordo com Castro (1999), esse trabalho pode ser classificado como uma contribuição valiosa no campo da Álgebra Moderna brasileira.

Nos anos de 1962 e 1963, realizou o pós-doutorado no *Insitut Henri Poincarè*, em Paris, na área de geometria e topologia, sob a supervisão de Charles Ehresmann[21]. Realizou pesquisas

---

[16] Informação obtida no diário oficial da união de 02/02/2006.

[17] Esta biografia tem como referência Cavalari (2009).

[18] Foi matemático, Professor e Educador brasileiro. Iniciou sua carreira na FFCL-USP e, posteriormente, trabalhou na Universidade Federal da Bahia. Sua área de atuação era Análise Matemática.

[19] Em 1963 em decorrência da aposentadoria do Professor Catunda, a cadeira de Análise Matemática ficou sob a regência da professora Elza Gomide e seu assistente Carlos Benjamin de Lyra. Posteriormente, essa cadeira foi subdividida nas cátedras Equações Diferenciais e Cálculo Infinitesimal. A primeira foi regida pelo professor contratado Chaim Samuel Hönig e a segunda ficou sob a responsabilidade da professora Elza Gomide e do assistente Carlos Benjamin de Lyra (CAVALARI, 2012).

[20] Foi um matemático francês da área de Análise Matemática e um dos fundadores do grupo Nicolas Bourbaki.

[21] Matemático Francês e membro do grupo Nicolas Bourbaki. Foi um dos criadores da Topologia Diferencial e pioneiro na Teoria das Categorias.

nas áreas de análise, topologia e geometria. Orientou trabalhos de matemática de nível de graduação e pós-graduação. Interessou-se, também, pelas áreas de Educação Matemática e História da Matemática.

Teve importante atuação na Matemática da USP, instituição na qual também exerceu atividades administrativas. Aposentou-se, compulsoriamente da USP e, posteriormente, atuou como professora voluntária nessa instituição. Faleceu em São Paulo em 23 de outubro de 2013.

Participou ativamente das primeiras edições dos colóquios brasileiros de Matemática, realizou conferências em várias instituições de ensino superior no Brasil, redigiu notas de aula e elaborou traduções de obras, em especial na área de Cálculo e Análise, que foram amplamente utilizadas em território nacional. Participou de várias sociedades científicas, foi sócia fundadora da Sociedade de Matemática de São Paulo (sendo vice-presidente de 1966-1967), da Sociedade Brasileira de Matemática e do Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas (CBPF).

3.3 Francisca Maria Rodrigues Torres (1930)

Francisca Maria Rodrigues Torres é filha de Humberto Grant Torres e Anna Maria Genoveva Rodrigues Torres. Nasceu 11 de outubro de 1930, na cidade de Pelotas/RS. Graduou-se bacharel em Matemática pela Faculdade de Filosofia da Universidade do Rio Grande do Sul. Após concluir a graduação, tornou-se docente desse mesmo instituto até sua aposentadoria. Também lecionou, no Colégio Estadual Júlio de Castilhos, localizado na cidade de Porto Alegre (FORMOSO, 2016).

3.4 Júnia Borges Botelho (1925)

Júnia nasceu no dia 12 de setembro de 1925, em Santos/SP, e iniciou sua carreira docente como professora de Ensino Básico no Ginásio Estadual "Prof. Zuleika de Barros Martins Ferreira", em São Paulo/SP (BADIN, 2006). Com a criação da FFCL-Rio Claro, em 1958, foi convidada para ministrar "Cursos Prévios". Lecionou nos anos 1958 e 1959, as disciplinas de Matemática e Física. Atuou no curso de Matemática da FFCL de Rio Claro, lecionando Álgebra Moderna, no período de 1958 a 1963 (SOUTO, 2006). Foi, em 1966, auxiliar da cátedra de Cálculo Infinitesimal do Departamento de Matemática da FFCL-USP, regida pela professora Elza Gomide (CAVALARI, 2012).

Figura 5: Júnia Borges Botelho

Fonte: Arquivo FFCL – Rio Claro (s/d)

Em 1969, tornou-se mestre em Matemática pela Faculdade de FFCL-USP, com a dissertação intitulada "Integral Formal de Sistemas de Equações a Derivadas Parciais", realizada sob a orientação de Alexandre Augusto Martins Rodrigues. Posteriormente, em 1973, sob a mesma orientação, obteve o doutoramento, pela FFCL de Rio Claro defendendo a tese intitulada "O Teorema de Frobenius Formal" (RODRIGUES, 2008).

3.5 Lourdes de la Rosa Onuchic (1931)[22]

Filha de José de la Rosa e Manoela de la Rosa Martinez, nasceu em São Paulo em 02 de julho de 1931. Graduou-se em Bacharelado e em Licenciatura em Matemática pela FFCL-USP em 1954. Iniciou sua carreira docente lecionando na Educação Básica.

Figura 6: Lourdes de la Rosa Onuchic

Fonte: Instituto de Ciências Matemáticas de Computação – ICMC/USP (s/d)

Em 1959, foi contratada pela FFCL de Rio Claro para lecionar, inicialmente, no Curso de Pedagogia e, posteriormente, no Curso de Matemática. Permaneceu nesta instituição até 1966. No ano seguinte, foi contratada pela USP, campus de São Carlos. Nessa universidade lecionou nos cursos de Engenharia, Matemática, Física e Química.

No início dos anos 1960, participou de um curso com Philip Hartman[23] na *Johns Hopkins University* – Baltimore, MD. Concomitantemente, fez dois cursos relativos ao ensino de Matemática, elementar e secundária, nessa mesma instituição.

Tornou-se mestre, em 1971, com a defesa da dissertação intitulada "Algumas aplicações de um critério de comparação de Hale para Sistemas de Equações Diferenciais com retardamento no tempo", realizada na Escola de Engenharia de São Carlos (EESC-USP). Após sete anos, tornou-se doutora com a defesa da tese "Estimativa e Invariância de Conjuntos w-limite das Soluções de um Sistema de Equações Diferenciais Ordinárias: estabilidade e comportamento no infinito", realizada no Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos (ICMSC-USP).

Participou de muitos congressos nacionais e internacionais nas áreas de Matemática e de Educação Matemática. Após a aposentadoria da USP *campus* São Carlos, em 1986, passou a dedicar-se exclusivamente à Educação Matemática.

Trabalhou, novamente na Educação Básica, fazendo de sua sala de aula um laboratório de pesquisa para o processo ensino-aprendizagem no Ensino Médio e, posteriormente, em 1989, se credenciou no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática na UNESP campus Rio Claro. Foi, então, contratada para lecionar no curso de graduação em Matemática dessa instituição e atuou em outros cursos de pós-graduação na área de Educação Matemática.

[22] Esta biografia foi escrita com base em Cavalari (2013).
[23] Não foi encontrada nenhuma informação sobre este matemático.

A Professora Lourdes permanece em atividade, participa do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática na UNESP de Rio Claro. Suas pesquisas em Educação Matemática concentram-se na área de “Resolução de Problemas” com enfoque em ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas e na formação de professores. Estas se configuram como referência no cenário nacional. É revisora de vários periódicos da área de Educação Matemática, como *Zetetiké*, Educação Matemática e Pesquisa, *Acta Scientiae* e Bolema (Boletim de Educação Matemática).

3.6 Marília Chaves Peixoto (1921-1961)

Marília nasceu em 24 de fevereiro de 1921 em Santana do Livramento-RS (MELO e RODRIGUES, 2005). Graduou-se em engenharia pela Escola de Engenharia da UB, em 1943. Enquanto realizava o curso de engenharia e atuava como monitora, era aluna ouvinte do curso de Matemática da Faculdade Nacional de Filosofia. Atuou como docente na ENE – UB em Cálculo e Mecânica e, também, em cursos especiais no CBPF[24] (SILVA, C. M, 2006).

Figura 7: Marília Chaves Peixoto

Fonte: Silva (2006)

Obteve o título de doutora por meio da aprovação no concurso para livre-docente pela ENE-UB, em 1948, defendendo a dissertação intitulada *One Inequalities* $y \geq G(x, y, y', y'')$. Marília foi a primeira mulher a obter o título de doutora em Matemática no Brasil (SILVA, C. P., 2006).

De acordo com Circe Maria da Silva (2006), Marília realizou importantes trabalhos na área de equações diferenciais e publicou, juntamente com, seu então marido, Maurício Matos Peixoto[25], dois artigos importantes nos Anais da Academia Brasileira de Ciências, a saber: *On the inequalities* $y''' \, G(x, y, y', y'')$, em 1949, e *Structural stability in the plane with enlarged boundary conditions*, em 1959. Um desses trabalhos juntamente com outros artigos de Maurício Matos Peixoto, resultaram, segundo Silva (2009), no Teorema de Peixoto & Peixoto.

Marília foi a primeira brasileira eleita para a Academia Brasileira de Ciências em 12 de junho de 1951. Faleceu ainda jovem, em 1961 (MELO e RODRIGUES, 2005).

Embora tenhamos poucas informações sobre a trajetória acadêmica de Marilia Chaves Peixoto, esta professora é frequentemente citada como uma Matemática pioneira no cenário Nacional.

[24] Não conseguimos apurar com precisão o período no qual a professora Marília esteve vinculada a UB e ao CBPF.

[25] Formado em Engenharia Civil, seguiu a carreira de matemático. Suas pesquisas foram desenvolvidas na área de Sistemas Dinâmicos e Equações Diferenciais. O seu trabalho de destaque é o *Teorema Peixoto.* É Professor Titular e Pesquisador Emérito do IMPA.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente artigo objetivou investigar a presença feminina na primeira edição do Colóquio Brasileiro de Matemática que, conforme exposto, pode ser considerado um marco histórico para o desenvolvimento da Matemática Brasileira.

Esta investigação apontou que três matemáticas foram convidadas oficialmente e participaram deste evento, a saber: Eliana Rocha Henriques de Brito, Elza Furtado Gomide e Francisca Maria Rodrigues Torres. Entretanto, os dados que obtivemos permitem afirmar que as professoras Junia Borges Botelho, Lourdes de la Rosa Onuchic e Marília Chaves Peixoto, apesar de não estarem na lista de participantes, também participaram do primeiro Colóquio Brasileiro de Matemática. Além disso, existiram matemáticos que participaram do I CBM e que seus nomes não estão na lista de participantes do evento. Assim, merece destaque o fato de que possam ter existido outras matemáticas participantes desse evento. Com relação a participação no I CBM destacamos que a professora Elza Furtado Gomide proferiu duas conferências.

Por outro lado, merece destaque o registro de outras matemáticas que atuavam no Brasil nesse período e que não participaram do I CBM. Enfatizamos, então, que as matemáticas destacadas no presente trabalho não eram as únicas mulheres a se dedicar à pesquisa matemática em território nacional.

A escrita da biografia das matemáticas que participaram no I CBM possibilitou que percebêssemos que, com exceção da Professora Elza Gomide, o material existente sobre a vida e obra destas matemáticas é ainda pouco aprofundado. Neste sentido, entendemos que a presente investigação suscita investigações futuras acerca da vida e da obra dessas matemáticas que foram pioneiras na matemática brasileira e da participação feminina no desenvolvimento dessa ciência no Brasil.

REFERÊNCIAS

ATAS do Primeiro “Colloquium” Brasileiro de Matemática. São Paulo: Conselho Nacional de Pesquisas, 1957.

AZEVEDO, N.; FERREIRA, L. O. Modernização, políticas públicas e sistema de gênero no Brasil: educação e profissionalização feminina entre as décadas de 1920 e 1940. **Cadernos Pagu**, Campinas, n. 27, p. 213-254, 2006.

BADIN, M. G. **Um olhar sobre as contribuições do professor Nelson Onuchic para o desenvolvimento da matemática no Brasil**. 2006. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)-Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” – UNESP, Rio Claro, 2006.

CALABRIA, A. R. **Primeiro Colóquio Brasileiro de Matemática**: breve histórico e pequenas biografias de seus participantes. 2010. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)-Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” – UNESP, Rio Claro, 2010.

CALABRIA, A. R.; NOBRE, S. R. Primeiro Colóquio Brasileiro de Matemática: registros e personagens. **REMATEC** (Revista de Matemática, Ensino e Cultura), Natal, EDUFRN, n. 12, jan-jun 2013, p. 86-100.

CAVALARI, M. F. **A matemática é feminina? Um estudo histórico da presença da mulher em institutos de pesquisa em Matemática do Estado de São Paulo**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)-Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” – UNESP, Rio Claro, 2007.

CAVALARI, M. F. “Elza Furtado Gomide”: pioneira em pesquisa e docência em Matemática na USP *Campus* São Paulo. In: ENCONTRO MINEIRO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 5., 2009, Lavras, MG. **Anais virtuais...** Lavras, MG: Editora da Universidade Federal de Lavras, 2009.

CAVALARI, M. F. **As contribuições de Chaim Samuel Hönig para o desenvolvimento da matemática brasileira**. 2012. Tese (Doutorado em Educação Matemática)-Universidade Estadual

Paulista “Júlio de Mesquita Filho” – UNESP, Rio Claro, 2012.

CAVALARI, M. F. Lourdes Onuchic. In. VALENTE, W. R. (Org.) **Educadoras matemáticas**: memórias, docência e profissão. São Paulo: Livraria da Física, 2013.
CAVALARI, M. F. Breves considerações acerca dos cursos de graduação em matemática nas décadas de 1930 a 1950 no Brasil. In: SEMINÁRIO NACIONAL DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA, 11., 2015, Natal, RN. **Anais virtuais...** Natal, RN: SBHMat, 2015.

D'AMBROSIO, U. **Uma história concisa da matemática no Brasil**. Rio de Janeiro: Vozes, 2008.

FORMOSO, F. **Francisca Torres** [mensagem pessoal]. Mensagem recebida por <angel_raiz@yahoo.com.br> em 04 mai. 2016.

HÖNIG, C. S.; GOMIDE, E. F. História das Ciências Matemáticas. In: MOTOYAMA, S.; FERRI, M. G. (Coord.). **História das ciências no Brasil**. São Paulo: Editora da USP, 1979. v. 1.

INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS E DE COMPUTAÇÃO – ICMC (USP). **Pessoas. Lourdes Onuchic.** Disponível em: <http://icmc.usp.br/Portal/Pessoas/Detalhes.php?id=64958>. Acesso em: 11 mai. 2016.

INSTITUTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA - IMPA. **IMPA 50 anos**. 1. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2003. Disponível em: <http://www.impa.br/downloads/livro_impa_50_anos.pdf>. Acesso em: 05 abr. 2016.

LIMA, E. L. Os cursos dos Colóquios Brasileiros de Matemática. **Matemática Universitária**, n. 19, SBM, pp. 01-11, dez. 1995.

MELO, H. P. de; RODRIGUES, L. M. C. S. **Marília Chaves Peixoto (1921-1961) - Matemática**. 2005. Disponível em: <http://memoria.cnpq.br/web/guest/pioneiras-view/-/journal_content/56_INSTANCE_a6MO/10157/902875>. Acesso em: 11 mai. 2016.

ONUCHIC, L. R. Depoimento sobre o Primeiro Colóquio Brasileiro de Matemática. 10 de maio de 2016. Depoimento para: Angélica Raiz Calábria na UNESP de Rio Claro.

RODRIGUES, A. A. M. ***Curriculum Vitae* disponível na Plataforma Lattes**. Atualização: 2008. Disponível em: <http://lattes.cnpq.br/0547397388018816>. Acesso em: 11 mai. 2016.

SILVA, C. M. da. Polytechnicians or mathematicians? **História, Ciências, Saúde – Manguinhos**, Rio de Janeiro, v. 13, n. 4, p. 891-908, oct./dec. 2006.

SILVA, C. P. Sobre o início e consolidação da pesquisa matemática no Brasil: parte I. **Revista Brasileira de História da Matemática**: an international journal on the History of Mathematics, v. 6, n. 11, p. 67-96, 2006.

SILVA, C. P. Sobre o início e consolidação da pesquisa matemática no Brasil: parte II. **Revista Brasileira de História da Matemática:** an international journal on the History of Mathematics, v. 6, n. 12, p. 165-196, 2006.

SILVA, C. P. **Aspectos históricos do desenvolvimento da pesquisa matemática no Brasil**. São Paulo: Livraria da Física; SBHMat, 2009.

SMITH, B. G. **Gênero e história**: homens, mulheres e prática histórica. Bauru: EDUSC, 2003.

SOUTO, R. M. A. **Mario Tourasse Teixeira – o homem, o educador, o matemático.** 2006. Tese (Doutorado em Educação Matemática)-Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” – UNESP, Rio Claro, 2006.

TOLEDO, J. C. **Uma história do processo de institucionalização da área de análise matemática no Brasil**. 2008. Tese (Doutorado em Educação Matemática)-Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” – UNESP, Rio Claro, 2008.

TRIGO, M. H. B. A mulher universitária: códigos de sociabilidades e relações de gênero. In: BRUSCHINNI. C.; SORJ, B. (Org.). **Novos olhares:** mulheres e relações de gênero no Brasil. São Paulo: Marco Zero; Fundação Carlos Chagas, 1994. p. 89-110.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO – UFRJ. **Eliana Rocha Henriques de Brito**. Disponível em: <http://www.im.ufrj.br/doc/eliana.htm>. Acesso em: 11 mai. 2016.

QUERIDO DIÁRIO: O QUE DIZEM AS NARRATIVAS SOBRE A FORMAÇÃO E A FUTURA PRÁTICA DO PROFESSOR QUE ENSINARÁ MATEMÁTICA NOS ANOS INICIAIS

DEAR DIARY: WHAT DOES THE NARRATIVES SAYS ABOUT THE FORMATION AND THE TOMORROW´S PRACTICE OF TEACHERS WHO WILL EDUCATE MATH IN THE PRIMARY YEARS

SILVA, Américo Junior Nunes da[1]

PASSOS, Carmen Lúcia Brancaglion[2]

RESUMO

Este artigo é resultado do trabalho realizado durante o semestre letivo 2015.2. Trata-se de um recorte da pesquisa de doutoramento do primeiro autor com o objetivo de identificar e discutir as marcas de futuros professores dos anos iniciais, quanto à Matemática e ao seu ensino, que são manifestadas nas trajetórias de vida registradas nos diários reflexivos. Elegeu-se a temática de narrativas e de formação de professores que ensinarão Matemática nos anos iniciais, como foco de discussão, sobretudo, pela aproximação profissional e acadêmica dos autores. A construção de dados se deu a partir de narrativas autobiográficas escritas de um grupo de alunos do 6º semestre do curso de Pedagogia de uma Universidade Pública do Estado de São Paulo. A análise dos dados para a identificação e a discussão das marcas apresentadas pelos licenciandos partiu da leitura dos diários reflexivos. O uso da escrita narrativa permitiu delimitar as compreensões dos estudantes participantes da pesquisa a respeito de seu próprio percurso formativo, possibilitando um movimento de reflexão sobre suas histórias de vida, o que repercute, dessa forma, no seu desenvolvimento, tanto profissional como pessoal. É necessário que os cursos de formação inicial de professores que atuarão nos anos iniciais e na educação infantil repensem o lugar da Matemática e sua importância, também, para o processo de alfabetização, e possibilitem que os futuros professores se reconheçam enquanto educadores matemáticos.

Palavras-chave: Formação de professores. Diário reflexivo. Ensino de Matemática.

ABSTRACT

This paper is the outcome of a work conducted along the 2015.2 academic semester. It is a cut-out of a doctoral research of the first author, aiming to identify and to discuss the marks in future teachers of the primary years, in relation to math and its teaching. These marks are manifested on the life´s trajectories written on the reflexive diaries. It was chosen the subject area of narratives and the formation of teachers that will school math in the primary years, focussing the discussion, above all, because the authors shows a professional and academic convergence. The data building was given through autobiographical narratives written by a group of students from the 6th semester of Pedagogy course in a public University in São Paulo state. The data analyzis aiming the identification and discussion of the presented marks by the students initiated in the reading of reflexive diaries. The use of the written narrative allowed to delimit the comprehensions of the students who participated in the research towards their own formative trajectory,

[1] Mestre em Educação pela Universidade de Brasília (UnB), Brasília, Distrito Federal, Brasil. Professor Assistente da Universidade do Estado da Bahia (Uneb), Senhor do Bonfim, Bahia, Brasil. Endereço para correspondência: Rua Ray Wesley Herrick, 475, Mont Park, bloco 10, apartamento 402, Jóquei Clube, CEP: 13565-090, São Carlos, São Paulo, Brasil. Endereço eletrônico: amerjun2005@hotmail.com.

[2] Doutora em Educação pela Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), Campinas, São Paulo, Brasil. Professora Associada da Universidade Federal de São Carlos (UFSCar), São Carlos, São Paulo, Brasil. Endereço: Avenida José Bonifácio, 916, apartamento 51, Jardim Flamboyant, CEP: 13091-140, Campinas, São Paulo, Brasil. Endereço eletrônico: carmenpassos.ufscar@gmail.com.

allowing a reflexive movement about their life histories, throwing back, thus, to their professional and personal development. It is important that the formation courses for teachers who will act on primary years and child education considers the place of Math and its importance, also for the alphabetization process, and permits that the teachers of tomorrow recognize themselves as math educators.
Keywords: Teachers Formation. Narratives. Math Teaching.

1 INTRODUÇÃO

Um ponto importante de discussão e que se aproxima das estratégias formativas da disciplina que culminou na escrita deste artigo é, como apresenta também Marcelo Garcia (2009), a necessidade de um processo intencional e planejado de atividades que possam promover uma melhor formação. Acreditamos que essas estratégias precisam considerar as marcas que são trazidas pelos futuros professores, como as de suas histórias de vida, e que muito influenciam todo o processo formativo e a futura prática profissional.

André (2010, p. 178), nessa mesma direção, sinaliza a necessidade de conhecermos os sujeitos em formação, pois, assim, conseguiríamos pensar em “caminhos mais efetivos para alcançar um ensino de qualidade, que se reverta numa aprendizagem significativa para os alunos”. E foi nesse âmbito que pensamos o lugar das narrativas por meio do diário reflexivo, como forma de os licenciandos registrarem suas histórias de vida, permitindo-nos conhecê-los, e manifestarem as marcas que possuem quanto à Matemática e ao seu ensino, possibilitando-nos o planejamento de atividades capazes de promover uma melhor formação. Também, pelo mesmo instrumento, eles mesmos teriam a oportunidade de refletirem sobre o que escreveram, (re)significando suas memórias a partir do momento presente.

As narrativas, escritas e orais, têm sido utilizadas há muito tempo como instrumentos educativos, configurando-se artefatos culturais importantes para a organização do pensamento e da realidade e para a estruturação de aprendizagens (ROLDÃO, 1995). É inevitável, ao abordarmos a temática de narrativas enquanto instrumento para formação de professores, não levarmos em consideração muitos problemas que, embora antigos, mantêm-se bastante atuais, pois se manifestam nos textos dos alunos e ainda influenciam suas futuras práticas profissionais.

Ainda em relação aos problemas destacados anteriormente, vale salientar que eles se caracterizam como construções advindas, muitas vezes, das experiências de vida – nesse caso, incluindo-se as experiências enquanto estudantes da Educação Básica –, e algumas dessas experiências reverberam em problemas de formação matemática, de concepções com relação à Matemática, à educação matemática, à sala de aula e ao espaço escolar. As narrativas, portanto, configuram-se como mecanismo de acesso às histórias de vida dos sujeitos e possibilitador de (re)significação e reflexão dessas. De certa forma, isso nos mostra a necessidade e a importância de pesquisar e discutir essas questões em busca de soluções para muitos dos problemas arrolados.

Este artigo, decorrente de uma investigação de natureza qualitativa e de um recorte da pesquisa de doutoramento[3] do primeiro autor, apresenta a seguinte problemática de pesquisa: *marcas relativas à Matemática e ao seu ensino, deixadas ao longo da trajetória de vida de futuros professores dos anos iniciais, manifestadas e registradas em diários reflexivos, podem influenciar a formação inicial deles?* Objetivamos, portanto, identificar e discutir as marcas de futuros

[3] A investigação no doutoramento se propõe a acompanhar os licenciandos do 6º ao 8º semestre do curso e, se possível, o primeiro ano da docência

professores que ensinarão Matemática nos anos iniciais e entender como e se elas podem influenciar uma futura prática profissional.

A construção de dados se deu a partir de narrativas autobiográficas escritas por um *grupo de alunos*[4] do 6º semestre do curso de Pedagogia de uma Universidade Pública do Estado de São Paulo. Durante um semestre, os estudantes do curso fizeram registros em um diário, que nomeamos "diário reflexivo". Para este trabalho, analisaremos apenas a construção realizada no primeiro dia de aula, pois foi um momento no qual direcionamos a escrita para as questões objetivadas por este recorte de pesquisa.

Neste trabalho, a proposta de construção de narrativas assume uma dupla funcionalidade e foi dessa maneira que a apresentamos aos licenciandos: de formação, para eles, e de instrumento de pesquisa, para nós, pesquisadores. As narrativas produzidas pelos sujeitos participantes que serviram de base para a construção deste artigo foram objeto do trabalho dos pesquisadores com uma disciplina que trata dos fundamentos teóricos e metodológicos do ensino da Matemática, oferecida durante o semestre letivo 2015.2.

No primeiro dia de aula, foi apresentada a proposta de trabalho. Na ocasião, solicitamos aos estudantes que construíssem, de forma escrita, uma narrativa na qual registrassem um pouco de sua história de vida, tendo como direcionadoras algumas questões, sendo elas: i) as trajetórias de vida e a relação com a Matemática e o seu ensino; ii) as marcas dos futuros professores que ensinarão Matemática nos anos iniciais quanto à Matemática e ao seu ensino; iii) sobre a profissão docente e as expectativas quanto ao futuro profissional.

Optaram por participar do trabalho de pesquisa, assinando o termo de consentimento livre e esclarecido, 25 alunos de um total de 30. Para este artigo, faremos a análise da construção realizada pelos presentes no primeiro dia de aula. Acreditamos que seja interessante, futuramente, estabelecer uma relação com os discursos construídos/desconstruídos ao longo da disciplina, uma vez que os diários foram alimentados ao longo de todo o semestre. No entanto, salientamos que esse não é o objetivo deste trabalho, não neste momento.

Quanto à escolha do diário como metodologia para o processo de formação inicial e instrumento de coleta de dados para a pesquisa, levaram-se em consideração, sobretudo, as ideias de Oliveira (2011, p. 292), segundo a qual a narrativa permite "o acesso ao modo como cada pessoa se forma, como a sua subjetividade é produzida, permite-nos conhecer a singularidade da sua história, o modo singular como age, reage e interage com os seus contextos". A escrita, ainda segundo a autora, proporciona interação e significação, princípio importante da formação de professores que possibilita o questionamento de suas próprias crenças e práticas institucionais. "Nesta perspectiva, a trajetória de vida não determina, mas representa uma importante condição do contexto no qual o futuro profissional retira o material para a construção da sua maneira pessoal de lidar com a profissão" (OLIVEIRA, 2011, p. 292).

2 A FORMAÇÃO DE PROFESSORES QUE ENSINARÃO MATEMÁTICA E AS NARRATIVAS: DIÁLOGO POSSÍVEL

Na busca por entender os caminhos de tornar-se professor, muitas pesquisas se dedicam a investigar os cursos de formação inicial. Segundo Flores (2001) e Flores e Day (2006), este caminho é construído por um processo complexo, idiossincrático e multidimensional. Nesse

[4]O grupo de alunos que fazem parte dessa pesquisa aceitou participar da mesma, assinando o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE).

sentido, acreditamos que o caminho a que nos referimos é complexo e multidimensional, pelos inúmeros elementos, sujeitos e espaços que influenciam essa formação, e idiossincrático, pelas questões subjetivas e particulares de cada sujeito.

Ainda em relação ao processo de formação, Tardif (2000, p. 15) salienta que "[...] um professor tem uma história de vida, é um ator social, tem emoções, um corpo, poderes, uma personalidade, uma cultura, ou mesmo culturas, e seus pensamentos e ações carregam as marcas do contexto nos quais se inserem". São esses, para nós, alguns elementos que marcam as questões complexas, idiossincráticas e multidimensionais.

Os futuros professores possuem um entendimento sobre o que é ser professor e como ensinar Matemática, que foi construído ao longo de sua trajetória escolar, como sinalizam também Nacarato, Mengali e Passos (2009). Esse conhecimento prévio impacta o processo de formação e precisa ser considerado pelos formadores de professores, uma vez que são eles que pensarão em ações para (re)significar as marcas que esse saber prévio representa para os alunos em formação.

Muitos licenciandos, como aponta Loughran (2009), esperam que os cursos de formação inicial apresentem receitas de como devem ensinar, esquecendo-se de particularidades que são importantes no processo educativo. Mesmo sabendo que o caminho não é tão óbvio assim, é importante que os formadores de professores aproximem os licenciandos do "chão da sala de aula" para que eles (re)signifiquem as teorias e estudos realizados durante a graduação. Sabemos que, para isso, os formadores precisam conhecer a realidade do ambiente escolar. Daí também percebermos que é preciso um cuidado na formação desses formadores.

Os alunos desejam fórmulas de ensino, um objeto almejado. No entanto, é importante que eles conheçam a escola de perto, objeto necessário. Daí nos perguntamos: Como o segundo objeto desconstrói o primeiro?

Em investigação realizada por Flores e Day (2006), observou-se que muitos professores desacreditam nas teorias estudadas durante a graduação e as consideram sem aplicação. No entanto, cabe destacar, ainda segundo Flores (2004, p. 128), que o ensino não se refere apenas à "aquisição de destrezas e de conhecimentos técnicos", mas também a um "processo reflexivo e crítico (pessoal) sobre o que significa ser professor e sobre os propósitos e valores implícitos nas próprias ações e nas instituições em que se trabalha".

Muitos licenciandos[5] ou professores em início de carreira, quando diante de problemáticas de sala de aula que consideram discrepantes ou desligadas do que estão estudando - no caso dos licenciandos - ou estudaram na graduação, recorrem ao período de experiência escolar. As vivências e marcas que tiveram quando alunos da Educação Básica passam a ser revisitadas em suas escolhas de ação pedagógica quando em estágio, por exemplo.

Não podemos esquecer que, aos professores que ensinarão nos anos iniciais do Ensino Fundamental, soma-se uma questão importante: o ensino de Matemática. Dessa particularidade que chamamos de *ensinar Matemática nos anos iniciais,* surgem outros problemas que se somam aos que vimos até aqui. Entre eles, citamos o medo que se transforma em repulsa dessa ciência [dois sentimentos que parecem caminhar juntos], algo que repercute no ensino e, posteriormente, na aprendizagem das crianças.

A Matemática, no curso de Pedagogia, apresenta-se enquanto ciência, enquanto linguagem a partir da qual é possível alfabetizar e enquanto disciplina escolar historicamente

[5] Em relação aos licenciandos, referimo-nos às experiências de estágio.

constituída. É, portanto, um objeto de conhecimento que abarca todas essas concepções. Nesse caso, levando em consideração o anteriormente exposto, cabe considerar essas questões ao longo do texto, uma vez que apresento a Matemática nessas diferentes perspectivas.

Ainda em relação às especificidades do ensino de Matemática, é importante destacar que cabe ao futuro professor dos anos iniciais compreender as questões referentes à alfabetização matemática. Para muitos, esse termo não é tão usual, uma vez que falar em alfabetização remete, quase sempre, à ideia de aquisição da leitura e da escrita em língua materna, esquecendo-se do processo de matematizar.

Há a necessidade de repensar a construção da ideia de alfabetização, sobretudo, pelo fato de as crianças já conviverem com as ideias matemáticas antes do ingresso na escola; e essa articulação com a língua materna pode possibilitar uma maior aproximação e familiaridade com ela. Dessa forma, evitar-se-ão, possivelmente, marcas geradas pela não relação estabelecida com as situações cotidianas, por exemplo.

Segundo Machado (1990, p. 15), seguir o processo de alfabetização, sem dar a devida atenção à Matemática, é como se a "alfabetização não se tivesse completada". "Ser alfabetizado em Matemática, então, é entender o que se lê e escrever o que se entende a respeito das primeiras noções de aritmética, geometria e lógica" (DANYLUK, 1988, p. 58). Definimos, portanto, que alfabetização matemática é a atividade de ler e compreender Matemática, considerando sua linguagem particular.

"Como eu vou ensinar algo de que não gosto"? "Como farei os meus alunos aprenderem uma ciência que eu não conheço"? Esses são questionamentos feitos, com frequência, por muitos professores em formação; já foram objeto de estudo de inúmeras pesquisas e continuam sendo bastante importantes, sobretudo pelo fato de muitos professores que ensinarão Matemática ainda não se reconhecerem enquanto educadores matemáticos.

Os questionamentos expostos anteriormente expressam uma relação com as vivências e as marcas originadas de experiências anteriores à formação inicial, mas que repercutem ao longo da trajetória de vida de cada sujeito. Dentro dos cursos de Pedagogia, por exemplo, percebemos que essas impressões são comuns e que as disciplinas destinadas às discussões da Matemática e de seu ensino são ínfimas.

Alguns cursos de formação inicial apresentam carga-horária e número de disciplinas insuficientes para o trabalho com a Matemática e seu ensino, como sinaliza Gatti (2010). Em sua maioria, os cursos apresentam uma única disciplina que trata de fundamentos teóricos e metodológicos do ensino da Matemática, com carga horária de 60 horas.

> Um grande número de ementas registra frases genéricas, não permitindo identificar conteúdos específicos. Há instituições que propõem o estudo dos conteúdos de ensino associados às metodologias, mas, ainda assim, de forma panorâmica e pouco aprofundada. Então, mesmo no conjunto de 28,9% de disciplinas que podem ser classificadas como voltadas à formação profissional específica, o que sugerem as ementas é que esta formação é feita de forma ainda muito insuficiente, pelo grande desequilíbrio entre teorias e práticas, em favor apenas das teorizações mais abstratas (GATTI, 2010, p. 1370).

Muitos concebem a Matemática como uma ciência composta de conteúdos "fixos e seu estado pronto e acabado" (D'AMBROSIO, 1993, p. 35). Freitas, Nacarato et al. (2005, p. 89) apontam que o futuro professor deve ser "desafiado a aprender a ensinar de modo diferente do que lhe foi ensinado". Como (re)significar algumas marcas se não há espaço nos cursos para que isso ocorra? Como diminuir a distância, percebida pelos futuros professores, entre teoria e prática?

Gatti (2010) destaca como uma das fragilidades dos cursos de Pedagogia a desarticulação entre teoria e prática. Nessa mesma direção, Flores (2010) também aponta que uma das questões que tem sido considerada crítica na formação inicial de professores é o dual teoria e prática. Korthagen (2009 *apud* FLORES, 2010), nesse sentido, defende uma abordagem realista, construída a partir das experiências de ensino dos futuros docentes, na formação de professores, articulando essas duas questões.

Korthagen (2009 *apud* FLORES, 2010) referencia o papel sistemático da reflexão na aprendizagem, algo que deve acontecer no contexto da formação inicial. Ainda segundo o autor, “a reflexão ajuda a tomar consciência dos aspectos inconscientes do ensino no sentido de tornar os alunos, futuros professores, mais sensíveis aos aspectos mais importantes das situações educativas, aquilo que o autor designa de *phronesis”* (KORTHAGEN, 2009, *apud* FLORES, 2010, p. 185).

É nesse processo de reflexão e de tomada de consciência sobre alguns aspectos que apresentamos as narrativas como importantes ferramentas para a formação docente. As histórias de vida[6] dos sujeitos permitem que eles vejam e signifiquem a carreira de diversas formas. Para Demartini (2008, p. 46), “o ato de escrever, mesmo que quase mecanicamente, implica geralmente em pensar sobre o que se escreve”. Destarte, Nóvoa (2007) aponta que cada percurso educativo e o modo como o adulto o viveu são importantes quando se pretende analisar a sua formação.

Segundo Josso (2010), a escrita narrativa permite aos sujeitos contato com suas lembranças e “recordações-referências”, fazendo-os revelar as aprendizagens vivenciadas em suas vidas. A escrita narrativa tem efeito formador em si mesma, pois coloca o sujeito que a produz em espaço de reflexão e de tomada de consciência de sua própria existência e de conhecimentos que foram internalizados ao longo da vida.

> Esses instrumentos passam a exercer um forte papel de mediador na formação e no desenvolvimento profissional do professor, servindo de elemento de reflexão para as práticas futuras dos licenciandos, ajudando a minimizar a angústia que se estabelece nos profissionais do ensino, sobretudo, nos primeiros anos da docência. Nesse sentido, é inegável o papel autoformador desses instrumentos pelo fato dos professores produzirem conhecimento e compartilhar o conhecimento produzido por outros grupos (OLIVEIRA, 2011, p. 292).

A utilização da escrita como recurso na formação de professores, como sinaliza Oliveira (2011, p. 291): “se dá por meio de diferentes tipos de registro, tais como as narrativas de professores, as autobiografias ou histórias de vida escolar, trabalho etnográfico da sala de aula e casos de ensino e explicitação e reflexão sobre o que chamamos de episódios marcantes”.

Essas situações, ainda segundo a autora, envolvem carga emotiva intensa, trazendo à memória as emoções, positivas ou negativas, para o sujeito que as vivenciou, e significam, algumas vezes, momentos importantes para mudanças e transformações, por exemplo. Ainda nessa direção, Oliveira (2011, p. 290) destaca que:

[6] As ideias de narrativa e história de vida aparecem como sinônimos intencionalmente. Indicamos a história de vida como um modo de narrar.

> a narrativa potencializa um processo de reflexão pedagógica que permite aos seus autores compreender causas e consequências de suas ações ou de acontecimentos, circunstâncias etc. de um passado remoto ou recente e, se for o caso, criar novas estratégias a partir de um processo de reflexão, ação e nova reflexão.

A escrita, tendo em vista o seu caráter de interpretação e produção, assume papel central em qualquer processo educativo, possibilitando ao sujeito da ação formativa assumir o papel de protagonista ao criar/produzir textos em vez de apenas consumi-los (OLIVEIRA, 2011).

3 AS NARRATIVAS DOS FUTUROS PROFESSORES QUE ENSINARÃO MATEMÁTICA NOS ANOS INICIAIS

A análise dos dados para identificação e discussão das marcas apresentadas pelos licenciandos partiu da leitura dos diários reflexivos. As vivências possibilitadas pelas estratégias formativas durante a disciplina permitiram aos licenciandos aprendizagens da docência e aproximação com a realidade de sala de aula, o que chamamos anteriormente de “chão da sala de aula”.

Ao longo do texto, fizemos alguns questionamentos que são comuns de serem ouvidos. Tentaremos abordá-los, como também as impressões positivas apresentadas, uma vez que foram preocupações/impressões manifestadas pelos futuros participantes em suas escritas narrativas e representam marcas deles quanto à Matemática e ao seu ensino. Percebe-se, nas narrativas, que os licenciandos assumem o papel de autores da própria história de vida e, ao refletirem sobre si, durante a escrita, refletem, também, sobre acontecimentos marcantes de forma não linear.

Alguns estudantes relacionam os motivos de suas marcas com a Matemática, com fatores, muitas vezes, que extrapolam os espaços escolares. Em alguns excertos dos diários reflexivos, como os apresentados abaixo, fica evidente a relação estabelecida com os espaços de vivências familiares.

> Meu pai era matemático. Minha relação com a Matemática sempre foi bem estável (L10)[7].
>
> Por ser filha de comerciante, sempre tive uma boa relação com a Matemática (L4).

Alguns outros estudantes, que também apresentam marcas, relacionam o gostar de Matemática aos bons professores que tiveram.

> A professora do terceiro ano colocava música clássica enquanto fazíamos exercícios. Isso nos fazia ficar mais concentrada (L5).
>
> Ele quando ensinava soava como uma linda poesia (L1).
>
> É uma lembrança boa, [ele] sempre bem humorado, criava músicas [...] (L8).
>
> Me recordo que da oitava série em diante minha professora de Matemática tornava as aulas engraçadas e ao mesmo tempo estimulantes (L12).

Observam-se, registradas nos diários, estratégias lúdicas sendo usadas pelos professores para auxiliar no processo de construção do conhecimento matemático. Nesse caso, cabe destacar que uma aula ludicamente inspirada não é aquela que traz um jogo ou uma brincadeira necessariamente, mas a que traz em si as características do brincar (FORTUNA, 2001). Apresentar a Matemática e fazer com que as crianças percebam-na de forma prazerosa e

[7] Preocupados com a preservação da identidade dos sujeitos de pesquisa, optamos por identificá-los por L (licenciando) e por um número que variou, neste caso, de 1 a 19 (quantidade de sujeitos participantes da amostra).

articulada com as situações cotidianas pode contribuir, como vimos aqui, para construção de marcas no estudante.

Isso nos leva a refletir outro ponto muito presente nas construções narrativas dos licenciandos: o caráter subjetivo e individual da aprendizagem. Cada um, a partir do registro de suas experiências escolares, deixa evidentes as metodologias e os instrumentos que marcaram sua aprendizagem. Portanto, é preciso respeitar as individualidades dos alunos, uma vez que apresentam formas e tempos diferentes de aprender e essas são questões que precisam ser trabalhadas, também, durante os cursos de formação inicial. Na escrita de L4, por exemplo, percebemos a importância que o instrumento contador teve em seu processo de aprendizagem matemática.

> No início de minha escolarização o primeiro contato que tive com a Matemática ocorreu de uma forma bem prazerosa, pois ficava fascinada com as cores do 'contador'. [...] Matemática para mim é como desvendar um enigma (L14).

Alguns licenciandos, mesmo no primeiro dia de construção dos diários, foram levados a refletir sobre essa individualidade e, principalmente, percebendo-a como característica importante para a prática profissional. Isso fica claro, por exemplo, na escrita de L3, quando confidencia ser "necessário levar em conta, enquanto professores, a individualidade e propor diferentes experiências no intuito de atingir a aprendizagem". Em situações em que os futuros professores se queixam de não terem tido suas individualidades respeitadas, há um interesse em fazer diferente quando findarem o curso ou em suas práticas de estágio. Ainda em busca desse respeito às individualidades, muitas narrativas revelam marcas, também, da importância das situações-problema e da contextualização do que está sendo estudado com situações do dia a dia, aproximando a Matemática das vivências cotidianas dos estudantes.

> Os desafios propostos pelas situações problema sempre me deixaram disposta a [buscar maneiras de] como resolvê-los. [...] Minha professora da primeira série foi sempre importante a partir do momento que fazia ligação entre situações reais que utilizaríamos as operações (L15).

Outros professores, com uso de diferentes ferramentas, como o giz e a lousa, conseguem contribuir para o processo de aprendizagem matemática do sujeito. Isso nos leva a refletir sobre: não são as ferramentas, por si só, responsáveis por essa aprendizagem, é preciso, sobretudo, que o professor domine o conteúdo[8] a ser ensinado para assim circular mais tranquilamente pelo processo de ensino.

> Durante toda a minha vida passei por diversos professores, todos muito bons e dedicados, mas sempre com seus materiais de sempre: giz e lousa. Mas foi devido a esses professores que descobri a minha paixão por números e assim comecei a participar de olimpíadas, dar aulas para amigos e enfim, até ingressar no curso de Matemática[9] (L18).

No entanto, outros fatores marcaram os futuros professores durante sua vida escolar. Percebemos que outras características também são importantes no processo de ensino e

[8] O termo "domínio de conteúdo", que aparece mais de uma vez em nossas argumentações, corrobora a perspectiva da educação matemática, que, historicamente, tem combatido essa visão de que o cerne da formação do professor que ensina matemática é a própria matemática acadêmica. Pensamos em uma formação matemática do professor que não se identifique a um domínio da matemática acadêmica ou dos significados acadêmicos para matemática;

[9] Curso realizado antes do ingresso na Pedagogia.

aprendizagem. Nos excertos abaixo, evidenciamos a paciência, a afetividade e a descontração, por exemplo.

> [...] Ele não tinha a menor paciência (L1).
>
> [...] Professora Julieta[10], que me marcou pela clareza na explicação somada ao afeto com o qual me tratava (L2).
>
> [...] descontraída, sempre explicando quantas vezes fossem necessárias o que não havia entendido (L9).

Outros licenciandos, diferentemente dos já mencionados, que apresentam marcas do seu contato com a Matemática durante a sua vida escolar, registram em suas narrativas detalhes de sua relação. Alguns destacam que a Matemática, para eles, sempre foi um "bicho de sete cabeças" (L7) e outros, como o L17, evidenciam o medo e as dificuldades em aprender, percebendo-a como complicada e difícil.

Alguns licenciandos ainda apresentam esses mesmos medos da Matemática. Muitos deles tiveram essas marcas construídas em contato que tiveram com professores de metodologias extremamente tradicionais, mas não só por esse motivo, e que não valorizavam suas diferentes formas de matematizar. Mesmo após alguns anos, ainda enxergam nas escolas atualmente características de quando eram alunos. O Licenciando 18 destaca que vê as escolas muito presas a métodos tradicionais de ensino de Matemática e que percebeu isso em trabalhos que já desenvolveu durante o curso e também em meio aos estágios realizados. Assim como sinaliza L11, no excerto abaixo, percebemos que uma série de fatores, incluindo os de ordem do sistema de educação, pode contribuir para marcas:

> Na minha carreira escolar tive muitos pontos negativos, sendo eles: a falta de professores na rede pública; excesso de alunos em sala, dificultando assim o entendimento da matéria; falta de vontade do professor substituto em passar o conteúdo; cópia excessiva de exercício de livros didáticos sem entendimento e explicação dos mesmos, deixando assim uma lacuna na aprendizagem Matemática durante diversas etapas da vida escolar (L11).

Boa parte reconhece, assim como o licenciando 17, que a relação com a Matemática vai influenciar sua prática como docente. Ao completar que "só de pensar tenho medo de não conseguir ensinar Matemática", revela a insegurança em trabalhar algo que ele, além de não gostar, não domina. Eles sabem que "[...] para se ensinar Matemática nos anos iniciais e na educação infantil é preciso, primeiramente, ter noção do que é Matemática e como transmitir isso aos alunos" (L11) e pretendem, como sinalizou o licenciando L6, "fazer o oposto da minha educação inicial".

> [...] para ensinar Matemática um professor deve dominar o conteúdo e saber diferentes formas para construir suas lógicas, a fim de apontar caminhos diversos aos alunos (L13).

Não é nosso objetivo, em nenhum momento, hierarquizar os conhecimentos necessários à docência e fazer figurar, em lugar de destaque, os conhecimentos de conteúdo. Sabemos e reconhecemos a importância da articulação entre os diferentes conhecimentos. Trazemos essa questão do conteúdo matemático, principalmente, pela dificuldade que os licenciandos apresentam e registraram nos diários.

---

[10] Nome fictício criado para preservar a identidade do licenciando participante da pesquisa.

Tendo em vista que os sujeitos da pesquisa realizaram o estágio de alfabetização no semestre anterior à produção de dados para este trabalho[11], decidimos pedir aos estudantes que refletissem sobre a alfabetização matemática e a conceituassem. De todos os diários, apenas alguns o fizeram.

> É saber onde utiliza Matemática (L4).
> Alfabetização Matemática é reconhecer os símbolos, números, etc. (L7).
> Alfabetização Matemática é o reconhecimento dos algoritmos e operações (L9).
> Alfabetização Matemática trata do ensino dos números, dos cálculos. (L8).

Em três das respostas apresentadas, observa-se uma lógica que não pensa uma prática de alfabetizar letrando. O fato de a maioria dos estudantes se omitirem a conceituar já sinaliza uma falta de domínio do termo. Isso, para nós, pareceu preocupante, principalmente pelo fato de os licenciandos terem ido para um estágio de alfabetização sem a realização da disciplina que trata dos fundamentos teóricos e metodológicos do ensino de Matemática. Como os licenciandos pensaram o processo de alfabetização matemática, em suas práticas de estágio, se alguns não sabem do que isso se trata e nem percebem as suas particularidades?

Há estudantes que deixaram evidente que o ensino de Matemática é um "dom", como L1. Nesse caso, é preciso oportunizar a esses estudantes, dentro das vivências do curso, a possibilidade de (re)significar essa ideia, impedindo, assim, a repetição e o reforço da aceitação como normais das dificuldades que os alunos apresentam, uma vez que as impressões apresentadas remetem a uma aprendizagem da Matemática para poucos "munidos desse dom". Alguns alunos, ainda no que diz respeito ao ensino da Matemática, sinalizaram que o curso de Pedagogia

> Até o momento não tem contribuído para o ensino de Matemática. Espero que tal disciplina contribua para o tal entendimento e preencha a lacuna deixada no Ensino Fundamental e médio, que me fizeram não gostar de tal matéria (L11).
>
> O curso de Pedagogia não está contribuindo para que nós, como alunos, possamos aprender para podermos ensinar (L17).

É preciso que os cursos repensem o lugar da Matemática e, principalmente, o seu ensino. É inconcebível um currículo que não oportuniza a (re)significação dessas marcas deixadas. Muitos cursos de Pedagogia, como sinaliza Gatti (2010), apresentam ementa rasa, do ponto de vista teórico, e carga horária insuficiente. O curso dos licenciandos sujeitos da pesquisa, por exemplo, tem um estágio supervisionado antes da disciplina que trata da Matemática e de seu ensino. Como alguns alunos, que apresentaram marcas negativas nesta investigação, problematizaram noções matemáticas para as crianças da educação infantil?

Quando em situação dessa natureza, é comum os professores em início de carreira ou em formação, no caso de estarem em estágio, recorrerem às práticas que tiveram quando alunos para figurar em sua prática profissional. Foi o que fez o licenciando 19: "No estágio que desenvolvi este ano, o ensino da tabuada me chamou bastante atenção e, talvez, ainda não sei, pois este foi o primeiro estágio. Ainda não vi outras formas de se trabalhar [...]".

No entanto, normalmente, os futuros professores apresentam-se abertos para novas práticas de ensino e, principalmente, para ensinarem de forma diferente daquela segundo a qual foram ensinados, como já pontuamos anteriormente. Isso fica evidente nos registros dos

[11] Por eles terem realizado o estágio no semestre anterior e vivenciado práticas de alfabetização, provavelmente quando estudantes da educação básica, decidimos entender o que representariam sobre.

licenciandos L7 e L6, quando dizem, respectivamente, "tento ser otimista e pensar que minha prática docente não terá relação com o que tive dentro da sala de aula como aluna" e "fazer diferente de como me ensinaram.[...] Alegre, comprometido com o aluno, e [que] saiba respeitar os limites de cada um".

4 ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

O uso da escrita narrativa permitiu delimitar as compreensões dos estudantes participantes da pesquisa a respeito de seu próprio percurso formativo, possibilitando-lhes um movimento de reflexão sobre suas histórias de vida, o que, provavelmente, poderá repercutirem seu desenvolvimento, tanto profissional como pessoal.

Um dos problemas da impossibilidade de se fazer esse ensino tão refletido, como sonhamos, é exatamente a pouca carga horária destinada às disciplinas de Matemática e ao seu ensino nos cursos de Pedagogia. Muitos cursos não possibilitam que os futuros professores (re)signifiquem as marcas que são construídas ao longo de sua trajetória escolar e, dessa forma, fortalecem, muitas vezes, sua reprodução no futuro ambiente de trabalho.

É importante que os cursos de formação inicial de professores que atuarão nos anos iniciais e educação infantil repensem o lugar da Matemática e a sua importância, também, para o processo de alfabetização, e possibilitem que os futuros professores se reconheçam enquanto educadores matemáticos.

REFERÊNCIAS

ANDRÉ, M. Formação de professores: a constituição de um campo de estudos. **Educação**, Porto Alegre, v. 33, n. 3, p. 174-181, set./dez. 2010.

D'AMBROSIO, B. S. **Formação de professores de Matemática para o século XXI:** o grande desafio. **Pro-Posições**, v. 4, n. 1, mar. 1993.

DANYLUK, O. S. **Um estudo sobre o significado da alfabetização matemática**. 1988. 364 p. Dissertação (Mestrado)- IGCE, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" –
UNESP, Rio Claro, 1988.

DEMARTINI, Z. de B. F. Das histórias de vida às histórias de formação. In: SOUZA, E. C. de.; MIGNOT, A. C. V. (Org.) **História de vida e formação de professores**. Rio de Janeiro: Quartet: FAPERJ, 2008. p. 39-64.

FLORES, M. A. Person and context in becoming a new teacher. **Journal of Education for Teaching**, v. 27, n. 2, p. 135-148, 2001.

FLORES, M. A. Dilemas e desafios na formação de professores. In: MORAES, M. C.; PACHECO, J. A.; EVANGELISTA, M. O. (Org.). **Formação de professores**: perspectivas educacionais e curriculares. Porto: Porto Editora, 2004. p.127-160.

FLORES, M. A.; DAY, C. Contexts which shape and reshape new teachers' identities: a multi-perspective study. **Teaching and Teacher Education**, v. 22, n. 2, p. 219-232, 2006.

FLORES, M. A. Algumas reflexões em torno da formação inicial de professores. **Educação**, Porto Alegre, v. 33, n. 3, p. 182-188, set./dez. 2010.

FORTUNA, T. R. Formando professores na universidade para brincar. In: SANTOS, S. M. P (Org.). **A ludicidade como ciência.** Petrópolis, RJ: Vozes, 2001.

FREITAS, M. T. M; NACARATO, A. M. et al. O desafio de ser professor de matemática hoje no Brasil. In: FIORENTINI, D; NACARATO, A. M. (Org.) **Cultura, formação e desenvolvimento profissional de professores que ensinam matemática**. São Paulo: Musa Editora, 2005.

GATTI, B. Formação de professores no Brasil: características e problema. **Educ. Soc.**, Campinas, v. 31, n. 113, p. 1355-1379, out./ dez. 2010.

JOSSO, M. C. Da formação do sujeito... Ao sujeito da formação. In: NÓVOA, A.; FINGER, M. (Org.). **O método (auto)biográfico e a formação**. Natal, RN: EDUFRN; São Paulo: Paulus, 2010. p. 59-79.

LOUGHRAN, J. A construção do conhecimento e o aprender a ensinar sobre o ensino. In: FLORES, M. A; VEIGA SIMÃO, A. M. (Org.). **Aprendizagem e desenvolvimento profissional de professores:** contextos e perspectivas. Mangualde: Edições Pedago, 2009. p. 17-37.

NACARATO, A.; MENGALI, B.; PASSOS, C. L. B. **A matemática nos anos iniciais do ensino fundamental**. Belo Horizonte: Autêntica, 2009. (Tendências em educação matemática).

MACHADO, N. J. **Matemática e língua materna:** análise de uma impregnação mútua. São Paulo: Cortez, 1990.

MARCELO GARCIA, C. Desenvolvimento profissional: passado e futuro. **Sísifo - Revista das Ciências da Educação**, n. 08, p. 7-22, jan./abr. 2009.

NACARATO, A. M.; MENGALI, B. L. S.; PASSOS, C. L. B. **A matemática nos anos iniciais do ensino fundamental**. Belo Horizonte: Autêntica, 2009. (Tendências em educação matemática).

NÓVOA, A. Os professores e as histórias de suas vidas. In: NÓVOA, A. (Org.). **Vidas de professores**. 2. ed. Porto: Porto Editora, 2007. p. 11-30.

OLIVEIRA, R. M. M. A. Narrativas: contribuições para a formação de professores, para as práticas pedagógicas e para a pesquisa em educação. **Rev. Educ. Públ. Cuiabá**, v. 20. n. 43. p. 289-305. maio/ago. 2011.

ROLDÃO, M. do C. As histórias em educação: a função mediática da narrativa. **Ensinus**, v. 3, p. 25-28, 1995.

TARDIF, M. Saberes profissionais dos professores e conhecimentos universitários: elementos para uma epistemologia da prática profissional dos professores e suas consequências em relação à formação para o magistério. **Revista Brasileira de Educação**, Campinas, ANPED – Autores Associados, n. 13, p. 05-21, jan./abr. 2000.

AS RELAÇÕES COM O SABER ESTABELECIDAS NA AÇÃO DO PROFESSOR EM SALA DE AULA: INVESTIGAÇÕES REALIZADAS COM O USO DA MATRIZ 3X3 ENTRE OS ANOS DE 2011 A 2014

THE RELATION TO KNOWLEDGE ESTABLISHED IN ACTION OF TEACHER IN THE CLASSROOM: INVESTIGATIONS CONDUCTED WITH THE USE OF 3X3 MATRIX AMONG THE YEARS 2011-2014

CARVALHO, Diego Fogaça[1]
LARGO, Vanessa[2]

RESUMO

As relações com o saber têm sido alvo de muitas pesquisas, especificamente as estabelecidas pelos docentes em sua prática profissional. Arruda, Lima e Passos (2011), com base nos estudos de Tardif (2002), Gauthier (2006), Charlot (2001) e Chevallard (2005), apresentam um referencial teórico-metodológico para a análise da ação do professor em sala de aula, a Matriz 3x3. Por meio desse instrumento, é possível analisar as relações estabelecidas com o conteúdo, com o ensino e com a aprendizagem discente, em suas três dimensões, epistêmica, pessoal e social. Neste artigo, tem-se por objetivo descrever as maneiras como os diferentes pesquisadores de um grupo de pesquisa se valeram dessa elaboração teórica em suas teses de doutoramento, enfatizando as adaptações realizadas em função dos problemas e contexto das pesquisas. A organização e o refinamento das informações contidas nesta pesquisa têm como aporte metodológico a Análise Textual Discursiva, de Moraes e Galiazzi (2007). Em algumas das teses investigadas, observa-se o foco na compreensão da aplicabilidade da matriz, ou seja, o instrumento foi utilizado com o objetivo de conhecer suas limitações e, em outras, houve reformulações do instrumento e aprofundamento das ideias relativas à matriz, que de *gestão das relações com o saber* passou a ser considerada como a matriz das relações estabelecidas com o saber.

Palavras-chave: Relação com o saber. Matriz 3x3. Formação de Professores. Ação docente.

ABSTRACT

Relations with the knowledge have been the subject of much research, specifically established by the teachers in their professional practice. Arruda, Lima and Passos (2011), based on studies of Tardif (2002), Gauthier (2006), Charlot (2001) and Chevallard (2005) present a theoretical and methodological framework for teacher action analysis in classroom the 3x3 Matrix. Through this tool, you can analyze the relationships established with the content, the teaching and the student learning in its three dimensions, epistemic, personal and social. In this article, we have the objective to describe the ways in which different researchers of a research group made use of this theoretical elaboration in his doctoral thesis, emphasizing the adjustments made in light of the problems and the context of research. The organization and refinement of the information contained in this research have the methodological approach to textual analysis Discursive, de Moraes and Galiazzi (2007). In some of the investigated theses, there is focus on understanding the applicability of the matrix, in other words, the instrument was used in order to know their limitations and, in others, there were reformulations of the instrument and further development of ideas on the matrix,

[1] Doutor em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL), Londrina, Paraná, Brasil. Pós-doutorando em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL), Londrina, Paraná, Brasil. Endereço para correspondência: Rua Senador Souza Naves, 119, apto 2103, Centro, CEP: 86010-160, Londrina, Paraná, Brasil. Endereço eletrônico: diegofocarva@gmail.com.

[2] Doutora em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL), Londrina, Paraná, Brasil. Professora Adjunta da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), Toledo, Paraná, Brasil. Endereço para correspondência: Rua Cristo Rei, 19, Vila Becker, CEP: 85902-490, Toledo, Paraná, Brasil. Endereço eletrônico: vanessalargo@utfpr.edu.br.

management of relations with the knowledge came to be regarded as the matrix of the relationships established with knowledge.
Keywords: Relation to knowledge. Matrix 3x3. Teacher formation. Teaching activities.

1 INTRODUÇÃO

Os saberes são produzidos pelos professores ao longo de suas vidas, incluindo os anos em que ocuparam os bancos escolares na condição de alunos da Educação Básica. Os saberes docentes são plurais e podem ser compreendidos por meio de diferentes tipologias. Há aqueles que são produzidos na universidade – disciplinares, curriculares e da formação profissional – e os produzidos no trabalho – experienciais. Para Tardif (2001), os saberes experienciais são o *cerne* da profissão do professor.

Fiorentini e Castro (2003, p. 127) apresentam o conceito de saber docente como um saber reflexivo. Refletir "permite-nos avançar por olhar o mundo escolar em sua dinâmica e complexidade". E entendem que, sem a ação de reflexão, o professor mecaniza a sua prática, e tanto a formação do professor como a produção de saberes não ocorrem de maneira efetiva. Concorda-se com essa ideia e considera-se que ensinar e aprender é entrar em relação, e que essas relações com o saber são estabelecidas na ação docente e são passíveis de serem analisadas por meio da utilização da Matriz 3x3, de Arruda, Lima e Passos (2011).

Esse instrumento possibilita a análise da relação com o saber matemático, com o ensinar e com o aprender, nas suas três dimensões, epistêmica, pessoal e social, e está sendo utilizado no desenvolvimento de teses e dissertações que têm como enfoque as relações com o saber. Nesse sentido, propõe-se uma questão de investigação: *Como as teses utilizam o referencial teórico-metodológico de Arruda, Lima e Passos – a Matriz 3x3?*

Com base em fragmentos da Análise Textual Discursiva (MORAES; GALIAZZI, 2007), foi elaborada uma estruturação metodológica com o objetivo de preparar o material para a aplicação dos procedimentos analíticos. Optou-se por focar somente as teses de doutoramento, e uma atenção especial incidiu sobre a maneira como a Matriz 3x3 foi utilizada pelos pesquisadores. Na sequência são apresentadas uma revisão teórica a respeito dos saberes docentes e a relação com o saber, uma descrição da maneira como a Matriz 3x3 foi elaborada e a análise dos dados. Finaliza-se este artigo com as considerações finais em que se pode elucidar que um primeiro ciclo de uso da matriz no grupo foi concluído e que as evoluções continuam em função de outros contextos e problemas de pesquisa cada vez mais complexos no âmbito das áreas de Ensino de Ciências e Educação e Matemática.

2 O SABER DOCENTE SEGUNDO MAURICE TARDIF E DA RELAÇÃO COM O SABER DE ACORDO COM BERNARD CHARLOT

Segundo Tardif (2002), o saber docente é um saber plural e é produzido pelo professor em sua profissão. Plural por ser formado por diferentes saberes: disciplinares – da Matemática, como exemplo; curriculares – apresentam-se como objetivos, métodos e conteúdos, que os professores precisam aprender a aplicar; profissionais – aqueles transmitidos pelas universidades ou instituições formadoras; e experienciais – desenvolvidos pelos próprios professores na prática da profissão.

Para Tardif (2002), o profissional integra esses diferentes saberes na sua profissão, e os saberes experienciais são formados por todos os demais, e ainda, o autor ressalta que o professor *'ideal'* é aquele que consegue articulá-los na sua atuação.

Em relação aos saberes mobilizados pelos professores em sua prática, observa-se a existência de uma hierarquização em que a valoração do saber ocorre em função da dificuldade que apresenta em relação à prática. Há uma tendência dos professores em preferir os saberes experienciais, produzidos na prática docente pela lógica do fazer, em vez dos saberes produzidos pela universidade que segue a lógica da pesquisa (CHARLOT, 2005). Complementando, Tardif (2002, p. 51) exemplifica: "saber reger uma sala de aula é mais importante do que conhecer os mecanismos da secretaria de educação; saber estabelecer uma relação com alunos é mais importante do que saber estabelecer uma relação com os especialistas".

Com base nessas ideias, Fiorentini e Castro (2003) destacam como fundamental ao professor a ação da reflexão, para que assim possa problematizar, mobilizar e ressignificar seus saberes na prática cotidiana.

Mas, o que é o saber? Saber é o discurso, o argumento, é quando o professor sabe explicar por que faz as coisas de determinada maneira, propondo maneiras para justificar suas atitudes, e essas, por sua vez, podem ser criticadas, discutidas e revisadas (TARDIF, 2002).

Pode-se afirmar que a relação docente com a própria prática é estruturada por dois condicionantes, *transmissão da matéria* – diz respeito ao ensino do conteúdo e à sua aprendizagem pelo aluno; e a *gestão das interações* com os alunos – como o aluno aprende e se está motivado para aprender. Refere-se também à manutenção da disciplina de sala de aula.

Ensinar é entrar em relação com o outro, e, para que o aluno aprenda, ele precisa aceitar envolver-se nesse processo de aprendizagem. E motivá-lo consiste em mediações complexas de interação humana, como a persuasão, a recompensa, a punição, entre outras.

Para Charlot (2001), não estar motivado é estar em uma *certa relação com a aprendizagem proposta*, ou seja, não é possível definir o saber e o aprender sem considerar uma certa relação com o saber e com o aprender. Essa relação com o saber é construída, é uma relação com o mundo – o mundo em que o estudante vive, caracterizado por desigualdades sociais; com o outro – as relações estabelecidas com os pais, com os professores de Matemática; e consigo mesmo – sentir-se inteligente ao aprender determinado conteúdo matemático.

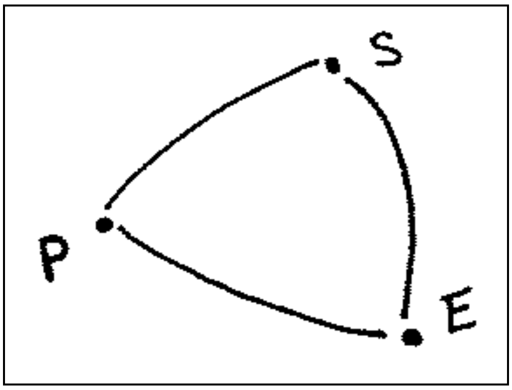
Chevallard (2005) analisa as transformações do *saber sábio* – saber produzido pelos cientistas nas universidades; até se tornar um objeto de ensino, o *saber a ser ensinado* – aquele que aparece nos livros didáticos; e o *saber ensinado* – o saber que efetivamente é ensinado na escola, e a essas transformações nomeia de *Transposição Didática*.

Há um objeto do conhecimento que preexiste, independentemente das intenções, e é dotado de uma necessidade e de um determinismo próprio. Esse é o que Chevallard chama de *Sistema Didático*, como se pode observar na Figura 1.

Com base no sistema didático, há três lugares que são ocupados por P, E e S, e esses estão inter-relacionados. P refere-se ao professor, E ao estudante e S ao saber a ser ensinado. Esse sistema didático sofre influências da *noosfera* – fatores externos que influenciam o sistema didático, composta por professores, cientistas, pais de alunos, entre outros.

Para Arruda, Lima e Passos (2011), "o sistema didático pode ser entendido como um sistema de relações com o saber em uma sala de aula padrão" (ARRUDA; LIMA; PASSOS, 2011, p. 147). Desse modo, apresenta-se um referencial teórico-metodológico estruturado de acordo com as ideias até aqui arroladas.

Figura 1: Sistema Didático



Fonte: Chevallard (2005, p. 26)

3 A MATRIZ 3X3 DE ARRUDA, LIMA E PASSOS

A Matriz 3x3 permite analisar as relações com o saber que são estabelecidas em sala de aula, e tem sua origem nos estudos de Tardif (2002), Gauthier (2006), Charlot (2001) e Chevallard (2005).

De acordo com Arruda, Lima e Passos (2011), o professor, em sua prática, tem de gerir relações epistêmicas, pessoais e sociais com o conteúdo, com o ensino e com a aprendizagem dos alunos, como se pode observar no Quadro 1.

Quadro 1: Instrumento para análise da ação docente em sala de aula, adaptado de Arruda, Lima e Passos (2011, p. 147).

		1	2	3
	Tarefas do professor / *Relações com o saber*	Relação com o conteúdo – segmento P-S	Relação com o ensino – segmento P-E	Relação com a aprendizagem – segmento E-S
A	Epistêmica	*Setor 1A* Conteúdo enquanto objeto a ser compreendido pelo professor.	*Setor 2ª* Ensino enquanto atividade a ser compreendida pelo professor.	*Setor 3A* Aprendizagem enquanto atividade a ser compreendida pelo professor.
B	Pessoal	*Setor 1B* Conteúdo enquanto objeto pessoal.	*Setor 2B* Ensino enquanto atividade pessoal.	*Setor 3B* Aprendizagem enquanto atividade pessoal.
C	Social	*Setor 1C* Conteúdo enquanto objeto social.	*Setor 2C* Ensino enquanto atividade social.	*Setor 3C* Aprendizagem enquanto atividade social.

Cada célula dessa matriz pode ser explicada como segue:

> *Setor 1A*. Diz respeito: à relação epistêmica do professor com o conteúdo; às maneiras como dele se apropria e à busca por compreendê-lo cada vez mais; à relação com os objetos e os locais onde o conteúdo pode ser encontrado, como livros, revistas, vídeos, internet, biblioteca, universidades etc.
>
> *Setor 1B*. Diz respeito: à relação pessoal do professor com o conteúdo; ao sentido que o conteúdo adquire para ele e o quanto determina sua identidade profissional; a quanto o professor gosta e se envolve com a matéria que ensina; a como ele avalia sua própria compreensão da mesma etc.

> *Setor 1C*. Diz respeito: aos conteúdos escolares, enquanto objeto de trocas sociais em uma comunidade específica; a quanto o professor partilha de uma comunidade de educadores e dos eventos que esta realiza; à sua relação com as pessoas que detêm o conhecimento; às suas identificações e ideais; à sua busca por aperfeiçoamento por meio do convívio com outros professores, participação em cursos etc.
>
> *Setor 2A*. Diz respeito: à relação epistêmica do professor com o ensino; à sua busca por compreendê-lo melhor e às suas reflexões sobre a atividade docente e sobre a formação do professor; à sua percepção e reflexões sobre o seu próprio desenvolvimento como professor; às maneiras como realiza, avalia e procura melhorar o ensino que pratica; à sua relação com os materiais instrucionais, experimentos, instrumentos; às maneiras como realiza o planejamento dos objetivos, conteúdos, atividades, avaliação, recursos materiais etc.
>
> *Setor 2B*. Diz respeito: à relação pessoal do professor com o ensino; a como se autoavalia como professor e como trabalha suas inseguranças; ao sentido pessoal que atribui ao ato de ensinar e o quanto isso influi em sua identidade profissional; ao quanto ele gosta de ensinar; ao seu estilo como professor e ao modo pessoal de se relacionar e aplicar as regras e normas de conduta; às responsabilidades, valores que se imputa enquanto educador etc.
>
> *Setor 2C*. Diz respeito: ao ensino enquanto atividade social e interativa; às dificuldades e inseguranças pessoais produzidas em decorrência da interação com os outros (alunos, pais, professores, administradores etc.); às habilidades do professor para negociar com os alunos valores e comportamentos para que consiga ensinar e gerenciar o funcionamento da sala de aula; aos esforços que ele faz para conseguir apoio dos demais agentes sociais, cujas opiniões e avaliações afetam sua segurança, posição e sua autoridade enquanto professor etc.
>
> *Setor 3A*. Diz respeito: à relação epistêmica do professor com a aprendizagem; à sua busca por compreender as maneiras como os alunos a realizam; à sua percepção e reflexão sobre as relações dos alunos com os conteúdos, às ideias prévias dos alunos e suas dificuldades de aprendizagem etc.
>
> *Setor 3B*. Diz respeito: à relação pessoal do professor com a aprendizagem de seus alunos; ao sentido que esta adquire e o quanto determina sua identidade profissional; às preocupações do professor com o envolvimento, motivação e interesse dos alunos e com a qualidade das interações na sala de aula; à sua capacidade pessoal de interferir e gerenciar a relação dos alunos com o conteúdo etc.
>
> *Setor 3C*. Diz respeito: à aprendizagem enquanto atividade social e interativa; à manutenção de um ambiente propício às interações e à aprendizagem dos alunos; ao gerenciamento dos trabalhos e demais atividades em grupos etc. (ARRUDA; LIMA; PASSOS, 2011, p.147).

Após essa apresentação, em que cada uma das células da matriz foi caracterizada, dar-se-á início à análise dos dados, em que se enfatiza a flexibilidade apresentada por esse instrumento em função dos problemas de pesquisa e contextos investigados.

4 ANÁLISE DOS DADOS

Neste estudo foi utilizada a abordagem qualitativa de investigação, em que a preocupação está no processo e não somente no produto, e os dados são analisados indutivamente pelo pesquisador (BOGDAN; BIKLEN, 1991). Com inspirações em fragmentos da Análise Textual Discursiva (MORAES; GALIAZZI, 2011), compreendida nesse contexto como metodologia de análise e pesquisa, realizou-se a estruturação de uma seleção das pesquisas realizadas pelo grupo

EDUCIM[3], defendidas entre 2011 e 2014, que utilizaram a Matriz 3x3 como instrumento teórico-metodológico.

Optou-se por constituir o *corpus* de análise – conjunto de documentos a serem analisados (BARDIN, 2004) – pelas teses de doutoramento que são apresentadas no Quadro 02. Durante esse período, a Matriz 3x3 apresentou, em função dos problemas de pesquisa e dos contextos de investigação em que foi empregada, uma flexibilização, promovendo um amadurecimento do instrumento teórico- metodológico.

Quadro 2: Teses analisadas

Ano de Defesa	Título	Autor da Tese
2011	Um Ensino para Chamar de Seu: um estudo sobre a gestão da matéria e a gestão de classe de professores de Física do Ensino Médio.	BACCON, Ana Lúcia Pereira.
2012	Formação Inicial: o estágio supervisionado segundo a visão de acadêmicos do curso de Ciências Biológicas.	MAISTRO, Virginia Iara de Andrade.
2013	Um modelo para a interpretação da supervisão no contexto de um subprojeto de física do PIBID.	CARVALHO, Marcelo Alves de.
2013	Formação inicial e perfil docente: um estudo por meio da perspectiva de um instrumento de análise da ação do professor em sala de aula.	OHIRA, Márcio Akio.
2013	O PIBID e as relações de saber na formação inicial de professores de matemática.	LARGO, Vanessa.
2014	Uma proposta para a análise das relações docentes em sala de aula com perspectivas de ser inclusiva.	PASSOS, Angela Meneghello.
2014	Axiologia relacional pedagógica e a formação inicial de professores de biologia	LUCAS, Lucken Bueno.

Na sequência, é apresentada uma síntese obtida de cada uma das teses elaboradas, enfatizando os objetivos e resultados advindos por meio do uso da matriz.

Baccon (2011) optou por utilizar em sua tese de doutorado somente uma das linhas da Matriz, a linha pessoal. O objetivo central de sua pesquisa foi analisar e interpretar a ação de professores de Física e Matemática baseando-se nos conceitos apresentados por Gauthier e Tardif, de gestão de classe e gestão do conteúdo. Como resultados de seu trabalho, Baccon (2011) elaborou três estilos de gestão do ensino e da aprendizagem em sala de aula: o primeiro estilo de gestão foi caracterizado por sua centralidade no conteúdo, o segundo no próprio professor e o terceiro no aluno. A autora afirma que a gestão do professor é subjetiva e, devido a esse fato, encontra respaldo na Psicanálise para afirmar que na "Educação um professor também pode ter um ensino para chamar de seu" (Ibid., p. 8). Referindo-se à Matriz utilizada por Baccon, identificou-se a necessidade da autora de realizar adaptações, elaborando outro instrumento, denominado Matriz 1x3. Em suma, a autora enfatizou em sua análise a relação pessoal dos professores com a gestão de classe e do conteúdo.

Maistro (2012) analisou o discurso de cinco estudantes que optaram por realizar o curso de Licenciatura em Ciências Biológicas. Seu objetivo principal centrou-se em entender a maneira como eles lidavam com a questão de ser professor e a maneira como enfrentavam as dificuldades da prática docente no contexto do Estágio Supervisionado.

[3] O EDUCIM[3] – Grupo de Pesquisa em Educação em Ciências e Matemática – foi criado no ano de 2002, com o objetivo de discutir as dissertações e, posteriormente, as teses dos estudantes do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina – UEL. Maiores informações em: http://educimlondrina.blogspot.com.br.

Como instrumento de análise, utilizou a Matriz 3x3 em sua completude e assumiu realizar um estudo do seu potencial, bem como realizar a delimitação das condições de sua aplicação. A autora apresentou como resultado de seu trabalho as seguintes afirmativas: a pesquisa acenou para a importância da experiência inicial para a docência, haja vista que a maioria dos sujeitos pesquisados realizou a habilitação em Licenciatura, mas não a almejavam para o seu futuro profissional; durante as atividades de regência, os depoentes apresentaram excessivas preocupações com aspectos técnicos da gestão do ensino e com sua atuação, não se envolvendo com a aprendizagem dos alunos no âmbito epistêmico e pessoal. Em relação ao âmbito social da aprendizagem, Maistro identificou que os investigados demostraram preocupações relacionadas ao *passar valores,* ética e suprimir a carência familiar, com o intuito de ensinar e gerenciar a sala de aula.

Ao organizar os dados analisados em uma Matriz 3x3 final, Maistro (2012) identifica uma excessiva concentração dos depoimentos dos estudantes na coluna das relações com o ensino. Em suma, mesmo os sujeitos tendo vivenciado a experiência de serem professores, muitos de seus argumentos se fundamentaram no senso comum da docência, e não foram encontrados pela autora, nas falas dos estudantes, fragmentos de teorias educacionais bem como de reflexões relacionados aos saberes da formação (Filosofia da Educação, Psicologia), ações que seriam de responsabilidade da universidade.

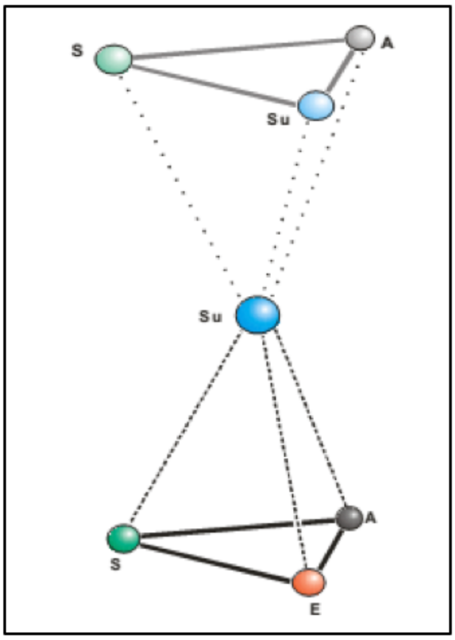
Carvalho (2013) realizou a sua pesquisa no contexto do PIBID (Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência), na disciplina de Física, no Ensino Médio. Seu problema de pesquisa incidiu sobre três supervisores, professores da Educação Básica que recepcionaram os estudantes da Licenciatura em suas salas de aula e atuaram como formadores de professores, com o intuito de investigar essa nova atribuição do docente da rede pública de ensino. Como instrumento de análise dos dados, Carvalho (2013) se valeu da Matriz 3x3, mas da mesma maneira que fez Baccon (2011), realizou adaptações no instrumento e considerou somente a linha A, a relação epistêmica dos supervisores com o conteúdo, com o ensino e com a aprendizagem. As descrições para cada uma das células, porém, permaneceram semelhantes ao instrumento original. De acordo com o autor, as orientações de supervisão de cada um dos professores investigados são caracterizadas pela mobilização e pelo compartilhamento dos saberes docentes. Nesse sentido, em função da maneira como o supervisor seleciona e difere os saberes docentes ao orientar os futuros professores, há uma tendência da orientação em ser menos prescritiva e direcionada, o que acarreta ao futuro professor maiores possibilidades de autonomia docente.

Outro resultado apresentado diz respeito à maneira como a supervisão é conduzida. Para Carvalho (2013), os supervisores realizam as orientações de acordo com o seguinte modelo: observação das ações do licenciando, reflexão sobre a sua experiência anterior, seguida pela orientação. Essa evidência estruturou, aliada às inspirações advindas do sistema didático (CHEVALLARD, 2005), a estruturação da ampulheta para a supervisão. A representação é apresentada na Figura 2.

O ponto S, na cor verde, representa o saber curricular, o conteúdo disciplinar propriamente dito. O ponto E, na cor laranja, faz alusão ao estudante da licenciatura, futuro professor. O ponto A – preto – alude ao aluno do Ensino Médio e, no vértice azul, o supervisor – sujeito foco do estudo. Acima dessa estrutura encontram-se as lembranças/experiências do supervisor, advindas de momentos outros, que são mobilizadas em função da necessidade de adequações identificadas na análise da aula realizada pelo estagiário. Ao finalizar, Carvalho (2013) ressalta que o ato de orientar é mobilizar, por meio da reflexão a respeito da experiência anterior, os saberes docentes e da orientação que são necessários para orientar o licenciando a conduzir de forma cada vez mais eficaz a gestão das relações do seu sistema didático.

A tese de Ohira (2013) semelhante à de Maistro (2012), foi desenvolvida no âmbito do Estágio Supervisionado do curso de Licenciatura em Ciências Biológicas. O autor acompanhou licenciandos do sétimo semestre e utilizou a Matriz 3x3 na íntegra, valendo-se de dados de entrevistas realizadas com os sujeitos investigados. Segundo Ohira (2013), os resultados sugeriram que o processo de formação vai além de um conjunto de referenciais teórico-metodológicos, que esse período é favorável para a emancipação intelectual dos indivíduos e fornece experiências importantes para a constituição de um perfil profissional. O autor destaca, também, que o uso da matriz contribuiu para evidenciar as influências de diversos fatores para avanço da concepção dos licenciandos sobre a prática docente. Em suma, foram elaborados perfis das concepções apresentadas pelos sujeitos em diferentes momentos da sua formação, designados por: PRE[4], PA[5] e POS[6].

Figura 2: Modelo da ampulheta da supervisão



Fonte: Carvalho (2013)

No perfil PRE, os sujeitos apresentaram como característica comum a presença de conhecimentos pautados no senso comum, atividades e ações centradas no ensino, ou seja, na sua ação ao ensinar, e ignoraram aspectos relacionados aos alunos, como, por exemplo, o seu conhecimento prévio e o papel do aluno no processo de ensino e aprendizagem. Em relação aos perfis PA e POS, elaborados com fragmentos de entrevistas advindas do momento atual

[4] Refere-se ao perfil elaborado por fragmentos advindos de memória recolocada a respeito da percepção de indivíduos sobre sua prática docente no início da graduação.
[5] Refere-se ao perfil elaborado por fragmentos advindos das entrevistas a respeito da percepção de indivíduos realizadas no final da graduação.
[6] Refere-se ao perfil elaborado por fragmentos advindos das entrevistas realizadas um ano após a conclusão da graduação.

vivenciado pelos sujeitos investigados, já há demonstrações de preocupação com a aprendizagem do aluno:

> [...] preocupação em tornar conteúdos interessantes e de maneira a serem mais integrados e interdisciplinares; noções de teorias de aprendizagem; preocupação com o conhecimento prévio dos alunos; consideram o interesse e contexto do aluno como parte do processo de aprendizagem e uma aparente construção de saberes da experiência proporcionando uma superação de inseguranças (OHIRA, 2013, p. 125).

Em suma, foi elucidado, ao comparar os perfis PA e POS, que ocorreram movimentações dos discursos nas células da Matriz 3x3, mas os dados coletados para esses momentos em específicos foram insuficientes.

No contexto do PIBID da Licenciatura em Matemática, Largo (2013) realizou uma investigação que teve por objetivo apresentar suas compreensões a respeito das relações com o saber estabelecidas por futuros professores com o conteúdo matemático, com o saber ensinar e aprender Matemática. Cabe destacar nesse trabalho a maneira como as entrevistas foram realizadas, intercaladas entre um período de dois anos, concomitantemente à participação dos sujeitos no programa. Proveniente dos procedimentos analíticos, a autora vislumbrou: a decisão dos futuros professores em se manterem na profissão docente, valorização dos saberes experienciais dos supervisores, indícios da aprendizagem da docência durante a participação dos bolsistas no programa e o PIBID como configurador de um ambiente de formação continuada para graduandos que já atuavam como professores e inicial para aqueles que ainda não exerciam a profissão. Em suma, mesmo que a maior concentração de unidades também permaneça na coluna do ensino, os futuros professores demostraram ter vivenciado, durante o PIBID, momentos para mobilização e articulação do seu saber-fazer.

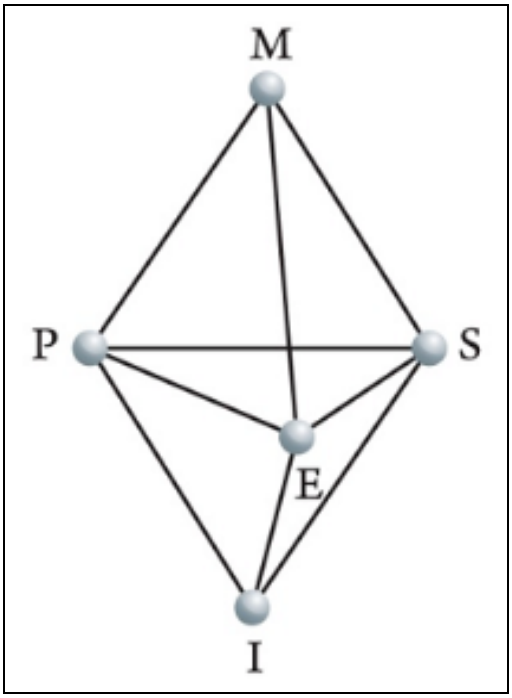
Passos (2014) realizou sua tese de doutoramento no contexto de uma sala de aula com perspectiva de ser inclusiva. O foco de seu trabalho incidiu sobre as relações docentes que foram possíveis de ser evidenciadas por meio da Matriz 3x3. Para tal, a autora realizou adaptações elaborando três matrizes e construindo outras representações com base no sistema didático, conforme apresentado na Figura 3.

O ponto S representa o saber, E o estudante que apresenta necessidades educacionais especiais e P o professor. Em um plano superior, o ponto M refere-se ao mediador, um terceiro sujeito que pode ou não ser colega de classe de E que o ajuda na compreensão do saber S e, em um plano inferior, o ponto I refere-se à instituição de ensino em que os sujeitos estão inseridos.

Dessa representação, foram elaboradas três matrizes: a Matriz 1, semelhante à elaborada por Arruda, Lima e Passos (2011); a Matriz 2, que apresenta relações com o mediador quando ocupa uma posição estratégica entre o professor, o estudante deficiente e o saber; e a Matriz 3, em que a instituição assume a posição do mediador. Os resultados apresentados pela autora evidenciam que houve um acréscimo às tarefas do docente em sala de aula, pois a presença do deficiente mudou a configuração da sala de aula. Essa alteração no processo levou o professor a se preocupar mais com a aprendizagem dos alunos e, consequentemente, houve uma convergência dessas relações para o âmbito social. Portanto, a tese contribui para a emergência de trabalhos na área de educação inclusiva possibilitando a compreensão de caracterizações próprias dessa configuração de aprendizagem.

A última tese analisada foi elaborada por Lucas (2014). A pesquisa realizou-se no contexto da formação inicial de professores da área de Ciências Biológicas e tomou como objeto de estudo a presença e a influência de sistemas axiológicos na perspectiva de estudantes, bem como na de seus formadores. Como referencial teórico metodológico, o autor se valeu da Matriz 3x3, bem como os Focos da Aprendizagem da Docência de Arruda, Passos e Fregolente (2012). Lucas (2014) elaborou, também, uma maneira de conceber os valores, rompendo com a dicotomia entre a axiologia objetivista – o valor está no objeto – e a axiologia subjetivista – o valor está no sujeito – elaborando a axiologia relacional, ou seja, o valor está na relação que os sujeitos estabelecem com o objeto.

Figura 3**:** “Novo sistema didático” para a análise das relações docentes em sala de aula com perspectiva de ser inclusiva



Fonte: Passos (2014)

Fundamentando-se nesses referenciais e proposições, Lucas (2014) chegou nos seguintes resultados: identificou uma relação intrínseca entre os valores com a formação inicial de professores, que foram interpretados como indicadores de formação docente; o sistema axiológico dos formadores pode alterar as relações estabelecidas pelos estudantes com o saber; a contribuição do instrumento analítico-axiológico possibilitou a detecção das valorações e desvalorizações apresentadas tacitamente nas falas transcritas; o sistema valorativo que na tese foi sistematizado revelou o contingente axiológico de grupos de sujeito em um determinado contexto. Enfim, os valores apresentam implicações diretas com o repertório de saberes dos futuros professores e de seus formadores.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, teve-se por objetivo compreender a maneira como as teses elaboradas no Grupo EDUCIM utilizaram a Matriz 3x3 em suas investigações. Decorrente do processo analítico, pode-se observar que os primeiros trabalhos tiveram a função de compreender em profundidade sua aplicabilidade. Vislumbrou-se que a matriz possibilitou a caracterização de perfis, situados em relação ao contexto em que os dados foram coletados. Nesse sentido, pode-se afirmar, em sentido figurado, que os autores elaboraram uma fotografia do fenômeno investigado.

Baccon (2011) e Carvalho (2013) optaram, em função dos seus objetivos de pesquisa, por explorar somente uma das linhas da matriz, respectivamente, a linha B (pessoal) e a linha A (epistêmica). Maistro (2012), Largo (2013) e Ohira (2013) preferiram utilizar o instrumento em sua totalidade. Todavia, apresentaram em comum a elaboração de perfis dos sujeitos em movimentos diversos do processo formativo investigado, o PIBID, para Largo (2013) e o Estágio Curricular Supervisionado, para Maistro (2012) e Ohira (2013).

Passos (2014) e Lucas (2014) diferiram dos demais trabalhos, pois incorporaram outras teorias e reformulações da configuração de aprendizagem investigada, não se limitando a um grupo de sujeitos de pesquisa como as demais teses. Suas investigações focaram os professores/formadores, bem como os alunos/futuros professores, tomando os dois e suas relações como objeto de análise. Passos (2014) reestruturou o sistema didático de Chevallard (2005), transformando-o em um modelo para a educação com perspectiva de ser inclusiva. Lucas (2014), por sua vez, associa os focos da aprendizagem da docência (ARRUDA; PASSOS; FREGOLENTE, 2012) – outro constructo teórico do grupo de pesquisa – e elabora um instrumento axiológico-analítico que tem a função de capturar os valores e desvalores presentes no processo de formação de professores de um curso de Ciências Biológicas.

A maioria dos trabalhos apresentou, em comum, concentração de unidades de análise na coluna do ensino, o que denota uma preocupação com a forma como os sujeitos (professores e futuros professores) realizam suas ações em sala de aula. Essa observação provocou questionamentos a respeito da necessidade de haver mudanças na configuração apresentada pela matriz, dando início a trabalhos que a utilizaram como meio de intervenção na prática pedagógica, com o objetivo de cambiar e alterar essas relações, transferindo-as para a coluna da aprendizagem, como foi realizado por Carvalho (2016).

Outro fato evidenciado diz respeito ao amadurecimento das ideias relativas à matriz, que não mais se limitam à gestão de classe e conteúdo, englobando outras relações e outras configurações de aprendizagem (ARRUDA; PASSOS; FREGOLENTE, 2012). Nesse sentido, a matriz passou a ser compreendida como um instrumento para análise de relações com o saber.

Cabe destacar, conforme já apresentado anteriormente, que a análise deste artigo se limitou às teses defendidas no grupo. Todavia, dissertações como Fejolo (2013), Elias (2013) e Conti (2014) também utilizaram esse referencial teórico-metodológico em suas investigações.

No âmbito nacional, além do grupo EDUCIM, encontrou-se uma dissertação, *As relações dos alunos com o saber na atividade de produção de documentário científico no ensino de biologia*, de autoria de Heron Omar Arraya, sob orientação da Drª Odisseia Boaventura de Oliveira, defendida no início do ano de 2016 no programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal do Paraná, que se valeu da Matriz 3x3. Todavia, o trabalho ainda não está disponibilizado para consulta.

Atualmente, integrantes do grupo de pesquisa continuam avançando no estudo dos limites da Matriz 3x3. Já se considera a existência de não mais uma matriz, mas sim, de três: a matriz do professor, a matriz do aluno e a matriz do saber (ARRUDA; PASSOS, 2015). Nesse sentido, a matriz se coloca como um instrumento fértil e parcialmente interpretado, que nos últimos anos fundamentou e continua fundamentando as pesquisas realizadas pelo grupo EDUCIM, possibilitando compreensões originais a respeito da relação do sujeito com saber em diversas configurações de aprendizagem.

REFERÊNCIAS

ARRUDA, S. de M.; LIMA, J. P. C. de; PASSOS, M. M. Um novo instrumento para a análise da ação do professor em sala de aula. **Revista Brasileira de Pesquisa em Educação em Ciências – RBPEC**, n.2, v.11, p. 139-160, 2011.

ARRUDA, S. de M.; PASSOS, M. M.; FREGOLENTE, A. Focos da aprendizagem docente. **Alexandria**, v. 11, 2012. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/alexandria/article/viewFile/37734/29158>. Acesso em: 12 dez. 2015.

ARRUDA, S. de M.; PASSOS, M. M. A relação com o saber na sala de aula. In: COLÓQUIO INTERNACIONAL "EDUCAÇÃO E CONTEMPORANEIDADE", 9., 2015, Aracaju. **Mesa-redonda**: relação com o saber e o ensino de Ciências e Matemática. Disponível em: < http://educonse.com.br/ixcoloquio/arruda_passos2.pdf>. Acesso em: 12 dez. 2015.

BARDIN, L. **Análise de conteúdo**. Lisboa: Edições 70, 2004.

BACCON, A. L. P. **Um ensino para chamar de seu**: um estudo sobre a gestão da matéria e a gestão de classe de professores de Física do Ensino Médio. 2011. 153 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Centro de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, PR, 2011.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. **Investigação qualitativa em educação**. Porto: Porto Editora, 1994.

BRASIL. CAPES. Edital CAPES/DEB Nº 02/2009. **Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência – PIBID**. Brasília, DF, 2009.

CARVALHO, D. F. **O PIBID e as relações com o saber, aprendizagem da docência e pesquisa**: caracterização de uma intervenção na formação inicial de professores de matemática. 2016. f. 245. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Centro de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, PR, 2016.

CARVALHO, M. A. de. **Um modelo para a interpretação da supervisão no contexto de um subprojeto de física do PIBID**. 2013. 170 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Centro de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, PR, 2013.

CONTI, R. P. **A Educação Ambiental nos cursos de formação inicial de professores**: investigações à luz de um novo instrumento de análise. 2014. 83 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, PR. 2014.

CHARLOT, B. **Da relação com o saber**: elementos para uma teoria. Porto Alegre: Artmed, 2000. 93 p.

CHARLOT, B. Formação de professores: a pesquisa e a política educacional. In: PIMENTA, S. G.; GHEDIN, E. **Professor reflexivo no Brasil**: gênese e crítica de um conceito. São Paulo: Cortez, 2005.

ELIAS, R. C. **Implicações do sistema blocado na ação didática do professor de física**. 2013. 54 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Centro de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, PR. 2013.

FEJOLO, T. B. **A formação do professor de física no contexto do PIBID**: os saberes e as relações. 2013. 136 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Centro de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, PR. 2013.

FIORENTINI, D.; CASTRO, F. C. de. Tornando-se professor de Matemática: o caso de Allan em prática de ensino e estágio supervisionado. In: FIORENTINI, D. (org.). **Formação de professores de Matemática**: explorando novos caminhos com outros olhares. Campinas: Mercado de Letras, 2003. p.121-156.

LARGO, V. **O PIBID e as relações de saber na formação inicial de professores de matemática**. 2013. 214 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Centro de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, PR. 2013.

LUCAS, L. B. **Axiologia relacional pedagógica e a formação inicial de professores de biologia**. 2014. 286 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Centro de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, PR, 2014.

MAISTRO, V. I. de A. **Formação inicial**: o estágio supervisionado segundo a visão de acadêmicos do curso de Ciências Biológicas. 2012. 126 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Centro de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, PR. 2012.

MORAES, R.; GALIAZZI, M. do C. **Análise textual discursiva**. 2. ed. Ijuí: Unijuí, 2011.

OHIRA, M. A. **Formação inicial e perfil docente**: um estudo por meio da perspectiva de um instrumento de análise da ação do professor em sala de aula. 2013. 256f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Centro de Ciências Exatas. Universidade Estadual de Londrina, Londrina, PR. 2013.

PASSOS, A. M. **Uma proposta para a análise das relações docentes em sala de aula com perspectivas de ser inclusiva**. 2014. 131 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Centro de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, PR. 2014.

TARDIF, M. **Saberes docentes e formação profissional**. Petrópolis: Vozes, 2002.

OS TRIKERNELS DE STRATONOVICH E DE BEREZIN PARA J=1 E J=3/2

THE STRATONOVICH AND BEREZIN TRIKERNEL FOR J=1 AND J=3/2

HARB, Nazira H.[1]

RESUMO

Os produtos twisted estudados nesse artigo são induzidos pela correspondência padrão de Stratonovich e a de Berezin, respectivamente, e, que num certo limite assintótico x $n=2j\to\infty$, definem deformações estritas da álgebra de Poisson de S^2, de acordo com Rios e Straume (2014). Para cada um desses dois produtos, denotados por $\star_1^n$ e $\star_b^n$, respectivamente, seu trikernel integral é denotado por $\mathbb{L}_1^j$ e $\mathbb{L}_b^j$. Nosso objetivo é mostrar outras fórmulas para o Trikernels de Stratonovich e de Berezin, pois a formulação existente, e que pode ser vista em Rios e Straume (2014), é bastante complexa para ser trabalhada e até mesmo para interpretarmos quais qualidades e propriedades ela apresenta. A formulação que propomos dependerá de produtos internos e determinantes, facilitando assim a manipulação em outros trabalhos, além da extração de qualidades e propriedades que serão descritas nesse artigo.

Palavras-chaves: Geometria simplética. Mecânica quântica. Produto twisted. Trikernel integral.

ABSTRACT

The twisted products studied in this article are the ones obtained via the standard Stratonovich-Weyl and the standard Berezin symbol correspondences, respectively, which in a certain asymptotic limit $2j=n\to\infty$ define strict deformation quantizations of S^2 i.e. strict deformations of the Poisson algebra of S^2, according to Rios and Straume (2014). For each one of these two products on $Poly_{\mathbb{C}}(S^2)_{\leq n}$, denoted by $\star_1^n$ and $\star_b^n$ respectively, its integral trikernel is denoted by $\mathbb{L}_1^j$ and $\mathbb{L}_b^j$ respectively. Our goal in this article is to show other formulae to both trikernels of Stratonovich and Berezin, because such formulae which can be seen in Rios e Straume (2014) is a little complicated to work and understand their properties. The formulation we propouse depends on inner products and determinants, making it easier to work and extract properties and qualities which will be shown in this article, how we mention.

Keywords: Simplectis geometry. Quantum mechanics. Twisted product. Integral trikernel.

1 INTRODUÇÃO

Este artigo versa sobre os produtos de Stratonovich, e de Berezin, de funções na esfera S^2. Cada um deles é definido através de uma correspondência de símbolos que consiste em uma aplicação linear bijetiva entre operadores lineares num espaço de Hilbert complexo de dimensão $n+1$, ou seja, matrizes complexas $(n+1)\times(n+1)$, e polinômios complexos de grau próprio $\leq n$ definidos na 2-esfera, $Poly_{\mathbb{C}}(S^2)_{\leq n}$, satisfazendo algumas propriedades básicas, como equivariância pela ação do grupo de rotações $SO(3)$, preservação das estruturas reais e normalização como afirmam Rios e Straume (2014).

Geralmente, toda correspondência define um produto associativo mas não comutativo em $Poly_{\mathbb{C}}(S^2)_{\leq n}$ induzido do produto de operadores, chamado de produto twisted em $Poly_{\mathbb{C}}(S^2)_{\leq n}$. Cada um destes produtos twisted, por sua vez, pode ser escrito na forma integral

[1] Doutora em Matemática pela Universidade de São Paulo (USP), São Carlos, São Paulo, Brasil. Docente na Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), Londrina, Paraná, Brasil. Endereço para correspondência: Av. dos Pioneiros, 3131, CEP: 86036-370, Londrina, Paraná, Brasil. Endereço eletrônico: naziraharb@utfpr.edu.br.

$$f \star g(\mathrm{n}) = \int_{S^2 \times S^2} f(\mathrm{n}_1) g(\mathrm{n}_2) \mathbb{L}(\mathrm{n}_1, \mathrm{n}_2, \mathrm{n}) d\mathrm{n}_1 d\mathrm{n}_2,$$

em que $f, g \in Poly_{\mathbb{C}}(S^2)_{\leq n}$, $\mathrm{n}_1, \mathrm{n}_2, \mathrm{n} \in S^2$. Em tal representação integral, todas as propriedades do produto twisted são convertidas em propriedades do trikernel integral

$$\mathbb{L}: S^2 \times S^2 \times S^2 \to \mathbb{C}.$$

Os produtos twisted estudados são os induzidos pela correspondência padrão de Stratonovich e de Berezin, que em um certo limite assintótico, $2j = n \to \infty$, definem deformações estritas da álgebra de Poisson de S^2, de acordo com Rios e Straume (2014). Para cada um desses dois produtos, denotados por $\star_1^n$ e $\star_{\vec{b}}^n$, seu trikernel integral é denotado por $\mathbb{L}_1^j$ e $\mathbb{L}_{\vec{b}}^j$, respectivamente.

O que apresentaremos então são fórmulas mais tratáveis para $\mathbb{L}_1^j$ e $\mathbb{L}_{\vec{b}}^j$ nos casos de número de spin $j = 1/2$ (visto primeiramente em (STRATONOVICH(1957)), 1, 3/2, 2, tais fórmulas são escritas em termos de funções de dois e de três pontos, invariantes por $SO(3)$, como produtos escalares e determinantes.

2 OS TRIKERNELS DE STRATONOVICH E DE BEREZIN

O objetivo desta seção é exibir uma fórmula fechada, que dependa de expressões invariantes por rotações, ou seja, que dependa de produtos internos e determinantes para o trikernel de Stratonovich e de Berezin, no caso geral de $n = 2j$. Como veremos adiante, produtos de funções na esfera, induzidos pelo produto de matrizes (operadores), podem ser escritos na forma integral

$$f \star^n g = \int\int_{S^2 \times S^2} f g L^j,$$

em que $L^j : S^2 \times S^2 \times S^2 \to \mathbb{C}$ é o trikernel integral que define o produto $\star$.

Conforme exposto em Rios e Straume (2014) e resumido adiante, há várias escolhas possíveis para L^j, mas duas se destacam: o trikernel padrão de Stratonovich-Weyl e o trikernel padrão de Berezin.

No artigo de Várilly e Gracia-Bondía (1989), é apresentada, como um exemplo, a fórmula recursiva para o trikernel de Stratonovich-Weyl:

$$L^{1/2}(n_1, n_2, n_3) = \frac{1}{4}(1 + 3(< n_1, n_2 > + < n_2, n_3 > + < n_1, n_3 >) + 3\sqrt{3}i[n_1, n_2, n_3]),$$

em que $<,>$ é o produto interno em $\mathbb{R}^3$ e $[\bullet,\bullet,\bullet]$ é o determinante da matriz 3×3, constituída dos vetores n, m, k. Contudo, não há, na literatura, outros exemplos calculados.

Além de calcular os exemplos $j = 1, 3/2$ e 2 para o trikernel de Stratonovich e de Berezin, cogitou-se a hipótese de haver uma fórmula fechada válida para todo j. Porém, como veremos nessa seção, não foi possível obter tal qualidade de fórmula. Todavia, essa nova expressão, para valores mais baixos de j, ficou em função de produtos internos e determinantes, como queríamos a princípio.

A seguir apresentaremos, baseados no livro de Pedro P. Rios e Eldar Straume (2014), toda a nomenclatura, definições e operadores citados acima com suas fórmulas. Para, na sequência, explorarmos o objetivo principal.

3 CORRESPONDÊNCIA DE SÍMBOLOS PARA SISTEMAS DE SPIN

As definições e o contexto apresentados a seguir são baseados no livro *Symbol correspondence for spin systems* de Rios e Straume (2014) e no artigo de Varilly e Gracia-Bondía (1989), pois são trabalhos que apresentam o tema de forma mais clara, diferentemente do artigo de Stratonovich (1957), que foi o precursor desse assunto.

Na formulação comum da mecânica quântica, o j-spin é representado por operadores atuando num espaço vetorial $\mathbb{C}^{2j+1}$, em que $j\in\{1/2,1,3/2,...\}$. Uma base ortonormal é dada por autovetores $|jm>$, em que

$$J^2|jm>=j(j+1)|jm> \text{ e } J_3|jm>=m|jm>,$$

colocando a constante de Planck $\hbar=1$.

C^{2j+1} carrega uma representação irredutível π_j de $SU(2)$ cujos elementos matriciais são convencionalmente dados por

$$D^j_{mn}(g):=<jm|\pi_j(g)|jm>.$$

O espaço de fase é a esfera S^2 equipada com a forma simplética $SU(2)$-invariante $sin\varphi d\varphi\wedge d\vartheta$. Esse fato familiar pode ser visto como aplicação do teorema Kostant-Kirilov-Souriau para o grupo $SU(2)$, pois suas órbitas coadjuntas são esferas e $SU(2)$ atua em cada órbita por rotações da esfera.

Denotamos pontos da esfera por $n=(\varphi,\vartheta)$ em cordenadas esféricas; em que $dn:=sin\varphi d\varphi\wedge d\vartheta$ é a medida de área da superfície. Elementos de $SU(2)$ serão genericamente denotados por g e a ação natural de $SU(2)$ em S^2 será denotada por $g\cdot n$, efetivamente uma ação de $SO(3)$. Se f é uma função na esfera, f^g é dada por $f^g(n):=f(g^{-1}\cdot n)$. A medida de Haar dg sobre $SU(2)$ é normalizada de maneira que $\int_{SU(2)}dg=1$. Para mais fatos e detalhes sobre momento angular spin em mecânica quântica, indicamos Biedenharn e Louck (1981).

* * *

Definição: um sistema quântico j-spin é um espaço de Hilbert $H_j\simeq\mathbb{C}^{n+1}$ munido de uma representação unitária irredutível

$$\pi_j:SU(2)\to G\subset U(2j+1),$$

em que $n=2j$, G denota a imagem de $SU(2)$ que, por usa vez, é isomorfa a $SU(2)$ ou $SO(3)$ dependendo se j for semi-inteiro ou inteiro.

Definição: uma correspondência de símbolos para um sistema quântico j-spin $\mathcal{H}_j\simeq\mathbb{C}^{n+1}$, em que n=2j, é uma regra que associa a cada operador $P\in\mathcal{B}(\mathcal{H}_j)$ uma função suave W_P sobre o espaço fase com as seguintes propriedades:

(i) Linearidade: A aplicação $P\to W_P$ é linear e injetiva;

(ii) Equivariância: $W_{P^g}=(W_P)^g$, para $g\in SU(2)$;

(iii) Realidade: $\overline{W^j_{P^*}(n)=W^j_P(n)}$;

(iv) Normalização: $\frac{1}{4\pi}\int_{S^2} W^j_P dS = \frac{1}{n+1}Tr(P)$.

***

Dessa maneira, caracterizamos uma família de aplicações de correspondência de símbolos, que será sobrejetora ao restringirmos o contradomínio desta:

$$W^j : B(H_j) \simeq M_{\mathbb{C}}(n+1) \rightarrow Poly^m_{\mathbb{C}}(S^2) \subset C^{\infty}_{\mathbb{C}}(S^2)$$

$$P \mapsto W^j_P$$

em que $Poly^m_{\mathbb{C}}$ é o conjunto dos polinômios de grau menor ou igual a m e W^j associa cada operador P a seu símbolo W^j_P. Assumimos que os símbolos W^j_P são funções polinomiais.

Notamos que por (i) e (ii) resulta que W^j é um G-isomorfismo e (iii) assegura que W^j respeita a estrutura real. Portanto, pelo seguinte teorema[2], W^j é representado pela $(n+1)$-upla real, $(c_0, c_1, \cdots, c_n)$, com cada $c_l \neq 0$.

* * *

Teorema: cada G-aplicação $\mathbb{R}$-linear que leva matrizes hermitianas em polinômios reais pode ser identificada como uma única $(n+1)$-upla

$$(c_0, c_1, \cdots, c_n) \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

Em particular, essa upla corresponde a um G-isomorfismo

$$\begin{array}{ccc} H(n+1) & \simeq & Poly_{\mathbb{R}}(S^2)_{\leq n} \\ \cap & & \cap \\ M_C(n+1) & \simeq & Poly_{\mathbb{C}}(S^2)_{\leq n} \end{array}$$

se e somente se cada $c_i \neq 0$.

* * *

Observamos que o símbolo W^j_I do operador identidade I é uma função constante, digamos, c_0. Junto à condição (iv), implica que $c_0 = 1$. Nesse sentido, podemos identificar cada símbolo W^j com sua n-upla:

$$W^j \leftrightarrow (c_1, \cdots, c_n) \in (R^*)^n,$$

em que $R^* = R - \{0\}$.

Junto aos axiomas acima podemos impor mais um:

(v) Isometria: $<W^j_P, W^j_Q> = <P, Q>_j$

[2] Para demonstração ver Pedro e Straume (2014).

como uma condição de "normalização métrica" em que o lado direito da equação acima é o produto interno normalizado de Hilbert-Schmidt de dois operadores, dado por

$$<P,Q>_j=\frac{1}{n+1}<P,Q>=\frac{1}{n+1}Tr(P^*Q)$$

$n=2j$ e o lado esquerdo é o produto interno em L^2 de duas funções, dada por

$$<W_P^j,W_Q^j>=\frac{1}{4\pi}\int_{S^2}\overline{W_P^j(n)}W_Q^j(n)dS$$

Portanto a condição (iv) é apenas um caso especial de (v), ou seja, (iv) pode ser apresentada como, $<1,W_P^j>=<I,P>_j$.

O primeiro a investigar a correspondência de símbolos para sistemas de spin foi Berezin (1975). Sua correspondência satisfaz os axiomas (i)-(iv), mas não o axioma (v). Várilly e Gracia-Bondía (1989) foram os primeiros a estudar sistematicamente o tipo de correspondência $P\leftrightarrow W_P$ que satisfaz todos os cinco axiomas, como introduzido anteriormente por Stratonovich (1957), generalizando para sistemas j-spin a correspondência de Weyl.

* * *

Definição: uma correspondência de Stratonovich-Weyl é uma correspondência de símbolos que satisfaz também o axioma (v).

4 CORRESPONDÊNCIA DE SÍMBOLOS VIA OPERADOR KERNEL, O OPERADOR KERNEL DE STRATONOVICH-WEYL E O OPERADOR KERNEL DE BEREZIN.

Seguindo a ideia de Várilly e Garcia-Bondía (1989), temos que, por linearidade:

$$W_P(n)=tr(P\Delta^j(n))$$

em que Δ^j é um operador sobre S^2, o qual chamamos de operador Kernel de Stratonovich Weyl. Agora, a propriedade de tracialidade nos fornece que

$$P=\frac{2j+1}{4\pi}\int_{S^2}W_P(n)\Delta^j(n)dn.$$

Em outras palavras, a correspondência direta e inversa, $P\rightleftarrows W_P$, devem ser implementada pelo mesmo operador kernel. E, de fato, tal operador existe.

A construção de uma aplicação de símbolo W^j, em termos de um operador kernel, exigirá algumas particularidades. De forma geral, vamos chamar esse operador de K, sendo $K\in M_{\mathbb{C}}(n+1)$, que fornecerá uma função em S^2. Sendo $n_0=(0,0,1)$, n=2j, $K(n_0)=K$ e $K(n)=K(gn_0)=K^g$ para $n=gn_0$, temos a relação[3] dada pela proposição seguinte.

***

Proposição: para cada correspondência de símbolo W existe um único operador $K\in M_{\mathbb{C}}(n+1)$ tal que

$$W_P^j(gn_0)=Tr(PK^g),$$

[3] Encontra-se em Pedro e Straume (2014).

ou, equivalentemente,

$$W_P^j(n) = Tr(PK(n)) \, .$$

Teremos que, além disso, K será uma matriz diagonal de traço igual a 1.

Demonstração: O funcional linear

$$\hat{W} : M_{\mathbb{C}}(n+1) \to \mathbb{C}, \;\; P \mapsto \hat{W}(P) = W_P(n_0)$$

é representado por algum K de maneira que $\hat{W}(P) = Tr(PK)$. Portanto, tomando g=1, temos $W_P\left(n_0\right) = Tr\left(PK\right)$. E generalizando,

$$W_P(g^{-1}n_0) = (W_P)^g(n_0) = W_{P^g}(n_0) = Tr(P^g K) = Tr(PK^{g^{-1}}).$$

Por outro lado, para $g \in U(1)$, temos $Tr(PKg) = Tr(PK)$, para todo P. Consequentemente, $K^g = K$, isto é, K é fixado por $U(1)$ e por isso, $K = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{n+1})$. Escolhendo P os elementos da base de $M_{\mathbb{C}}(n+1), E_{kk}$, obtemos $\lambda_k = W_P(n_0)$ é um número real, devido à condição de realidade, (ii). Finalmente, pela condição de normalização, (iii), $W_I = 1$ e portanto, $Tr\left(K\right) = 1$.

* * *

Agora estamos aptos a apresentar a definição seguinte.

* * *

Definição: um operador kernel $K \in M_{\mathbb{C}}(n+1)$ é uma matriz diagonal com a propriedade de uma aplicação de símbolos dada por

$$W_P^j(gn_0) = Tr(PK^g),$$

é uma correspondência de símbolos.

* * *

Em vista do que apresentamos acima, K possui uma decomposição ortogonal

$$K = \frac{1}{n+1} I + K_1 + K_2 + \ldots + K_n,$$

em que para $l \geq 1$, K_l é uma matriz diagonal, real e de traço nulo, ou seja, $K_l = k_l \, e\left(l,0\right)$, onde $k_l \neq 0$ e

$$e(l,0) = \frac{(-1)^l}{l!}\sqrt{2l+1}\sqrt{\frac{(n-l)!}{(n+l+1)!}}\sum_{k=0}^{l}(-1)^k \begin{pmatrix} l \\ k \end{pmatrix} J_-^{l-k} J_+^l J_-^k,$$

em que

$$J_- = J_+^t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \sqrt{n.1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{(n-1).2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \sqrt{2.(n-1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \sqrt{1.n} & 0 \end{bmatrix}.$$

* * *

Proposição: existe uma bijeção entre correspondência de símbolos e matrizes reais diagonais em $M_C(n+1)$ do tipo

$$K=\frac{1}{n+1}I+\sum_{l=1}^{n}c_l\sqrt{\frac{2l+1}{n+1}}e(l,0), c_l\in\mathbb{R}\neq 0,$$

e, ainda, para toda correspondência de símbolos de Stratonovich-Weyl, $c_l=\pm 1$ para todo l.

Demonstração: Ver Pedro e Straume (2014).

Definição: Os números reais não nulos $c_1,c_2,\ldots,c_n$ são denominados números característicos do operador kernel K.

Definição: A única correspondência positiva de símbolos de Stratonovich-Weyl (para a qual todos os números característicos são iguais a 1, isto é, $c_l=1$), é chamada de correspondência de símbolos de Stratonovich-Weyl padrão e denotada por:

$$W_1^j : B(H_j)\simeq M_{\mathbb{C}}(n+1)\to Poly_{\mathbb{C}}(S^2)_{n\leq}\subset C_{\mathbb{C}}^{\infty}(S^2).$$

O operador kernel K, neste caso, é denotado por K_1 ou por Δ como em Várilly e Gracia-Bondía (1989).

* * *

Vamos, agora, destacar a correspondência de símbolos que originalmente foi definida por Berezin.

* * *

Definição: A correspondência de símbolos de Berezin é uma correspondência cujo operador kernel K é um operador projeção Π.

* * *

Como o traço de um operador projeção é seu rank, segue que Π deve ser uma matriz $\Pi_k=E_{kk}$ para $1\leq k\leq n+1=2j+1$, ou seja, $\Pi_k=(-1)^{k+1}\sum_{l=0}^{n}C_{m,-m,0}^{j,j,l}e(l,0)$, em que $m=j-k+1$ e cada coeficiente de Clebsch-Gordan deve ser não nulo.

* * *

Definição: A correspondência de símbolos obtida via operador projeção Π_1 é chamado de símbolo de Berezin padrão.

* * *

Assim como definimos uma correspondência de símbolos via um kernel para o caso Stratonovich, podemos fazer o mesmo para Berezin da seguinte maneira: definimos uma aplicação B que associa a cada operador $Q\in M_{\mathbb{C}}(n+1)$ a função B_Q sobre a esfera S^2,

$$B_Q(gn_0)=Tr(Q\Pi_1^g),\quad g\in SU(2),$$

em que $n_0=(0,0,1)\in S^2$ e Π_1 é o operador projeção

$$\Pi_1=diag(1,0,0,\cdots,0).$$

* * *

Definição: A aplicação B é a correspondência de símbolos de Berezin padrão.

* * *

Os números característicos para a correspondência de símbolos de Berezin padrão são os números característicos da aplicação de símbolos cujo operador kernel é o operador projeção Π_1. Portanto, para cada $n=2j$ existe uma n-upla $\vec{b}$ de n números característicos possivelmente dependendo de n. Denotaremos esses números por b_l^n, em que

$$\vec{b}=(b_1^n,b_2^n,\cdots,b_l^n,\cdots,b_n^n)\ .$$

Esses números são expressos da seguinte maneira:

$$b_l^n=\sqrt{\frac{n+1}{2l+1}}<\Pi_1,e^j(l,0)>=\sqrt{\frac{n+1}{2l+1}}e^j(l,0)_{1,1}\ ,$$

em que $e^j(l,0)_{1,1}$ denota a primeira entrada da matriz diagonal $e^j(l,0)=e(l,0)$.

A forma explícita dos números característicos b_l^n da correspondência de símbolos padrão de Berezin é dada por:

$$b_l^n=\sqrt{\frac{n(n-1)\ldots(n-l+1)}{(n+2)(n+3)\ldots(n+l+1)}}=\sqrt{\frac{\begin{pmatrix} n \\ l \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} n+l+1 \\ l \end{pmatrix}}}=\frac{n!\sqrt{n+1}}{\sqrt{(n+l+1)!(n-l)!}}.$$

Observamos que essa fórmula é obtida a partir de

$$b_l^n=\sqrt{\frac{n+1}{2l+1}}C_{j,-j,0}^{j,j,l}.$$

Mas há uma outra demonstração de como encontrar esses b_l^n bastante interessante que pode ser vista no Apêndice 7.4 de Pedro e Straume (2014).

5 PRODUTO TWISTED NA ESFERA

Dada uma correspondência de símbolos, definimos:

$$W_A\star W_B=W_{AB},$$

para quaisquer operadores A e B. Dada a correspondência de Stratonovich Weyl, para um particular j, notamos que:

$$W_{AB}=Tr(\Delta^j(n)AB)=(\frac{2j+1}{4\pi})^2Tr(\Delta^j(n)\int_{S^2}\Delta^j(m)W_A(m)dm\int_{S^2}\Delta^j(k)W_B(k)dk).$$

Portanto, a definição apropriada para o produto twisted de duas funções g e f em $\mathfrak{H}_{2j}$[4], é dado por:

$$(f\star_1 g)(n):=\int_{S^2}\int_{S^2}L_1^j(n,m,k)f(m)g(k)dmdk,$$

[4] Espaço de Hilbert dos harmônicos esféricos cuja base ortonormal é $\{Y_l^m: 0\le l\le 2j, -l\le m\le l\}$.

em que o trikernel L_1^j é apenas

$$L_1^j(n,m,k)=(\frac{2j+1}{4\pi})^2 tr(\Delta^j(n)\Delta^j(m)\Delta^j(k)).$$

Da condição de $\Delta^j(g\cdot n)=\pi_j(g)\Delta^j(n)\pi_j(g)^{-1}$ e da fórmula acima temos que

$$L_1^j(g\cdot n,g\cdot m,g\cdot k)=L^j(n,m,k)\ ,$$

para $g\in SU(2)$, o que implica que o produto twisted é equivariante, ou seja,

$$(f\star_1 h)^g=f^g\star_1 h^g$$

para todo $g\in SU(2)$.

A fórmula acima nos diz que o trikernel é uma função rotacionalmente invariante nas suas entradas vetoriais. De acordo com o teorema de Weyl (1946), dependerá apenas da combinação de permutação de produtos escalares e de determinante. Por exemplo, para j=1/2 temos

$$L_1^{1/2}(n,m,k)=\frac{1}{4}(1+3(<n,m>+<m,k>+<k,n>)+3\sqrt{3}i[n,m,k]).$$

A partir dessa ideia, procuramos encontrar uma fórmula geral, que representasse o trikernel de Stratonovich (e de Berezin, posteriormente). Fórmula essa que dependeria de produtos internos e determinantes, como Weyl afirmou.

Formalizando o contexto acima, temos a definição seguinte para correspondência de símbolos em geral.

* * *

Definição: para uma dada correspondência de símbolos

$$W^j:B(H_j)\simeq M_{\mathbb{C}}(n+1)\to Poly_{\mathbb{C}}(S^2)\subset C_{\mathbb{C}}^{\infty}(S^2),$$

que associa cada operador P ao símbolo W_P^j, o produto twisted $\star$ que é a operação binária sobre símbolos

$$\star:W^j(\mathcal{B}(\mathcal{H}_j))\times W^j(\mathcal{B}(\mathcal{H}_j))\to W^j(\mathcal{B}(\mathcal{H}_j))\simeq Poly_{\mathbb{C}}(S^2)$$

induzida pelo produto de operadores dada por

$$W_{PQ}^j=W_P^j\star W_Q^j.$$

* * *

Sejam $g\in SO(3)$ e $f_1,f_2,f_3\in W^j(B(H_j))\simeq Poly_C(S^2)\subset C_C^{\infty}(S^2)$, temos que a álgebra de símbolos definida por qualquer produto twisted satisfaz as seguintes propriedades:

(i) $SO(3)$ - equivariante: $(f_1\star f_2)^g=f_1^g\star f_2^g$;

(ii) associativa: $(f_1\star f_2)\star f_3=f_1\star(f_2\star f_3)$;

(iii) unital: $1\star f=f\star 1=f$;

(iv) estrela álgebra: $\overline{f_1\star f_2}=\overline{f_2}\star\overline{f_1}$.

Em vista da definição acima, podemos usar o postulado de normalização da definição de correspondência de símbolos para definir um produto interno induzido no espaço de símbolos:

$$<W_P^j,W_Q^j>_\star := \frac{1}{4\pi}\int_{S^2}\overline{W_P^j}\star W_Q^j dS.$$

Com isso podemos escrever o postulado de isometria (tracionalidade) como

(v) Isometria: $<W_P^j,W_Q^j>=<W_P^j,W_Q^j>_\star$.

De fato, por um lado temos

$$<W_P^j,W_Q^j>=<P,Q>_j=\frac{1}{n+1}Tr(P^*Q)$$

e, por outro,

$$<W_P^j,W_Q^j>_\star=\frac{1}{4\pi}\int_{S^2}\overline{W_P^j}\star W_Q^j dS=\frac{1}{4\pi}\int_{S^2}W_{P^*}^j\star W_Q^j dS=\frac{1}{4\pi}\int_{S^2}W_{P^*Q}^j dS=\frac{1}{n+1}Tr(P^*Q).$$

* * *

Definição: O produto twisted obtido via correspondência de Stratonovich-Weyl é chamado de produto twisted padrão de símbolos e é denotado por $\star_1^n$ ou simplesmente por $\star_1$.

* * *

Portanto, para $f,g\in W_1^j(\mathcal{B}(\mathcal{H}_j))=W^j(\mathcal{B}(\mathcal{H}_j))\simeq Poly_C(S^2)_{\le n}\subset C_{\mathbb{C}}^\infty(S^2)$,

$$\star_1=\star_1^n:(f,g)\mapsto f\star_1^n g\in W^j(\mathcal{B}(\mathcal{H}_j))\simeq Poly_C(S^2)_{\le n}\subset C_{\mathbb{C}}^\infty(S^2).$$

E, finalmente, antes de introduzir o trikernel de Stratonovich, exibiremos a representação integral do produto twisted. O produto twisted de símbolos esféricos pode ser escrito na forma:

$$f\star g(n)=\int_{S^2}\int_{S^2}f(n_1)g(n_2)L(n_1,n_2,n)dn_1dn_2.$$

A forma integral para o produto twisted nos permite uma definição direta e geral desse produto de símbolos arbitrários $f,g\in Poly_C(S^2)_{\le n}$ sem necessidade de decompô-los na base de harmônicos esféricos. Em tal representação integral todas as propriedades do produto twisted são encontrados no trikernel integral

$$L:S^2\times S^2\times S^2\to\mathbb{C}.$$

Nos casos estudados nesse artigo, temos que $L=L_1^j$ ou $L_{\vec{b}}^j$.

Para a correspondência de símbolo de Stratonovich-Weyl, W_1^j, temos a definição que se segue.

* * *

Definição: Sejam $f,g\in C_{\mathbb{C}}^\infty(S^2)$ tais que $f=W_1^j(F)$, $g=W_1^j(G)$, para $F,G\in\mathcal{B}(\mathcal{H}_j)$ onde W_1^j é determinado pelo operador kernel K_1^j com todos os números característicos $c_l=1$, para $0\le l\le n=2j$, na equação $K=\frac{1}{n+1}I+\sum_{l=1}^{n}c_l\sqrt{\frac{2l+1}{n+1}}e(l,0)$. Logo,

$$f *_1^n g(n)=\int_{S^2\times S^2}f(n_1)g(n_2)\mathbb{L}_1^j(n_1,n_2,n)dn_1dn_2,$$

em que

$$\mathbb{L}_1^j(n_1,n_2,n)=(\frac{2j+1}{4\pi})^2\mathrm{Tr}(K_1^j(n_1)K_1^j(n_2)K_1^j(n))$$

é o trikernel de Stratonovich.

* * *

O Trikernel de Stratonovich também pode ser reescrito da seguinte maneira:

$$\mathbb{L}_1^j(n_1,n_2,n)=\sum_{l_k,m_k}(-1)^{2j}\sqrt{(2j+1)(2l_1+1)(2l_2+1)(2l+1)}\begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l \\ m_1 & m_2 & -m \end{bmatrix}[j]\overline{Y_{l_1}^{m_1}}(n_1)\overline{Y_{l_2}^{m_2}}(n_2)\overline{Y_l^m}(n)$$

em que a soma em l_k e m_k satisfaz: $0\le l_k \le n=2j,-l_k\le m_k\le l_k$, $\Delta(l_1,l_2,l_3)=1$, $m_1+m_2+m_3=0$ e

$$\begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l \\ m_1 & m_2 & -m \end{bmatrix}[j]=\begin{Bmatrix} l_1 & l_2 & l \\ j & j & j \end{Bmatrix}\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l \\ -m_1 & -m_2 & m \end{pmatrix}$$

é o produto do 6j-símbolo pelo 3j-símbolo, respectivamente.

Teorema: O Trikernel de Stratonovich é simétrico, ou seja:

$$\mathbb{L}_1^j(n_1,n_2,n_3)=\mathbb{L}_1^j(n_3,n_1,n_2)=\mathbb{L}_1^j(n_2,n_3,n_1).$$

Demonstração: Essa simetria é obtida graças à simetria de $\begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l \\ m_1 & m_2 & -m \end{bmatrix}[j]$.

Teorema: O Trikernel de Stratonovich satisfaz as seguintes propriedades:

(i) $L_1^j(n_1,n_2,n)=L_1^j(gn_1,gn_2,gn),\ \ g\in SU(2)$;

(ii) $\int_{S^2}L_1^j(n_1,n_2,n)L_1^j(n,n_3,n_4)dn=\int_{S^2}L_1^j(n_1,n,n_4)L_1^j(n_2,n_3,n)dn.$

(iii) $\int_{S^2}L_1^j(n_1,n_2,n)dn_1=R^j(n_2,n)$, $\int_{S^2}L_1^j(n_1,n_2,n)dn_2=R^j(n_1,n)$, onde $R^j(n_2,n)\in Poly_{\mathbb{C}}(S^2)$ é o kernel de reprodução da álgebra polinomial truncada $Poly_{\mathbb{C}}(S^2)$, caracterizado por $\int_{S^2}R^j(n_2,n)f(n_2)dn_2=f(n)$, para toda $f\in Poly_{\mathbb{C}}(S^2)$;

(iv) $L_1^j(n_2,n_1,n)=\overline{L_1^j(n_1,n_2,n)}.$

Demonstração:

(i) De fato,

$$L_1^j(gn_1,gn_2,gn)=\left(\frac{2j+1}{4\pi}\right)^2 Tr(K_1^j(gn_1)K_1^j(gn_2)K_1^j(gn))$$

$$=\left(\frac{2j+1}{4\pi}\right)^2 Tr((\pi_j(g)K_1^j(n_1)\pi_j^{-1}(g))(\pi_j(g)K_1^j(n_2)\pi_j^{-1}(g))(\pi_j(g)K_1^j(n)\pi_j^{-1}(g)))$$

$$=\left(\frac{2j+1}{4\pi}\right)^2 Tr(K_1^j(n_1)K_1^j(n_2)K_1^j(n))=L_1^j(n_1,n_2,n).$$

(ii) Sejam $f,g,h\in Poly_{\mathbb{C}}(S^2)$, temos que o produto twisted é associativo, ou seja, $(f\star g)\star h=f\star(g\star h)$, logo, por um lado,

$$(f\star g)\star h(n_4)=\int_{S^2}\int_{S^2}(f\star g)(n)h(n_3)L_1^j(n,n_3,n_4)dndn_3$$

$$=\int_{S^2}\int_{S^2}\left(\int_{S^2}\int_{S^2}f(n_1)g(n_2)L_1^j(n_1,n_2,n)dn_1dn_2\right)h(n_3)L_1^j(n,n_3,n_4)dndn_3$$

$$=\int_{S^2}\int_{S^2}L_1^j(n_1,n_2,n)\int_{S^2}\int_{S^2}L_1^j(n,n_3,n_4)f(n_1)g(n_2)h(n_3)dn_1dn_2dndn_3$$

e por outro,

$$f\star(g\star h)(n_4)=\int_{S^2}\int_{S^2}f(n_1)(g\star h)(n)L_1^j(n_1,n,n_4)dn_1dn$$

$$=\int_{S^2}\int_{S^2}L_1^j(n_2,n_3,n)\int_{S^2}\int_{S^2}L_1^j(n_1,n,n_4)f(n_1)g(n_2)h(n_3)dn_2dn_3dn_1dn\ .$$

(iii) Essa afirmação segue de:

$$f(n)=(f\star 1)(n)=\int_{S^2}\int_{S^2}f(n_1)L_1^j(n_1,n_2,n)dn_1dn_2\ ,$$

e

$$f(n)=(1\star f)(n)=\int_{S^2}\int_{S^2}f(n_2)L_1^j(n_1,n_2,n)dn_1dn_2.$$

(iv) Como

$$\overline{L_1^j(n_1,n_2,n)}=\left(\frac{2j+1}{4\pi}\right)^2\overline{Tr(K_1^j(n_1)K_1^j(n_2)K_1^j(n))}$$

$$=\left(\frac{2j+1}{4\pi}\right)^2Tr((K_1^j(n_1)K_1^j)^*(n_2)K_1^j(n))=\left(\frac{2j+1}{4\pi}\right)^2Tr(K_1^j(n_2)K_1^j(n_1)K_1^j(n))=L_1^j(n_2,n_1,n).$$

* * *

Observamos que, para definir o trikernel de Stratonovich e explicitar suas propriedades, começamos com o símbolo de Stratonovich-Weyl W_1^j. Faremos o mesmo agora para definir o trikernel de Berezin.

Considerando B a correspondência de símbolo de Berezin padrão. Como essa correspondência de símbolo não é simétrica, existem dois produtos internos naturais $SU(2)-$ invariante sobre o espaço de símbolos $Poly_{\mathbb{C}}^m(S^2)$:

- o produto usual L^2 sobre $C_{\mathbb{C}}^{\infty}(S^2)\supset Poly_{\mathbb{C}}(S^2)$:

$$<f_1,f_2>=\frac{1}{4\pi}\int_{S^2}\overline{f_1}f_2dS=\frac{1}{4\pi}\int_{S^2}\overline{f_1}(n)f_2(n)dn.$$

- o produto interno induzido sobre $Poly_{\mathbb{C}}(S^2)\subset C_{\mathbb{C}}^{\infty}(S^2)$:

$$<f_1,f_2>_{\star_b^n}=\frac{1}{4\pi}f_1\star_b^n f_2dS=\frac{1}{4\pi}\int_{S^2}f_1(n)\star_b^n f_2(n)dn.$$

Podemos agora definir um trikernel integral, baseando-nos nesses dois produtos internos, cujo nome é trikernel de Berezin L_b^j, definido por:

$$f_1\star_b^n f_2(n)=\int\int_{S^2\times S^2}f_1(n_1)f_2(n_2)L_b^j(n_1,n_2,n)dn_1dn_2.$$

* * *

Definição: Definimos o trikernel de Berezin, adicionando na fórmula de Stratonovich os números característicos da correspondência de símbolos padrão de Berezin,

$$\sqrt{\frac{\binom{n+l_1+1}{l_1}\binom{n+l_2+1}{l_2}\binom{n}{l_3}}{\binom{n}{l_1}\binom{n}{l_2}\binom{n+l_3+1}{l_3}}}.$$

Obtemos:

$$L_b^j(n_1,n_2,n)=\sum_{l_k,m_k}\frac{(-1)^n\sqrt{(2j+1)(2l_1+1)(2l_2+1)(2l+1)}}{(4\pi)^2}\begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l \\ m_1 & m_2 & -m \end{bmatrix}[j]$$

$$\sqrt{\frac{\binom{n+l_1+1}{l_1}\binom{n+l_2+1}{l_2}\binom{n}{l_3}}{\binom{n}{l_1}\binom{n}{l_2}\binom{n+l_3+1}{l_3}}}\overline{Y_{l_1}^{m_1}}(n_1)\overline{Y_{l_2}^{m_2}}(n_2)\overline{Y_l^m}(n)\ ,$$

em que

$$\begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l \\ m_1 & m_2 & -m \end{bmatrix}[j]=\begin{Bmatrix} l_1 & l_2 & l \\ j & j & j \end{Bmatrix}\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l \\ -m_1 & -m_2 & m \end{pmatrix}.$$

* * *

Observamos que já o Trikernel de Berezin, L_b^j não possui a propriedade de simetria como o Trikernel de Stratonovich, mas ele satisfaz todas as propriedades enunciadas para o trikernel de Stratonovich.

6 CÁLCULOS EXPLÍCITOS PARA O TRIKERNEL DE STRATONOVICH E DE BEREZIN

O objetivo desta seção é encontrar fórmulas explícitas para o trikernel de Stratonovich e de Berezin. Para tal, vamos primeiramente obter uma fórmula alternativa que dependa apenas de produtos internos e determinantes que são funções $SO(3)$-invariantes. É o teorema cuja demonstração se encontra em Weyl (1946), que nos permite chegar a essa formulação.

* * *

Teorema: Toda função de três pontos na esfera S^2, $SO(3)$-invariante, representada por vetores unitários n_1,n_2,n, no espaço tri-dimensional euclidiano, pode ser expressada como uma função de três produtos internos

$$<n_1,n_2>,<n_1,n_3>,<n_2,n>,$$

junto com o determinante

$$[n_1,n_2,n_3]=det(n_1,n_2,n).$$

Teorema: Sejam $n_1,n_2,n_0 \in S^2$, $0 \le l_k \le 2j$ e cada tripla (l_1,l_2,l_3) satisfazendo a propriedade triangular e $-l_k \le m_k \le l_k$ para $k=1,2,3.$. E seja

$$A=A(n_1,n_2,n_0)=<n_1,n_2>-<n_0,n_1><n_0,n_2>,\quad B=B(n_1,n_2,n_0)=det[n_1,n_2,n_0],$$

denotamos:

$$\mathcal{L}_{l_1,l_2,l_3}(n_1n_2,n_0)=\sqrt{(2l_1+1)(2l_2+1)(2l_3+1)}(\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P_{l_1}^0(z_1)P_{l_2}^0(z_2)$$

$$+\sum_{m=1}^{min(l_1,l_2)}\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m & -m & 0 \end{pmatrix}\sqrt{\frac{(l_1-m)!(l_2-m)!}{(l_1+m)!(l_2+m)!}}P_{l_1}^m(z_1)P_{l_2}^m(z_2)(-1)^m[(A-iB)^m+(-1)^{l_1+l_2+l_3}(A+iB)^m]).$$

Então,

$$\mathbb{L}_1^j(n_1,n_2,n_0)=\frac{(-1)^{2j}\sqrt{2j+1}}{(4\pi)^2}\sum_{l_k}\begin{Bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ j & j & j \end{Bmatrix}\mathcal{L}_{l_1,l_2,l_3}.$$

Demonstração: Como o trikernel de Stratonovich é invariante por rotação, usaremos o ponto inicial $n_1=(x_1,y_1,z_1)$, $n_2=(x_2,y_2,z_2)$ e $n_0=(0,0,1)$. E depois, generalizaremos para qualquer ponto da esfera, considerando que qualquer ponto da esfera pode ser obtido por uma rotação de n_0. Iniciaremos a demonstração com o somatório em $-l_k \le m_k \le l_k$:

$$\sum_{m_k}\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ -m_1 & -m_2 & m_3 \end{pmatrix}.\overline{Y_{l_1}^{m_1}}(n_1).\overline{Y_{l_2}^{-m_1}}(n_2).\overline{Y_{l_3}^{m_3}}(n_0)$$

Usareмos que:

(i) $Y_l^0(0,\phi)=\sqrt{2l+1};$

(ii) $m_1+m_2=0$ [5];

(iii) $Y_l^m(\varphi,\theta)=(-1)^m\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}.\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}P_l^m(cos\varphi)e^{im\theta}$;

(iv) Das coordenadas esféricas: $x=cos(\theta)sen(\varphi), y=sen(\theta)sen(\varphi), z=cos(\varphi),$

obtemos que

$$e^{im\theta}=\frac{(x+iy)^m}{(1-z^2)^{m/2}},$$

pois $x+iy=sen(\varphi)(cos(\theta)+isen(\theta))=(1-z^2)^{1/2}e^{i\theta}.$

Segue:

$$\sum_{m_k}\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ -m_1 & m_1 & 0 \end{pmatrix}\overline{Y_{l_1}^{m_1}}\,\overline{Y_{l_2}^{-m_1}}\sqrt{(2l_3+1)}=\sum_{max(-l_1,-l_2)\le m_1\le min(l_1,l_2)}\sqrt{2l_3+1}\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ -m_1 & m_1 & 0 \end{pmatrix}\overline{Y_{l_1}^{m_1}}\,\overline{Y_{l_2}^{-m_1}}$$

[5] Tomamos $m_3=0$, pois $n_0=(0,0,1)$ implica $(0,\theta)$.

$$=\sqrt{2l_3+1}\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.\overline{Y_{l_1}^{0}}(n_1).\overline{Y_{l_2}^{0}}(n_2)+\sum_{m_1=max(-l_1,-l_2)}^{-1}\sqrt{2l_3+1}\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ -m_1 & m_1 & 0 \end{pmatrix}.\overline{Y_{l_1}^{m_1}}(n_1).\overline{Y_{l_2}^{-m_1}}(n_2)$$

$$+\sum_{m_1=1}^{min(l_1,l_2)}\sqrt{2l_3+1}\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ -m_1 & m_1 & 0 \end{pmatrix}.\overline{Y_{l_1}^{m_1}}(n_1).\overline{Y_{l_2}^{-m_1}}(n_2)$$

$$=\sqrt{(2l_1+1)(2l_2+1)(2l_3+1)}\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P_{l_1}^{0}(z_1)P_{l_2}^{0}(z_2)$$

$$+\sum_{m=1}^{-max(-l_1,-l_2)}\sqrt{2l_3+1}\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m & -m & 0 \end{pmatrix}.\overline{Y_{l_1}^{-m}}(n_1).\overline{Y_{l_2}^{m}}(n_2)$$

$$+\sum_{m=1}^{min(l_1,l_2)}\sqrt{2l_3+1}\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ -m_1 & m_1 & 0 \end{pmatrix}.\overline{Y_{l_1}^{m_1}}(n_1).\overline{Y_{l_2}^{-m_1}}(n_2)$$

$$=\sqrt{(2l_1+1)(2l_2+1)(2l_3+1)}\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P_{l_1}^{0}(z_1)P_{l_2}^{0}(z_2)$$

$$+\sum_{m=1}^{min(l_1,l_2)}\sqrt{2l_3+1}(-1)^m\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m & -m & 0 \end{pmatrix}\{Y_{l_1}^{m}(n_1).\overline{Y_{l_2}^{m}}(n_2)+(-1)^{l_1+l_2+l_3}\overline{Y_{l_1}^{m}}(n_1).Y_{l_2}^{m}(n_2)\}=$$

$$=\sqrt{(2l_1+1)(2l_2+1)(2l_3+1)}\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P_{l_1}^{0}(z_1)P_{l_2}^{0}(z_2)+\sum_{m=1}^{min(l_1,l_2)}\sqrt{2l_3+1}(-1)^m\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m & -m & 0 \end{pmatrix}$$

$$\{\sqrt{2l_1+1}\sqrt{\frac{(l_1-m)!}{(l_1+m)!}}P_{l_1}^{m}(z_1)\frac{(x_1+iy_1)^m}{(1-z_1^2)^{m/2}}\sqrt{2l_2+1}\sqrt{\frac{(l_2-m)!}{(l_2+m)!}}P_{l_2}^{m}(z_2)\frac{(x_2-iy_2)^m}{(1-z_2^2)^{m/2}}$$

$$+(-1)^{l_1+l_2+l_3}\sqrt{2l_1+1}\sqrt{\frac{(l_1-m)!}{(l_1+m)!}}P_{l_1}^{m}(z_1)\frac{(x_1-iy_1)^m}{(1-z_1^2)^{m/2}}\sqrt{2l_2+1}\sqrt{\frac{(l_2-m)!}{(l_2+m)!}}P_{l_2}^{m}(z_2)\frac{(x_2+iy_2)^m}{(1-z_2^2)^{m/2}}\}$$

$$=\sqrt{(2l_1+1)(2l_2+1)(2l_3+1)}\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P_{l_1}^{0}(z_1)P_{l_2}^{0}(z_2)$$

$$+\sum_{m=1}^{min(l_1,l_2)}\sqrt{(2l_1+1)(2l_2+1)(2l_3+1)}(-1)^m\sqrt{\frac{(l_1-m)!(l_2-m)!}{(l_1+m)!(l_2+m)!}}\frac{P_{l_1}^{m}(z_1)P_{l_2}^{m}(z_2)}{(1-z_1^2)^{m/2}(1-z_2^2)^{m/2}}\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m & -m & 0 \end{pmatrix}$$

$$\{(x_1+iy_1)^{m_1}(x_2+iy_2)^{m_1}+(-1)^{l_1+l_2+l_3}(x_1-iy_1)^{m_1}(x_2+iy_2)^{m_1}\}$$

Analisando essa última parcela separadamente, obtemos:

$$\{((x_1+iy_1)(x_2+iy_2))^m+(-1)^{l_1+l_2+l_3}((x_1-iy_1)(x_2+iy_2))^m\}$$

e

$$=\{(x_1x_2+y_1y_2-i(x_1y_2-x_2y_1))^m+(-1)^{l_1+l_2+l_3}(x_1x_2+y_1y_2+i(x_1y_2-x_2y_1))^m\},$$

E, assim, denotado por

$$A=A(n_1,n_2,n_0)=<n_1,n_2>-<n_0,n_1><n_0,n_2>=x_1x_2+y_1y_2$$

$$B=B(n_1,n_2,n_0)=det[n_1,n_2,n_0]=x_1y_2-x_2y_1.$$

Finalmente, concluímos que o somatório em m_k fica da seguinte maneira:

$$\sqrt{(2l_1+1)(2l_2+1)(2l_3+1)}\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^0_{l_1}(z_1)P^0_{l_2}(z_2)$$

$$+\sqrt{(2l_1+1)(2l_2+1)(2l_3+1)}\sum_{m=1}^{min(l_1,l_2)}(-1)^m\sqrt{\frac{(l_1-m)!(l_2-m)!}{(l_1+m)!(l_2+m)!}}$$

$$\frac{P^m_{l_1}(z_1)P^m_{l_2}(z_2)}{(1-z_1^2)^{m/2}(1-z_2^2)^{m/2}}\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m & -m & 0 \end{pmatrix}[(A-iB)^m+(-1)^{l_1+l_2+l_3}(A+iB)^m].$$

* * *

Uma observação interessante desse trikernel é que podemos decompor a soma $\mathcal{L}_{l_1,l_2,l_3}(n_1,n_2,n_0)$ em duas partes, aquela em que $l_1+l_2+l_3=par$ e aquela em que

$$\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=0,\quad se\quad l_1+l_2+l_3=\text{ímpar}.$$

Segue:

- $l_1+l_2+l_3=par$

$$\mathcal{L}_{l_1,l_2,l_3}(n_1,n_2,n_0)=\sqrt{(2l_1+1)(2l_2+1)(2l_3+1)}\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P^0_{l_1}(z_1)P^0_{l_2}(z_2)$$

$$+\sum_{m=1}^{min(l_1,l_2)}\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m & -m & 0 \end{pmatrix}\sqrt{\frac{(l_1-m)!(l_2-m)!}{(l_1+m)!(l_2+m)!}}P^m_{l_1}(z_1)P^m_{l_2}(z_2)2(-1)^m[\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\begin{pmatrix} m \\ 2k \end{pmatrix}A^{m-2k}B^{2k}]).$$

- $l_1+l_2+l_3=\text{ímpar}$

$$\mathcal{L}_{l_1,l_2,l_3}(n_1,n_2,n_0)=2i\sqrt{(2l_1+1)(2l_2+1)(2l_3+1)}\sum_{m=1}^{min(l_1,l_2)}\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m & -m & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sqrt{\frac{(l_1-m)!(l_2-m)!}{(l_1+m)!(l_2+m)!}}P^m_{l_1}(z_1)P^m_{l_2}(z_2)(-1)^m[\sum_{k=0}^{m}(-1)^{k+1}\begin{pmatrix} m \\ 2k+1 \end{pmatrix}A^{m-(2k+1)}B^{2k+1}]$$

Observamos que é na soma ímpar que obtemos a parte imaginária.

Analogamente, o Trikernel de Berezin ficará com a formulação que se segue.

* * *

Teorema: Sejam $n_1,n_2,n_0\in S^2$, $0\le l_k\le 2j$ e cada tripla (l_1,l_2,l_3) satisfazendo a propriedade triangular e $-l_k\le m_k\le l_k$ para $k=1,2,3.$ E seja

$$A=A(n_1,n_2,n_0)=<n_1,n_2>-<n_0,n_1><n_0,n_2>,B=B(n_1,n_2,n_0)=det[n_1,n_2,n_0],$$

denotamos:

$$\mathcal{L}_{l_1,l_2,l_3}(n_1 n_2, n_0) = \sqrt{(2l_1+1)(2l_2+1)(2l_3+1)}(\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P_{l_1}^0(z_1)P_{l_2}^0(z_2)$$

$$+\sum_{m=1}^{min(l_1,l_2)} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m & -m & 0 \end{pmatrix} \sqrt{\frac{(l_1-m)!(l_2-m)!}{(l_1+m)!(l_2+m)!}} P_{l_1}^m(z_1)P_{l_2}^m(z_2)(-1)^m[(A-iB)^m + (-1)^{l_1+l_2+l_3}(A+iB)^m]).$$

Então, obtemos para o trikernel de Berezin,

$$\mathbb{L}_{\vec{b}}^j(n_1,n_2,n_0) = \frac{(-1)^{2j}\sqrt{2j+1}}{(4\pi)^2} \sum_{l_k} \sqrt{\frac{\begin{pmatrix} n+l_1+1 \\ l_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n+l_2+1 \\ l_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n \\ l_3 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} n \\ l_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n \\ l_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n+l_3+1 \\ l_3 \end{pmatrix}}} \begin{Bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ j & j & j \end{Bmatrix} \mathcal{L}_{l_1,l_2,l_3}.$$

* * *

Basta trocarmos n_0 por n para generalizar ambos os resultados para um ponto n qualquer na esfera S^2, ficando $\mathbb{L}_{\vec{b}}^j(n_1,n_2,n)$ e $\mathbb{L}_1^j(n_1,n_2,n)$.

7 CÁLCULOS EXPLÍCITOS[6] PARA J=1/2, 1, 3/2

Vamos explicitar os exemplos de j citados nesta seção; lembrando que as triplas (l_1,l_2,l_3) devem satisfazer a desigualdade triangular $|l_1-l_2| \le l_3 \le l_1+l_2$. E ainda,

$$A = <n_1,n_2> - <n_0,n_1><n_0,n_2>$$

e

$$B = det(n_1,n_2,n_0) = [n_1,n_2,n_0].$$

- Caso j=1/2

Como $0 \le l_k \le 2j = 1$, temos as seguintes triplas (0,0,0), (0,1,1), (1,0,1), (1,1,1).

$$\mathcal{L}_{0,0,0}(n_1,n_2,n_0) = 1\,,\ \mathcal{L}_{1,1,0}(n_1,n_2,n_0) = -\sqrt{3}<n_1,n_2>,$$

a partir disso obtemos $\mathcal{L}_{1,0,1}(n_1,n_2,n_0)$ e $\mathcal{L}_{0,1,1}(n_1,n_2,n_0)$, usando ciclicidade.

$$\mathcal{L}_{1,1,1}(n_1,n_2,n_0) = \frac{3}{\sqrt{2}} iB\,.$$

Agora somando em l_k,

$$L_1^{1/2}(n_1,n_2,n_0) = \frac{1}{(4\pi)^2}\{1+3(<n_1,n_2>+<n_1,n_0>+<n_2,n_0>)+i3\sqrt{3}B\}.$$

$$L_{\vec{b}}^{1/2}(n_1,n_2,n_0) = \frac{1}{(4\pi)^2}\{1+3<n_1,n_2>+<n_1,n_0>+<n_2,n_0>)+i\sqrt{3}B\}.$$

- Caso j=1

[6] O cálculo para j=2 pode ser visto em Harb (2014).

Como $0 \le l_k \le 2j$, $l_k \in \{0,1,2\}$. Teremos as seguintes triplas: (0,0,0), (0,1,1), (1,0,1), (1,1,0), (1,1,1), (1,1,2), (1,2,1), (1,2,2), (0,2,2), (2,0,2), (2,1,1), (2,1,2), (2,2,0), (2,2,1), (2,2,2). Primeiramente faremos o cálculo de $\mathcal{L}_{l_1,l_2,l_3}(n_1,n_2,n_0)$, como acima, para depois calcular o operador.

$$\mathcal{L}_{0,0,0}(n_1,n_2,n_0)=1\ ,\ \mathcal{L}_{1,1,0}(n_1,n_2,n_0)=-\sqrt{3}<n_1,n_2>\ ,\ \mathcal{L}_{1,1,1}(n_1,n_2,n_0)=\frac{3}{\sqrt{2}}iB$$

$$\mathcal{L}_{1,1,2}(n_1,n_2,n_0)=\frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}(3<n_0,n_1><n_0,n_2>-<n_1,n_2>)\ ,\ \mathcal{L}_{1,2,2}(n_1,n_2,n_0)=-\frac{15\sqrt{2}}{2\sqrt{5}}iB<n_0,n_1>$$

$$\mathcal{L}_{0,2,2}(n_1,n_2,n_0)=\frac{\sqrt{5}}{2}(3<n_0,n_2>^2-1)\ ,\ \mathcal{L}_{2,2,2}(n_1,n_2,n_0)=-\frac{5\sqrt{2}}{4\sqrt{7}}(9B^2+3R-5)\ .$$

Somando em l_k na soma do trikernel de Stratonovich obtemos:

$$L_1^1(n_1,n_2,n_0)=\frac{1}{(4\pi)^2}\{1+3P+\frac{15}{2}(R-1)+\frac{9\sqrt{2}}{4}iB(1+5P)++\frac{3\sqrt{10}}{8}(3P^2-3R-2P)$$

$$-\frac{5\sqrt{10}}{8}(9B^2-5+3R)\}.$$

E para Berezin:

$$L_b^1(n_1,n_2,n_0)=\frac{1}{(4\pi)^2}(1+\frac{11\sqrt{5}}{4\sqrt{3}}-\frac{6}{\sqrt{3}}+P+<n_1,n_2>+\frac{3}{2\sqrt{5}}<n_0,n_1><n_0,n_2>$$

$$+\frac{3\sqrt{2}}{2}<n_1,n_2><n_0,n_1>-\frac{1}{2\sqrt{15}}<n_1,n_2>-\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}(<n_0,n_1>-<n_0,n_2>)+\frac{3}{2}iBP$$

$$+6iB<n_0,n_2>+\frac{3}{2\sqrt{3}}(<n_0,n_2>^2+<n_0,n_1>^2)+\frac{15}{\sqrt{3}}<n_1,n_2>^2-\frac{15\sqrt{5}}{4\sqrt{3}}B^2-\frac{9\sqrt{5}}{4\sqrt{3}}R)\ .$$

Em que, para facilitar a notação e o excesso, denotamos:

$$P=<n_0,n_1>+<n_0,n_2>+<n_1,n_2> \text{ e } R=<n_0,n_1>^2+<n_0,n_2>^2+<n_1,n_2>^2\ .$$

- Caso j=3/2

Como $0 \le l_k \le 2j,\ l_k \in \{0,1,2,3\}$. Teremos as seguintes triplas: (0,0,0), (0,1,1), (1,0,1), (1,1,0), (1,1,1), (1,1,2), (1,2,1), (1,2,2), (0,2,2), (2,0,2), (2,1,1), (2,1,2), (2,2,0), (2,2,1), (2,2,2), (0,3,3), (1,2,3), (1,3,2), (1,3,3), (2,1,3), (2,2,3), (2,3,1), (2,3,2), (2,3,3), (3,0,3), (3,1,2), (3,1,3), (3,2,1), (3,2,2), (3,2,3), (3,3,0), (3,3,1), (3,3,2), (3,3,3).

Observemos que além das triplas que apareceram no caso j=1, apareceram algumas a mais. Logo, ao calcular os $\mathcal{L}_{l_1,l_2,l_3}$, para esse caso, basta calcular para essas triplas faltantes. É o que fizemos:

$$\mathcal{L}_{0,3,3}(n_1,n_2,n_0)=-\frac{7}{2\sqrt{7}}(5<n_0,n_2>^3-3<n_0,n_2>)\ ,$$

por ciclicidade achamos $\mathcal{L}_{3,0,3}(n_1,n_2,n_0)$ e $\mathcal{L}_{3,3,0}(n_1,n_2,n_0)$.

$$\mathcal{L}_{1,3,3}(n_1,n_2,n_0)=\frac{-21}{4\sqrt{7}}iB(1-5<n_0,n_2>^2),$$

por ciclicidade achamos $\mathcal{L}_{3,1,3}(n_1,n_2,n_0)$ e $\mathcal{L}_{3,3,1}(n_1,n_2,n_0)$.

$$\mathcal{L}_{1,2,3}(n_1,n_2,n_0)=-\frac{15}{2}<n_0,n_1><n_0,n_2>^2+\frac{3}{2}<n_0,n_1>+3<n_0,n_2><n_1,n_2>$$

por ciclicidade obtemos todas as outras combinações $\mathcal{L}_{3,1,2}(n_1,n_2,n_0),\mathcal{L}_{2,3,1}(n_1,n_2,n_0)$, $\mathcal{L}_{2,1,3}(n_1,n_2,n_0),\mathcal{L}_{3,2,1}(n_1,n_2,n_0)$ e $\mathcal{L}_{1,3,2}(n_1,n_2,n_0)$.

$$\mathcal{L}_{2,2,3}(n_1,n_2,n_0)=15\sqrt{\frac{2}{5}}iB(2<n_0,n_1><n_0,n_2>-<n_1,n_2>),$$

por ciclicidade obtemos $\mathcal{L}_{3,2,2}(n_1,n_2,n_0)$ e $\mathcal{L}_{2,3,2}(n_1,n_2,n_0)$.

$$\mathcal{L}_{2,3,3}(n_1,n_2,n_0)=\frac{7}{4\sqrt{21}}(-10<n_0,n_2>^3-15<n_0,n_1>^2<n_0,n_2>-15<n_0,n_2><n_1,n_2>^2$$

$$+6<n_0,n_2>-3<n_0,n_1><n_1,n_2>+45<n_0,n_1><n_0,n_2>^2<n_1,n_2>+15B^2<n_0,n_2>),$$

por ciclicidade obtemos $\mathcal{L}_{3,2,3}(n_1,n_2,n_0)$ e $\mathcal{L}_{3,3,2}(n_1,n_2,n_0)$.

$$\mathcal{L}_{3,3,3}(n_1,n_2,n_0)=\frac{35}{4\sqrt{7}}(-3R-5B^2+21/5).$$

Reunindo tudo no somatório em l_k obtemos, para Stratonovich:

$$L_1^{3/2}(n_0,n_1,n_2)=\frac{1}{(4\pi)^2}\{\frac{5}{2}+\frac{3}{20}(P-11R-25B^2P+P^2-15PR)+P^3-3B^2+\frac{5}{2}S+$$

$$+\frac{1}{8}\sqrt{\frac{3}{35}}(87-90R-100B^2)-\frac{iB}{2\sqrt{5}}(7-6P-30P^2+30R-\frac{15}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}R)\}$$

E para Berezin:

$$L_b^{3/2}(n_0,n_1,n_2)=\frac{1}{(4\pi)^2}(\frac{5}{2}-P-\frac{2}{3}<n_1,n_2>-\frac{1}{\sqrt{3}}iB(1+6<n_0,n_2>)+\frac{3}{\sqrt{3}}iBP+\frac{2}{5}\sqrt{\frac{2}{3}}<n_1,n_2>$$

$$-3\sqrt{\frac{10}{3}}(<n_0,n_1>+<n_0,n_2>)-2\frac{\sqrt{5}}{5}<n_0,n_1><n_0,n_2>+9\sqrt{\frac{10}{3}}<n_1,n_2><n_0,n_1>$$

$$-6<n_1,n_2>^2-\frac{3}{2}R-\frac{5}{2}S+90<n_1,n_2>^3+\frac{3}{2}P-54<n_1,n_2>$$

$$+\frac{1}{5}\sqrt{\frac{5}{21}}(21P+12<n_0,n_1>+12<n_0,n_2>+42<n_0,n_1><n_0,n_2>$$

$$+63<n_1,n_2><n_0,n_2>+63<n_1,n_2><n_0,n_1>-\frac{15}{2}<n_0,n_1><n_0,n_2>^2$$

$$-\frac{15}{2}<n_0,n_2><n_0,n_1>^2-\frac{105}{2}<n_1,n_2><n_0,n_1>^2-\frac{105}{2}<n_1,n_2><n_0,n_2>^2$$

$$-\frac{315}{2}<n_0,n_2><n_1,n_2>^2-\frac{315}{2}<n_0,n_1><n_1,n_2>^2)$$

$$+\frac{3}{\sqrt{3}}iB(22+\frac{1}{\sqrt{5}}-5<n_0,n_2>^2-\frac{5}{\sqrt{5}}<n_0,n_1>^2-15<n_1,n_2>^2)$$

$$-\frac{6}{\sqrt{7}}iB(-7P+6<n_1,n_2>+2<n_0,n_1><n_0,n_2>+14<n_0,n_1><n_1,n_2>$$

$$+14<n_0,n_2><n_1,n_2>)+\frac{\sqrt{5}}{20}(-10S-15<n_0,n_1>^2<n_0,n_2>$$

$$-15<n_1,n_2>^2<n_0,n_1>-15<n_0,n_2><n_1,n_2>^2-15<n_0,n_1><n_0,n_2>^2+6<n_0,n_2>$$

$$+6<n_0,n_1>-3<n_0,n_1><n_1,n_2>-3<n_0,n_2><n_1,n_2>$$

$$+45<n_0,n_1><n_0,n_2>^2<n_1,n_2>+15B^2P \quad +45<n_1,n_2><n_0,n_1>^2<n_{01},n_2>$$

$$-60<n_1,n_2>^3+90B^2<n_1,n_2>7(-15<n_0,n_2>^2<n_1,n_2>$$

$$-15<n_0,n_1>^2<n_1,n_2>+6<n_1,n_2>-3<n_0,n_2><n_1,n_0>+45<n_0,n_2><n_1,n_2>^2<n_0,n_1>))$$

$$-\frac{5}{4}\sqrt{\frac{3}{2}}(-3R-5B^3+21/5)),$$

em que P e R como no caso j=1 e $S=<n_0,n_1>^3+<n_0,n_2>^3+<n_1,n_2>^3$.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Em Harb (2014) foi feito o próximo cálculo para j=2, aumentando o número de parcelas e de cálculos significativamente, por isso, o exposto neste artigo foi até j=3/2, dando uma boa ideia do que se segue.

O que se desejava era uma formulação para poder fazer um estudo assintótico desses produtos, porém os resultados dos cálculos (feitos à mão e com auxílio do software Wolfram Mathematica) mostraram que essa formulação ideal pode estar mais longe e necessitar de, talvez, uma programação matemática.

REFERÊNCIAS

ARFKEN, G. **Mathematical methodos for physicists**. Cambridge, Massachusetts: Academic Press, 1985. m

BEREZIN, F. A. General concept of quantization. **Commun. Math. Phys**., n. 40, p. 153-174,1975.

BEREZIN, F. A. Quantization. **Math**. **USSR Izvest**., n. 8, p. 1109-1163, 1974.

BEREZIN, F. A. Quantization in complex symmetric spaces. **Math. USSR Izvest**., n. 9, p. 341-379, 1975.

BIEDENHARN, L. C.; LOUCK, J. D. **Angular momentum in quantum physics**: theory and application. Boston, USA: Addison-Wesley Publishing Company, 1981.

EDMONDS, A. R. **Angular momentum in quantum mechanics**. Princenton, New Jersey: Princenton University Press, 1960.

HARB, N. H. **Sobre os Trikernels de Stratonovich e de Berezin de símbolos na esfera.** Tese (Doutorado). 2014. Disponível em: <http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/55/55135/tde-06062014-094208/pt-br.php>. Acesso em: 06 jun. 2014.

RIOS, P. de M.; STRAUME, E. **Symbol correspondence, for spin systems.** 1st ed. Heidelberg, Germany: Springer, 2014.

STRATONOVICH, R. L. On distributions in representations space. **Soviet Physics Jetp**, v.4, n. 6, p. 891-898, 1957.

VÁRILLY, J. C.; GRACIA-BONDÍA, J. M. The moyal representation for spin. **Annals of physics**, v. 190, p. 107-148, 1989.

VARSHALOVICH, D. A.; MOSKALEV, A. N.; KHERSONSKII, V. K. **Quantum theory of angular momentum:** irreducible tensors, spherical harmonics, vector coupling coefficients, 3nj symbols. Singapore: World Scientific, 1988.

WEYL, H. **The classical groups, their invariants and representation.** Princeton, New Jersey: Princeton Univ. Press, 1946.

PIRES, F. de S. **Álgebra e formação docente:** o que dizem os futuros professores de matemática. 2012. 138f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2012. Dissertação orientada por Maria do Carmo de Sousa.

ELIAS, Henrique Rizek[1]

Flávio de Souza Pires é graduado em Matemática (Licenciatura) pela Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" (UNESP), mestre em Educação pela Universidade Federal de São Carlos (UFSCar) e, atualmente, cursa doutorado em Educação pela UFSCar, com período sanduíche nos Estados Unidos, na Rutgers University - Newark - NJ.

O primeiro capítulo de sua dissertação de mestrado, intitulado *"O vir a ser" professor de matemática*, foi dedicado a descrever a trajetória do autor, explicitando quais foram as motivações pessoais que o levaram a fazer Licenciatura em Matemática e, posteriormente, mestrado em Educação, e a realizar uma pesquisa no campo da Educação Algébrica. Destaco nesse relato o tom de crítica dado pelo autor ao seu curso de formação inicial, com relação às poucas experiências de sala de aula ao longo da Licenciatura. Além dos estágios obrigatórios, as experiências com estudantes da Educação Básica se deram por meio de "espaços paralelos" – nas palavras do autor – como atividades de extensão e iniciação científica. Foram essas experiências (estágios, atividades de extensão e iniciação científica) que despertaram seu interesse por investigar a linguagem algébrica na Educação Básica. Sua pesquisa teve, então, a seguinte questão norteadora: "o que dizem futuros professores de Matemática sobre o ensino da linguagem algébrica na Educação Básica, a partir das vivências que tiveram e têm na graduação?" O objetivo da investigação foi analisar as falas de um grupo de futuros professores de Matemática (que já haviam realizado estágios curriculares nas escolas da Educação Básica) da cidade de São Carlos - SP em relação ao ensino da linguagem algébrica na Educação Básica.

Uma vez que a pesquisa está inserida no contexto da Licenciatura em Matemática e considerando que as formações dos professores que atuam nesse curso são diferentes – são matemáticos, educadores matemáticos ou educadores – o autor traz, no segundo capítulo, intitulado *Educação, Matemática e Educação Matemática: aproximações aparentes - objetos de estudos evidentes*, uma breve discussão teórica acerca das áreas Educação, Matemática e Educação Matemática. Para Pires (2012), essa discussão é necessária, pois o futuro professor convive com esses conflitos na graduação, uma vez que, de modo geral, no Brasil, o curso de matemática está alocado no departamento de matemática, enquanto que as disciplinas que tratam da educação estão alocadas em outros departamentos.

[1] Doutorando do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina (UEL), Londrina, Paraná, Brasil. Docente na Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), Londrina, Paraná, Brasil. Endereço para correspondência: avenida dos Pioneiros, 3131, CEP 86036-370, Londrina, Paraná, Brasil. Endereço eletrônico henriqueelias@utfpr.edu.br.

Do ponto de vista da diferenciação entre a atividade do matemático e do educador matemático, o autor se baseia em Fiorentini e Lorenzato (2009), quando afirmam que o matemático "tende a conceber a matemática como um fim em si mesma, e, quando requerido a atuar na formação de professores de matemática, tende a promover uma educação *para* a matemática" (p. 3, grifo dos autores); ao passo que a matemática para o educador matemático é, por vezes, concebida

> como um meio ou instrumento importante à formação intelectual e social das crianças, jovens e adultos e também do professor de matemática do ensino fundamental e médio e, por isso, tenta promover uma educação *pela* matemática (FIORENTINI, LORENZATO, 2009, p.3-4, grifo dos autores).

Os vocábulos *para* e *pela* distinguem a prática dos pesquisadores em cada área, na perspectiva dos autores.

No capítulo 3, cujo título é *Álgebra Escolar & Álgebra Acadêmica: substantivos comuns, adjetivos diferentes*, Pires (2012) se fundamenta em Moreira e David (2003) para estabelecer uma diferenciação entre matemática escolar e matemática acadêmica e, a partir disso, estender tais caracterizações para o que vai chamar de *álgebra escolar* e de *álgebra acadêmica*. Para além das matemáticas acadêmica e escolar, Pires valoriza aquelas produzidas em outros contextos, baseando-se em Miguel e Vilela (2008), quando discutem as "práticas escolares de mobilização de cultura matemática".

O autor fez um breve histórico da álgebra acadêmica e da linguagem algébrica, buscando relações delas com a matemática escolar e a matemática acadêmica. Em seguida, elaborou uma seção em que abordou a álgebra e seu ensino, com um breve histórico das reformas curriculares que afetaram o ensino de Álgebra, chegando até os Parâmetros Curriculares Nacionais, os PCN. Apresentou, também, algumas pesquisas que abordam o ensino e a aprendizagem da álgebra e uma discussão sucinta acerca da álgebra na formação do professor.

Finalizando a discussão teórica de sua dissertação, Pires (2012) apresentou algumas concepções sobre o ensino de álgebra. Destacou que o pesquisador mais citado em trabalhos referente às concepções da Álgebra e Educação Algébrica é Zalman Usiskin. Apontou, ainda, outras pesquisas que são bastante referenciadas quando se trata deste tema: Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), Lins e Gimenez (1997) e Lee (2001).

Sobre os aspectos metodológicos, descritos no capítulo 4, *Os percursos de um caminho a desvelar*, a pesquisa contou com a colaboração de licenciandos de três universidades da cidade de São Carlos/SP, sendo duas públicas e uma particular. Após o contato com o coordenador do curso de Licenciatura em Matemática de cada uma das instituições e a permissão para realizar a pesquisa, foram efetivados o envolvimento e a participação dos licenciandos para que respondessem ao questionário – instrumento de coleta de dados – e participassem, voluntariamente, do grupo de estudos em educação algébrica, realizado na UFSCar.

Foi aplicado um questionário piloto na instituição particular, contendo cinco perguntas abertas e cinco fechadas. Após reescrever enunciados que pareciam não estar claros aos estudantes que realizaram a aplicação piloto, o novo questionário (com o mesmo número de questões) foi aplicado em mais cinco turmas das duas instituições públicas da cidade. Por haver poucas correções na aplicação piloto, essa foi utilizada nas análises da pesquisa de Pires (2012), juntamente com as outras aplicações. Desse modo, o número total de estudantes que colaboraram com a pesquisa foi 68, das três instituições citadas.

Tal questionário, aplicado durante as aulas de Prática de Ensino e Estágio Supervisionado, envolvia três grupos de perguntas: o primeiro envolveu aspectos referentes à álgebra, ao pensamento algébrico e ao ensino de álgebra que os próprios estudantes possuíam; o segundo contemplou mais especificamente sobre o movimento da formação de professores, as opções, as justificativas, as influências; o terceiro procurou identificar o perfil dos futuros professores que entraram no curso de Licenciatura em Matemática e suas principais perspectivas após o término do curso.

Destaco duas perguntas que se remetem ao primeiro grupo de questões apresentado, pois as respostas dadas a elas pelos participantes foram bastante relevantes para as análises feitas na dissertação:

i) *Escreva um pouco sobre a álgebra que você aprendeu até agora, tanto no Ensino Fundamental e Ensino Médio quanto no Ensino Superior, indicando suas percepções, compreensões, facilidades e dificuldades.*

ii) *Escreva um pouco sobre como você ensinaria álgebra no Ensino Fundamental ou Médio, versando conceitos tais como: equação, inequação, função, variável, produtos notáveis, polinômios, sistemas lineares, matrizes, determinantes, etc.*

Em um primeiro movimento de análise, mas ainda no capítulo 4, quando apontou os aspectos metodológicos da pesquisa, Pires (2012) constrói categorias a partir das questões pessoais sobre o porquê da escolha da carreira e quais influências sofreram durante a escolha. Para o primeiro caso – motivo da escolha da carreira – o autor apresentou três categorias: 1) Tentativas frustradas no vestibular para cursar áreas de seu interesse; 2) Certeza na escolha profissional; 3) Descoberta profissional. Sobre o segundo aspecto – as influências que sofreram durante a escolha – apresentou cinco categorias: 1) Questões financeiras; 2) Ter bons professores de matemática; 3) O “gosto” e a facilidade de ensinar; 4) O apoio dos pais e familiares; 5) Gostar da área de exatas.

A estratégia de análise e a interpretação dos dados foram feitas a partir dos procedimentos descritos por Fiorentini e Lorenzato (2009). Para as questões abertas, as categorias criadas eram mistas, isto é, “quando o pesquisador obtém as categorias a partir de um confronto entre o que diz a literatura e o que encontra nos registros de campo” (FIORENTINI, LORENZATO, 2009, p. 135).

Assim, a partir de trechos das produções escritas dos participantes, resultantes das respostas ao questionário, seguidos de anotações, interpretações e comentários seus e de conexões com a literatura (referencial teórico utilizado), Pires (2012) construiu as categorias analíticas, discutidas no capítulo 5. São elas: 1. O que dizem os depoimentos dos licenciandos sobre o ensino de conceitos algébricos quando forem docentes da educação básica? 2. A álgebra da educação básica: o olhar daqueles que vivem em seus contrários; 3. A álgebra do ensino superior na visão dos licenciandos; 4. O que é álgebra? 5. Comparações entre as duas álgebras: a acadêmica e a escolar.

Para cada uma dessas categorias, o autor apresentou trechos das respostas dos estudantes para ilustrar e explicitar suas características. Atento-me, nesta resenha, a apenas um trecho de uma dessas categorias (categoria 1). Para as demais categorias, relato um pouco das considerações mais gerais feitas por Pires (2012) acerca de suas análises.

Com relação à primeira categoria, o autor identificou características como *insegurança* ou *dificuldades* em ensinar álgebra e, também, possíveis metodologias que intencionam utilizar (como modelagem matemática, resolução de problemas, aulas expositivas), que foram manifestadas quando responderam à questão ii) apresentada anteriormente. Identificou também concepções de Educação Algébrica segundo seu referencial teórico. Por exemplo, a concepção Letrista Facilitadora apresentada por Lins e Gimenez (1997) ficou evidente quando uma licencianda escreveu

> [...] *para trabalhar com equação eu gosto muito da dinâmica da balança. Ela trata da noção de igualdade, equilíbrio criando um conceito claro na cabeça do aluno. Evitando a `decoreba´ do `passa pra lá´, `troca o sinal´. Sem o aluno entender realmente o que está fazendo* (PIRES, 2012, p. 101).

Para Pires (2012), de uma maneira geral, as palavras que melhor expressam o ensino de álgebra, a partir dos depoimentos dos participantes, seriam: *difícil* e *abstrata*.

Ao responderam à questão *i)*, apresentada anteriormente, alguns estudantes fizeram uma separação explícita entre o que aprenderam de álgebra na Educação Básica e no Ensino Superior, enquanto que outros compararam essas duas aprendizagens. Isso levou o autor a criar as demais categorias analíticas (2, 3, 4 e 5).

Pires (2012) identificou evidências das tensões entre as “álgebras” que os licenciandos apresentam, pois não hesitaram em comparar a álgebra estudada na Educação Básica e a estudada na universidade, pontuando aspectos relacionados não apenas ao ensino, mas também à percepção que tinham sobre os conteúdos algébricos e às dificuldades e facilidades de aprendizagem.

Além do caráter abstrato, outra dificuldade relatada por alguns estudantes e destacada por Pires (2012) refere-se às práticas mecanicistas utilizadas por professores. Por outro lado, alguns relataram ter facilidade justamente pelas boas práticas de seus professores de matemática, sejam da Educação Básica ou do Ensino Superior, destacando este como um aspecto que favoreceu sua compreensão do conteúdo. Os entrevistados também ressaltaram o empenho em estudar a álgebra em ambos os níveis para se obter êxito na aprendizagem.

Em relação à concepção que possuem da álgebra, Pires (2012) percebeu que os estudantes têm percepções muito variadas quando comparadas com as concepções de álgebra presentes na literatura. Segundo o autor, grupos particulares de licenciandos veem a álgebra de maneiras diferentes, seja como ferramenta, como aritmética generalizada, como modelagem ou como meio para resolver problemas. Essas percepções aparecem tanto nos depoimentos relacionados à educação básica como relacionados ao ensino superior.

Das considerações finais, destaco o momento em que o autor afirma que sua pesquisa identificou, a partir das respostas dos participantes, dificuldades com a aprendizagem de conteúdos algébricos desde a Educação Básica, sendo reforçado ao longo da vida acadêmica no Ensino Superior. Para ele, os estudantes apresentam preocupações com o ensino quando comparam a álgebra escolar e a acadêmica no âmbito da sua própria aprendizagem. O problema, sugere o autor, é que as conexões e pontes que devem ser realizadas entre as diferentes álgebras ficam a cargo do próprio futuro professor. Isso se evidencia na resposta de um dos participantes da pesquisa:

> Particularmente, não vejo muita semelhança na álgebra estudada na \`escola´ e no Ensino Superior, pois uma é mais concreta e outra é abstrata; e apesar de sempre gostar da álgebra estudada anteriormente, a álgebra que conheci no Ensino Superior me agrada mais; isso talvez pelo fato de uma dar embasamento teórico para outra; apesar de eu não visualizar essa conciliação (PIRES, 2012, p. 120).

Ao dar voz aos licenciandos, a dissertação de Pires explicita uma desconexão entre a matemática ensinada na universidade e a que o professor irá trabalhar em sua futura prática profissional na Educação Básica.

Em minha perspectiva, está mais do que na hora de discutirmos a fundo as questões da matemática na formação do professor (há autores, como Plínio Moreira e Maria Manuela David, que se debruçam sobre esse tema), para que discursos como o apresentado por Pires (2012) deixem de ser comuns. Quando um estudante afirma que uma (álgebra acadêmica) dá *embasamento* teórico para a outra (álgebra escolar) *apesar de não visualizar essa conciliação*, evidencia, ao meu ver, o distanciamento entre cursos de formação de professores e atuação profissional do professor na escola básica. Entendo que deixar para o futuro professor a difícil tarefa de fazer as conexões (há conexões?) necessárias entre a matemática veiculada em cursos de formação e a trabalhada na Educação Básica significa ausentar-se do papel da Licenciatura de formar professores capacitados para lidar com as demandas da prática.

REFERÊNCIAS

FIORENTINI, D; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática:** percursos teóricos e metodológicos. Campinas, SP: Autores Associados, 2009. (Coleção Formação de Professores).

FIORENTINI, D.; MIGUEL, A.; MIORIM, M.A. Contribuição para um repensar... a educação algébrica elementar. **Pro-Posições**, v. 4, n.1 (10), p. 78-91, 1993.

LEE, L. Early – butwhichalgebra? The future oftheteachingandlearningofalgebra. In: ICMI STUDY CONFERENCE, 12., 2001, Melbourne (Australia). **Proceedings…** Melbourne: ICMI, 2001. p. 392-300.

LINS, R. C., GIMENEZ, J. **Perspectiva em aritmética e álgebra para o século XXI**. Campinas, SP: Papirus, 1997. (Coleção Perspectiva em Educação Matemática).

MIGUEL, A.; VILELA, D. Práticas escolares de mobilização de cultura matemática. **Cadernos do CEDES** (UNICAMP), Campinas, v. 28, p. 97-120, 2008.

MOREIRA, P. C.; DAVID, M. M. M. S. Matemática escolar, matemática científica, saber docente e formação de professores. **Zetétike** (UNICAMP), Campinas, SP, v. 11, n. 19, p. 57-80, 2003.