Hipátia

Revista Brasileira de História, Educação e Matemática

ISSN: 2526-2386

v.6, n.1, jun. 2022

Instituto Federal de São Paulo

Hipátia

Revista Brasileira de História, Educação e Matemática

INSTITUTO FEDERAL
São Paulo

UTFPR
UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

UNICAMP

Hipátia

Revista Brasileira de História, Educação e Matemática

ISSN: 2526-2386

v.5, n.1, junho de 2021

Instituto Federal de São Paulo

HIPÁTIA	**São Paulo (SP)**	**v. 6**	**n. 1**	**p. 1-179**	**jun. 2021**

LINHA EDITORIAL

A HIPÁTIA - Revista Brasileira de História, Educação e Matemática, conforme sugere seu nome, aceita trabalhos de História da Matemática, Educação Matemática e de Matemática (pura e aplicada). A revista foi oficialmente criada em 8 de março de 2016. Duas concepções principais nos norteiam: ajudar a ampliar a participação da mulher na ciência no Brasil e abrir um espaço para jovens pesquisadores (mestres, doutorandos ou doutores que tenham obtido título há, no máximo, cinco anos). Isso significa que procuramos dentro da composição de nosso Conselho Editorial, Conselho Científico e em nossas edições, obter uma maioria de pesquisadores ou de trabalhos cujos autores atendam a pelo menos um desses quesitos. É salutar destacar que, no entanto, contribuições de outros pesquisadores continuam sendo de grande valia. A revista é composta por cinco seções : **1) Ensaios**, na qual são aceitos textos discursivos de caráter crítico **2) Artigos**, na qual são aceitos trabalhos completos ou com resultados parciais consistentes; **3) Iniciação Científica**, na qual são aceitos trabalhos concluídos decorrentes de pesquisas em nível de graduação (iniciação científica, trabalho de conclusão de curso, monografias resultantes de trabalhos orientados por docentes etc.); **4) Relatos de Experiência**, na qual são publicados textos que descrevam precisamente uma dada experiência que possa contribuir de forma relevante para as áreas da HIPÁTIA; **5) Resenhas**, na qual são aceitas resenhas de livros, dissertações e teses, ou outros formatos de interesse publicados preferencialmente há não mais que sete anos.

SUMÁRIO

EDITORIAL

S. César Otero-Garcia, Línlya Sachs, Miriam Cardoso Utsumi vii

Artigo

PRATICAS PEDAGOGICAS DE PROFESSORAS DE MATEMATICA DOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL: UM ESTUDO SOBRE A RELAÇÃO ENTRE SEUS SABERES E AS ORIENTAÇÕES CURRICULARES DA BNCC

Luciana Miyuki Sado Utsumi, Adelmo Carvalho da Silva 1

HISTÓRIA DE MULHERES NA MATEMÁTICA: UMA PROPOSTA PARA SALA DE AULA

Mateus de Souza Galvão, Lucília Batista Dantas 18

CONTRIBUIÇÕES DAS NAVEGAÇÕES PORTUGUESAS PARA A GEOMETRIA DA SUPERFÍCIE TERRESTRE

Carla P. Ferreira dos Santos, Lucas Antônio Caritá, Marta Cilene Gadotti 40

ONDE APRENDEMOS A VIVER O GÊNERO? NAS AULAS DE MATEMÁTICA!

Vanessa Franco Neto 51

FILOSOFIA DA MATEMÁTICA EM TESES BRASILEIRAS: UM LEVANTAMENTO BIBLIOGRÁFICO ENTRE 2015 E 2020

Maxwell Gonçalves Araújo, Andrei L. Berres Hartmann, Luciana L. da Silva Barbosa 63

A RELAÇÃO PROFESSOR-ALUNO: UMA ANÁLISE A PARTIR DA PSICOLOGIA ANALÍTICA

Jader Otávio Dalto, Carolina Caires 81

ENTRE TRAÇOS, TRAMAS E TRAVESSIAS: A MOBILIZAÇÃO DA HISTÓRIA ORAL PARA COMPREENDER UM GRUPO ESCOLAR

Grasielly dos Santos de Souza, Mirian Maria Andrade 97

Iniciação Científica

UMA VERSÃO DA HISTÓRIA DO CÁLCULO INFINITESIMAL

Gabriel Faria Vieira, Mônica de Cássia Siqueira Martines 109

Relato de Experiência

UMA EXPERIENCIA “PIBIDIANA” DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DO PISA NAS AULAS DE MATEMATICA

Tailine Audilia de Santi, Fábio A. Borges, Caio Juvanelli, Vinícius O. Romano da Silva 124

A MATEMÁTICA ESTÁ EM TUDO: UMA PROPOSTA DE DIVULGAÇÃO CIENTÏFICA NA AMAZÔNIA

Claudina Azevedo Maximiano, Pedro Italiano Neto, Venício Favoretti 143

O ENSINO DA ESTATISTICA INSPIRADO NA EDUCAÇÃO MATEMATICA CRITICA: UM PROJETO BASEADO EM PROPOSTAS INVESTIGATIVAS PARA ESTUDANTES DA EDUCAÇÃO BASICA

Dilson Ferreira Ribeiro 155

RECORRENCIAS LINEARES E EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES

UMA BREVE APRESENTAÇÃO DE SUAS SIMILARIDADES

Antônio Manual da Silva Andrade, Marcos Ferreira de Melo 170

EDITORIAL

S. César **Otero-Garcia**
Editor-chefe

Línlya **Sachs**
Miriam Cardoso **Utsumi**
Coeditoras

Esta edição do primeiro semestre de 2021 da Hipátia – Revista Brasileira de História, Educação e Matemática nos brinda com artigos, relatos de experiências e de iniciação científica que abordam temas relevantes para a Educação Matemática, com importantes conexões com outras áreas do conhecimento.

Entre os artigos, temos um que trata dos saberes profissionais dos professores de Matemática dos anos iniciais do Ensino Fundamental (*"Práticas Pedagógicas de Professores de Matemática dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental: um estudo sobre a relação entre seus saberes e as orientações curriculares da BNCC"*, de Luciana Miyuki Sado Utsumi e Adelmo Carvalho da Silva); um que realiza uma análise à luz da Psicologia Analítica a respeito da relação entre professor e aluno (*"A Relação Professor-Aluno: uma análise a partir da psicologia analítica"*, de Jader Otavio Dalto e Carolina Caires Motta); um que apresenta um levantamento bibliográfico de pesquisas sobre Filosofia da Matemática (*"Filosofia da Matemática em Teses Brasileiras: um levantamento bibliográfico entre 2015 e 2020"*, de Maxwell Gonçalves Araújo, Andrei Luís Berres Hartmann e Luciana Leal da Silva Barbosa); dois que tratam da questão de gênero na Matemática (*"História das Mulheres na Matemática: uma proposta para a sala de aula"*, de Mateus de Souza Galvão e Lucília Batista Dantas Pereira, e *"Onde Aprendemos a Viver o Gênero?: nas aulas de matemática!"*, de Vanessa Neto); um sobre História da Matemática (*"Contribuições das Navegações Portuguesas para a Geometria da Superfície Terrestre"*, de Carla Patrícia Ferreira dos Santos, Lucas Antonio Caritá e Marta Cilene Gadotti); e um sobre História da Educação (*"Entre traços, tramas e travessias: a mobilização da História Oral para compreender um Grupo Escolar"*, de Grasielly Santos Souza e Mirian Maria Andrade).

Há uma pesquisa de iniciação científica, que aborda o Cálculo Infinitesimal sob a perspectiva histórica (*"Uma Versão Histórica do Cálculo Infinitesimal"*, de Gabriel Faria Vieira e Mônica de Cássia Siqueira Martines).

Por fim, são quatro relatos de experiência: um sobre estatística básica para estudantes do sétimo ano do Ensino Fundamental (*"O Ensino da Estatística Inspirado na Educação Matemática Crítica um projeto baseado em propostas investigativas para estudantes da educação básica"*, de Dilson Ferreira Ribeiro); um sobre divulgação científica (*"A Matemática Está em Tudo: uma proposta de divulgação científica na Amazônia"*, de Claudina Azevedo Maximiano, Venicio Favoretti e Pedro Italiano de Araújo Neto); um que aborda a estratégia de ensino através da resolução de problemas (*"Uma Experiência "Pibidiana" de Resolução de Problemas do Pisa nas Aulas de Matemática"*, de Fábio Alexandre Borges, Tailine Audilia de Santi, Caio Juvanelli e Vinícius Oliveira Romano da Silva); e um que trata de Matemática Discreta (*"Recorrências Lineares e Equações Diferenciais Lineares: uma experiência em uma turma de matemática discreta"*, de Marcos Melo e Antonio Manoel da Silva Andrade).

Convidamos todas e todos a lerem criticamente essas publicações, que contribuem para o desenvolvimento da pesquisa científica brasileira.

São Paulo, junho de 2021.

Práticas Pedagógicas de Professoras de Matemática dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental

um estudo sobre a relação entre seus saberes e as orientações curriculares da BNCC

Pedagogical Practices of Mathematics Teachers in the Early Years of Elementary School

a study on the relationship between their knowledge and the curricular guidelines of BNCC

Luciana Miyuki Sado **Utsumi**
Universidade Metodista de São Paulo (UMESP)

Adelmo Carvalho da **Silva**
Universidade Federal do Mato Grosso (UFMT)

RESUMO

O presente estudo tem por objetivo verificar as relações entre os saberes profissionais dos professores de Matemática dos anos iniciais do Ensino Fundamental e a respectiva proposta curricular apresentada na BNCC de 2018. Os caminhos metodológicos: pesquisa bibliográfica, bem como a análise do documento referente à BNCC. O trabalho de campo realizou-se em instituições educacionais de natureza privada, com professoras que ensinam Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Foram utilizados questionários *on-line* com os sujeitos participantes, individuais e respondidas a distância. A análise dos dados baseou-se em princípios teórico-metodológicos e epistemológicos subjacentes à metodologia de análise de conteúdo. Verificou-se que os aspectos teóricos e metodológicos apontados nas manifestações das professoras se aproximam, em maior ou menor grau, às orientações curriculares da BNCC, bem como às orientações científicas da pesquisa na área da Educação e da Educação Matemática. Constatou-se que as professoras, munidas de seus saberes construídos no decorrer de suas trajetórias formativas, dialogam com a perspectiva de aprendizagem significativa do campo da educação matemática e, consequentemente, se aproximam das orientações curriculares da BNCC. A despeito da necessidade de construção de novos saberes e conhecimentos pedagógicos para o enfrentamento do processo de implantação da BNCC no currículo das escolas, as professoras apresentaram, em menor ou maior grau de consciência e reflexão crítica, os conhecimentos específicos, pedagógicos e curriculares presentes nos pressupostos teóricos e metodológicos da BNCC.

Palavras-chave: Base Nacional Comum Curricular. Matemática Escolar. Prática Pedagógica. Formação de Professores. Formação Continuada.

ABSTRACT

The present study aims to verify the relationship between the professional knowledge of Mathematics teachers in the early years of elementary school and the respective curricular proposal presented at BNCC of 2018. The methodological paths: bibliographic research, as well as the analysis of the document referring to the BNCC. The fieldwork was carried out in educational institutions of a private nature, with teachers who teach Mathematics in the early years of elementary school. On-line questionnaires were used with the participating subjects, individually and answered a a distance. Data analysis was based on theoretical-methodological and epistemological principles underlying the content analysis methodology. It was found that the theoretical and methodological aspects pointed out in the teachers' manifestations are closer, to a greater or lesser extent, to the curriculum guidelines of the BNCC, as well as the scientific guidelines of research in the area of Education and Mathematical Education. It was found that the teachers, armed with their knowledge built during their formative trajectories, dialogue with the perspective of meaningful learning in the field of Mathematical Education and, consequently, come close to the curriculum guidelines of the BNCC. Despite the need to build new knowledge and pedagogical knowledge to face the process of implementing BNCC in the school curriculum, the teachers presented specific, pedagogical and present in the theoretical and methodological assumptions of the BNCC.

Keywords: National Common Curricular Base. School Mathematics. Pedagogical Practice. Teacher Training. Continuing Education.

1 INTRODUÇÃO

O presente artigo é um recorte dos resultados da pesquisa do Estágio Pós-Doutoral, realizado no âmbito do Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal de Mato Grosso. Tal investigação visou aprofundar os estudos sobre a construção de saberes profissionais do professor de Matemática dos anos iniciais do Ensino Fundamental, haja vista que, para Tardif (2002), os conhecimentos profissionais são evolutivos e progressivos, tanto em suas bases teóricas quanto em suas consequências práticas e necessitam de uma formação contínua e continuada. Assim, os profissionais devem autoformar-se e reciclar-se através de diferentes meios, após seus estudos universitários iniciais. Desse ponto de vista, a formação profissional ocupa, em princípio, uma boa parte da carreira e os conhecimentos profissionais partilham com os conhecimentos científicos e técnicos a propriedade de serem revisáveis, criticáveis e passíveis de aperfeiçoamento.

Ainda de acordo com Tardif (2002 *apud* FAUSTINO, 2011), os saberes docentes são plurais e advindos de diferentes naturezas. Dessa forma, para o professor ensinar Matemática, é necessário que ele tenha conhecimento do conteúdo; do aluno e de sua aprendizagem; do contexto de trabalho; da maneira como a Matemática se organiza; dos diversos recursos e métodos para tornar a Matemática mais compreensível aos alunos; da experiência profissional; do currículo da matemática escolar. Em suma, o professor de Matemática deve ter conhecimentos teóricos e práticos para ensinar dado conteúdo escolar.

A par dessas considerações acerca dos saberes necessários para os professores de Matemática dos anos iniciais do Ensino Fundamental, podemos destacar a principal contribuição de Shulman (1986) para o campo educativo, ligada à temática da aprendizagem para a docência, isto é, a base de conhecimentos que é exigida do professor em sua prática profissional, que consiste na teoria do Conhecimento Pedagógico do Conteúdo (ou PCK, da sigla em inglês para *Pedagogical Content Knowledge*). A definição de PCK supera a ideia de que para ensinar é necessário somente dominar o conteúdo e avançar no sentido de uma combinação entre o conhecimento da matéria da disciplina e o conhecimento de como ensiná-la, visando torná-la mais compreensível para o aluno, incluindo os modos de apresentá-la e abordá-la.

Neste sentido, acredita-se em uma articulação entre os conhecimentos específicos, pedagógicos e curriculares (*o que* ensinar, *como* ensinar, *por que* ensinar e *para quem* ensinar), de modo a garantir as condições mínimas necessárias para o desenvolvimento de um trabalho com os saberes matemáticos, os quais estejam em sintonia com as atuais demandas exigidas pela sociedade na educação escolar.

Na esteira dessas considerações, o problema para a pesquisa do estágio pós-doutoral se configurou nos seguintes termos: Com base nas orientações curriculares apontadas na BNCC, bem como a partir do diálogo deste documento com as práticas pedagógicas dos professores de Matemática dos anos iniciais do Ensino Fundamental, quais são as relações entre os saberes profissionais dos sujeitos contemplados na presente investigação e a proposta curricular da BNCC?

Assim, o objetivo geral da pesquisa consistiu em verificar quais as relações entre os saberes profissionais das professoras de Matemática dos anos iniciais do Ensino Fundamental e a respectiva proposta curricular apresentada na BNCC, nos seguintes termos:

- Verificar quais as concepções das professoras de Matemática dos anos iniciais do Ensino Fundamental acerca das orientações curriculares da Matemática na BNCC;

- Identificar quais os saberes/conhecimentos necessários ao professor de Matemática dos anos iniciais do Ensino Fundamental, conforme as orientações curriculares da BNCC;
- Discutir a relação entre as práticas pedagógicas de professoras de Matemática dos anos iniciais do Ensino Fundamental, em relação às orientações curriculares da BNCC.

A investigação sobre as práticas de ensino de professoras de Matemática dos anos iniciais possibilitou aprofundar-se o debate sobre como diferentes sujeitos se percebem como professoras e vão construindo seus saberes profissionais, com foco na discussão das representações que possuem sobre os saberes teóricos e práticos que estão construindo, enquanto professoras de Matemática dos anos iniciais do Ensino Fundamental, em interface com as respectivas orientações curriculares da BNCC.

O trabalho de campo realizou-se em instituições educacionais de natureza privada, nos segmentos de ensino da educação básica, com professoras que lecionam Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Nas três escolas participantes da pesquisa, o primeiro contato deu-se no âmbito da direção escolar e/ou da coordenação pedagógica, para apresentar a proposta de coleta de dados e verificar a possibilidade de realização da pesquisa de campo. Participaram da pesquisa 17 professoras de Matemática dos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Como instrumentos de coleta de dados da pesquisa foram utilizados questionários preenchidos a distância[1] e enviados por meio de mensagem eletrônica. A coleta de dados da pesquisa realizou-se no período de outubro a dezembro de 2019, considerando-se a organização dos tempos e dos espaços de cada instituição, bem como os tempos e a disponibilidade de cada professora, já que, a despeito da coleta de dados ter sido realizada a distância, as professoras participantes tiveram que gerenciar sua disponibilidade de tempo para o preenchimento do questionário *on-line*.

Reunindo componentes similares entre os dados coletados, foi possível classificar estes de acordo com as categorias teóricas iniciais, ou de acordo com conceitos emergentes. Ao organizar as respostas das professoras por agrupamentos, foram levantados os índices de palavras/ideias para se chegar no indicador temático do agrupamento das respostas, ou seja, na *categoria de análise*. Assim, à luz da problemática da investigação, chegou-se à definição de *três categorias de análise*:

- Categoria 1: Conhecimento da BNCC e o aprimoramento das práticas pedagógicas no ensino de Matemática (1° ao 5° ano);
- Categoria 2: BNCC e formação continuada de professoras que ensinam matemática (1° ao 5° ano);
- Categoria 3: Prática pedagógica bem sucedida de professoras que ensinam Matemática (1° ao 5° ano) e a relação entre seus saberes e a BNCC.

A análise dos dados coletados tomou como base os princípios teórico-metodológicos e epistemológicos, subjacentes à metodologia de análise de conteúdo (BARDIN, 1977).

Metodologicamente, segundo Bardin (1977), confrontam-se ou completam-se duas orientações: a verificação prudente ou a interpretação brilhante, na medida em que a análise de conteúdo, enquanto esforço de interpretação, oscila entre o rigor da objetividade e a fecundidade da subjetividade. Nesse sentido, a metodologia da análise de conteúdo instiga o pesquisador a

---

[1] *Google Forms* é uma das aplicações do *Google* que lhe permite criar questionários (forms.google.com).

enxergar o não-aparente, o não-dito, uma vez que se sente atraído pelo potencial de inédito latente nas manifestações e nas mensagens dos sujeitos da investigação.

A análise de conteúdo é transversal, isto é, recorta o conjunto das respostas do questionário, por meio de uma grelha de categorias projetadas sobre os conteúdos. Considera-se a frequência dos temas extraídos do conjunto dos discursos, tidos como dados segmentáveis e comparáveis. Através de um sistema de categorias, a análise de conteúdo aplica uma teoria (quadro teórico) aos dados/manifestações coletados.

Em outras palavras, tal análise procurou identificar tendências e padrões relevantes, buscar relações e inferências entre as tendências e padrões num nível de abstração mais elevado. Nesse aspecto, o interesse não residiu na descrição dos conteúdos, mas no que os conteúdos nos ensinaram/revelaram após serem tratados, buscando compreender o sentido da comunicação (das respostas dos questionários), mas também desviar o olhar (desvelar) para uma outra possível significação.

A problematização acerca da formação de professores de Matemática para os anos iniciais do Ensino Fundamental, em busca da qualidade e da superação de práticas pedagógicas pautadas em manuais prescritivos, constituiu-se objeto de pesquisa e de garantia de processos de formação mais significativos, quer para os alunos, quer para os professores.

Dentre a documentação contemplada na revisão bibliográfica a respeito do tema da pesquisa, analisaram-se as diretrizes curriculares da Base Nacional Comum Curricular - BNCC (BRASIL, 2018); as propostas curriculares relacionadas à Matemática dos anos iniciais do Ensino Fundamental apresentadas nesse documento; bem como transitamos pela literatura científica relacionada à pesquisa realizada, a partir dos quais nos propusemos a desenvolver a investigação e a análise do estudo em questão.

Face aos resultados da pesquisa realizada, torna-se fundamental enunciar no presente artigo, os modos de negociação que as professoras de Matemática dos anos iniciais do Ensino Fundamental assumem, por meio de suas práticas pedagógicas e na construção de suas profissionalidades docentes, frente às exigências de cumprimento da proposta curricular nacional vigente: a BNCC.

2 DESENVOLVIMENTO

No que concerne a uma proposta curricular para os dias atuais, Cury, Reis e Zanardi (2018, p. 48) apresentam em sua obra os dilemas e as perspectivas da BNCC, colocando em evidência a importância desse documento, já que:

> A elaboração de uma base nacional comum curricular tem a ver com a constituição de uma cidadania portadora de representatividade e de participação. E a educação escolar é uma forma de viabilizar esta vida cidadã nos espaços de uma coesão nacional que garanta os princípios da igualdade e da liberdade.

Os mesmos autores problematizam tal debate, apontando como um dos limites desse documento normativo as evasivas quanto à formação de professores, uma vez que "o currículo implica intencionalidades e uma construção epistemológica social que se fazem presentes na *práxis* político-pedagógica que atinge os sistemas educativos e são neles gestadas" (CURY; REIS; ZANARDI, 2018, p. 11).

A concepção que subsidia a proposta curricular da BNCC pauta-se na ideia segundo a qual:

> A BNCC seria o instrumento para qualificar a educação através de uma identidade de conhecimentos que seja proporcionada a todos os estudantes da Educação Básica brasileira. Ela serviria para superar as desigualdades evidentes em nosso sistema educacional. Ela se envolve em uma visão de escolarização que, para termos uma educação de qualidade seria necessário proporcionar conteúdos idênticos para possibilitar uma igualdade de oportunidades entre os educandos (CURY; REIS; ZANARDI, 2018, p. 61).

Dessa maneira, torna-se fundamental focalizar nosso olhar para as conexões, relações e interações entre as propostas curriculares contemporâneas[2] e suas relações com o trabalho docente, em especial, com as dimensões que envolvem o conhecimento, os saberes, a formação e a profissionalização dos professores de Matemática dos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Shulman (2004) problematiza acerca da necessidade da intersecção entre conteúdos específicos e questões didático-pedagógicas quando diz que, provavelmente, o conhecimento do conteúdo pedagógico seja a categoria que mais distingue o entendimento do educador especialista em conteúdo – no caso, da Matemática – do entendimento do educador preocupado com as questões do ensino. Nessa perspectiva, tais conhecimentos devem ser complementares, na medida em que o professor assume a tomada de decisões relativas ao “o que ensinar” e ao “como ensinar” em suas práticas pedagógicas.

Para a formação de professores, o desafio consiste em conceber a escola como um ambiente educativo, onde trabalhar e formar não sejam atividades distintas, na medida em que a formação deve ser encarada como um processo permanente, integrado no dia a dia dos professores e das escolas, e não como uma função que intervém à margem dos projetos profissionais e organizacionais (MCBRIDE, 1989 *apud* NÓVOA, 1995).

Nesse contexto, desenvolver uma proposta de formação continuada em serviço, que dialogue com as necessidades concretas dos professores e da escola, torna-se um desafio permanente de busca de sentido(s) em prol do processo de ensino e de aprendizagem, haja vista que, em sentido contrário, podemos encontrar um cenário preocupante nos termos que Ortega (2011, p. 56) anuncia, especificamente em relação à matemática escolar:

Estudos relacionados ao processo de ensino-aprendizagem de Matemática, muitas vezes, são incorporados como discursos no interior das escolas, mas não se convertem em práticas de ensino que deem significado aos conteúdos matemáticos. As reformas curriculares ocorridas nos últimos anos no Brasil têm evidenciado tal situação. Mesmo com orientações que sugerem práticas que vão além da memorização, da abordagem mecânica e superficial dos conteúdos matemáticos, esse tipo de prática persiste nas salas de aula.

Assim, o paradigma emergente que engloba a relação triangular escola-sociedade-professores traduz-se numa multiplicidade de modalidades organizativas da escola e da prática profissional dos professores, a fim de se constituírem em respostas mais adequadas e eficazes, diante da crescente complexidade das situações e das necessidades educativas dos indivíduos e das sociedades, tendo como eixo a mudança.

Inovar requer do professor de Matemática reflexão contínua sobre suas práticas pedagógicas, ampliação de seu tempo pedagógico em sala de aula, autoria e responsabilidade em suas escolhas pedagógicas, atendimento às diferenças, trabalho diversificado, bem como disponibilidade à mudança e crença numa educação matemática de qualidade, de maneira a

---

[2] Pode-se dizer que um currículo *nacional* se cruza com uma função social do Estado que é o de atender a um direito do cidadão que busca na educação escolar uma via de cidadania compartilhada com seus concidadãos e um acesso digno na partilha dos bens produzidos (CURY; REIS; ZANARDI, 2018, p. 20).

superar modelos de desenvolvimento repressivos e opressivos, que se pautam em sistemas educacionais que utilizam um conhecimento matemático obscuro e mistificado, como instrumento discriminatório eficaz nos processos e mecanismos que promovem o fracasso escolar e a exclusão social (D'AMBROSIO, 1986).

Promover experiências matemáticas e o aprendizado dos conteúdos matemáticos escolares continua sendo um grande e constante desafio do professor que se propõe a atingir a função da Matemática na vida escolar e extraescolar de seus alunos.

3 A BNCC E A MATEMÁTICA DOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

A Base Nacional Comum Curricular - BNCC é fruto de um trabalho conjunto entre poder público, especialistas e a comunidade. Sua formulação, sob coordenação do Ministério da Educação (MEC), contou com ampla consulta à comunidade educacional e à sociedade.

Por meio da mensagem "EDUCAÇÃO É A BASE", a BNCC é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da educação básica. Ela estabelece um norte, para que todas as escolas tenham clareza em relação a qual deve ser o foco, no que deve concentrar bem como qual o papel da escola, em última instância.

Em outros termos, a BNCC é um documento que visa nortear o que é ensinado nas escolas do Brasil inteiro, englobando desde a Educação Infantil até o final do Ensino Médio. Consiste num documento que define os conhecimentos essenciais que todos os alunos da educação básica têm o direito de aprender ao designar algo comum, ou seja, aquilo que os estudantes devem aprender no processo de escolarização, o que inclui tanto os saberes quanto a capacidade de mobilizá-los e aplicá-los.

Desse modo, torna-se referência nacional para a formulação do currículo e das propostas pedagógicas de instituições escolares de educação básica, públicas e privadas, da Educação Infantil ao Ensino Médio. Assim como o lema "ensinamentos comuns, vivências diferentes" (FILHO, 2018)[3], a BNCC defende uma proposta curricular na qual as competências e diretrizes são comuns, enquanto os currículos são diversos.

Os Projetos Político-Pedagógicos das escolas de educação básica deverão adequar as suas propostas curriculares e pedagógicas às prescrições da BNCC, com base em ideias e princípios fundantes, tais como a busca de uma formação humana integral dos alunos[4] - compromisso com a educação integral[5] - por meio de aprendizagens essenciais e a garantia ao direito de aprendizagens e desenvolvimento (patamar comum de aprendizagens a todos os estudantes), em prol da construção de uma sociedade mais justa, democrática e inclusiva.

A BNCC indica que as decisões pedagógicas devem ser orientadas para o desenvolvimento de dez competências gerais[6], que consubstanciam, no âmbito pedagógico, os direitos de aprendizagem e desenvolvimento. Na BNCC, competência é definida como a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e

---

[3] FILHO, O. N. Ensinamentos comuns, vivências diferentes. **Folha de Londrina (PR).** 15 de janeiro de 2018.

[4] Compromisso com a formação e o desenvolvimento humano global, em suas dimensões intelectual, física, afetiva, social, ética, moral e simbólica.

[5] O conceito de educação integral com o qual a BNCC está comprometida se refere à construção intencional de processos educativos que promovam aprendizagens sintonizadas com as necessidades, as possibilidades e os interesses dos estudantes e, também, com os desafios da sociedade contemporânea.

[6] Ao dizer que os conteúdos curriculares estão a serviço do desenvolvimento de competências, a Lei de Diretrizes e Bases (LDB) orienta a definição das aprendizagens essenciais, e não apenas dos conteúdos mínimos a ensinar.

socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho.

Por meio da indicação clara do que os alunos devem “saber” e, sobretudo, do que devem “saber fazer” (considerando a mobilização desses conhecimentos, habilidades, atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho), a explicitação das competências oferece referências para o fortalecimento de ações que assegurem as aprendizagens essenciais definidas na BNCC.

O grande desafio das escolas consiste em incorporar aos currículos e às propostas pedagógicas a abordagem de temas contemporâneos que afetam a vida humana em escala local, regional e global, preferencialmente de forma transversal e integradora.

Segundo Cury, Reis e Zanardi (2018), a BNCC se constitui em um projeto normativo que estabelece um documento prescritivo de competências, habilidades, conteúdos, ou, como preferem denominar, direitos de aprendizagem.

De acordo com a BNCC, o Ensino Fundamental deve ter compromisso com o desenvolvimento do *letramento matemático*, definido como:

> as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas. É também o letramento matemático que assegura aos alunos reconhecer que os conhecimentos matemáticos são fundamentais para a compreensão e a atuação no mundo e perceber o caráter de jogo intelectual da matemática, como aspecto que favorece o desenvolvimento do raciocínio lógico e crítico, estimula a investigação e pode ser prazeroso (fruição). (BRASIL, 2018, p. 264).

A BNCC nos direciona a trabalhar com a resolução de problemas como uma das macro-competências em busca do desenvolvimento do letramento matemático, e reafirma esse fato quando diz que a resolução de problemas é uma macro-competência que os educandos devem desenvolver ao longo de todo o Ensino Fundamental.

Dentre as competências específicas de Matemática para o Ensino Fundamental podemos destacar:

5. Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados.
6. Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados).

Segundo Czigel, Mondini e Pavanel (2019, p. 364), “o estudo da Matemática no Ensino Fundamental vislumbra, além da formação científica, a formação crítica e reflexiva do estudante, de modo que, ao finalizar essa etapa escolar, ele seja capaz de compreender o mundo em que vive, enfrentar problemas e tomar decisões”.

Santos (2018) problematiza que, apesar do poder das políticas públicas sobre o currículo oficial e a relação disso com a seleção de conteúdos, é fundamental pensar o sentido de currículo, a partir da observância às matrizes curriculares regional/local, e o cuidado com a seleção de conteúdos matemáticos e os objetos de conhecimento apontados pela BNCC.

O mesmo autor lança uma provocação: *a ideia de um documento ser normativo, é suficiente para dar sentido à aprendizagem?*, na medida em que defende a ideia segundo a qual um currículo escolar, no que se refere à Matemática, deve ir além da concepção que a BNCC oferece nos objetos de conhecimento e nas habilidades, distribuídos nas unidades temáticas: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas e Probabilidade e Estatística, pois os processos de ensinar e aprender devem contemplar uma noção contextual que envolve a abstração, para usar com competência os conhecimentos, e isso envolve capacidades essenciais de formular, empregar, interpretar e avaliar, mas, também, autonomia para criar.

Em suma, "a BNCC aponta que a Matemática assume um papel fundamental de inclusão do sujeito, a partir de uma reflexão sobre sua cidadania e seu protagonismo na conscientização do direito de aprender" (SANTOS, 2018, p. 136).

Para Santos e Matos (2017), é importante discutir a (re)construção de um currículo que venha colaborar para a constituição de novos paradigmas nos processos de ensino e de aprendizagem, os quais direcionem a instituição escolar a ultrapassar a barreira do modelo de ensino conteudista, que exige do professor uma mudança de postura, para que ele possa inovar nas práticas pedagógicas, escolher com qualidade suas metodologias e práticas pedagógicas, assim como elaborar novas formas de avaliação, tendo como um documento de referência, o currículo.

E no que se refere ao currículo de Matemática, envolvendo os objetos de conhecimentos e os direitos de aprendizagem,

> [...] professores devem permanecer em luta pelo reconhecimento de um currículo, que não represente apenas a seleção de conteúdos, mas que seja uma construção cultural do sujeito, para o sujeito – na escola, num movimento de transformação do saber científico em saber escolar, com sentido na/para realidade desse sujeito. (SANTOS; MATOS, 2017, p. 142).

Na esteira dessas considerações, pode-se observar que as discussões em torno da BNCC reforçam a necessidade de mais informações e formações nas escolas, a fim de promover o debate e a inserção da base curricular nacional, em função das realidades regionais e locais.

Igualmente, os projetos político-pedagógicos devem ser considerados no processo de implementação curricular e na organização do ensino por parte dos professores, garantindo sua autonomia para a realização dessa discussão na escola.[7]

A natureza do conhecimento matemático deve estar intrínseca ao trabalho do professor, de modo que ele possibilite ao estudante fazer Matemática, o que significa construí-la, produzi-la, por meio da resolução de problemas inteligentes ou desafiadores. O estudante deve ter a oportunidade de:

> [...] dialogar, formular perguntas, elaborar hipóteses, exercitar conjecturas, realizar experimentações e procurar comprovações para encontrar a solução. Isso deve ocorrer em um ambiente de comunicação de ideias e de negociação e produção de significados que vão sendo construídos nas interações espontâneas que o ambiente permite (PASSOS; NACARATO, 2018, p. 126).

[7] A BNCC avançou ao introduzir novos conteúdos, mas da forma como o fez, não dá subsídios ao professor que não tem uma formação específica para ensinar Matemática e que, o modo como as habilidades foram redigidas dificilmente serão por ele compreendidas. Portanto, muitos são os desafios para a implementação desse documento e são pouco animadoras as ações até aqui apresentadas para garantir o mínimo de conhecimento para o professor trabalhar com segurança (PASSOS; NACARATO, 2018, p. 131).

Para Santos e Matos (2017), as reformas curriculares não cessam com a BNCC, mas esse documento inaugura uma nova era nas escolas básicas, que incluem repensar a forma de ensinar e aprender, com implicações na formação docente, tendo em vista que é a primeira vez na história do Brasil que se elabora um currículo nacional de base comum.

4 RESULTADOS DA PESQUISA

A análise dos dados coletados tomou como base os princípios teórico-metodológicos e epistemológicos, subjacentes à metodologia de análise de conteúdo. Assim, à luz da problemática de investigação, chegou-se à definição de *três categorias de análise*, com a finalidade de mapear e anunciar quais as relações entre os saberes profissionais das professoras de Matemática dos anos iniciais do Ensino Fundamental e a respectiva proposta curricular apresentada na BNCC.

4.1 CATEGORIA 1

As manifestações de professoras que tinham o conhecimento da BNCC foram coletadas, no intuito de verificar qual a relação entre o conhecimento dessa proposta curricular e o aprimoramento de suas práticas pedagógicas para o ensino da Matemática (anos iniciais), bem como no intuito de verificar quais são as concepções das professoras de Matemática dos anos iniciais do Ensino Fundamental, acerca das orientações curriculares de Matemática da BNCC.

Pudemos constatar que as professoras consideram que a BNCC é um documento curricular que norteia e orienta suas práticas pedagógicas e, apesar da sua natureza prescritiva, consideram que o documento seja uma proposta curricular por meio da qual as práticas pedagógicas são configuradas e desenvolvidas.

Acredita-se que quanto maior a predisposição do professor para aceitar e aderir às propostas curriculares, maior será a sua predisposição em considerar as orientações curriculares, experimentar as inovações propostas em sua prática pedagógica, aprimorando as mesmas e, permanentemente, avaliar os efeitos dessa relação na gestão e na condução do processo de ensino e de aprendizagem escolar.

Tal predisposição se manifesta nas respostas da professora P5 – “Acredito que ao estudarmos documentos que nos direcionam algumas propostas pedagógicas, tornamos nossas aulas mais enriquecedoras e significativas” – da professora P8 – “É um longo estudo que norteia o planejamento dos professores possibilitando ampliar para projetos e sequências didáticas” – e da professora P16 – “O documento está condizente com as mudanças da sociedade e temos que lançar mão de estratégias renovadoras para também acompanhar o processo.”

Identificou-se a concepção de currículo prescrito na manifestação da professora P2 - “para orientar aos professores sobre os conteúdos necessários aos alunos em cada série” - ao ser confrontada com a definição de Canavarro e Ponte (2003, p. 05), segundo a qual “o currículo prescrito, é ditado pelos órgãos político-administrativos e tem um papel de prescrição ou orientação relativamente ao conteúdo do currículo, sobretudo no que diz respeito à educação obrigatória”, funcionando como referência básica para a ordenação do sistema curricular, a elaboração de materiais curriculares e o controle do sistema educacional.

A manifestação da professora P16 – “O documento está condizente com as mudanças da sociedade e temos que lançar mão de estratégias renovadoras para também acompanhar o processo" – compreende o desenvolvimento curricular como sendo situado no contexto de constantes mudanças e inovações.

A professora P3 foi a única que respondeu fazendo alusão ao ensino de Matemática, como indicava a pergunta do questionário. Em sua manifestação, ela expressa que "o documento traz importantes reflexões sobre o ensino da Matemática", contudo, não especifica quais seriam tais reflexões que a mesma considera importantes para o aprimoramento das práticas pedagógicas no ensino da Matemática.

Ao dar importância às reflexões da BNCC sobre o ensino da Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental, a professora P3 deverá assumir seu papel na produção, tradução, reconstrução, seleção e adaptação da BNCC, na medida em que:

> [...] a matemática escolar constitui-se com base em disputas que se desenvolvem no plano das prescrições curriculares, mas resulta, em última instância, do processo pelo qual a prática escolar, valendo-se de sua lógica e de seus condicionantes, opera sobre as prescrições (MOREIRA; DAVID, 2005, p. 52).

As professoras P4 e P11 acreditam que a BNCC traz aprimoramento para as suas respectivas práticas pedagógicas, quando fazem referência aos recursos e ferramentas pedagógicas que possam facilitar o processo de aprendizagem dos alunos, mais especificamente, da matemática escolar, conforme a professora P11 explicita – "o que me obriga a modificar a ótica de trabalho com essa matéria."

Tais manifestações nos levam a inferir que, num primeiro momento, as professoras interpretam a BNCC como uma prescrição curricular que deve ser o ponto de partida para a reflexão sobre as orientações didáticas, que possam facilitar as aprendizagens dos alunos. Num segundo momento, a definição dos recursos e ferramentas pedagógicas pode ser subsidiada pelo currículo desenhado ou apresentado, que é aquele que chega aos professores através dos meios ou materiais curriculares (manual escolar), os quais colocam à disposição do professor uma interpretação do currículo, geralmente mais concretizada e orientada para a prática letiva – "a prática vai encaminhar a uma reestruturação de conceitos elaborados" (P11) - facilitando-lhes a atividade de planejamento (CANAVARRO; PONTE, 2003).

A professora P10 ressalta as competências socioemocionais "que se esperam desenvolver a partir da BNCC", compreendendo que o ensino da Matemática deve considerar tais competências no tratamento e no desenvolvimento de seus conteúdos – "devemos desenvolver nos alunos a colaboração, autonomia, protagonismo, habilidades da educação 4.0, sentido prático, ético e propositivo, raciocínio lógico e espírito de investigação (para produzir argumentos convincentes)" – corroborando com o pensamento de que "as práticas curriculares do professor vivem muito daquilo que ele mais valoriza, do que efetivamente considera dever fazer, das informações a que tem acesso e do conhecimento prático que detém" (CANAVARRO; PONTE, 2003, p. 11).

A professora P9 manifesta uma concepção crítica de desenvolvimento curricular e a sua relação com a formação de professores, uma vez que se identificou um valor que a professora reconhece e confere às orientações curriculares – "É uma missão que precisa de engajamento, e com o documento acredito que o primeiro passo já foi dado" – postura considerada como sendo decisiva para o que se dispõe a fazer em suas aulas de Matemática.

A professora P9 entende que as transformações de suas práticas pedagógicas têm relação íntima com as condições de uma formação continuada de professores atenta à proposta curricular, à proposta educativa, à concepção de ser humano (quer do professor, quer do aluno), à concepção de ensino e de aprendizagem da Matemática, bem como à concepção de construção da identidade profissional do professor e o seu processo de construção de saberes pedagógicos.

Ao afirmar que “o documento pede um novo perfil de professor em sala de aula”, a professora P9 evidencia que o currículo organizado ou moldado é aquele que resulta da interpretação do professor, a partir do currículo prescrito ou dos materiais curriculares, tais como manuais escolares, tutoriais de ensino, guias didáticos e/ou livros didáticos (CANAVARRO; PONTE, 2003).

Ao explicitar sua concepção de ensino da Matemática – “A matemática está inserida no cotidiano das crianças e dos adultos, acredito que se o professor refletir sobre a sua prática e realizar ações pautadas nas habilidades a serem desenvolvidas em cada ano, ao final de um ciclo, teremos mais cidadãos interessados em investimentos financeiros, juros compostos, bolsa de valores entre outros e usarão a Matemática a seu favor, e não apenas se lembrarão dela, como uma matéria difícil e sem atribuição de significado” – a professora P9 anuncia seu compromisso social na formação de alunos capazes de aprender Matemática, pautados nos princípios do letramento matemático proposto pela BNCC.

A professora P1 apresenta em sua justificativa uma concepção crítica de currículo, segundo a qual o professor é um agente decisivo na construção e na concretização do currículo (desenvolvimento curricular), é um tradutor que intervém na configuração do significado das propostas curriculares, nomeadamente quando realiza o trabalho de planejamento, com base numa “análise mais detalhada das relações que se estabelecem dentro das salas de aula e como, a partir delas, os estudantes constroem conhecimentos” (P1). Assim, independente do grau de identificação com as propostas curriculares, como foi sinalizado pela professora P1 com a sua negativa, o professor não se isenta de desenvolver o currículo oficial, uma vez que suas práticas pedagógicas implicam, necessariamente, uma gestão curricular.

4.2 CATEGORIA 2

Com a implementação da BNCC nas escolas, os holofotes se voltam aos professores e, consequentemente, às propostas formativas que visam prepará-los para o enfrentamento e desenvolvimento dessa proposta curricular.

Nesta categoria, foi proposta a ação de verificar como as professoras concebem e configuram seus processos de formação continuada para o ensino da Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

A presente investigação partiu do pressuposto conforme o qual os professores são atores protagonistas, críticos, reflexivos e autônomos, os quais constroem conhecimentos e saberes pedagógicos no decorrer de suas trajetórias formativas e profissionais.

Neste sentido, valorizam-se as práticas pedagógicas promotoras de aprendizagens significativas no âmbito escolar e defende-se a hipótese de que os professores possuem parte/maior parte dos conhecimentos e saberes docentes que são apresentados, enunciados e requeridos pela BNCC como conhecimentos “novos” e “inéditos” na/para a formação de professores.

A BNCC traz a obrigatoriedade, o sentido de urgência e a necessidade de formação continuada dos professores para o enfrentamento de uma política pública de caráter normativo. Neste contexto, das professoras pesquisadas, 100% participaram de alguma proposta formativa acerca da BNCC.

No que se refere às escolas pesquisadas, foi possível constatar que um percentual significativo das professoras (81,3%) manifesta conhecimento sobre a implantação da BNCC nos seus respectivos contextos de desenvolvimento e atuação profissional. Este aspecto do aperfeiçoamento contínuo baseado no estabelecimento de ensino, dá importância fundamental à validade do conhecimento dos professores e às necessidades e exigências de cada contexto particular no qual trabalham, uma vez que, a confiança na imposição de modelos singulares de conhecimento especializado no ensino, pode criar inflexibilidade entre os professores e fazer com que eles tenham dificuldades em produzir juízos adequados nas práticas pedagógicas, em suas salas de aula.

Pesquisas constataram que as professoras polivalentes, em geral, foram e são formadas em contextos com pouca ênfase em abordagens que privilegiem as atuais tendências presentes nos documentos curriculares de Matemática. Ainda prevalecem a crença utilitarista ou a crença platônica da Matemática, centradas em cálculos e procedimentos (MENGALI; NACARATO; PASSOS, 2014). A despeito das lacunas e fragilidades apontadas por pesquisas que abordam a formação inicial de professores que ensinam Matemática, contatou-se que em torno de 25% das professoras pesquisadas não concentram seus interesses e esforços para a formação continuada na área da educação matemática.

A BNCC apresenta sua concepção de formação continuada de professores nos seguintes termos:

> criar e disponibilizar materiais de orientação para os professores, bem como manter processos permanentes de formação docente que possibilitem contínuo aperfeiçoamento dos processos de ensino e aprendizagem; manter processos contínuos de aprendizagem sobre gestão pedagógica e curricular para os demais educadores, no âmbito das escolas e sistemas de ensino[8] (BRASIL, 2018, p. 17).

A BNCC surge como uma nova proposta, alterando especificamente a função do professor e transformando os métodos conteudistas que regiam as práticas pedagógicas. Dessa forma, o professor assume o espaço de facilitador do processo de aprendizagem, de mediador na construção dos conhecimentos matemáticos, em consonância com as novas abordagens metodológicas e curriculares.

O currículo passa a ser voltado às necessidades e demandas do aluno, onde ele é o centro do processo, o protagonista. Assim, o conhecimento é construído por meio das suas próprias referências culturais e individuais (ZOLET; CARDOSO; KOHLS, 2020). Certamente, tais evidências deverão nortear a revisão e a reconfiguração das propostas de formação continuada dos professores de Matemática dos anos iniciais do Ensino Fundamental.

4.3 CATEGORIA 3

A análise em questão teve por objetivo verificar em que aspectos os pressupostos teóricos e metodológicos da BNCC se articulam na prática de ensino da Matemática (1° ao 5° ano), assim

[8] Diferentemente dos Parâmetros Curriculares Nacionais, publicados em 1997, as políticas públicas decorrentes da BNCC estão sendo idealizadas e implementadas em parceria com fundações e organizações não governamentais, mantidas por bancos e empresas, o que determina a presença do setor privado nos diferentes contextos da educação pública e a consequente mercantilização do ensino, que tem um interesse sem proporções na produção de materiais didáticos e na oferta de “pacotes” de formação continuada de professores (FANIZZI, 2020, p. 122).

como verificar se as práticas pedagógicas bem sucedidas no ensino da Matemática (1º ao 5º ano) apresentam os pressupostos teóricos e metodológicos da BNCC.

Partiu-se do pressuposto a partir do qual as professoras participantes da pesquisa possuem repertórios de saberes profissionais construídos e em construção, nas suas respectivas trajetórias formativas, em seus espaços e processos de desenvolvimento profissional, saberes tais que antecedem, perpassam e dialogam com as propostas curriculares vigentes, em especial, a BNCC.

As professoras participantes da pesquisa manifestaram suas reflexões acerca dos aspectos, elementos, fatores, saberes e condições para a garantia de uma aprendizagem significativa da Matemática dos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Quando a professora P5 diz "fazer com que o aluno vivencie o que está aprendendo", espera-se, segundo a BNCC, que os alunos "desenvolvam a capacidade de identificar oportunidades de utilização da matemática para resolver problemas, aplicando conceitos, procedimentos e resultados para obter soluções e interpretá-las segundo os contextos das situações" (BRASIL, 2018, p. 265).

Na mesma direção, a professora P9 espera que o aluno possa "ler, criar e resolver problemas, fazer uso de diversas ferramentas de ensino para facilitar o aprendizado e sistematização dos conteúdos." A professora P9 afirma que "a criança precisa passar pelo processo de letramento matemático."

Ao "incentivar os alunos... que tragam os problemas para a vida real com criatividade, pensamento crítico e colaboração", a professora P10 desenvolve uma das competências enunciadas na BNCC:

> Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder a questionamentos e na busca de soluções para problemas, de modo a identificar aspectos consensuais ou não na discussão de uma determinada questão, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles (BRASIL, 2018, p. 267).

Nas manifestações das professoras, o trabalho em duplas e trios, a participação ativa dos alunos (P3) e as trocas de experiências (P8) favorecem a viabilização das aprendizagens significativas, na medida em que, de acordo com a BNCC: "recursos didáticos como malhas quadriculadas, ábacos, jogos, livros, vídeos, calculadoras, planilhas eletrônicas e *softwares* de geometria dinâmica têm um papel essencial para a compreensão e utilização das noções matemáticas" (BRASIL, 2018, p. 276).

O uso da tecnologia destaca-se no texto da BNCC, reforçando tal aspecto como sendo um dos indicadores de garantia de aprendizagem significativa da Matemática: "Merece destaque o uso de tecnologias – como calculadoras, para avaliar e comparar resultados, e planilhas eletrônicas, que ajudam na construção de gráficos e nos cálculos das medidas de tendência central" (BRASIL, 2018, p. 274).

A professora P14 desenvolve propostas de sistematização por meio de jogos e atividades reflexivas e contextualizadas, em conformidade com a BNCC, quando enuncia que "esses materiais precisam estar integrados a situações que levem à reflexão e à sistematização, para que se inicie um processo de formalização" (BRASIL, 2018, p. 26).

Além da necessidade de integração entre os materiais, as atividades propostas e o processo de sistematização e formalização dos conteúdos matemáticos, a professora P5 tem como base e ponto de partida as expectativas de aprendizagem (objetivos de aprendizagem) na busca da aproximação aos conteúdos matemáticos, da mesma maneira que a BNNC (2018) espera que: “eles [alunos] desenvolvam a capacidade de identificar oportunidades de utilização da matemática para resolver problemas, aplicando conceitos, procedimentos e resultados para obter soluções e interpretá-las segundo os contextos das situações” (BRASIL, 2018, p. 265).

De acordo com a professora P9, ela trabalha com os materiais – jogos, material dourado, ábaco, cédulas – de maneira contextualizada, tendo como referência a autora Kátia Stocco Smole (s/d), cujo pensamento se situa em conformidade com os termos da BNCC (2018).

Verificou-se que os aspectos teóricos e metodológicos apontados nas manifestações das professoras se aproximam, em maior ou menor grau, às orientações curriculares da BNCC, bem como às orientações científicas da pesquisa na área da Educação e da Educação Matemática.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Apesar dos avanços já consolidados, como educadores, faz-se necessário continuar insistindo no que se refere aos resultados concretos da legislação, das políticas educacionais e da pesquisa educacional, em prol da busca de aperfeiçoamento contínuo na formação de professores, pautados na crença do poder social e político da escola, tendo como base o direito de todos, em condições de equidade de oportunidades de acesso aos bens culturais, ao desenvolvimento das capacidades humanas, a formação da cidadania, a conquista da dignidade humana e da liberdade intelectual e política (PIMENTA; FRANCO; LIBÂNEO, 2010).

Constatou-se que as professoras consideram que a BNCC é um documento curricular que norteia e orienta suas práticas pedagógicas e, apesar de sua natureza prescritiva, consideram que o documento seja uma proposta curricular por meio da qual as práticas pedagógicas são configuradas e desenvolvidas. Independente do grau de identificação com as propostas curriculares, conclui-se que o professor não se isenta de desenvolver o currículo oficial, uma vez que suas práticas pedagógicas implicam, necessariamente, uma gestão curricular.

Ao focalizar a discussão para a formação continuada de professoras de Matemática dos anos iniciais do Ensino Fundamental, corroborou-se com a ideia segundo a qual o grande desafio que se coloca à escola e aos seus professores é construir um currículo de matemática que transcenda o ensino de algoritmos e cálculos mecanizados, principalmente nas séries iniciais, onde está a base da alfabetização matemática (MENGALI; NACARATO; PASSOS, 2014).

Esse preocupante cenário pode ser mantido ou até mesmo reproduzido quando a escola não possui um projeto de formação continuada que dialogue com as necessidades formativas dos professores, na medida em que tal compromisso fica exclusivamente a critério e sob a responsabilidade dos mesmos, os quais, impelidos a buscar por conhecimento e colocar em prática as inovações educacionais, buscam por formações que oferecem modelos prontos, que se mostram insuficientes para transformar e aprimorar as suas práticas curriculares e pedagógicas, além do fato de reforçar a busca por práticas formativas de outras áreas do conhecimento (25% das professoras participantes da pesquisa).

No contexto de consideração do perfil de bons professores, centrou-se o olhar para as práticas pedagógicas, qualificadas como bem sucedidas pelas professoras da pesquisa, de modo a verificar quais conhecimentos as professoras participantes mobilizam em suas práticas pedagógicas, a fim de garantir a aprendizagem dos conteúdos matemáticos dos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Ao se considerar um quadro teórico de referência de pesquisadores da área da educação e da educação matemática, foi possível observar que o mapeamento dos conhecimentos específicos, pedagógicos e curriculares das professoras de Matemática (anos iniciais) apresenta indicadores de uma formação multidimensional, multifacetada e única para cada uma das 17 professoras participantes da pesquisa, uma vez que cada professora tem uma história de vida pessoal e profissional, um repertório de saberes e práticas docentes, um tempo de experiência no ensino da Matemática para os anos iniciais, uma trajetória própria de desenvolvimento profissional, bem como uma base conceitual sobre a Matemática, o seu ensino e os desdobramentos para a sua aprendizagem.

Constatou-se que as professoras participantes da pesquisa, munidas de suas experiências práticas, de seus repertórios de desenvolvimento profissional, de seus saberes construídos no decorrer de suas trajetórias formativas, enfim, de suas formas de *ser* e *estar* na profissão docente, dialogam com a perspectiva de aprendizagem significativa do campo da educação matemática e, consequentemente, se aproximam das orientações curriculares da BNCC.

Corroborou-se com a crença de que as professoras participantes da pesquisa desenvolvem suas práticas de ensino pautadas nos conhecimentos e saberes pedagógicos, os quais são mobilizados e articulados a partir das necessidades reais de seus alunos, das propostas curriculares assumidas nos seus contextos de atuação profissional, assim como suas práticas pedagógicas em aulas de Matemática se pautam na ética docente e em metodologias de ensino ativas.

A despeito da urgência e da demanda de implantação da BNCC nas escolas, torna-se necessário avaliar o impacto das propostas curriculares e pedagógicas anteriores ao documento da BNCC, considerando a avaliação que os professores de Matemática (anos iniciais do Ensino Fundamental) fazem de seu trabalho, de modo a identificar quais pressupostos teóricos e metodológicos podem ser preservados e quais deverão ser modificados ou adaptados às mudanças curriculares propostas na BNCC, de maneira a valorizar a autonomia e o protagonismo docente.

Neste sentido, como os dados da pesquisa nos indicam, a viabilização das aprendizagens significativas dos conteúdos matemáticos, depende do repertório de saberes que as professoras mobilizam, depende da clareza que as professoras têm do que deve ou não ser ensinado em suas aulas de Matemática, nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Nesse contexto, torna-se fundamental o conhecimento e o (re)conhecimento das orientações curriculares da BNCC, de modo que os professores de Matemática dos anos iniciais do Ensino Fundamental, tenham maior clareza das possibilidades de articulação entre tais orientações e a construção coletiva das propostas curriculares, nos seus respectivos espaços e processos pedagógicos de formação continuada em serviço.

Em última análise, o sucesso da implantação da BNCC nas práticas educativas depende do repertório de conhecimentos específicos, pedagógicos e curriculares no ensino da Matemática, os quais possibilitem que os professores compreendam as entrelinhas que estão por trás das recomendações, prescrições e concepções curriculares (PASSOS; NACARATO, 2018).

Afinal, *BNCC não é currículo*!

REFERÊNCIAS

BARDIN, L. **Análise de conteúdo**. Lisboa: Edições 70, 1977.

BRASIL. **BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR**: educação é a base. Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação. Secretaria de Educação Básica. 2018.

CANAVARRO, Ana Paula.; PONTE, João Pedro da. O papel do professor no currículo de Matemática. In: GTI (Ed.), **O professor e o desenvolvimento curricular**. Lisboa: 2005, p. 1-27.

CURY, C. R. J. et al. **Base Nacional Comum Curricular**: dilemas e perspectivas. São Paulo: Cortez, 2018.

CZIGEL, E.; MONDINI, F.; PAVANEL, E. A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e a organização da Matemática no Ensino Fundamental. **Revista Pesquisa Qualitativa**. São Paulo, v. 7, n. 15, p. 356-369, dez. 2019.

D'AMBRÓSIO, U. **Da realidade à ação**: reflexões sobre educação e matemática. São Paulo: Summus, 1986 (Universidade Estadual de Campinas).

FANIZZI, S. Formação continuada do professor pedagogo em Matemática: reflexões a partir da abordagem de Stephen Ball. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 22, n. 1, p. 120-139, 2020.

FAUSTINO, M. P. **Ações de formação continuada de professores que ensinam Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental da rede municipal de Presidente Prudente (SP) e saberes docentes**. 2011. 203 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Estadual Paulista, Presidente Prudente, 2011.

FILHO, O. N. Ensinamentos comuns, vivências diferentes. **Folha de Londrina** (PR). 15 de janeiro de 2018.

MOREIRA, P. C.; DAVID, M. M. M. S. O conhecimento matemático do professor: formação e prática docente na escola básica, **Revista Brasileira de Educação**. n. 28, p. 50-61, 2005.

NACARATO, A. M.; MENGALI, B. L. da S.; PASSOS, C. L. B. **A matemática nos anos iniciais do ensino fundamental**: tecendo fios do ensinar e do aprender. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2014.

NÓVOA, A. (coord.). **Os professores e a sua formação**. Lisboa: Dom Quixote, 1995.

ORTEGA, E. M. V. **A construção dos saberes dos estudantes de Pedagogia em relação à matemática e seu ensino no decorrer da formação inicial**. 2011. 164 f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade de São Paulo, São Paulo, 2011.

PASSOS, CÁRMEN LÚCIA BRANCAGLION; NACARATO, ADAIR MENDES. Trajetória e perspectivas para o ensino de Matemática nos anos iniciais. **Estudos avançados**, São Paulo, v. 32, n. 94, p. 119-135, dezembro de 2018.

PIMENTA, S. G.; FRANCO, M. A. S.; LIBÂNEO, J. C. Pedagogia, formação de professores – e agora? Problemas decorrentes das diretrizes curriculares nacionais para os cursos de Pedagogia. In: DALBEN et.al., A. I. L. de F. **Convergências e tensões no campo da formação e do trabalho docente**. Belo Horizonte: Autêntica, 2010.

SANTOS, M. J. C. dos. O currículo de matemática dos anos iniciais do ensino fundamental na base nacional comum curricular (BNCC): os subalternos falam? **Horizontes**, v. 36, n. 1, p. 132-143, jan./abr. 2018.

SANTOS, M. J. C.; MATOS, F. C. C. A insubordinação criativa na formação contínua do pedagogo para o ensino da matemática: os subalternos falam? **REnCiMa**, v. 8, n. 4, p. 11-30, 2017.

SHULMAN, L. Those who understand: the knowledge growth in the teaching. Education **Researcher**, Washington, v. 15, n. 2, p. 4-14, fev. 1986.

SHULMAN, L. S. **The wisdom of practice**: essays on teaching, learning, and learning to teach. S. Wilson (Ed.), San Francisco: Jossey-Bass, 2004.

SMOLE, K. S. **A BNCC e o ensino de Matemática nos anos iniciais**. Escrito em: 05/02/2020. Atualizado em 13/02/2020. Disponível em: https://mathema.com.br/artigos/a-bncc-e-o-ensino-de-matematica-nos-anos-iniciais/

TARDIF, M**. Saberes docentes e formação profissional**. Petrópolis: Vozes, 2002.

ZOLET, E. J. G.; CARDOSO, S. A.; KOHL, R. C. Currículo e Fundamentos. In: BARP, Elisete Ana. (org.). **Capacitação docente**: conhecendo a BNCC [recurso eletrônico] / Santa Catarina: Editora da UnC, 2020. pp. 6-18.

Submetido em agosto de 2020.
Aprovado em janeiro de 2021.

Luciana Miyuki Sado Utsumi
Doutora em Educação pela Universidade Metodista de São Paulo (UMESP), docente da Universidade Metodista de São Paulo (UMESP), S. Bernardo do Campo, SP, Brasil. ID Lattes: 7692715311959810. Orcid ID: 0000-0002-5023-5794.
Contato: luciana.utsumi@metodista.br.

Adelmo Carvalho da Silva
Doutor em Educação pela Universidade Federal da Paraíba (UFPB). Docente da Universidade Federal do Mato Grosso (UFMT), Cuiabá, MT, Brasil. ID Lattes: l9761986149148049. Orcid ID: 0000-0001-9995-0310.
Contato: adelmoufmt@gmail.com.

História de Mulheres na Matemática
uma proposta para sala de aula

History of Women in Mathematics
a proposal for the classroom

Mateus de Souza **Galvão**
Secretaria Estadual de Educação de Pernambuco (SEEPE)

Lucília Batista **Dantas**
Universidade de Pernambuco (UPE)

RESUMO

O presente trabalho, fruto do resultado de uma pesquisa de mestrado, norteou-se pela seguinte problemática: como estudantes de uma Escola Pública de Petrolina-PE concebem a questão do gênero na Matemática e quais as contribuições advindas, para o ensino e a aprendizagem dessa matéria, de uma atividade teatral/curta-metragem sobre as mulheres que se destacaram no estudo de tal ciência? Para responder a tal questionamento, realizou-se uma pesquisa de caráter qualitativo, em que foi proposta uma atividade composta de duas etapas para serem realizadas pelos estudantes: a primeira requeria que os estudantes realizassem uma pesquisa e produzissem um roteiro sobre a vida e a obra de uma mulher matemática, e a segunda, que apresentassem os resultados da pesquisa em forma de teatro em sala de aula ou por meio de um curta-metragem. Além da atividade mencionada, aplicou-se um questionário para a coleta de algumas informações relacionadas com a atividade desenvolvida pelos estudantes e com a percepção que eles tinham sobre a participação das mulheres na Matemática. Com isso, pôde-se concluir que tal atividade possibilitou que os estudantes tivessem contato com os desafios que foram enfrentados pelas mulheres em sua época para que pudessem produzir conhecimento científico, além de poderem estudar as obras desenvolvidas por elas, aguçando, assim, sua curiosidade, pois, como relatado nos questionários, a proposta de uma atividade teatral/curta-metragem, envolvendo as mulheres matemáticas, configurou-se como uma opção viável para ser aplicada em sala de aula.

Palavras-chave: Mulheres na Matemática. História da Matemática. Atividade Teatral. Curta-Metragem.

ABSTRACT

The present work, result of a master's research, was guided by the following problem: how students from a Public School in Petrolina-PE conceive the issue of gender in Mathematics and what are the contributions that come, for teaching and learning this subject, of a theatrical activity / short film about women who stood out in the study of such science? To answer this question, a qualitative research was carried out, in which an activity composed of two stages was proposed to be carried out by the students: the first, required them to carry out a research and produce a script about life and life work of a mathematical woman, and the second, that presented the results of the research in the form of theater in the classroom or through a short film. In addition to the mentioned activity, a questionnaire was applied to collect some information related to the activity developed by the students and the perception they had about the participation of women in Mathematics. With that, it could be concluded that such activity enabled students to have contact with the challenges that were faced by women in their time so that they could produce scientific knowledge, in addition to being able to study the works developed by them, thus arousing curiosity of them, because, as reported in the questionnaires, the proposal for a theatrical / short film activity, involving mathematical women, was configured as a viable option to be applied in the classroom.

Keywords: Women in Mathematics. History of Mathematics. Theatrical Activity. Short Film.

1 INTRODUÇÃO

Desde sempre as mulheres enfrentam barreiras relacionadas à produção científica. Carvalho e Casagrande (2011) levantam duas hipóteses para as dificuldades impostas a elas: em primeiro lugar, o conhecimento que as mulheres elaboravam não era encarado como científico, pelo simples fato de ser "feminino" e, em segundo lugar, as "mulheres eram proibidas de frequentar lugares públicos, entrar em bibliotecas, universidades, publicar resultados de suas pesquisas ou discutir em posição de igualdade sobre seus conhecimentos com os cientistas" (p.23). Esses impedimentos estão diretamente relacionados com o contexto histórico-cultural.

No campo da Matemática, a maioria dos estudantes que conclui o Ensino Médio, ou até mesmo um curso de graduação ou pós-graduação na área, teve pouco ou nenhum contato com a vida ou obra de alguma mulher que tenha contribuído para o desenvolvimento da Matemática. Isso se deve, em grande parte, pelo fato de, dominantemente, a maior parcela do conhecimento Matemático ter sido produzida por indivíduos do sexo masculino. A falta de contato de tais estudantes com a participação das mulheres nessa ciência acaba naturalizando a questão do gênero na Matemática e, consequentemente, silenciando-a.

Deve-se lembrar que as mulheres foram proibidas, ao longo de grande parte do tempo, a se dedicarem ao estudo da Matemática. Esse contexto começou a mudar mais drasticamente "a partir do século XX, quando elas obtiveram o direito de frequentar a universidade, um número crescente de mulheres tem se envolvido em atividades científicas, provocando, inclusive, o desenvolvimento de novas áreas da ciência" (CASAGRANDE et al., 2005, p.33). Com isso, espera-se que, cada vez mais, as mulheres tenham seu espaço garantido na produção do conhecimento científico.

Nesse sentido, levando em consideração que os trabalhos das mulheres matemáticas são de pouco conhecimento do público em geral, surgiu o seguinte questionamento: como estudantes de uma Escola Pública de Petrolina-PE concebem a questão do gênero na Matemática e quais as contribuições advindas, para o ensino e a aprendizagem de Matemática, de uma atividade teatral/curta metragem sobre as mulheres que se destacaram no estudo dessa ciência?

Para responder a tal questionamento, desenvolveu-se esta pesquisa, cujo objetivo geral foi tornar visível aspectos da vida e obra de algumas mulheres matemáticas, utilizando atividades em sala de aula. Os objetivos específicos foram: investigar como estudantes da Escola concebem questões de gênero em Matemática; abordar a História da Matemática como ferramenta no auxílio à aprendizagem e realçar o papel das mulheres para a construção do saber matemático por meio de peças teatrais/curta metragem.

Cabe salientar que a questão de gênero na Matemática não faz parte do currículo formal dessa matéria. Mesmo assim, trata-se de uma indagação importante para ser considerada em sala de aula, pois, embora tal questão não apareça no currículo formal da disciplina, os Parâmetros Curriculares Nacionais ao tratar da formação de cidadãos, ressaltam que

> A questão da cidadania envolve escolhas pedagógicas específicas para que ele possa conhecer e distinguir diferentes concepções históricas acerca dela, delineadas em diferentes épocas. [...] O sentido que a palavra assume para os brasileiros atualmente, de certa maneira, inclui os demais sentidos historicamente localizados, mas ultrapassa os seus contornos, incorporando problemáticas e anseios individuais, de classes, de gêneros, de grupos sociais, locais, regionais, nacionais e mundiais, que projetam a cidadania enquanto prática e enquanto realidade histórica (BRASIL, 2000, p.25).

Nesse sentido, a proposta feita pelo trabalho diz respeito a uma sugestão interdisciplinar, envolvendo História e Matemática com o intuito de provocar um maior interesse de estudantes para com a Matemática por meio da exploração das dificuldades enfrentadas pelas mulheres com relação à produção do conhecimento matemático, além de possibilitar aos estudantes que conheçam os trabalhos que as mulheres produziram, o contexto da época que em viveram, permitindo, assim, que eles tirem suas próprias conclusões sobre a temática.

No que tange às seções do trabalho, a primeira, intitulada "História e Matemática" apresenta uma breve revisão da literatura sobre as contribuições do elo entre esses dois ramos do conhecimento para o ensino e aprendizagem de Matemática. Na segunda seção, "Mulheres na Matemática", discorre-se sobre a vida e obra de algumas mulheres que se destacaram[1] pelas contribuições que deixaram para esse ramo do conhecimento. Com relação à "Metodologia", faz-se uma descrição das etapas e dos métodos de pesquisa. Já no que diz respeito aos "Resultados", expõem-se não só o desfecho da realização dos trabalhos produzidos pelos estudantes, como também os resultados do questionário aplicado.

2 HISTÓRIA, TEATRO E MATEMÁTICA

Somente no final da década de 1960, é que ficaram mais nítidas, no Brasil, as discussões a respeito da interdisciplinaridade. Mesmo após tantos anos, de acordo com Maia e Sad (2015), "ainda não existe um consenso entre os pesquisadores e teóricos da educação sobre o que é interdisciplinaridade e como aproveitá-la como metodologia em atividades educativas" (p.6).

Por mais que não haja uma definição consensual sobre a interdisciplinaridade, percebe-se que uma das grandes possibilidades de conexão entre dois ramos do conhecimento está situada entre a História e a Matemática. Diversos autoras e autores abordam tal possibilidade (SILVA; FERREIRA, 2011; GASPERI; PACHECO, 2011; SILVA; MIRANDA, 2013; MENDES; CHAQUIAM, 2016; MIGUEL; MIORIM, 2017).

Quando se pensa em levar essa conexão para a sala de aula de maneira interdisciplinar, é importante destacar que "a história da matemática não é apenas uma história de definições de objetos matemáticos, mas de um processo criativo, que envolve sociedade, cultura e cognição" (MENDES; CHAQUIAM, 2016, p.13). Desse modo, a História da Matemática permite a abertura de um leque de possibilidades para a utilização em sala de aula[2]. Já no campo das pesquisas,

> Essas possibilidades têm abarcado temas como o ensino e a aprendizagem da Matemática, considerando uma reflexão histórica que se estende até o Professor, o Aluno, o conteúdo matemático, os contextos, a Historiografia e os personagens históricos da Matemática, o Currículo, a Tecnologia, a Pesquisa e a Academia, a HM como recurso didático, a Etnomatemática, o livro didático, as disciplinas e a EM como campo de estudo. (FRANSOLIN; SOUZA, 2019, p.64).

Possivelmente, por essa razão, é que, nos últimos anos, houve um aumento da presença do discurso histórico em produções brasileiras destinadas à Matemática escolar (MIGUEL; MIORIM, 2017). Entre tais produções, têm-se os Parâmetros Curriculares de Pernambuco, alegando que,

> Trazer a História da Matemática para a sala de aula significa mais que descrever fatos ocorridos no passado ou a atuação de personagens famosos. Em primeiro lugar, é importante que as articulações da Matemática com as necessidades humanas de cada época sejam evidenciadas. Mais importante ainda, é preciso levar em conta as contribuições do processo de construção histórica dos conceitos e procedimentos matemáticos para a separação das dificuldades de aprendizagem desses conteúdos em sala de aula. (PERNAMBUCO, 2012, p.36).

[1] Entende-se por destaque nesse caso, as mulheres que aparecem com maior frequência na literatura.
[2] Ver, por exemplo, Bernardes (2019).

Nesse sentido, deve haver uma preocupação com a inserção da História da Matemática em sala de aula, considerando a Matemática como uma ciência em construção e em grande parte desenvolvida com a intenção de resolver problemas de ordem prática. Ademais, como apontam Silva e Ferreira (2011), sem o auxílio de outros recursos didáticos, a História da Matemática não é capaz de solucionar todos os problemas pedagógicos presentes em sala de aula, devendo-se mesclar outras metodologias para que todos os estudantes sejam envolvidos.

Os temas principais para a prática investigativa em História da Matemática, segundo Silva e Miranda (2013), são: "o desenvolvimento histórico de um conceito matemático, biografia de matemáticos, as relações da matemática com outras áreas do conhecimento e a aplicabilidade da história dentro do contexto de sala de aula" (p.2). Com relação ao último tema mencionado, que caracteriza a História da Matemática como uma ferramenta de auxílio à aprendizagem em Educação Matemática, segundo nos aponta Gasperi e Pacheco (2011, p.3), ela pode ser apresentada em sala de aula de várias maneiras, como, por exemplo,

> De forma lúdica com problemas curiosos, "os enigmas", como fonte de pesquisa e conhecimento geral, como introdução de um conteúdo ou atividades complementares de leitura, trabalho em equipe e apresentação para o coletivo. Também pode apresentar a matemática com uma gama de possibilidades de atividades diferenciadas que vão muito além das infindáveis sequências de exercícios e memorização de métodos e fórmulas.

Além disso, compreende-se que a História da Matemática permite estabelecer conexão entre várias manifestações da cultura (SIQUEIRA, 2013). Nesse sentido, "a motivação propiciada pela história encontra-se diretamente relacionada ao seu papel como elemento fundamental para a promoção da inclusão social, via resgate da identidade cultural de determinado grupo social discriminado no contexto escolar" (MIGUEL; MIORIM, 2005, p.25).

A História da Matemática como recurso metodológico pode ser de grande relevância para trazer à tona o discurso de minorias que foram silenciadas ao longo da história, como no caso das mulheres. Ainda, principalmente em relação à Matemática, não foi superada a questão das discriminações de gênero. Desse modo, "o sistema educacional tem que contribuir para situar a mulher no mundo, o que implica, entre outras coisas, redescobrir a História, recuperar sua voz perdida" (SANTOMÉ, 1995, p.172).

Pensando nas possibilidades de mesclar metodologias para potencializar a aprendizagem de estudantes, pode-se relacionar nesse processo a História da Matemática e o teatro didático, uma vez que que Pascale Junior e Graciliano (2017) afirmam que é justamente na História da Matemática que o professor irá encontrar o maior leque de possibilidades para serem abordadas com o uso do teatro. Segundo Pavis (2008, p.386), para uma simples definição, "é didático todo o teatro que visa instruir seu público, convidando-o a refletir sobre um problema". Desse modo, o teatro pode provocar uma reflexão sobre um aspecto da História da Matemática, confrontando esse ramo do conhecimento com a experiência humana.

Nessa perspectiva, Montenegro et al. (2005) destacam que "o teatro, por sua forma de 'fazer coletivo', possibilita o desenvolvimento pessoal não apenas no campo da educação não-formal, mas permite ampliar, entre outras coisas, o senso crítico e o exercício da cidadania" (p.31). Assim, ao utilizar o teatro como uma estratégia pedagógica, pode-se auxiliar na reflexão e no pensamento, uma vez que ele estimula o raciocínio por meio da contextualização do que se está encenando (CARTAXO, 2001).

Ainda de acordo com o autor, "o processo de aprendizagem de um conteúdo, por meio de uma encenação teatral, é acelerado, porque o aluno trabalha com todos os seus sentidos, inclusive tendo a oportunidade e a liberdade para pensar, criar e vivenciar" (CARTAXO, 2001, p.65). Pensando o teatro pedagógico no campo da Matemática, deve-se abordar a essência do tópico estudado, fórmulas e demonstrações devem ser evitadas (POLIGICCHIO, 2011). Representar a Matemática por intermédio do teatro, nas palavras de Cartaxo (2001, p.64), possibilita

> Provocar e despertar o monstro adormecido no interior de quem pratica [o Teatro] e de quem assiste, de abrir horizontes reflexivos, de dar alegria e tristeza, de desinibir o tímido, de dinamizar o apático. O Teatro é forte porque explica o mundo que está em nossa volta através do divertimento, da análise e da crítica.

Ao considerar as potencialidades de inserir a História da Matemática e o teatro didático no contexto da sala de aula, entende-se que, mesclando essas metodologias, é possível abordar o tema mulheres na matemática de uma forma mais significativa e favorecer o desenvolvimento do senso crítico dos estudantes.

3 MULHERES NA MATEMÁTICA

A humanidade, ao longo dos séculos, olhou para o mundo ao seu redor e fez as mais variadas perguntas. Homens e mulheres puderam contemplar os céus e se perguntarem sobre o comportamento dos astros, olhar pela lente de um microscópio e satisfazer sua curiosidade. Mas, "embora ambos tenham a mesma sede de conhecimento, as mulheres nem sempre tiveram as mesmas oportunidades para explorar as respostas" (IGNOTOFSKY, 2017, p.6).

Sobre a relação[3] histórica da mulher com o saber, Melo (2017, p.190) afirma que

> Diferentemente do que se pensava em outras épocas, hoje temos a comprovação científica – por mais incrível que pareça a necessidade de se comprovar isso cientificamente – de que as mulheres são biologicamente tão capazes quanto os homens de aprender e desenvolver conhecimento nas áreas das ciências exatas. Cai por terra, assim, o mito de que ciência, de modo geral, é coisa de homem. Dessa forma, podemos concluir que esse discurso é uma mera convenção social, que se perpetua, ainda que imperceptivelmente, e povoa o inconsciente das jovens e dos jovens, antes mesmo de chegarem às escolas.

Sendo assim, aparentemente, as mulheres estão em desvantagem em relação aos homens na produção intelectual por "um componente social" e não por natureza cognitiva. A discrepância de produção mencionada pode ser facilmente averiguada, por exemplo, consultando livros da Educação Básica ou perguntando a qualquer estudante em vias de concluir o Ensino Médio e constatar que eles provavelmente não saberão nenhum nome de mulher matemática ou qualquer saber matemático atribuído a alguma delas (MELO, 2017). Isso pode ser explicado em parte, devido ao fato de que

> No passado, as restrições ao acesso das mulheres à educação não eram incomuns. As mulheres, frequentemente, não tinham permissão para publicar artigos científicos. Esperava-se que elas fossem criadas apenas para ser boas esposas e mães, enquanto os maridos as sustentavam. Muitas pessoas achavam que as mulheres simplesmente não eram tão inteligentes quanto os homens (IGNOTOFSKY, 2017, p.7).

Mesmo com as restrições impostas, as mulheres insistiram no desenvolvimento científico e publicaram trabalhos usando pseudônimos por causa da falta de espaço e de reconhecimento

[3] Para um estudo mais abrangente do tema, como também sobre discurso, mulheres e matemática, consultar Souza e Fonseca (2010).

(INOTOFSKY, 2017). Foram vários os exemplos de persistência e resistência a uma sociedade que não via possibilidades para que uma mulher produzisse conhecimento científico.

Sabendo que as mulheres conseguiram resistir às imposições e que, "apesar da discriminação, houve algumas mulheres matemáticas, que lutaram contra os preconceitos, gravando seus nomes na história da ciência" (SINGH, 2014, p.114), uma pergunta parece natural: Quais são as mulheres que se destacaram no estudo da Matemática[4]?

3.1 Theano de Crotona

A primeira mulher, de que se tem notícia[5], a se destacar em Matemática foi Theano (século IV AEC). De acordo com Singh (2014, p.115), "ela começou sua carreira como uma das estudantes de Pitágoras e acabou se casando com ele. Pitágoras é conhecido como 'o filósofo feminista' porque, ativamente, encorajou mulheres estudantes. Theano foi uma das vinte e oito irmãs da Irmandade Pitagórica". Segundo Vasconcelos, Leite e Macedo (2012), ela era uma fina matemática, chegando a escrever um tratado sobre o "Número de Ouro".

Supostamente, do seu relacionamento com Pitágoras, ela teve cinco filhos, que a ajudaram, após a morte de Pitágoras, a continuar a escola pitagórica. Mas

> Theano não só se limitou a seguir a doutrina de seu marido e mestre como parece ter contribuído com ele; foi, ao que parece, autora de vários tratados de matemática, física e medicina, alguns cujos títulos a tradição ainda conserva. Infelizmente nenhum desses títulos sobreviveu, exceto poucos fragmentos de cartas – cuja autoria alguns consideram incertas. (JIMÉNEZ, 2010, p.3).

Alguns séculos mais tarde, "filósofos como Sócrates e Platão continuariam a convidar mulheres para as suas escolas, mas foi somente no século IV da nossa época que uma mulher fundou sua própria escola de matemática, e se tornou muito influente" (SINGH, 2014, p.115). Trata-se de Hipátia (Hipácia também é uma grafia adotada) de Alexandria (370-415 DEC).

3.2 Hipátia de Alexandria

Hipátia foi uma das mulheres, cuja história de vida é mais conhecida. Possivelmente, pela morte trágica que lhe foi imposta, tornou-se um marco na história da ciência. Ao contrário de Theano, o que se tem sobre sua vida e contribuições para a Matemática não está baseado em "especulações". Para Garbi (2010, p.131),

> Ela foi a primeira mulher de que se tem notícia a realizar trabalhos importantes na área das ciências exatas e, adicionalmente, possuía grandes conhecimentos em medicina e filosofia. Professora da Universidade, Hipácia auxiliou o pai na revisão dos Elementos e escreveu comentários sobre a Aritmética, de Diofanto, e as Cônicas de Apolônio, obras inegavelmente difíceis.

Ela era também reconhecida por ser solucionadora de problemas. Os matemáticos da época, que tinham passado meses debruçados sobre um problema sem chegarem à solução, recorriam a Hipátia para que o solucionasse e ela não os decepcionava (SINGH, 2014). Sua argúcia em Matemática foi, em parte, proveniente dos ensinamentos de seu pai, Téon (335-395 DEC), que, além de Matemática, também lhe ensinou Astronomia. "Em pouco tempo, ela

[4] O critério de escolha para a biografia das mulheres que serão apresentadas neste trabalho deu-se em virtude de fazerem parte da escolha dos estudantes para os seus trabalhos, com exceção de Theano de Crotona, que foi incluída pelo fato de muitos autores e autoras a considerarem como sendo a primeira mulher matemática.
[5] Não se pode afirmar de maneira contundente que ela tenha existido, assim como Pitágoras.

começou a superar o pai em seus estudos matemáticos e fez comentários importantes sobre o trabalho dele, além de contribuições próprias à geometria e à teoria dos números" (IGNOTOFSKY, 2017, p.7).

Hipátia, como afirma Singh (2014), era obcecada pelo processo de demonstração lógica, tanto que, ao lhe perguntarem o motivo de nunca ter se casado, ela respondia que já era casada com a verdade. Tal obsessão pode tê-la levado ao seu fim trágico, uma vez que

> Hipácia se opunha às visões fanáticas dos líderes cristãos que, após a conquista do poder, passaram a exercer contra as outras crenças o mesmo tipo de perseguição de que o cristianismo havia sido vítima. Isto a indispôs com o bispo de Alexandria, Cirilo, mais tarde levado a condição de santo da igreja católica, cujo rancor por ela também se alimentava do interesse de Hipácia em estudar diversas religiões. (GARBI, 2010, p.112).

Tal oposição foi marcada pela cruel morte de Hipátia, tendo sido esquartejada e jogada às chamas. Sua morte foi uma perda imensa para o conhecimento da época e só muitos anos depois, após a Renascença, surgiu outra Mulher de destaque no cenário matemático, Maria Gaetana Agnesi (1718-1799), como atestado por Singh (2014).

3.3 Maria Gaetana Agnesi

Atualmente, o nome Maria Gaetana Agnesi é de conhecimento do público em geral, pois ele está vinculado à famosa "Curva de Agnesi" ou "Bruxa de Agnesi"[6]. A curva em questão aparece em seu livro *Instituzioni Analitiche* e foi estudada anteriormente por Pierre de Fermat (1601 – 1665) e Guido Grandi (1671 – 1742), como apontado por Martins (2015). Tal curva tem como equação cartesiana: $y(x^2 + 4r^2) = 8r^3$, em que r é o raio da circunferência que tangencia duas retas paralelas.

O nascimento de Maria Gaetana Agnesi ocorreu em Milão, no ano de 1718. Sua família era composta por alguns membros estudiosos, a exemplo de seu pai Dom Pietro Agnesi Mariami, que era professor universitário. Desde muito cedo, aos cinco anos de idade, Maria Gaetana "falava francês e, aos nove, já dominava profundamente o latim, o grego, o hebraico e vários outros idiomas" (MARTINS, 2015, p.18).

Suas habilidades fizeram com que seu pai apresentasse "sua filha nas reuniões que organizava, onde se encontravam acadêmicos, cientistas e intelectuais renomados" (MORAIS FILHO, 1996, p.1). Esses encontros garantiam a ela uma grande possibilidade de trocar ideias sobre várias áreas do saber. No entanto, como era muito reservada, manifestou, por volta dos vinte anos de idade, a vontade de ir para o convento para dedicar sua vida exclusivamente aos estudos e ao trabalho comunitário, desejo esse que foi negado por seu pai (MARTINS, 2015). Nessa época, aos vinte anos, como resultado das discussões nas tertúlias na casa de seu pai, ela "publicou *Propositiones Philosophicae*, uma coletânea de 190 ensaios que, além da matemática, se ocupava de lógica, mecânica, hidromecânica, elasticidade, gravitação, mecânica celeste, química, botânica, zoologia e mineralogia" (EVES, 2004, p.480).

Quanto ao seu trabalho de maior relevância, trata-se da obra *Instituzioni Analitiche*, que foi publicada em dois volumes. A intenção para a publicação era que servisse na formação de um de seus irmãos que apresentava interesse em aprender matemática. Tal obra pode ser entendida como sendo o "primeiro livro de cálculo escrito primariamente para jovens. (...) As

[6] De acordo com Fernandez, Amaral e Viana (2019), "quando os livros de Agnesi foram traduzidos para o inglês, devido a uma tradução de John Colson, essa curva foi denominada de '*witch of Agnesi*', significando a bruxa de Agnesi" (p.15).

1070 páginas da obra apresentam uma contribuição notável à educação matemática" (EVES, 2004, p.480).

Depois do falecimento do seu pai, no ano de 1752, Maria Gaetana acabou "voltando-se para a religião e a caridade, depois de servir de exemplo para que muitas famílias italianas permitissem a suas filhas orientarem seus talentos também para as ciências exatas" (GARBI, 2010, p.420). Ela faleceu no ano de 1799, deixando um importante legado para a Matemática.

3.4. Sophie Germain

A vida de Sophie Germain (1776-1831) configura-se como um exemplo notável de persistência, pois, mesmo com a resistência da família e vivendo em uma sociedade que não aprovava a produção científica por partes das mulheres, ela possibilitou avanços em Matemática Pura e Aplicada, dois importantes campos de estudo, como salientam Hall, Jones e Jones (2004).

Nascida em Paris, em 1776 e filha de Ambroise-François Germain, um comerciante próspero e deputado eleito, logo teve contato com filosofia e política. Mesmo que as mulheres da classe social de Sophie Germain "não fossem estimuladas a estudar matemática, elas deveriam ter conhecimento suficiente do assunto para poder debatê-lo, caso o tema aparecesse em uma conversa educada" (SINGH, 2014, p.117).

Com esse intuito, havia livros, até mesmo em forma de romance, para fornecer às mulheres informações recentes sobre os avanços ocorridos na Matemática e ciência de um modo geral. Mesmo assim, o que captou, de fato, a atenção de Sophie Germain para a Matemática foi, a partir da biblioteca de seu pai, "ler, fascinada, durante os dias violentos que se seguiram à queda da Bastilha, a vida e a morte de Arquimedes durante dias igualmente violentos após o cerco de Siracusa" (EVES, 2004, p.525).

Sophie Germain imaginou que, se Arquimedes ficara entretido tão profundamente com um problema matemático a ponto de ser morto por um soldado, então essa, certamente, seria a ciência mais fascinante. Sendo assim, começou, entusiasmadamente, a estudar Matemática. Fato esse que, como informado por Singh (2014), fez seu pai tomar suas velas e agasalhos para a impedir de estudar, porém, após alguns anos, seu pai cedeu e a apoiou em seus estudos.

Após a abertura, em 1794, da *École Polytechnique* em Paris, mesmo sendo reservada a integrantes do sexo masculino, Sophie Germain começou a estudar de forma secreta em tal academia. Tal episódio é descrito por Garbi (2010, p.421),

> Ela assistia às aulas do lado de fora, ouvindo pelas janelas e portas entreabertas as explicações que os professores davam aos rapazes. Alguns deles compreendendo-a e apoiando-a em seus esforços, passavam-lhes as anotações das aulas e assim ela foi percorrendo seu árduo caminho ruma à Matemática Superior. [...] Assim que começou a fazer descobertas próprias, Sophie passou a assinar seus trabalhos sob o pseudônimo masculino de *Antoine LeBlanc*.

Antoine LeBlanc era um antigo aluno da *École Polytechnique*; assumindo sua identidade, Sophie Germain pôde ter acesso aos resumos de aulas e problemas e, a cada semana, entregava as respostas deles (SINGH, 2014). Após enviar alguns de seus trabalhos para Joseph Louis Lagrange (1736-1813), sob tal pseudônimo, obtendo cumprimentos dele, decidiu arriscar o "voo mais alto possível: escreveu para Gauss, sempre escondendo sua verdadeira identidade. Entre outras coisas, ela apresentou ao Príncipe dos Matemáticos comentários sobre alguns tópicos da *Disquisitiones Arithmeticae*" (GARBI, 2010, p.422).

Além dos comentários, ela também realizou generalizações e extensões em tal obra. Carl Friedrich Gauss (1777-1855) se impressionou pelo trabalho de Sophie Germain e findaram trocando várias correspondências. Mesmo quando sua real identidade foi descoberta,

> Sophie Germain desenvolveu sua carreira sem maiores obstáculos, foi bem aceita pelos colegas e publicou trabalhos muito úteis, na Álgebra, na Teoria dos Números e na Geometria Diferencial. Em 1831, por indicação de Gauss, a universidade de Göttingen deu a ela o título de Doutor Honoris Causa, o primeiro concedido a uma mulher por aquele prestigioso centro de estudos (GARBI, 2010, p.422).

No entanto, antes de receber seu valioso prêmio e homenagem que fora intercedido por Gauss, Sophie Germain "morreu de cancro no seio em 27 de junho de 1831 e, em 1837, quando a universidade de Göttingen celebrou o seu centenário, atribuindo graus honorários, Gauss teve muita pena que ela já não estivesse viva para receber um" (HALL; JONES; JONES, 2004, p.35).

3.5 Mary Fairfax Greig Somerville

A escocesa Mary Somerville (1780-1872) nasceu em uma família rica e acabou se tornando famosa por seu desempenho na Matemática. Ainda muito jovem, ela teve que assistir, escondida, às aulas de geometria que seu irmão recebia de um professor em sua residência (GARBI, 2010). Como se sabe, o livro de geometria com maior relevância para a Matemática trata-se do *Elementos* de Euclides e, para que ela obtivesse um exemplar de tal obra, "teve que pedir a um irmão para comprá-lo, numa livraria, uma vez que Euclides era considerada uma leitura imprópria para jovens do sexo feminino" (EVES, 2004, p.526).

Assim como Sophie Germain, Mary Somerville também teve suas velas apreendidas por seu pai que afirmava que deveria pôr fim em seus estudos ou teriam que colocá-la numa camisa de força um dia, como afirma Singh (2014). Ela se casou aos 24 anos com um homem rico, mas que não a acompanhava intelectualmente. Depois de três anos de casamento, seu marido faleceu deixando-lhe uma boa herança e, principalmente, a liberdade para continuar seus estudos em matemática, uma vez que essa era uma atividade mal vista para as mulheres da época (VASCONCELOS; LEITE; MACEDO, 2012, p.3138).

Mary Somerville casou-se novamente com um homem que via com bons olhos a atividade intelectual (EVES, 2004, p.526). Um dos fatos que sobressai em sua trajetória é que, após ter estudado sozinha o *Traité de Mécanique Céleste* de Pierre-Simon Laplace, escreveu uma versão simplificada e acessível para pessoas que não fossem especializadas (GARBI, 2010). O trabalho, denominado de *The Mechanisms of Heavens*, foi finalizado no ano de 1830, sendo considerado uma obra de enorme valor, tendo sido adotada por volta de um século pelas universidades Britânicas nos cursos voltados para Matemática e Astronomia. Essa relevância pode ser exemplificada pelo episódio em que o astrônomo John Couch Adams "afirmou que a razão que levaria a procurar um novo planeta (Netuno), para explicar as observadas perturbações de Urano, foi uma referência no *The Mechanisms of the Heaven* de Somerville" (EVES, 2004, p.526).

Pode-se destacar a respeito do preconceito existente na época em que Mary Somerville viveu o seguinte fato descrito por Morais Filho (1996, p.2)

> Somerville foi admitida por sociedades científicas de vários países. Foi a primeira mulher a ser admitida na Sociedade Real Inglesa de Astronomia, e a Sociedade Real Inglesa de Ciências chegou a mandar fazer um busto em sua homenagem e expô-lo no hall do prédio. Entretanto, ela nunca pôde vê-lo, já que mulheres não podiam entrar no prédio dessa Sociedade.

Ainda de acordo com Morais Filho (1996), ela escreveu, no final de sua vida, suas memórias, reviu um manuscrito sobre seu trabalho intitulado “Diferenciais Finitas” e, quando faleceu, aos 92 anos, ainda estava analisando um trabalho sobre quatérnios (uma extensão do conjunto dos complexos).

4 METODOLOGIA

A pesquisa em questão é do tipo qualitativa. Nas palavras de D’Ambrósio (2012, p.21), a pesquisa qualitativa “é o caminho para escapar da mesmice. Lida e dá atenção às pessoas e às suas ideias, procura fazer sentido de discursos e narrativas que estariam silenciadas”.

Neste estudo, trabalhou-se com três turmas (A, B e C) do 3º ano do Ensino Médio de uma escola pública de Petrolina. A escola em questão está localizada em um bairro periférico, sendo assim, a maioria dos sujeitos que compõem tal pesquisa fazem parte de famílias de baixa renda. Alguns dos estudantes já integram o mercado de trabalho e, também, são recorrentes os casos de gravidez na adolescência, aspectos esses que são frequentes nas escolas da região. A faixa etária dos estudantes está entre 16 e 20 anos de idade.

Para a realização da pesquisa, os estudantes foram agrupados livremente em equipes e identificadas da seguinte maneira: A1, A2, B1, B2, B3, B4, C1, C2 e C3, em que a letra maiúscula representa a turma e o número, o grupo, de no máximo, oito componentes, totalizando 52 envolvidos diretamente com a elaboração dos trabalhos. Ao todo, nas três turmas, havia por volta de 110 estudantes, mas nem todos optaram por realizar as tarefas. Mesmo não as realizando[7], participaram de maneira indireta ao assistirem à apresentação dos colegas, uma vez que os trabalhos de cada sala foram exibidos para seus estudantes. A escolha das três turmas deu-se em virtude de o autor desta pesquisa ser professor de Matemática das turmas em questão. Os estudantes tiveram autonomia para escolher uma mulher matemática[8] para elaborar uma peça teatral ou curta metragem a respeito dela, seguindo as seguintes etapas:

- Elaboração de um trabalho escrito, abordando: contexto histórico da época em que ela viveu, que influências ela teve para se tornar matemática, qual sua principal contribuição para a Matemática. Produção de um roteiro/resumo da encenação da peça teatral/curta metragem.
- Apresentação do trabalho em sala de aula em forma de peça teatral ou em curta-metragem com duração de no mínimo 8 e no máximo 15 minutos, sendo encenado/reproduzido pelos estudantes no dia da apresentação.

Após as etapas, os estudantes responderam a um questionário sobre suas impressões no que diz respeito ao trabalho desenvolvido. O objetivo de tal questionário foi obter o “conhecimento de opiniões, crenças, sentimentos, interesses, expectativas, situações vivenciadas etc.” como afirma Gil (1999, p.128). Cabe destacar que os questionários analisados no trabalho em questão foram apenas dos estudantes que participaram efetivamente da atividade, isto é, dos 52 que realizaram a apresentação. Salienta-se também que não houve a apresentação da biografia de alguma mulher matemática por parte do professor.

[7] Os estudantes foram avaliados de acordo com cada etapa desenvolvida e eles optaram por não realizar nenhuma das etapas do trabalho, participaram de uma atividade em que tiveram que demonstrar conhecimento sobre as apresentações realizadas pelos colegas.

[8] Houve as seguintes sugestões, por parte do professor/pesquisador, para a escolha das mulheres matemáticas: Hipatia de Alexandria, Marquesa de Châtelet, Maria Gaetana Agnesi, Sophie Germain, Mary Somerville e Emmy Noether.

Outro ponto importante que cabe destacar é que houve autorização dos responsáveis pelos estudantes para a divulgação de suas atividades e fotografias. Procurou-se garantir o anonimato e a confidencialidade das informações obtidas, sendo que nenhuma resposta ao questionário ou opinião que eles manifestaram influenciou no processo de avaliação do trabalho pelo professor.

5 RESULTADOS

Como mencionado na metodologia, a pesquisa foi realizada em três turmas do terceiro ano do Ensino Médio. Em relação às tais turmas, foi desenvolvido um total de nove trabalhos. No entanto, como houve liberdade de escolha da personagem para a peça ou curta-metragem, ocorreram repetições da personagem escolhida por cada grupo, como poderá ser visto na descrição dos trabalhos.

Percebe-se que houve uma grande predominância em escolher/apresentar o trabalho por meio de curta-metragem. Tal ação decorre da afinidade dos jovens com essas tecnologias. Outro ponto que pode ser destacado é o fato de haver uma maior liberdade em errar as falas dos personagens, pois as cenas podiam ser refeitas sem nenhum prejuízo à apresentação, já que os erros não seriam inseridos no vídeo.

Outra predominância foi a escolha da personagem Sophie Germain, sendo abordada por cinco equipes. Uma explicação para tal seleção, além de uma possível identificação para com ela por parte dos estudantes, trata-se de uma maior facilidade em encontrar material sobre sua vida e obra na *internet*. O mesmo, em menor escala, ocorreu para as demais personagens.

Com relação à quantidade de apresentações por turma, percebeu-se que, na turma B, houve uma maior quantidade de apresentações, mesmo, em geral, havendo uma distribuição uniforme da quantidade de estudantes por turma. Isso ocorreu porque alguns não realizaram o trabalho, mesmo que sua produção tivesse sido computada como item de avaliação referente às atividades bimestrais do ano letivo.

5.1 Trabalhos por equipes

Nesta seção, estão descritas algumas das cenas produzidas pelas equipes, seja por meio do curta-metragem, seja pelo teatro em sala de aula. Do total de equipes, apenas três entregaram o trabalho escrito e só uma entregou o roteiro. Os estudantes, de modo geral, empenharam-se bem mais na produção do curta-metragem ou do teatro em sala, no caso da equipe B2, e não priorizaram a produção de tais elementos da etapa 1, mesmo sendo parte integrante da avaliação do trabalho da equipe.

Pode-se, então, conjecturar a possibilidade de haver alguma resistência por parte dos estudantes a tal tipo de produção escrita. Destaca-se, também, o fato de cinco das nove equipes não terem produzido uma apresentação com duração de no mínimo 8 minutos e no máximo 15 minutos, mesmo a duração sendo um dos requisitos de avaliação, assim como a realização do trabalho escrito e do roteiro.

Ressalta-se que cada equipe teve liberdade para a recriação em relação às biografias das mulheres matemáticas, uma vez que, como salientado pelos Parâmetros Curriculares de Pernambuco (PERNAMBUCO, 2012), levar a História da Matemática para sala de aula é muito mais do que apenas uma mera descrição de fatos ocorridos no passado ou atuação de algum personagem de destaque. Sendo assim, as biografias servem como fio condutor na geração de um pensamento crítico com relação ao papel das mulheres na produção do conhecimento matemático e que pode ser generalizado pelos estudantes para o fato de que as barreiras enfrentadas pelas mulheres não foram restritas à Matemática em especial, mas sim para quaisquer atividades que fugissem da condição de segregação social e política.

Nesse caso, as biografias não são estanques; servem a uma finalidade maior de promover a apropriação de conhecimentos, gerar debate, possibilitar a socialização por meio do trabalho em grupo, aguçar a curiosidade, estimular a criticidade de estudantes no que diz respeito às mudanças culturais etc.

5.1.1 Equipe A1

Na Figura 1(esq.), está sendo representado o momento do curta-metragem em que o pai de Mary Somerville, personagem escolhida por tal grupo, a envia para um internato quando ela tinha dez anos[9]. Já na Figura 1(dir.), os estudantes estão encenando a relação entre Mary Somerville e seu segundo marido, representando o fato de que ambos compartilhavam do interesse por ciência, como apontado por Eves (2004).

Figura 1: À esquerda, o pai de Mary Somerville a enviando para um internato e à direita, ela compartilhando seu interesse pela ciência em conjunto com seu segundo marido.

Fonte: recorte do acervo de pesquisa.

Enquanto ocorriam as cenas, havia um narrador que as descrevia, pois os personagens não falavam, apenas gesticulavam. Além das cenas descritas no parágrafo anterior, a equipe também apresentou outros momentos da vida de Mary Somerville, como, por exemplo: a ausência de seu pai por ser oficial da marinha e o momento em que ela retorna do internato e começa a ler todos os livros que estavam ao seu alcance, contrariando, assim, alguns de seus familiares que não viam sentido nesse tipo de atividade para uma garota.

5.1.2 Equipe A2

No que diz respeito a tal equipe, durante o vídeo apresentado por eles, houve momentos de encenação em que explanavam o período em que Sophie Germain tomou conhecimento (Figura 2), por meio de um livro de História da Matemática, da morte de Arquimedes, inspirando-a a se tornar matemática, conforme evidenciado por (EVES, 2004).

Quanto a outra cena, que se destacou no vídeo produzido pela equipe A2, trata-se da fase "inicial" da carreira de Sophie Germain como matemática, quando seu pai não aceitava que ela se dedicasse aos estudos, vindo a ceder posteriormente (SINGH, 2014). Na cena em questão (ver Figura 2, ao centro), há um diálogo entre Sophie Germain, seu pai e sua mãe, em que Sophie

[9] A fonte de pesquisa dos estudantes para esse trabalho está disponível em Bertotti (2017).

manifesta seu desejo de ser uma mulher matemática. Prontamente, seu pai recusa a ideia, mas, ao final, concorda e a apoia (Figura 2, dir.) ao longo de sua vida, ilustrando como de fato ocorreu.

Figura 2: À esquerda, Sophie Germain lendo o relato da morte de Arquimedes; ao centro, Sophie Germain, seu pai, e sua mãe; e à direita, seu pai entregando livros para que ela continuasse seus estudos, o que significava uma forma de apoio.

Fonte: recorte do acervo de pesquisa.

Logo após as encenações descritas, a equipe A2 trouxe, em seu curta-metragem, relatos das contribuições de Sophie Germain, como, por exemplo, seu empenho em resolver o Último Teorema de Fermat.

5.1.3 Equipe B1

Por sua vez, os componentes da equipe B1, assim como A2, fizeram um curta-metragem sobre Sophie Germain. No início do vídeo, ilustraram o fato de o pai de Sophie ter sido negociante (Figura 3, acima, à esquerda) e a preocupação dele em relação a ela ser criada para "cuidar do lar" (Figura 3, acima, à direita), fato evidenciado por (SINGH, 2014).

Figura 3: O pai de Sophie Germain desempenhando o papel de comerciante (esq. acima) e Sophie cuidando do lar (dir. acima). Abaixo, à esquerda, Sophie Germain descobrindo o livro de História de Matemática na biblioteca de seu pai, e abaixo, à direita, conhecendo pessoalmente Carl Friedrich Gauss.

Fonte: recorte do acervo de pesquisa

No enredo, trouxeram o fato de que Sophie Germain sentiu-se mais motivada a estudar Matemática após ter contato, a partir da biblioteca de seu pai (Figura 3, abaixo, à esquerda), com um livro sobre a história de tal ciência (SINGH, 2014). Também, apresentaram o episódio em que ela fez-se passar por um ex-aluno, Antoine-August Le Blanc, para que pudesse estudar na *École Polytechnique* em Paris (GARBI, 2010).

Um ponto chave do trabalho da equipe B1 foi a criação de um suposto "romance" entre Carl Gauss e Sophie Germain (Figura 3, abaixo, à direita). Sabe-se que ambos chegaram a se corresponder, mas que não se conheceram pessoalmente (HALL; JONES; JONES, 2004). Quando questionados a respeito, os componentes informaram que o "romance" em questão foi apenas para produzir um maior dinamismo ao curta-metragem.

A equipe B1 também trouxe o episódio em que Sophie Germain envia uma mensagem ao seu amigo, general Joseph-Marie Pernety, para que interviesse garantindo a segurança de Carl Gauss (SINGH, 2014). Além disso, abrangeram durante o curta-metragem a mediação feita por Carl Gauss, junto à universidade de Göttingen, para conceder a Sophie Germain um grau honorário, mas que antes de recebê-lo, ela morreu de câncer de mama (HALL; JONES; JONES, 2004).

5.1.4 Equipe B2

Diferentemente de todas as outras equipes, a equipe B2 optou em realizar o trabalho por meio de um teatro em sala de aula. As cenas apresentadas por tal grupo destacaram os seguintes fatos ocorridos na vida de Sophie Germain: a falta de apoio por parte de seu pai no início de sua carreira, em que ele confiscou as suas velas (Figura 4, à esquerda) para que ela não estudasse durante a noite (SINGH, 2014) e o episódio em que ela se fez passar por um ex-aluno para que pudesse acompanhar as aulas da *École Polytechnique* (GARBI, 2010), tendo, posteriormente, sua identidade revelada a Pierre-Simon Lagrange (Figura 4, à direita).

Figura 4: À esquerda, o pai de Sophie Germain apreende suas velas e à direita ela tem sua verdadeira identidade revela à Pierre-Simon Lagrange.

Fonte: recorte do acervo de pesquisa

Na transição das duas cenas apresentadas, havia um narrador que contava fatos que ocorreram na vida da personagem. Alguns destacados são: seu interesse pela teoria dos números; o contato com Carl Gauss por meio de cartas (GARBI, 2010) e que, após a interrupção do contato com ele, o seu interesse migrou da teoria dos números para a Matemática aplicada e a intermediação feita por Gauss para que ela recebesse o título de doutora, o que não veio a ocorrer devido ao seu falecimento (HALL; JONES; JONES, 2004).

5.1.5 Equipe B3

No início do curta-metragem da equipe B3, havia um narrador que descrevia algumas das áreas que Hipátia de Alexandria havia atuado (Figura 5, esq.), como, por exemplo: Astronomia, Matemática e Medicina (GARBI, 2010), sendo também diretora da escola de filosofia neoplatônica de Alexandria.

Com relação às cenas que tal equipe apresentou, destacam-se as seguintes: Hipátia lecionando sobre Astronomia; momento em que seu pai reconhece que ela está o superando nos estudos (IGNOTOFSKY, 2017); diálogo em que seu pai condena a ideia de ela se casar, pois isso a impediria de divulgar suas ideias filosóficas; a entrega da biblioteca de Alexandria aos cristãos após a tomada de poder por eles; a personagem em questão recusando-se a se batizar como cristã por entender que não devia barganhar a fé (GARBI, 2010) e, logo após, sendo levada (Figura 5, à direita) por um grupo de cristãos para ser assassinada em seguida.

Figura 5: À esquerda temos o narrador, e à direita, Hipátia sendo levada pelos cristãos.

Fonte: recorte do acervo de pesquisa.

5.1.6 Equipe B4

Com relação à equipe B4, as cenas descritas por eles sobre a personagem Maria Gaetana Agnesi abrangeram momentos em que ela ajuda um de seus irmãos com conteúdos relacionados à Matemática (EVES, 2004) (Figura 6, esq.); manifesta o desejo de se tornar freira pedindo ao seu pai que a enviasse para um convento, solicitação que foi negada por ele (MARTINS, 2015); dedica-se à caridade, fazendo doações (GARBI, 2010) (Figura 6, dir.) e também encenaram o momento de sua morte natural, já idosa.

Figura 6: Maria Gaetana ajudando um de seus irmãos com Matemática (esq.) e fazendo caridade no final de sua vida (dir).

Fonte: recorte do acervo de pesquisa.

Tal equipe apresentou, no curta-metragem, cenas que descreviam momentos da vida da personagem. Além desses aspectos, o grupo poderia ter explorado mais as contribuições que Agnesi deixou para a Matemática, como, por exemplo, a sua famosa curva, que é conhecida como a "Bruxa de Agnesi".

5.1.7 Equipe C1

O curta-metragem desenvolvido pela equipe C1 sobre a personagem Hipátia de Alexandria intercalou a narração de fatos vividos pela personagem, com algumas contribuições e encenações sobre momentos marcantes que viveu. As cenas em questão descreveram basicamente os seguintes momentos: a descoberta de que a trajetória descrita pela terra em torno do sol é elíptica. Nessa cena, tal trajetória é desenhada na areia (Figura 7, esq.), assim como no filme Alexandria; o momento em que Hipátia é levada (Figura 7, cent.) pelos cristãos e, posteriormente, assassinada (figura 7, dir.), por eles a verem como uma herege.

Figura 7: À esquerda, tem-se uma elipse desenhada na areia, ao centro, Hipátia está sendo levada pelos cristãos para ser assassinada e, à direita, seu corpo após o assassinato.

Fonte: recorte do acervo de pesquisa.

Na narração, o grupo destacou que Hipátia contribuiu para a Astronomia, a Filosofia e a Matemática (GARBI, 2010) de um modo geral e, mais especificamente, com o plano esférico, o Hidrômetro e o astrolábio plano, instrumentos que, ainda, são utilizados na modernidade.

5.1.8 Equipe C2

Assim como na maioria das equipes, a personagem selecionada pela equipe C2 para o curta-metragem foi Sophie Germain. As cenas por eles elaboradas abordavam basicamente os seguintes momentos: diálogo entre a personagem e seu pai (Figura 8, esq.), no qual ele diz que ela, em vez de estudar, deveria cuidar do lar; Sophie estudando matemática na madrugada à luz de velas (Figura 8, cent.); o interesse dela em se corresponder com outros matemáticos por intermédio de cartas (GARBI, 2010); momento em que Sophie intercede pela vida de Gauss, pedindo ajuda a seu primo, que era general (Figura 8, dir.) e a interferência de Gauss junto ao conselho para conceder a Sophie o título de doutora (GARBI, 2010).

Figura 8: À esquerda sendo representado o diálogo entre Sophie Germain e seu pai, em que ele diz que ela deveria cuidar do lar ao invés de estudar; ao centro, Germain estuda à luz de velas e, à direita, Sophie intercede pela vida de Gauss por meio de seu primo.

Fonte: recorte do acervo de pesquisa.

Enquanto ocorriam as cenas, também havia um narrador que contava fatos para que houvesse as transições entre elas. Um dos eventos descritos na narração que se destaca é o seguinte: a omissão de seu nome, junto aos de outros cientistas, na relação de pessoas que haviam contribuído com teorias para a construção da Torre Eiffel. Sabe-se que Sophie Germain foi pioneira na teoria da elasticidade, que foi fundamental para a construção da torre.

5.1.9 Equipe C3

O curta-metragem desenvolvido por tal grupo inicia-se abordando, por meio de um narrador, as contribuições realizadas por Sophie Germain, que, no caso do vídeo, foram: contribuições fundamentais na teoria dos números e teoria da elasticidade, pela qual ganhou um prêmio da academia francesa, ramo no qual foi pioneira. A primeira cena apresentou o momento em que Sophie tomou conhecimento, a partir da biblioteca de seu pai (Figura 9, esq.), de uma obra que continha algumas contribuições de Arquimedes, o que a motivou nos seus estudos (Figura 9, cent.) sobre Matemática (EVES, 2004).

Figura 9: À esquerda, está sendo representado o momento que Sophie Germain toma conhecimento da história de Arquimedes a partir de um livro da biblioteca de seu pai; ao centro, ela está debruçada sobre o livro em questão; e à direira, está recebendo o prêmio por suas contribuições na teoria da elasticidade.

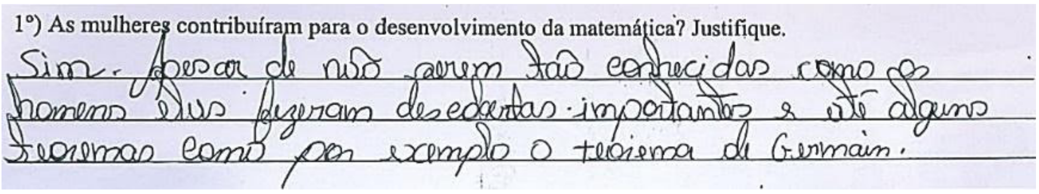
Fonte: recorte do acervo de pesquisa.

Nas cenas apresentadas, também foi abordada a resistência inicial de seus pais em relação a Sophie se dedicar aos estudos em vez de se tornar uma “dona de casa” (SINGH, 2014). Para finalizar a encenação, o grupo apresentou uma cena em que a protagonista recebia o prêmio (Figura 9, dir.) da Academia Francesa pela teoria da elasticidade, contribuição essa que havia sido abordada no início da narração.

5.2 Análises dos questionários

O primeiro item do questionário, além de perguntar se as mulheres haviam contribuído para o desenvolvimento da Matemática, pedia uma justificativa. Foi unânime a resposta positiva para tal contribuição (Figura 10). Para uma melhor compreensão das respostas dos estudantes, criou-se cinco categorias para suas justificativas, são elas: (1) contribuíram com fórmulas, teoremas, métodos, instrumentos e ganhando prêmios (30,8%)[10]; (2) outro tipo de justificativa, sem especificar nenhum elemento significativo (28,8%); (3) contribuíram por meio do exemplo, luta, incentivo, dedicação e divulgação do conhecimento (21,2%); (4) justificam fazendo comparativos com os homens ou dizendo que eles receberam os méritos pelos trabalhos realizados pelas mulheres matemáticas (15,4%) e (5) sem justificativa (3,84%).

Figura 10: Resposta do estudante à primeira pergunta do questionário[11].

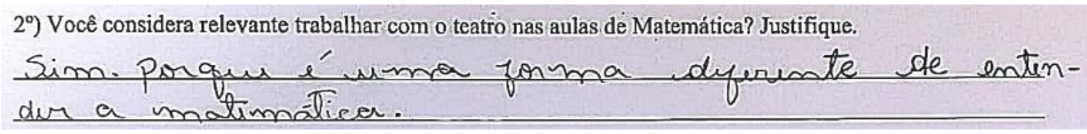

1°) As mulheres contribuíram para o desenvolvimento da matemática? Justifique.
Sim. Apesar de não serem tão conhecidas como os homens elas fizeram descobertas importantes e até alguns teoremas como por exemplo o teorema de Germain.

Fonte: recorte do acervo de pesquisa.

[10] Para evitar uma grande repetição da palavra “aproximadamente”, limitou-se os dígitos a duas casas após a vírgula por meio do truncamento.
[11] O critério de escolha das respostas dos estudantes para expor nas figuras 10, 11, 12, 13, 14, 15 e 16, foi de acordo com a maior frequência em relação aos outros tipos ou categorias de respostas.

Com relação à segunda pergunta do questionário, em que se indagava a respeito da relevância de trabalhar com o teatro em sala de aula, foi praticamente unânime a resposta positiva, pois apenas 4,7%, dos que responderam ao questionário, discordaram do teatro ser importante para as aulas de Matemática. Quanto às respostas positivas sobre a tal pergunta (Figura 11), organizou-se as justificativas também em cinco categorias: (1) os estudantes justificam dizendo que consideram relevante, pois torna a aula diferente, menos cansativa, permitindo sair da rotina (32,7%), (2) aula divertida, prática, interessante, dinâmica e podem aprender mais (26,9%), conforme mencionado por Cartaxo (2001), (3) justificativas que fogem ao escopo da pergunta (15,4%), (4) facilita a compreensão, estimula a pesquisa e a vontade de aprender matemática, além de trazer informações diferentes (13,5%) e (5) estimula o trabalho em grupo (11,5%), como aludido por Gasperi e Pacheco (2011).

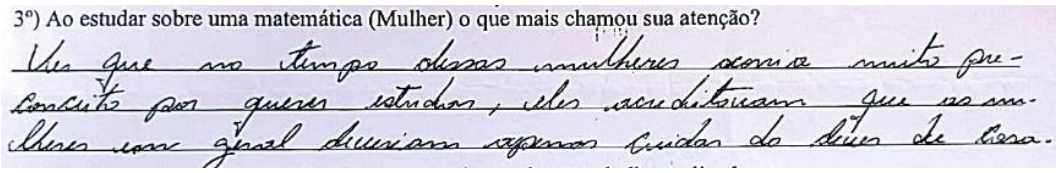
Figura 11: Resposta do estudante à segunda pergunta do questionário.


2º) Você considera relevante trabalhar com o teatro nas aulas de Matemática? Justifique.
Sim. Porque é uma forma diferente de entender a matemática.

Fonte: recorte do acervo de pesquisa.

Já na terceira indagação, questionava-se sobre o que mais lhes havia chamado a atenção sobre o estudo de uma mulher matemática. A linha de raciocínio seguida pela maioria dos estudantes diz respeito à persistência e determinação em enfrentar a família e os preconceitos existentes na época, relatado por 53,8% dos que responderam ao questionário (Figura 12), bem como ter que se passar por um homem para frequentar uma universidade devido às proibições impostas na época (IGNOTOFSKY, 2017, p.7), indicado por aproximadamente 5,8% dos estudantes que responderam ao questionário. Apenas 1,9% não responderam a este item, 19,2% destacaram que o que havia chamado mais atenção foi descobrir a existência de mulheres que se interessavam pela Matemática e que havia as que se destacaram, mas não foram reconhecidas. Os 19,2% restantes, fugiram parcialmente ao propósito da pergunta.

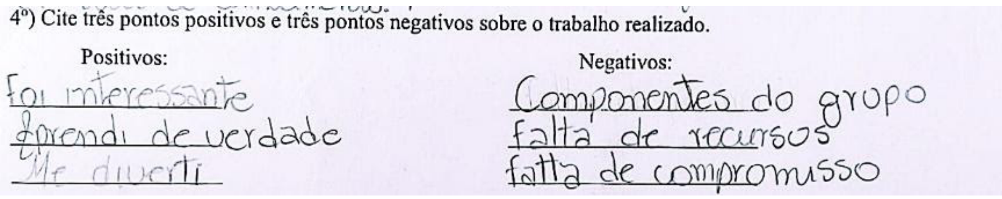
Figura 12: Resposta do estudante à terceira pergunta do questionário.


3º) Ao estudar sobre uma matemática (Mulher) o que mais chamou sua atenção?
Vi que no tempos dessas mulheres havia muito preconceito por querer estudar, eles acreditavam que as mulheres em geral deviam apenas cuidar dos deveres de casa.

Fonte: recorte do acervo de pesquisa.

Para responder à quarta pergunta, era necessário apresentar três pontos positivos e três negativos com relação ao trabalho realizado (Figura 13). Os pontos positivos que apareceram com maior frequência foram: conhecimento, trabalhar em equipe e se divertir, também evidenciado por Cartaxo (2001). Em relação aos pontos negativos que foram mencionados mais vezes, foram: a falta de interesse de alguns componentes do grupo, ser trabalhoso e a timidez.

Figura 13: Resposta do estudante à quarta pergunta do questionário.

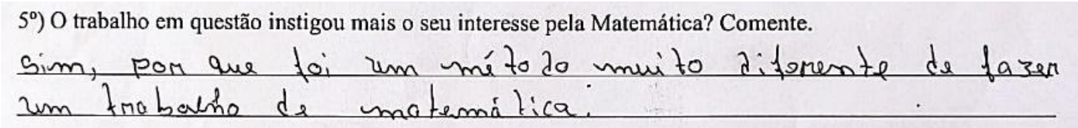

4º) Cite três pontos positivos e três pontos negativos sobre o trabalho realizado.

Positivos:	Negativos:
Foi interessante	Componentes do grupo
Aprendi de verdade	falta de recursos
Me diverti	falta de compromisso

Fonte: recorte do acervo de pesquisa.

A quinta interpelação fazia um paralelo entre o trabalho desenvolvido e a possibilidade dele ter instigado mais o interesse do estudante pela Matemática. Dentre os entrevistados, 61,5% dizem ter se interessado mais pela Matemática a partir do trabalho desenvolvido (Figura 14), 28,8% afirmam não ter modificado suas percepções em relação a esse ramo do conhecimento e o restante, 9,6% foram inconclusivos ou não opinaram neste item.

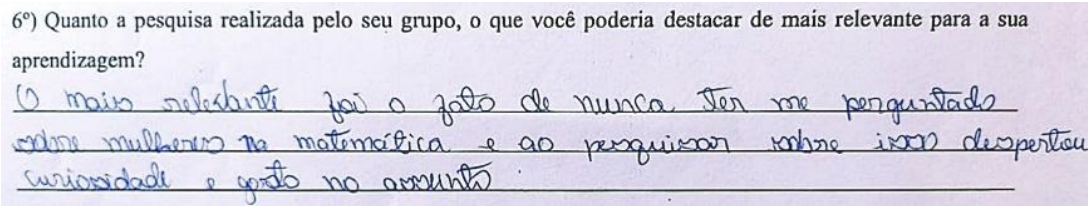
Figura 14: Resposta do estudante à quinta pergunta do questionário.


5º) O trabalho em questão instigou mais o seu interesse pela Matemática? Comente.
Sim, por que foi um método muito diferente de fazer um trabalho de matemática.

Fonte: recorte do acervo de pesquisa.

O sexto quesito pedia que o estudante destacasse o que ele entendia que, a partir do trabalho realizado, foi mais importante para a sua aprendizagem (Figura 15). Aproximadamente, 44,2% das respostas obtidas faziam menção à persistência e à dedicação aos estudos, conhecer a história de mulheres matemáticas (MELO, 2017) e despertar a curiosidade por tal assunto (MIGUEL; MIORIM, 2005). O restante do percentual foi distribuído do seguinte modo: 11,5% não respondeu a esse item ou então afirmou que não trouxe nenhuma contribuição importante, 15,4% foi inconclusivo e os outros 28,8% mencionaram a importância de estudar Matemática, conhecer algumas teorias e descobrir que a Matemática não envolve apenas cálculos.

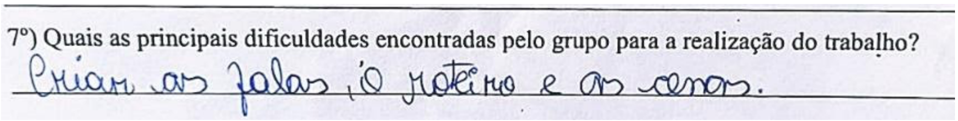
Figura 15: Resposta do estudante à sexta pergunta do questionário.


6º) Quanto a pesquisa realizada pelo seu grupo, o que você poderia destacar de mais relevante para a sua aprendizagem?
O mais relevante foi o fato de nunca ter me perguntado sobre mulheres na matemática e ao pesquisar sobre isso despertou curiosidade e gosto no assunto.

Fonte: recorte do acervo de pesquisa.

Na última pergunta, a indagação era sobre quais teriam sido as principais dificuldades encontradas pelo grupo para a realização do trabalho. Os enfoques mais frequentes foram: a falta de material sobre as mulheres na Matemática (MELO, 2017); dificuldade em reunir os membros da equipe; criação do roteiro, cenas, falas e memorizá-las; o tempo e a edição dos vídeos (figura 16).

Figura 16: Resposta do estudante à sexta sétima do questionário.


7º) Quais as principais dificuldades encontradas pelo grupo para a realização do trabalho?
Criar as falas, o roteiro e as cenas.

Fonte: recorte do acervo de pesquisa.

Percebeu-se, a partir das respostas dadas aos questionários, que as pesquisas realizadas pelos estudantes geraram uma gama de conhecimentos e curiosidades para que eles possam explorá-las posteriormente. Quanto ao interesse gerado pelo trabalho com relação à Matemática, verifica-se que ele foi frutífero nesse sentido. Mesmo que a atividade não tenha despertado tal interesse, as histórias que eles conheceram puderam ser, por si mesmos, considerados interessantes.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Como exposto na introdução, a problemática deste trabalho diz respeito à percepção dos estudantes sobre a questão do gênero em Matemática e quais seriam as contribuições de uma atividade teatral/curta-metragem, tanto para o ensino quanto para a aprendizagem, sobre as mulheres que se destacaram no estudo desse ramo do saber. Com relação à percepção deles sobre a questão de gênero, pergunta que está relacionada com o primeiro item do questionário, percebe-se que descobriram[12] o fato de as mulheres terem contribuído para a matemática. No entanto, nota-se que também sabem que as barreiras que as mulheres enfrentaram/enfrentam na produção de conhecimento matemático não é de natureza intelectual, mas devido às questões sociais e políticas, como ilustrado na figura 10.

Já na segunda parte da problemática, em que se indagava sobre as contribuições para o ensino e a aprendizagem por meio da atividade desenvolvida, foi possível detectar que tal atividade contribuiu positivamente para a aprendizagem dos estudantes, uma vez que houve uma boa adesão e qualidade nos trabalhos produzidos, indicando, assim, que eles estudaram, de fato, a vida e obra da personagem escolhida. Outro fator que pode evidenciar tais asserções são as respostas à segunda e à sexta perguntas do questionário, mostrando que, além de ajudar cognitivamente e de maneira lúdica, o trabalho despertou a curiosidade de alguns deles.

No que diz respeito ao ensino, o trabalho desenvolvido configura-se como uma possibilidade de atividade para ser proposta em sala, tendo em vista que o teatro/curta-metragem pode ser realizado em grupo, o que estimula a participação dos estudantes. Para o professor, cabe o trabalho de orientação e, mesmo que não conheça a história ou relatos de mulheres que tenham contribuído para a Matemática, terá a oportunidade de conhecê-las a partir das pesquisas produzidas por elas.

O estudo em questão possibilitou, também, a exploração de tecnologias, mesmo que indiretamente, na produção e edição dos vídeos para os curtas-metragens das equipes que optaram por tal meio para a apresentação do trabalho. Nesse sentido, como sugestão para pesquisas posteriores, pode-se explorar tal utilização, no sentido de buscar suas contribuições para a aprendizagem dos estudantes, uma vez que houve uma grande aceitação em apresentar a atividade por meio do curta-metragem em detrimento do teatro em sala. Além do mais, pode-se também realizar um estudo sobre as potencialidades do teatro em sala de aula, voltando-se para a história das mulheres na Matemática.

[12] Dos estudantes envolvidos na pesquisa, não houve nenhum relato sobre conhecimentos prévios a respeito das contribuições ou simplesmente nomes de mulheres matemáticas, o que evidencia que possivelmente eles não tivessem conhecimentos referentes a temática anteriormente à realização do trabalho.

REFERÊNCIAS

BERNARDES, A. Uma Proposta para Integrar a História da Matemática ao Ensino de Matemática: história das matrizes e as regras do discurso matemático. **Hipátia**, v. 4, n. 1, p.84-101, 2019.

BERTOTTI, T. Mulheres na ciência: a história de Mary Somerville. **SoCientífica**, 2017. Disponível em: <https://socientifica.com.br/2017/03/08/mulheres-na-ciencia-historia-de-mary-somerville/>. Acesso em: 26 de junho de 2019.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais.** Ciências Humanas e suas Tecnologias. Ensino Médio. Brasília: MEC/SEF, 2000.

CARTAXO, C. **O Ensino das Artes Cênicas na Escola Fundamental e Média**. João Pessoa: Editora da UFPB, 2001.

CARVALHO, M. G.; CASAGRANDE, L. S. Mulheres e ciência: desafios e conquistas. **INTER thesis: Revista Internacional Interdisciplinar**, v. 8, n. 2, p.20-35, 2011.

CASAGRANDE, L. S. et al. Mulher e ciência: uma relação possível? **Cadernos de Gênero e Tecnologia**, v. 1, n. 4, p.31-45, 2005.

D'AMBROSIO, U. **Educação matemática**: da teoria à prática. Campinas: Papirus, 2012.

EVES, H. **Introdução à história da Matemática.** Campinas: UNICAMP, 2004.

FERNANDEZ, C. S.; AMARAL, A. M. L. F.; VIANA, I. V. **A história de Hipátia e de muitas outras matemáticas**. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2019.

FRANSOLIN, J. B. L.; SOUZA, R. B**.** A História da Matemática numa perspectiva para a formação humana dos futuros professores de matemática. **Hipátia**, São Paulo, v. 4, n. 1, p.62-83, 2019.

GARBI, G. G. **A Rainha das Ciências**: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática. 5. ed rev. e ampl. São Paulo: Livraria da Física, 2010.

GASPERI, W. *N. H.; PACHECO*, E. R. **A História da Matemática como Instrumento para a interdisciplinaridade na Educação Básica**. Curitiba: SEED-PR, 2011.

GIL, A. C. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 5. ed. São Paulo: Atlas, 1999.

GIL, A. Projetos de pesquisa. 3. ed. São Paulo: Atlas, 1996.

HALL, N.; JONES, M.; JONES, G. A vida e o trabalho de Sophie Germain. **Gazeta de Matemática**, n. 146, jan., 2004.

IGNOTOFSKY, R. **As cientistas**: 50 mulheres que mudaram o mundo. Tradução de Sonia Algusto. São Paulo: Blucher, 2017.

JIMÉNEZ, *M. A. S.* Teano y la ciencia pitagórica. **Revista de divulgación científica y tecnológica de la Universidad Veracruzana**, vol. XXIII, n. 2, 2010.

MAIA, C. M.; SAD, L. A. Aulas de História como palco para interações com a Matemática e Ciências: um espaço de construções do pensar crítico. In: ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 19., 2015, Juiz de Fora. **Anais**.... Juiz de Fora, 2015.

MARTINS, M. C. Maria Gaetana Agnesi: a matemática que se dedicou aos desfavorecidos e doentes. **Correi dos Açores**, Mar. 2015. Disponível em: https://repositorio.uac.pt/bitstream/10400.3/3591/1/Agnesi(jornal)-12-3-2015.pdf. Acesso em 10 de julho de 2019.

MELO, C. I. B. Relações de gênero na matemática: o processo histórico-social de afastamento das mulheres e algumas bravastransgressoras. **Revista Ártemis**, v. 24, n. 1, p.189, 2017.

MENDES; I. A.; CHAQUIAM, M. **História nas aulas de Matemática**: fundamentos e sugestões didáticas para professores. Belém: SBHMat, 2016.

MIGUEL, A.; MIORIM, A **História na Educação Matemática**. Propostas e Desafios**.** Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

MIGUEL, A.; MIORIM, M. A. **História na Educação Matemática: propostas e desafios.** 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2017.

MONTENEGRO, B.; FEITAS, A. L. P.; MAGALÃES, P.J. C.; SANTOS A. A.; VALE, M. R. O papel do teatro na divulgação científica: A experiência da Seara da Ciência. **Revista Ciência e Cultura**, v. 57, n. 4, São Paulo, 2005.

MORAIS FILHO, D. C. As Mulheres na Matemática. **Revista do Professor de Matemática**. Rio de Janeiro, n. 30, 1° quadrimestre de 1996.

PASQUALE JUNIOR, M. L. D.; GRACILIANO, E. C. Teatro uma alternativa ao ensino de conteúdos de história da matemática. *In*: ENCONTRO PARANAENSE DE

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 14., 2017, Cascavel. **Anais...** Cascavel, 2017.

PAVIS, P. **Dicionário de teatro**. São Paulo: Perspectiva, 2008.

PERNAMBUCO. **Parâmetros curriculares para a Educação Básica do Estado de Pernambuco** – Concepções. 2012.

POLIGICCHIO, A. G. **Teatro**: Materialização da Narrativa Matemática. 2011. 148 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade de São Paulo, São Paulo, 2011.

SANTOMÉ, J. T. As culturas negadas e silenciadas no currículo. *In*: SILVA, Tomaz Tadeu da (Ed.). **Alienígenas na sala de aula**: uma introdução aos estudos culturais em educação. Petrópolis: Vozes, 1995.

SILVA, A. P.; FERREIRA, A. C. Matemática na Arte: utilizando o potencial pedagógico da História da Matemática no ensino de geometria para alunos da escola básica. In: ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 15., 2011, Campina Grande. **Anais**... Campina Grande, 2011. p.1-11.

SILVA, E. R.; MIRANDA, T. L. A investigação em história da matemática. *In*: SEMINÁRIO NACIONAL DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA, 10., 2013, São Paulo. **Anais**... São Paulo: 2013. p.1 - 10.

SINGH, S. **O Último Teorema de Fermat**. 1. ed. Rio de Janeiro: Record, 2014.

SIQUEIRA, R. A. N. **Aprender matemática jogando.** *In*: PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. Superintendência de Educação. Os desafios da escola pública paranaense na perspectiva do professor PDE: Produções didático-pedagógicas, 2013. Ponta Grossa: SEED/PR,2013. v.2. (Cadernos PDE).

SOUZA, M. C. R. F; FONSECA, M. C. F. R. **Relações de gênero, Educação Matemática e discurso**: enunciados sobre mulheres, homens e matemática. Belo Horizonte: Autêntica, 2010.

VASCONCELOS, J. M.; LEITE, B. P. B; MACEDO, L. M. S. A atuação das mulheres no universo da matemática: o caso da Universidade Regional do Cariri – URCA. In: SEMINÁRIO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS "HISTÓRIA, SOCIEDADE E EDUCAÇÃO NO BRASIL", 9., 2012, João Pessoa. **Anais...** João Pessoa, 2012.

Submetido em julho de 2020.
Aprovado em dezembro de 2020.

Mateus de Souza Galvão

Mestre em Ensino de Matemática pelo Programa de Mestrado Profissional em Rede Nacional (PROFMAT). Docente do Ensino Básico na Secretaria Estadual de Educação de Pernambuco (SEEPE), Petrolina, PE, Brasil. ID Lattes: 5513226030503227.

Contato: mattheusgalvao@hotmail.com.

Lucília Batista Dantas Pereira

Doutora em Ciências em Engenharia Mecânica pela Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ). Docente da Universidade de Pernambuco (UPE). Petrolina, PE, Brasil. ID Lattes: 7751208084431086.

Contato: lucilia.batista@upe.br.

Contribuições das Navegações Portuguesas para a Geometria da Superfície Terrestre

Contributions of Portuguese Navigations to the Earth Surface Geometry

Carla P. **Ferreira dos Santos**
Secretaria de Educ. do Estado de São Paulo (SEDUC-SP)

Lucas Antônio **Caritá**
Instituto Federal de São Paulo (IFSP)

Marta Cilene **Gadotti**
Universidade Estadual Paulista (UNESP)

RESUMO

As tentativas de dedução do V postulado de Euclides promoveram o desenvolvimento de novas geometrias denominadas de não euclidianas. Entre elas, pode-se citar a Geometria Esférica, a qual encontra como elemento subjacente a superfície de uma esfera, sendo a forma mais simples de Geometria Elíptica (proposta por Riemann). Tal geometria, já era conhecida e utilizada por matemáticos gregos, antes mesmo de sua formalização, no estudo de Astronomia. No entanto, os portugueses, com sua potência marítima, diante dos desafios da navegação, proporcionaram grande desenvolvimento e aplicabilidade de técnicas da Geometria Esférica e seus elementos para localização terrestre. Nesse contexto, este texto tem por objetivo apresentar de maneira reflexiva o desenvolvimento da geometria da superfície terrestre enfatizando as contribuições advindas das navegações portuguesas. A pesquisa foi realizada através de um estudo bibliográfico e o texto foi redigido com intuito de trazer acontecimentos históricos de forma reflexiva, discutindo a criação das geometrias não euclidianas, a saga portuguesa para o aprimoramento da localização terrestre e como os conhecimentos buscados pelos portugueses contribuiu com a tecnologia atual para localização na superfície terrestre.

Palavras-chave: Geometria Esférica. Geometrias não euclidianas. Navegações portuguesas. História da matemática.

ABSTRACT

Attempts to deduce the Euclid's fifth postulate promoted the development of new geometries called non-Euclidean. Among them we can mention Spherical Geometry, which finds the surface of a sphere as the underlying element, being the simplest form of Elliptical Geometry (proposed by Riemann). Such geometry was already known and used by Greek mathematicians, even before its formalization, in the study of Astronomy. However, the Portuguese, with their maritime power, faced with the challenges of navigation, provided great development and applicability of techniques of Spherical Geometry and its elements for terrestrial location. In this context, this text aims to reflectively present the development of the geometry of the Earth's surface, emphasizing the contributions arising from Portuguese navigation. The research was carried out through a bibliographic study and the text was written in order to bring historical events in a reflexive way, discussing the creation of non-Euclidean geometries, the Portuguese saga for the improvement of the terrestrial location and how the knowledge sought by the Portuguese contributed with current technology for location on the Earth's surface.

Keywords: Spherical geometry. Non-euclidean geometries. Portuguese navigations. History of mathematics.

1 INTRODUÇÃO

Os seres humanos, nos primórdios, já percebiam a geometria existente na natureza, mas a consideravam apenas como uma forma de expressar as coisas do mundo ao redor. Segundo Eves (1992), pelas necessidades humanas, se passa a conjecturar formas geométricas simples como: retângulos, quadrados e triângulos, assim como conceitos de vertical, horizontal, paralelismo e perpendicularismo. Muito provavelmente, a observação para a concepção de curvas e círculos também possa ter ocorrido por meio da visualização do contorno do Sol, da Lua, das formas do arco-íris e das sementes de flores e frutos.

Com o passar do tempo, o homem elevou a geometria "intuitiva" ao status de Ciência. Acredita-se que este fato ocorreu no antigo Egito. Quanto a isso, Heródoto do século V a.C. defendeu a seguinte tese:

> Eles diziam que este rei [Sesóstris] dividiria a terra entre os egípcios de modo a dar a cada um deles um lote quadrado de igual tamanho e impondo-lhes o pagamento de um tributo anual. Mas a qualquer homem despojado pelo rio de uma parte de sua terra teria de ir a Sesóstris e notificar-lhe o ocorrido. Ele então mandava homens observarem e medirem o quanto a terra se tornara menor, para que o proprietário pudesse pagar sobre o que restara, proporcionalmente ao tributo total. Dessa maneira parece-me que a geometria teve origem, sendo mais tarde levada até a Helade. (EVES, 1992, p. 3)

Observa-se então que a geometria passou de uma mera observação para uma geometria colocada em prática. Contudo, essa movimentação de construção de uma geometria de modo científico não se deu apenas no Egito. Ao redor dos principais rios que cercavam os povos antigos, a geometria se desenvolveu de maneira semelhante, na região dos rios Tigre e Eufrates, na Mesopotâmia, o Indo e o Ganges, na região centro-sul da Ásia, o Hwang Ho, e o Yangtzé na Ásia oriental.

O próximo passo para seu desenvolvimento foi a passagem da geometria já considerada científica para a geometria demonstrativa. As mudanças econômicas e políticas dos últimos séculos do segundo milênio antes de Cristo fizeram com que o poder do Egito e da Babilônia diminuíssem. A partir disso, os gregos passaram a ser protagonistas de uma nova maneira de estudar a geometria. Eles acreditavam que não cabia mais somente uma geometria empírica e assim a geometria sofreu uma transição.

As principais fontes de informação acerca da geometria descritiva grega não datam exatamente de sua época de produção. A principal fonte a qual se tem acesso é chamada de sumário Eumediano de Proclus, no qual há vários comentários sobre o trabalho desenvolvido pelo matemático Euclides. Vale ressaltar que Proclus viveu no século V d.C., mais de um milênio depois do início da geometria grega.

Pode-se destacar três grandes geômetras gregos: Euclides (323-283 a.C.), Arquimedes (288-212 a.C.) e Apolônio (262-194 a.C.). Eles também foram responsáveis por fornecer uma nova maneira ao discurso da matemática descritiva pelo desenvolvimento da axiomática formal.

Dos trabalhos performados pelos matemáticos citados acima, o que mais se destaca foi intitulado "Os Elementos", escrito por Euclides. Segundo Eves (1992), apesar de os matemáticos modernos darem ênfase ao trabalho que foi desenvolvido por Euclides, os trabalhos escritos por Arquimedes e Apolônio não possuem menor importância. Estes trabalhos se completam e fornecem a base geométrica que é amplamente utilizada hoje. Arquimedes, em um dos seus trabalhos de geometria sólida, escreveu pela primeira vez as fórmulas para as áreas da superfície e da calota esférica, assim como a fórmula para o cálculo do volume da esfera. Por sua vez, Apolônio foi um astrônomo de méritos, desenvolvendo estudos em vários temas matemáticos e adquiriu fama pelos estudos das Seções Cônicas. Também merecem menção: Menelau (100 d.C.), Cláudio Ptolomeu (85-165 d.C.) e Papus (320 d.C.), que continuaram o trabalho dos anteriores.

O objetivo deste artigo é apresentar de maneira reflexiva o desenvolvimento da geometria da superfície terrestre, enfatizando as contribuições advindas das navegações portuguesas. Afinal, qual a importância da Geometria Esférica para os navegantes e como se deu seu desenvolvimento até os dias de hoje? Para iniciar tal reflexão, a seguir se encontra uma breve história sobre o estudo das geometrias não euclidianas.

2 AS GEOMETRIAS NÃO-EUCLIDIANAS

Esse novo campo da geometria se deu devido às tentativas de deduzir o postulado das paralelas (ou quinto postulado) de Euclides, que está contido em seu livro "Os Elementos". Tal postulado diz: "É verdade que, se uma reta ao cortar duas outras, forma ângulos internos, no mesmo lado, cuja soma é menor do que dois ângulos retos, então as duas retas, se continuadas, encontrar-se-ão no lado onde estão os ângulos cuja soma é menor do que dois ângulos retos". Matemáticos da antiguidade e Idade Média (como: Proclus, Nasiredin, John Wallis) acreditavam que este postulado fosse na verdade um teorema e tentaram demonstrá-lo, porém não obtiveram sucesso. O começo do século XIX encontrou os geômetras ainda na busca de uma "prova" para o quinto postulado de Euclides, porém também sem sucesso. Outros matemáticos propuseram a negação deste postulado, possibilitando a criação de novas geometrias. Dentre estes matemáticos, destacam-se o húngaro Jano Bolyai (1802-1860), o russo Nikolai Lobachevsky (1793-1856), o alemão Felix Klein (1849-1925) e o italiano Georg Friedrich Riemann (1826-1866).

Essas novas geometrias foram nomeadas em 1871 pelo matemático Klein: Geometria Hiperbólica, Geometria Parabólica e Geometria Elíptica. São também chamadas de geometrias não euclidianas, pelo fato de não mais serem explicadas pelos fundamentos desenvolvidos por Euclides. O postulado das paralelas de Euclides tinha suas limitações, por exemplo, ele deixava de ser útil quando se tratava de determinar a posição da mais distante nebulosa da constelação da Ursa Maior. Então, para aperfeiçoar os métodos de medir distâncias inacessíveis por meio de ângulos e distâncias desconhecidas, observou-se que era necessário o estudo do "elemento" chamado círculo.

A navegação sem "terra à vista" só foi possível quando os homens passaram a se orientar pela posição das estrelas. Um fato histórico que Hogben (1970) traz é que foram os fenícios que transformaram a estrela Polar na estrela Polar dos marinheiros. Os fenícios também popularizaram o uso do calendário. Naquela época, os homens já utilizavam a latitude e a longitude, porém, não havia ainda a representação em mapas devido à superfície esférica da Terra.

Acredita-se que a crença da esfericidade da Terra seja bem mais antiga do que se pensa. De acordo com Hawking (2005), os matemáticos Aristóteles (384-322 a.C.) e Ptolomeu (87-150 a.C.) já incorporavam em suas deduções que a Terra era uma esfera e não um plano. De acordo com os estudos de Aristóteles, durante eclipses lunares, a sombra na Lua era sempre redonda e ao observar um navio se afastando oceano adentro, o casco desaparecia antes das velas. Com isso Aristóteles conjecturou que a Terra era de fato esférica. Da mesma forma, após sua morte, Ptolomeu continuou os estudos do modelo de universo que predizia com mais precisão os movimentos dos astros. Hogben (1970) também disserta que Pitágoras (570-495 a.C.) já falava sobre este conceito em seus ensinamentos, assim como Demócrito (460-370 a.C.). Outros matemáticos gregos da antiguidade que observaram e conjecturaram sobre a esfericidade da Terra e o movimento dos astros que podemos citar são: Pitágoras (572-497 a.C.), Filoslaus de Cretona (470-390 a.C.), Eudóxio de Cnidos (408-344 a.C.), Aristarco de Samos (310-230 a.C.), Eratóstenes (276-194 a.C.) e Hiparco (160-125 a.C.). Todos estes matemáticos foram responsáveis por fundamentar o movimento dos astros, a esfericidade terrestre, o comprimento do raio da Terra, explicaram as fases da Lua, conceitos que foram utilizados até o renascimento, no século XVI. Vale ressaltar que, durante a época desses matemáticos, a Matemática estava passando por um processo de formalização, ou seja, estava começando a ser apresentada de maneira formal com axiomas, lemas e teoremas.

No século XIX, o naturalista A.R. Wallace (1823-1913), nome associado ao de Darwin, sugeriu o seguinte método para medir o raio da circunferência da Terra:

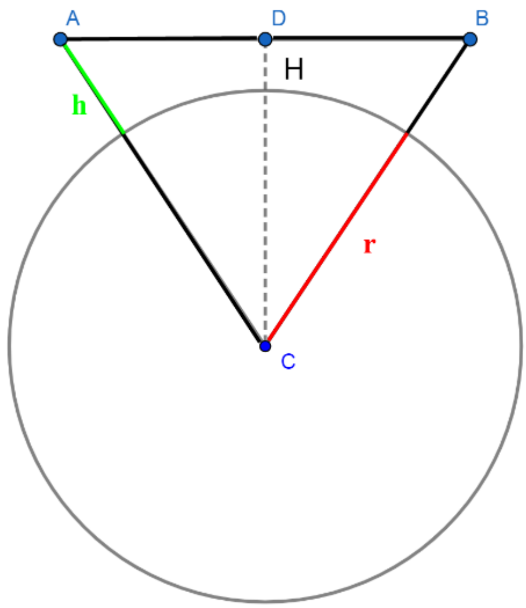
> Com as extremidades superiores A e B, separadas por uma distância medida AB num canal reto, são fincadas no polo até ficarem ambas à mesma altura h sobre o nível das águas. Exatamente a meio das duas estacas, finca-se uma terceira de maneira que sua extremidade superior D, fique sobre a linha de visão de A para B. Como a superfície da Terra e, pois, a das águas do canal é de fato encurvada, a altura H de D sobre o nível das águas será um pouco menor que h (HOGBEN, 1970, p. 176).

Verifiquemos este método de A. R. Wallace sobre a possibilidade de se calcular o raio da Terra. Para isso, são necessários os seguintes resultados:

1. Se dois lados de um triângulo são congruentes, os ângulos que lhes são opostos também são; e, se dois ângulos são congruentes os lados opostos também são;
2. O quadrado da hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma dos quadrados dos catetos.

A Figura 1 exibe os dois pontos A e B como extremos superiores de duas estacas de altura h fincadas verticalmente na Terra, que possui raio r. O ponto D é o extremo superior de uma estaca, com altura H, localizada exatamente no meio do caminho das duas estacas anteriores, também fincada verticalmente, de modo que ADB estejam alinhados.

Figura 1: Como calcular o raio da Terra segundo Wallace (1823-1913)



Fonte: os autores

Matematicamente, pode-se expressar que $AC = r + h = BC$. O triângulo ABC é um triângulo isósceles, então $AD = \frac{1}{2}AB = DB$. Assim, CD é perpendicular a AB e DBC é um triângulo retângulo. Então:

$$DB^2 + DC^2 = BC^2$$
$$DB^2 + (r + H)^2 = (r + h)^2$$
$$DB^2 + r^2 + 2rH + H^2 = r^2 + 2rh + h^2$$
$$DB^2 + H^2 - h^2 = 2rh - 2rH$$
$$DB^2 + H^2 - h^2 = 2r(h - H)$$
$$r = \frac{DB^2 + H^2 - h^2}{2(h - H)}$$

Como a distância de DB é muito grande comparada à altura das estacas, pode-se aproximar r desprezando o termo $H^2 - h^2$. Então:

$$r = \frac{\frac{1}{2}DB^2}{h - H} = \frac{\frac{1}{8}AB^2}{h - H}$$

Perceba que é possível calcular o raio da Terra utilizando apenas elementos dos quais se conhecem as dimensões[1]. Logo, no século XIX, existiam possibilidades de cálculos com a geometria esférica da Terra.

Com essa breve discussão acerca da origem da Geometria Esférica e como os homens a usavam intuitivamente, a seguinte pergunta pode, então, surgir: Como a Geometria Esférica foi importante para os navegantes e como essa se desenvolveu até os dias de hoje?

3 A GEOMETRIA ESFÉRICA E OS NAVEGANTES PORTUGUESES

De acordo com Penteado (2011), os portugueses no século XVI veneravam toda a matemática e manuscritos desenvolvidos na antiguidade, mesmo assim, isso não os impedia de criticar e melhorar estas obras diante dos novos problemas que teriam que solucionar. O português Pedro Nunes (1502-1578) desenvolveu seus trabalhos sobre navegação e cartas náuticas observando detalhadamente as verdades dos escritos da Antiguidade Clássica. Esta foi uma característica dos renascentistas portugueses ligados à cultura dos descobrimentos. Pedro Nunes não era navegador, mas realizou leituras das obras clássicas de Aristóteles, Arquimedes (287-212 a.C.), Copérnico (1473-1543), Ptolomeu, Euclides, Paccioli (1445-1517), Vitrúvio (séc. I a.C.) e as melhorou. Também traduziu o “Tratado da Esfera” do autor Johannes de Sacrobrosco (1195-1256), sobre o qual falaremos mais adiante.

Segundo Albuquerque (1987), alguns navegantes da época levavam consigo conhecimentos obtidos com os textos clássicos. Porém, empiricamente percebiam que havia algumas contradições e fatos que na realidade não funcionavam como esperado. Assim, os homens passaram a ter necessidade de rever conhecimentos geográficos, matemáticos e astronômicos das obras da Antiguidade Clássica e esta revisão se desenvolveria à luz da experiência e experimentação.

Nos séculos XV e XVI, os portugueses não possuíam os mesmos conhecimentos matemáticos já disseminados em toda a Europa, caso que se observa, por exemplo, no fato dos algarismos hindu-arábicos serem utilizados na maioria dos países da Europa no século XII e em

[1] Outro procedimento semelhante para se calcular o raio da Terra foi elaborado por Eratóstenes (200 a.C.). Tendo conhecimento que ao meio-dia do Solstício de Verão, na cidade egípcia de Siena, os raios solares eram verticais, Eratóstenes foi até Alexandria, localizada aproximadamente 800 km distante de Siena para medir a inclinação dos raios solares naquela cidade. Através de um método que pode ser conferido, por exemplo, em Crease (2006), ele conseguiu determinar o raio da Terra. É interessante ressaltar que este é mais um de vários métodos distintos (alguns dos quais bem antigos) cujos objetivos são o mesmo: tirar conclusões a respeito da forma da Terra.

Portugal isso apenas ocorreu a partir do século XV (MARCOLIN, 2013). Ubiratan D'Ambrosio, em entrevista para Marcolin (2013), justifica esse fato devido ao país ter se fechado após a expulsão dos invasores mouros no século XII.

Sabe-se que a navegação na época dos descobrimentos dependia basicamente de conhecimentos astronômicos e estes, por sua vez, eram fundados na matemática. Assim, de acordo com Marcolin (2013), os portugueses e os espanhóis praticavam neste período a aritmética, a geometria e a astronomia ainda desenvolvidas na antiguidade.

Mesmo ante os desafios da falta de tecnologias mais avançadas para aquele período histórico, os portugueses conseguiram ser bem-sucedidos graças a Dom Henrique no século XV, que foi o patrono dos descobrimentos, ao desenvolver técnicas e tecnologias marítimas na região de Sagres. D'Ambrosio, ainda em entrevista para Marcolin (2013), diz que “o desenvolvimento da caravela, navio estável, ágil, rápido e mortífero, foi um grande avanço tecnológico”.

Perante a lista de conquistas portuguesas, podem ser citadas: Ceuta foi conquistada em 1415, Gil Eanes superou o cabo Bojada em 1434, Bartolomeu Dias dobrou o cabo da Boa Esperança em 1488, Vasco da Gama abriu caminho para as Índias em 1499, Pedro Alvares Cabral chegou ao Brasil em 1500 e Fernão Dias descobriu passagem para o oceano Pacífico em 1520. De acordo com Marcolin (2013), mesmo sem conhecimento matemático avançado, os portugueses romperam barreiras devido ao conhecimento empírico, pois entre os navegantes alguns conheciam astronomia, outros sabiam calcular distâncias e outros entendiam de cartografia.

A troca de informações científicas entre os reinos era difícil nesse momento em Portugal, porém ainda atraía algumas personalidades importantes como: em 1475, Colombo e seu irmão Bartolomeu Colombo tiveram um encontro em Lisboa; em 1480 o alemão Martín Behaím (1459-1507) foi à região portuguesa e introduziu a trigonometria no país. Behaím, em 1492, ao retornar para Nuremberg, sua cidade de origem, apresentou o Erdapfel, o primeiro globo terrestre conhecido.

Dadas as devidas apresentações, pode-se discorrer e conjecturar a respeito de como a astronomia e a matemática foram de fato aplicadas nas navegações portuguesas.

4 OS PORTUGUESES E A DETERMINAÇÃO DA LONGITUDE

Comandados pelo infante Dom Henrique, os portugueses adaptaram inicialmente processos de navegação utilizados para navegar pelo Mediterrâneo. Esta técnica era chamada de rumo e estima e usava a longitude do lugar pela altura do meridiano do Sol ou de outras estrelas.

Pereira (2014) define latitude e longitude da seguinte maneira[2]: a latitude é definida dependente da superfície de referência utilizada e longitude é medida em graus, de zero a 180°, para Leste ou para Oeste, a partir do Meridiano de Greenwich, e não há uma posição natural para marcar a longitude. Latitude é o ângulo entre o plano do equador e a superfície de referência. A Latitude mede-se para Norte e para Sul do Equador, entre 90° sul, no Polo Sul, e 90° norte, no Polo Norte. A Latitude pode ser facilmente determinada a partir da Estrela Polar. A Estrela Polar[3] tem esse nome porque é a única que permanece sempre fixa no firmamento num ponto coincidente com a projeção do eixo da Terra.

---

[2] Baseado num contexto atual da Geografia, sabendo que o meridiano de Greenwich não havia sido nomeado no século XV.

[3] A Estrela Polar destaca-se no céu no Hemisfério Norte da Terra; a partir do Hemisfério Sul pode-se utilizar o Cruzeiro do Sul como referência no céu.

Estes conceitos são necessários para se entender o pensamento dos navegantes na resolução do problema de definir a longitude no século XV e XVI. Canas (1995) cita em seu trabalho que a coordenada geográfica longitude era uma das mais difíceis de serem determinadas, pois era preciso informação rigorosa a respeito do horário local, o que implicava técnicas de relojoaria mais sofisticadas, que até então não existiam.

Ante todas as dificuldades de navegação sem terra à vista, o padre Jesuíta Cristovão Bruno escreveu, em 1628, a obra "A arte de navegar". Padre Bruno era italiano de origem, porém viveu em Portugal, onde lecionou nos colégios de Coimbra e Santo Antão da Companhia de Jesus. Além dessa obra, Bruno escreveu mais dois trabalhos dedicados à navegação denominados "Regimento que P.e. Cristovão Bruno da Companhia de Jesus, por ordem de S.M. dá aos pilotos das naus[4] da Índia para fazerem a experiência sobre a invenção de leste ao oeste" e "Tratado da arte de navegar pelo R. do P.E. Cristovão Bruno da Companhia de Jesus". Não se tem certeza sobre a sua ligação com o mar e a marinha, também não há relatos sobre quais funções possa ter desempenhado a bordo.

A obra "A Arte de Navegar", escrita por padre Bruno, é dividida em duas partes, sendo que a primeira fala "Dos princípios e fundamentos comuns a toda a arte de navegar" e a segunda é sobre "Caminho do Leste a Oeste" (CANAS, 1995).

Nesta seção, será destacada apenas a segunda parte, dado o objetivo da reflexão aqui exercitada. Essa segunda parte ainda foi subdividida em dois tratados.

O primeiro tratado explica o que é a longitude e problemas existentes à sua determinação. Ao iniciar seus pensamentos para sanar os problemas da longitude, Bruno primeiramente apontou os erros mais frequentes cometidos pelos navegantes em seus cálculos. Em sua primeira elucidação, utilizando resultados geométricos já conhecidos, a semelhança de arcos entre dois pontos da esfera celeste, concluiu que, havendo a estrela Polar como ponto fixo, facilmente se determina o meridiano no lugar, ou seja, a direção Norte-Sul. Porém, o problema da determinação da longitude persistia, pois não existe um "ponto fixo" a Leste ou Oeste. Padre Bruno completa ainda: "Se vê que havendo no céu algum ponto fixo de Leste a Oeste facilmente se saberá o seu comprimento e por falta dele nos falta essa ciência, pois todos os planetas e estrelas continuamente se movem de Leste para Oeste" (CANAS, 1995, p.252).

O problema em questão era o erro dos cálculos de rumo e estima quando o ponto de chegada eram rumos afastados do Norte ou do Sul.

O segundo erro apontado por Cristovão Bruno derivava do fato de se estimar a altura do Sol. O erro era pequeno, porém quando somado à observação de outros astros que eram necessários em uma viagem náutica, os rumos ficavam fora de seu objetivo de chegada a Leste ou a Oeste. Outro fator citado por Bruno é o fato de se perder a precisão na planificação das cartas de navegar, dado que a Terra é esférica, o que também acarretava em novos erros de cálculos. Com todas essas indagações a respeito dos erros cometidos, no segundo tratado, Bruno explica e exemplifica diversos métodos para a determinação da longitude.

O primeiro método para determinar a longitude era por meio dos eclipses lunares. Esse método consistia em, a partir da observação dos eclipses da Lua, dado que ocorrem ao mesmo tempo em qualquer lugar da Terra, calcular a diferença de horários entre dois pontos diferentes. Na prática, tornava-se necessária uma tabela contendo dados de eclipses. Outro fator necessário era estimar a hora e, para esse problema, Bruno aconselhou utilização do Globo terrestre criado

[4] Denominação genérica dada a navios de grande porte com capacidade de 200 pessoas até o século XV usados em viagens de grande percurso.

por Tycho Brahe (1546-1601). Esse globo possuía um círculo horário em torno do Polo e era dividido em vinte e quatro horas. Outra forma para estimar a hora seria pelo astrolábio[5]. Cristovão Bruno ainda aconselha que para determinação da altura das estrelas não seja utilizada a balestilha[6]. É proposta para obtenção de alturas, a utilização de um quadrante[7], no qual possa se fixar a altura quando bem apontado, sendo esse o método mais seguro para determinar tal medida.

O segundo método para determinar a longitude utilizava um relógio. Poderia ser relógio de areia (ampulheta) ou até um relógio d'água.

> Uma das hipóteses apresentadas consistia em utilizar um relógio de areia que medisse uma hora. Tirava-se a altura do Sol, navegava-se essa hora, indicada pelo relógio, após o que se tirava novamente a altura. A diferença entre a altura observada é quinze graus, o que seria o que o Sol tinha variado, era a diferença de longitude (CANAS, 1995, p.258).

Porém, o método de utilizar a observação do Sol em uma hora também tinha suas falhas, pois havia casos em que o Sol não variava quinze graus em uma hora. Outro problema observado era a precisão dos relógios afetada pelo balanço do mar e pelo material utilizado em sua construção. No caso da areia, observou-se que nos primeiros minutos ela caia mais rápido, pelo fato da quantidade de areia existente na parte superior do recipiente ser grande e exercer maior pressão. No caso da água, devido às variações de temperatura, ela também poderia variar de quantidade dentro do recipiente. O objetivo desse método era que, por meio da diferença de horas entre o local de partida e o de chegada, fosse inferida a diferença de longitude.

No terceiro e último método, Cristóvão Bruno sugeriu o uso das retardações da Lua. Por meio das fases da Lua e da posição relativa entre a Lua e o Sol, percebe-se que, em cada uma das suas fases, a Lua vai se “atrasando” quatro quintos de hora diários. O Sol, por outro lado, também sofre movimento de retardação, cerca de um grau por dia. Para determinar a longitude por esse método, era necessária uma tabela da diferença das distâncias entre o Sol e a Lua e, também, observar a hora em que o Sol se põe e compará-la com a tabela. Se o valor observado for menor que o tabelado, estará o barco mais a Leste. Se o valor for maior, mais a Oeste. Os possíveis erros observados nesse método foram os erros de paralaxe e da refração dos astros, que podiam enganar o observador em suas medições. Canas (1995) ainda cita em seu texto que os gregos tinham noção que a diferença da longitude podia ser calculada pela diferença de horários entre dois locais. Apesar dos conselhos e sugestões de Cristóvão Bruno, o problema de determinar com rigor a diferença entre horários locais permaneceu, o que acarretou na permanência da dificuldade para determinar a longitude até o século XVIII.

Dentre os estudos científicos disponíveis aos portugueses na era das navegações, ainda se destacam “O Tratado da Esfera”, traduzido por Pedro Nunes para o português e contendo seus comentários acerca dos temas ali tratados. A obra, originalmente escrita por Sacrobosco, foi uma das obras sobre astronomia mais difundidas em toda Europa no século XII, segundo Penteado (2011). Essa era dividida em quatro capítulos, sendo que o primeiro trata da forma da Terra (esfera, centro e eixo), o segundo “círculos dos quais se compõe a esfera material”

---

[5] Segundo Almeida (2019, p. 304), o astrolábio é “uma espécie de bússola que os marinheiros usavam com o objetivo de saber a orientação espacial, com referência à posição do sol”.

[6] Segundo Batista e Pereira (2017, p.42), a balhestilha é “um instrumento náutico, caracteristicamente considerado simples do ponto de vista físico. [...] A função da Balestilha era basicamente medir a altura do astro em relação à linha que delimita o mar do horizonte, ou a distância entre dois astros [...], sendo essa medida de caráter angular”.

[7] O quadrante é na sua forma mais rudimentar, e tal como o nome indica, um instrumento que consiste num quarto de círculo graduado ao qual está fixo um fio de prumo.

(PENTEADO, 2011), o terceiro descreve o movimento dos astros e a influência do clima e o último capítulo “os círculos e movimentos dos planetas, e sobre as causas dos eclipses” (PENTEADO, 2011). A obra compunha o estudo do *quadrivium* (estudo da Música, Aritmética, Astronomia e Geometria) e abordava o tema de navegação e astronomia sob um olhar matemático, de forma que pudessem ser colocados em prática pelos marinheiros. Pedro Nunes tinha a preocupação de fazer uma exposição cuidadosa para que todos pudessem entender claramente suas obras. Ante a tradução, Nunes criticava a obra e a aperfeiçoava:

> Vendo eu que o Tratado da Esfera e a Teoria do Sol e da Lua, com o primeiro livro de Geografia de Ptolomeu são aqueles princípios que deve ter qualquer pessoa que deseja saber alguma coisa de Cosmografia. Por carecerem disso os que não sabem latim os tirei em nossa linguagem. Acrescentei-lhes algumas anotações para que se pudesse entender mais facilmente. No final coloquei uns tratados que compus sobre a carta de marear e o regimento da altura, porque não sou tão confiado de minhas coisas que acreditasse que por si queriam vê-las, e indo nesta companhia alguma hora por acerto se abrirá o livro neles” (PENTEADO, 2011, p.100).

As obras de Cristovão Bruno e Pedro Nunes foram ambas voltadas à determinação da longitude e latitude, nas quais podia-se encontrar sugestões para a resolução desse problema[8].

A necessidade de determinar a longitude vinha de longa data, desde 1494, tendo a primeira referência feita em 1505 em “*Esmeraldo de Situ Orbis* de Pacheco Pereira” (CANAS, 1995). Todas as indagações surgiram com a assinatura do Tratado de Tordesilhas. O texto do tratado previa um prazo de dez meses para determinar um meridiano que dividisse o mundo em duas zonas de influência. Canas (1995) ainda complementa que, pelo fato de existirem grandes dificuldades para obtenção da longitude, havia prêmios em dinheiro a quem solucionasse tal problema e talvez esse tenha sido o que motivou Bruno a escrever seu tratado.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Enfim, o problema da determinação de uma localização de forma mais precisa apenas foi solucionado no século XVIII com o modelo nº 4 de John Harrisson (1693-1776), que numa viagem de nove semanas à Jamaica apenas se atrasou cinco segundos. Tudo se resolveu com a tecnologia do cronômetro de Harrison (que era relojoeiro), com o qual se tornou possível conhecer duas coordenadas de qualquer local. Mesmo após a criação de tantos recursos para a localização, ainda não havia ferramentas que funcionavam para todas (ou a maioria) das condições climáticas.

Com os avanços das ondas de rádio e a corrida espacial entre a União Soviética e o Estados Unidos, foram lançados os primeiros satélites na órbita do planeta. Logo, esse movimento possibilitou as primeiras pesquisas para desenvolver um software de localização para uso militar chamado NAVSTAR/GPS (*Navigation Satelitte with time Ranging/ Global Position System*), sendo a autoria atribuída a três americanos: o astrofísico Ivan Getting, o engenheiro Bradford Parkinson e o físico Roger L. Easton. Tal tecnologia, posteriormente, foi aberta a civis. Hoje, o GPS trata-se de um conjunto de 24 satélites orbitando a Terra, a uma altura aproximada de 20.200 km acima do nível do mar, permitindo a receptores conhecerem sua posição em qualquer lugar sobre a Terra com muita precisão. O sistema de GPS é dividido em três segmentos: os Satélites, as Estações de Gerenciamento e os aparelhos utilizados pelos usuários (PEREIRA, 2014).

---

[8] Vide: Penteado (2014) para detalhes de resoluções propostas.

As estações são localizadas estrategicamente nas proximidades da linha do Equador, no Colorado (EUA), Havaí (no Pacífico), Kwajalein (Ilhas Marshal, no Pacífico), Ilha de Ascensão (no Atlântico Sul) e Ilha de Diego Garcia (no Índico). As estações rastreiam, calibram e sincronizam os relógios dos satélites. Todas as informações compiladas são passadas aos usuários da tecnologia, fornecendo dados precisos de localização.

Os problemas de navegação estudados pelos portugueses séculos atrás tiveram grande contribuição para a tecnologia atual de localização terrestre.

REFERÊNCIAS

ALBUQUERQUE, L. **As Navegações e a Sua Projeção na Ciência e na Cultura**. 1. ed. Lisboa: Gradiva, 1987.

ALMEIDA, J. J. S. A Abordagem da Trigonometria no Livro Didático do 9º Ano do Ensino Fundamental. **Hipátia**, v.4, n.2, p.295-311, dez. 2019.

BATISTA, A. N. S.; PEREIRA, A. C. C. A Balestilha: um instrumento náutico como recurso para abordar conceitos matemáticos. **Hipátia**, v.2, n.1, p.40-51, jun. 2017.

CANAS, A. C. Os portugueses e a determinação da longitude. **Anais do Clube Militar Naval**, CXXV, p. 249–273, 1995.

CREASE, R. P**. Os dez mais belos experimentos científicos**. Rio de Janeiro: Zahar, 2006.

EVES, H. **Tópico de História da Matemática para uso em sala de aula**. 1. ed. São Paulo: Atual, 1992.

HOGBEN, L. **Maravilhas da Matemática: Influência e função da matemática nos conhecimentos humanos**. 2. ed. Porto Alegre: Globo, 1970.

HAWKING, S. **Os gênios da Ciência: Sobre os ombros de gigantes**. 1. ed. São Paulo: Elsevier, 2005.

MARCOLIN, N. Os reis dos mares. **Pesquisa Fapesp**, v. 212, p. 86–87, 2013.

PENTEADO, A. M. **Pedro Nunes e a distinção de dois tipos de trajetórias na navegação**: a linha de rumo e o círculo máximo. Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual Paulista (UNESP), 2011.

PEREIRA, E. H. U. **A matemática do GPS**. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Piauí (UFPI), 2014.

Submetido em agosto de 2020.
Aprovado em janeiro de 2021.

Carla Patrícia Ferreira dos Santos

Mestrado Profissional em Matemática pela Universidade Estadual Paulista (Unesp). Professora da Secretaria Estadual de Educação do Estado de São Paulo (SEDUC-SP), Limeira, SP, Brasil. ID Lattes: 3630437430884713

Contato: carlapatriciafs@hotmail.com.

Lucas Antônio Caritá

Doutorado em Física e Astronomia pela Universidade do Vale do Paraíba (Univap). Docente do Instituto Federal de São Paulo (IFSP), São José dos Campos, SP, Brasil. ID Lattes: 5743604308403513. Orcid ID: 0000-0002-9518-3414.

Contato: prof.carita@ifsp.edu.br.

Marta Cilene Gadotti

Doutorado em Matemática pela Universidade de São Paulo (USP). Docente da Universidade Estadual Paulista (Unesp), Rio Claro, SP, Brasil. ID Lattes: 8019260752597126. Orcid ID: 0000-0002-1971-8632.

Contato: mc.gadotti@unesp.br.

Onde aprendemos a viver o gênero?

Nas aulas de matemática!

Where do we learn to live the gender?

At the Math classes!

Vanessa Franco **Neto**

Universidade Federal do Mato Grosso do Sul (UFMS)

Resumo

O presente artigo tem o objetivo de apresentar os resultados de duas pesquisas que expõem as narrativas acerca das maneiras possíveis de se viver o gênero atualmente no Brasil. A primeira pesquisa traz resultados de uma investigação a partir de Livros Didáticos de Matemática produzidos para os anos iniciais da Educação do Campo. A pesquisa apresenta resultados de uma divisão sexual do trabalho e das funções generificadas atribuídas aos indivíduos que habitam o campo. A segunda investigação busca descrever as enunciações replicadas nas pesquisas em educação matemática no Brasil desenvolvidas sobre a temática de gênero, cujos resultados apontam para uma chamada ao engajamento de meninas e mulheres no trabalho e produção do conhecimento matemático. Ao final, constatou-se que os resultados de ambas as pesquisas soaram quase contraditórios, todavia, conclui-se que o que há é uma construção sistemática de práticas discursivas sobre as relações entre gênero e matemática que acontecem neste tempo. **Palavras-chave**: Livros Didáticos de Matemática. Estudos de Gênero. Educação Matemática. Pesquisar as Pesquisas.

Abstract

The purpose of this article is to present the results of two surveys that expose the narratives about the possible ways of living the gender currently in Brazil. The first research brings the results of an investigation based on Mathematics Textbooks produced for the early years of Countryside Education. The research presents results of a sexual division of labor and the gendered functions attributed to individuals who inhabit the field. The second investigation seeks to describe the enunciations replicated in research on mathematics education in Brazil developed on the theme of gender, whose results point to a call for the engagement of girls and women in the work and production of mathematical knowledge. In the end, it was found that the results of both researches sounded almost contradictory, however, it is concluded that what there is a systematic construction of discursive practices on the relations between gender and mathematics that happen at this time. **Keywords**: Mathematics Textbooks. Gender studies. Mathematics Education. Researching research.

1 INTRODUÇÃO

No cenário global, já há algum tempo, a desigualdade de gênero tem sido reconhecida como obstáculo para a erradicação da pobreza e o desenvolvimento econômico das nações, tal como mencionado pelo relatório do Banco Mundial, de 2012. De acordo com esse documento,

> A igualdade de gênero também é importante como instrumento de desenvolvimento. Conforme mostra este Relatório, a igualdade de gênero representa uma economia inteligente: ela pode aumentar a eficiência econômica e melhorar outros resultados de desenvolvimento de três maneiras. Primeiro, removendo barreiras que impedem as mulheres de ter o mesmo acesso que os homens têm à educação, oportunidades econômicas e insumos produtivos podem gerar enormes ganhos de produtividade — ganhos essenciais em um mundo mais competitivo e globalizado. Segundo, melhorar a condição absoluta e relativa das mulheres introduz muitos outros resultados de desenvolvimento, inclusive para seus filhos. Terceiro, o nivelamento das condições de competitividade — onde mulheres e homens têm chances iguais para se tornar social e politicamente ativos, tomar decisões e formular políticas — provavelmente gerará no decorrer do tempo instituições e escolhas de políticas mais representativas e mais inclusivas, levando assim a um melhor caminho de desenvolvimento (BANCO MUNDIAL, 2012, p. 03).

Ou seja, há um entendimento que vem se consolidando nos últimos anos acerca da estreita relação entre o entrave da ascensão econômica causada pela não inserção maciça das mulheres no jogo dos corpos economicamente produtivos. Afinal, perder o talento das mulheres significaria uma perda de talentos para todos (UNESCO, 2019). Nesse debate, a chamada à equidade de gênero tem sido apontada como um caminho possível para a superação de problemas que vêm sendo apontados por diversos relatórios produzidos ao redor do mundo, tal como o detalhado a seguir.

No que concerne especificamente ao papel da educação nesse debate, no ano de 2015, o relatório encomendado pelo programa Education for All Global Monitoring Report 2015, da UNESCO, denominado Education for All 2000-2015: achievements and challenges, analisou pesquisas com o foco nas questões de gênero. Seu objetivo foi investigar como homens e mulheres estavam representados em livros didáticos elaborados para a educação básica em quatro países, quais sejam Chile, Geórgia, Paquistão e Tailândia. O relatório apontou que as práticas enviesadas de gênero apareciam nesses materiais e relacionavam os movimentos políticos e culturais, especialmente os de ordem religiosa, para mapear como as marcas do binarismo eram ora ratificadas, ora mais enfaticamente combatidas. O documento ainda apresentava alguns padrões de representação de gênero que reforçariam as desigualdades proporcionadas pelo sexismo, como pode ser observado na lista a seguir:

> 1. As fêmeas – meninas, mulheres e animais – estavam fortemente sub-representadas. 2. Mulheres e meninas incluídas em textos ou ilustrações foram quase sempre representadas em papéis altamente estereotipados em casa. 3. Nos poucos casos que retratam mulheres em ocupações ou atividades não domésticas, estas eram predominantemente do tipo mais tradicional. 4. As meninas e as mulheres geralmente eram passivas e muitas vezes observadas, enquanto meninos e homens corajosos e confiantes empreendiam esforços e ocupações emocionantes e valiosos. 5. Os países com maior desigualdade de gênero tendem a ter sub-representação e estereótipos um pouco mais intensos (ou negativos), mas as semelhanças excedem em muito as variações de intensidade. 6. Além disso, a pesquisa que mediu a melhoria ao longo do tempo – muitas vezes décadas – descobriu que o ritmo de melhoria do viés de gênero nos livros didáticos é mais lento [...] (UNESCO, 2015, p. 4).

Em uma de suas conclusões, o parecer da Unesco também aponta que os papéis desempenhados por mulheres nesses materiais configuram obstáculos invisíveis para que meninas em idade escolar possam desenvolver suas habilidades e potencialidades rumo à vida adulta e, acrescenta-se, promovem também modos de ser e agir em relação às mulheres. O endereçamento das práticas que compõem o rol de possibilidades das mulheres é enviado a toda a população. Deste modo, o livro didático é mais um dos instrumentos de estabilização da ordem do discurso, em que os balizadores de comportamentos, bem como as atribuições e ocupações femininas também são esboçados. O ano é 2020 e isso ainda continua sendo pauta tal como apontado em Neto e Guida (2020), cujos resultados evidenciam a não neutralidade e a não isenção da matemática escolar no exercício da produção e da replicação de práticas performáticas de gênero.

Frente a essas problemáticas, fica explicitado que os modos de ser e agir baseados na categoria de gênero não são só uma preocupação de ordem social, mas também, e principalmente — haja vista as organizações internacionais que produzem relatórios e apontamentos sobre isso –, de ordem econômica.

É importante destacar que o empreendimento investigativo aqui apresentado se encontra no campo de pesquisas da educação matemática e a entendemos como operante de políticas culturais. Como política cultural, a educação matemática faz o currículo de matemática escolar funcionar, para além dos processos de ensino e de aprendizagem de seus conteúdos, como um conjunto de práticas inseridas em uma lógica que produz subjetivações, [...] a educação matemática é política porque a constituição histórica do conhecimento e as práticas associadas emergiram e fazem parte das classificações e organizações que regulam a vida social e, dentro delas, noções de quem as pessoas são e deveriam ser (VALERO, 2018, p. 108).

Não é recente a preocupação com as problemáticas de gênero na educação matemática. Já em 1992, Leder fez uma análise sobre essas questões desde o ano de 1970 no cenário das pesquisas realizadas em países da Europa e da América do Norte. Especificamente sobre a equidade de gênero, esse vem sendo um tema tratado recentemente na América Latina (URSINI; RAMIREZ, 2017). No entanto, Neto e Valero (2020) constataram que, no Brasil, há uma carência latente no tratamento das problemáticas concernentes aos estudos de gênero no campo de investigações da educação matemática.

De modo geral é importante demarcar que tomamos como hipótese que a construção das noções de gênero se dá ininterruptamente (BUTLER, 2006). Dessa forma, questionamo-nos: de que modos a matemática escolar tem produzido práticas que nos ensinam a viver o gênero? É certo que as aulas de matemática são só mais um dos lugares em que se aprende a viver o gênero, todavia a potência aqui está em debater como um espaço supostamente neutro também atua no processo ininterrupto de produção de práticas generificadas de atos e atuações.

Para tratar disso, trazemos uma problematização acerca de como vêm sendo abordadas as noções de gênero no Brasil em espaços de discussão nos quais a educação matemática tem atuado. Isso é feito a partir de dois trabalhos anteriores, trazendo os resultados deles a fim de propor uma análise complementar e avançar a partir do que ambos trouxeram.

Os dois trabalhos mencionados são Neto e Guida (2020) e Neto e Valero (2020). O primeiro descreve a constituição do que foi denominado “sujeito-mãe” a partir da análise de dez livros didáticos de matemática produzidos para os anos iniciais de escolas do campo no Brasil, material que foi parte do Programa Nacional do Livro Didático do Campo, o PNLD Campo. Os resultados evidenciaram que o currículo de matemática materializava narrativas bem elaboradas que se valiam dos conteúdos dessa disciplina escolar, a fim de replicar e constituir um conjunto de valores e moralidades, com substancial status de verdade, que acabavam por orientar os modos de ser e agir desse corpo que se vê e é visto como feminino (NETO; GUIDA 2020).

Já no segundo estudo, o propósito foi analisar e descrever os modos pelos quais a problemática da equidade de gênero vem sendo tratada nas investigações do campo da educação matemática no Brasil na última década (NETO; VALERO, 2020), utilizando a estratégia analítica de "pesquisar as pesquisas" (PAIS; VALERO, 2012). As autoras concluíram que a noção sobre equidade de gênero, quando abordadas no campo da educação matemática, são entendidas como uma maneira de empoderar matematicamente as mulheres a fim de superar a carência da participação delas nas áreas pura e aplicada dessa ciência. Como as habilidades matemáticas e as de tecnologia têm ganhado um papel fundamental na sociedade, o desejo de solucionar esse problema pode ser visto atrelado a um robusto conjunto de enunciações comumente encontrado no campo de investigações da educação matemática.

A partir dos resultados trazidos por essas duas pesquisas, o intuito deste artigo se desenha para tentar responder à questão que o intitula: onde aprendemos a viver o gênero? Porém, para além disso, ele se materializa para entender que modos de aprender a viver o gênero estão sendo repercutidos a partir dos dados e dos resultados obtidos nos dois casos trazidos para o debate.

2 GÊNERO COMO UM PROBLEMA

Ao focarmos no trabalho acerca dos estudos de gênero, o lançamento do livro "Problemas de Gênero" (BUTLER, 2010), na sua primeira versão em Língua Inglesa (Gender Trouble), possui grande importância, uma vez que, com ele, a filósofa Judith Butler inaugura um olhar sobre a noção de gênero como um problema. Questões tais como "a quem interessa tratar o gênero?" ou "como o gênero é produzido?" viraram pauta das discussões propostas pela autora bem como por seus interlocutores.

Para a autora, tanto gênero como corpo e sexo são efeitos de práticas discursivas. Mais especificamente sobre gênero, ela aponta que este é "um mecanismo através do qual se produzem e se naturalizam as noções de masculino e de feminino" (BUTLER, 2006, p. 70). Esse entendimento coaduna com a compreensão de Foucault (2014), pois seu entendimento é que essas práticas discursivas operam por meio de tecnologias de governo que repercutem na "[...] vida cotidiana imediata, que classifica os indivíduos em categorias, designa-os por sua individualidade própria, liga-os à sua identidade, impõe-lhes uma lei de verdade que lhes é necessário reconhecer e que os outros devem reconhecer nele" (FOUCAULT, 2014, p. 123).

Existem muitos estudiosos, filósofos e antropólogos que se debruçam sobre as condições que fazem com que nos tornemos mulheres, ou homens, numa adaptação livre da expressão cunhada por Simone de Beavouir (1980).

Por exemplo, Margaret Mead (1971), uma das mais eminentes antropólogas até hoje referenciadas em estudos sobre a constituição das noções do ser homem e do ser mulher, após investigar quatorze comunidades, principalmente na Ásia, buscando entender como essas constituem o que é ser macho e o que é ser fêmea, concluiu que as construções identitárias variam muito nessas comunidades. Mesmo assim, ela afirma que há regularidades que podem ser encontradas nas culturas que estudou. Para nós, interessa destacar a constatação da "[...] necessidade de realização do homem" (MEAD, 1971, p. 131), estabelecendo uma contundente relação entre orgulho e masculinidade. Disso, ela discorre sobre como as atividades que são atribuídas aos corpos que performam o masculino são recorrentemente reconhecidas como mais valorosas em todas as sociedades estudadas.

Outros resultados importantes sobre a produção de uma ideia de gênero bem estabelecida podem ser encontrados em Federici (2019), em que a autora sinaliza que a classificação das mulheres na categoria de bruxas, no contexto da Europa quando começava a emergir o capitalismo, bem como em outras partes do mundo, constitui-se como muito importante para descrever um conjunto de práticas sociais e culturais que deveriam ser reprimidas nas mulheres. A figura da bruxa, especialmente na Europa, exerceu um papel pedagógico nas comunidades que começavam a desenhar uma nova ordem econômica que demandava específicas dinâmicas sociais por parte das mulheres e, também, por parte dos homens.

É contundente a afirmação de que se aprende a viver o gênero nas relações sociais. Todavia, por mais que tenhamos uma ideia do que implica ser homem e ser mulher na nossa sociedade atualmente, essas categorias não são, de modo algum, estáticas e/ou universalizantes. Ribeiro (2019), por exemplo, pondera acerca dos primeiros movimentos feministas que reivindicavam o acesso ao mercado de trabalho e combatiam a imagem da mulher como um ser frágil, delicado, que demanda cuidados; desconsideramos que esta é uma mulher idealizada. Essas são mulheres brancas, em geral, pois as mulheres negras não costumam ser descritas com tais características, o que pode ser evidenciado no título da primeira obra de bell hooks, “E eu não sou uma mulher?”, de 1981. Ela questiona exatamente a diferença de descrições que caracterizavam o que esse indivíduo descrito como “mulher”, no singular, que acabava por deixar de lado um outro amplo espectro das diferentes formas de “ser mulher”.

Desses exemplos aligeirados, podemos entender como a discussão acerca do gênero é complexa e absolutamente atrelada aos modelos sociais, culturais e econômicos que regulam as dinâmicas de um grupo em um determinado tempo. Dessa forma, qual o papel da matemática escolar na constituição dessas práticas no Brasil na atualidade? É sobre isso que vamos tratar nas análises que seguem.

3 APRENDENDO A SER MULHER NOS LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA PARA O CAMPO

A educação do campo recentemente vem sendo objeto de estudo de várias investigações da Educação Matemática (NETO, 2019; SACHS, 2019). Nesta seção, mais especificamente, serão discutidos alguns resultados de Neto e Guida (2020), que analisaram dez livros didáticos de matemática produzidos para os anos iniciais de escolas do campo no Brasil. Esse material compôs duas coleções aprovadas no PNLD Campo.

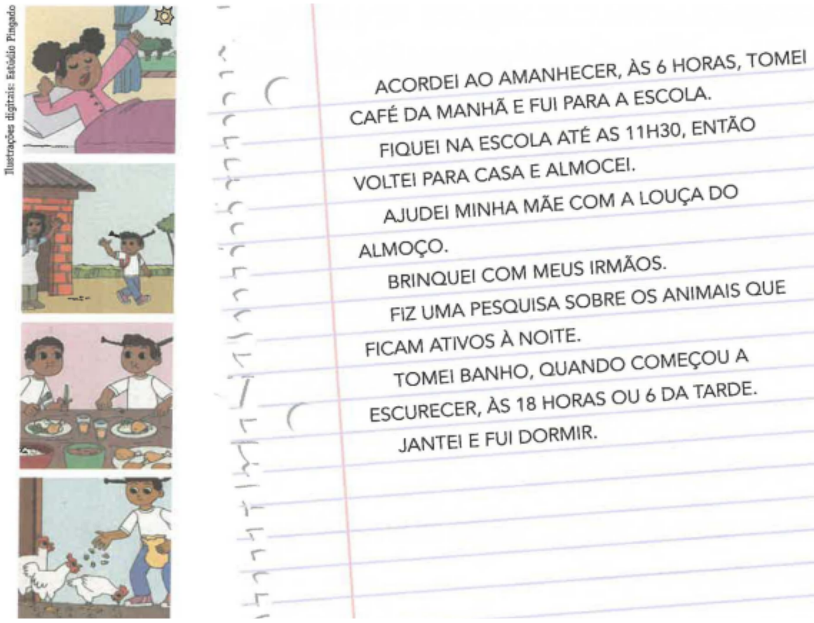
No estudo mencionado, o foco principal foi discorrer sobre a produção do que as autoras denominaram “sujeito-mãe”. De modo geral, o que se quis foi interpretar os 111 excertos catalogados a partir o tipo de práticas associadas a uma idealização da maternidade estavam relacionadas ao feminino nos materiais.

A seguir, traremos alguns exemplos coletados que entendemos como substanciais do ponto de vista analítico proposto.

A rotina de Aninha é descrita na figura 1. Nas orientações para os professores acerca dessa unidade, o objetivo é proporcionar ao estudante atividades que permitam compreender “a presença de eventos cíclicos do dia e da noite, relacionando-os com hábitos de vida dos seres humanos” (GOMES et al., 2014a, p. 265).

A partir desse exemplo, os estudantes são convidados a “fazer como Aninha” e elencar suas atividades ao longo do dia, conduzindo-os à reflexão acerca da administração do tempo. Numa dinâmica em que é valorosa a otimização das capacidades produtivas, a gestão da rotina é fundamental para que todos os espaços da vida sejam conduzidos para um campo de possibilidades de ação e realização de tarefas. Essa organização opera como um conjunto de tecnologias políticas que incidem sobre o corpo. Mas, no caso especial desse excerto, é importante destacar que, entre as atividades realizadas por Aninha, “ajudar a mãe com a louça do almoço” é uma tarefa que necessita ser lembrada. Na atividade relacionada à rotina da menina, as noções de cooperação com as obrigações domésticas fornecem um indicativo de que os valores que atravessam o material contribuem para fortalecer no estudante (corpo caracterizado como feminino) noções de uma justa relação e tarefas que devem ser executadas na dinâmica familiar: “seja prestativa, ajude sua mãe”. Essas enunciações vêm fortemente atreladas às afirmações tais como “seja organizada”, elabore um cronograma de atividades e seja eficiente ao longo do dia.

Figura 1: Atividade de administração do tempo



Fonte: Gomes et al. (2014a, p. 135).

Contudo, no que concerne à temática de gênero, salta aos olhos a divisão sexual do trabalho, recorrente nos textos estudados, que sugere que Aninha deve ajudar sua mãe, sendo essa última a oficial responsável pela atividade. O trabalho doméstico, ao ser considerado de natureza fundamentalmente feminina (ROMITO, 1997), é ignorado em suas onerações sociais, ocultando os custos físicos e mentais que acarretam para os corpos femininos, afinal “o trabalho doméstico é entendido como parte do ser mulher” (HILLESHEIM, 2004, p. 46). Nesse sentido, o conteúdo matemático de grandeza de tempo, previsto no currículo oficial do Brasil para ser tratado nesse nível de ensino, age de modo a distribuir as subjetividades aos corpos: as responsabilidades domésticas são atribuições de corpos femininos. Assim, há a construção de um corpo que reconhece suas atribuições. Esse é um corpo moldado, inventado, e sua materialidade é irrevogavelmente indissociada das normas reguladoras que governam sua materialização própria (DUQUE, 2010).

Já enquanto exercendo atividades remuneradas, os personagens femininos (fora do circunscrito doméstico/familiar) são posicionados como costureira, professora, atendente, médica, entre outras majoritariamente relacionadas a cuidados com o outro. Como agricultoras, são classificadas, por exemplo, em poucas situações (há 7 menções a essa atividade se referindo ao feminino, enquanto há outras 34 referências a homens agricultores). As atividades domésticas e de cuidado apareciam majoritariamente associadas às mulheres nos materiais analisados e, na sociedade brasileira, essas são ocupações menos valorizadas econômica e socialmente. Enquanto aos homens eram associadas atividades mais bem remuneradas e mais prestigiadas. Mead (1971) identifica um traço importante na constituição das noções de macho e fêmea em diferentes culturas: o prestígio social das atividades comumente atribuídas aos homens. De acordo com a autora, quaisquer que sejam as ocupações mais identificas ao exercício por parte do homem em uma sociedade, essa será reconhecida como mais prestigiada. A autora afirma ter encontrado uma bem elaborada “[...] relação entre masculinidade e orgulho” (MEAD, 1971, p. 131) que a levou a concluir sobre a recorrente necessidade de realização pessoal ligada ao trabalho no cenário social por parte do homem.

Em relação às práticas de cuidado para com o outro, enquanto caracterizada em suas qualidades maternais, a mulher reflete a corporificação da devoção para com o próximo. Os corpos que performam o feminino são reiteradamente descritos como fonte de cuidado, atenção e segurança inabalável em relação ao outro, tal como pode ser exemplificado na Figura 2, em que “a conexão com a matemática é feita a partir da proposta de uso atento dos sentidos na modelagem” (GOMES et al., 2014a, p. 269).

Figura 2: atividade de distância

Fonte: Gomes et al. (2014a, p. 143).

Note-se que há dois homens adultos em volta da fogueira: um deles anima a festa junina ao som de uma sanfona, enquanto o outro se delicia com o que parece ser um cachorro-quente, ambos com aparência despreocupada, numa cena que sugere a movimentação característica dessas festividades. O segundo indivíduo está posicionado precisamente ao lado de uma criança que executa as mesmas ações: alimenta-se e observa a agitação festiva.

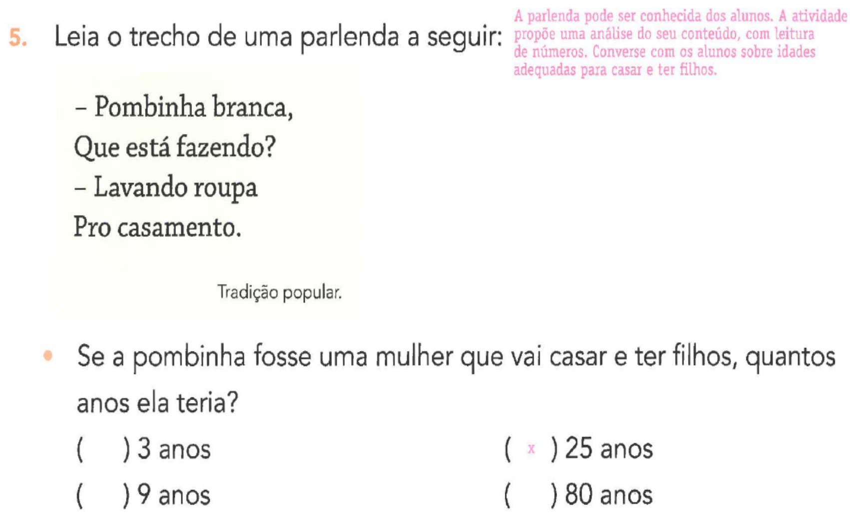
Com um comportamento marcadamente oposto, as personagens femininas aparentam estar mais atentas, até mesmo preocupadas. Embora uma delas, supostamente, aprecie a fogueira, garante, ao mesmo tempo, que a criança que a acompanha se mantenha ao seu lado, pois a segura firmemente pelas mãos. A outra se posiciona de modo a escoltar a criança dos perigos impostos pela fogueira. Essa última, aliás, sugere sequer estar usufruindo das festividades devido aos necessários cuidados para com a criança sob sua responsabilidade. As personagens femininas parecem estar sempre alertas, gerindo e se antecipando a possíveis rompantes da infância. O conteúdo matemático vem nesse caso como ferramenta para auxiliar em tal trabalho de dedicação,

 v.6, n.1, p. 51-62, jun. 2021

afinal é necessário ter uma noção apurada de localização espacial, pois esse corpo que performa o feminino deve ter condições de avaliar e de antever as possíveis situações de perigo. Os posicionamentos dos indivíduos marcadamente opostos sugerem que, aos corpos que performam masculino, são concedidas oportunidades de usufruir tranquila e despreocupadamente as festividades.

Já na figura 3, lança-se mão de atividades que, manifestadamente, buscam abordar o desenvolvimento da "leitura de números". Para tanto, faz-se uso de uma famosa cantiga brasileira infantil.

Figura 3: Atividade de classificação



5. Leia o trecho de uma parlenda a seguir:

A parlenda pode ser conhecida dos alunos. A atividade propõe uma análise do seu conteúdo, com leitura de números. Converse com os alunos sobre idades adequadas para casar e ter filhos.

– Pombinha branca,
Que está fazendo?
– Lavando roupa
Pro casamento.

Tradição popular.

- Se a pombinha fosse uma mulher que vai casar e ter filhos, quantos anos ela teria?

(   ) 3 anos
(x) 25 anos
(   ) 9 anos
(   ) 80 anos

Fonte: Gomes et al. (2014b, p. 40).

Várias parlendas têm se tornado objeto de estudo no campo das análises de discurso haja vista que muitas delas replicam práticas classistas, racistas, homofóbicas, etc. Pacheco (2008), por exemplo, analisa especificamente a parlenda a "Pombinha branca" do ponto de vista das narrativas enviesadas que apresenta.

Na atividade exposta na Figura 3, um tipo de prática significa, inscreve e prescreve a maternidade e o matrimônio sobre o corpo que performa o feminino. A questão colocada para estudantes do terceiro ano do Ensino Fundamental é: qual seria a idade adequada para que uma mulher se envolva em um matrimônio e se reproduza? Por ser mencionada no diminutivo, a espécie Columba Livia – seu nome científico – é posicionada subalternamente ao mesmo tempo em que se apresenta engajada a um espectro de possibilidades atribuídas às mulheres: casar-se (com um representante masculino da espécie) e gerar descendentes. O conteúdo de leitura dos números instrui os estudantes a normalizar uma prática sociocultural de relacionamento entre humanos. Às crianças, cabe tomar a decisão da resposta correta com base nessa norma sociocultural somada ao seu conhecimento do conteúdo.

Como prática do feminino, os estudantes aprendem que, para se casar e ter filhos, as mulheres precisam ser delicadas (o que sugere o sufixo "inha", em consonância com as características afetivas e comportamentais atribuídas ao feminino), executar práticas domésticas ("lavar a roupa", que aqui se alinha às categorias do trabalho e da gestão do lar) e ter uma idade "adequada" (vinte e cinco anos). E a última afirmação é tomada exatamente para explorar um elemento (conteúdo) compulsório do currículo escolar que é a leitura de números.

O mencionado artigo (PACHECO, 2008) aponta que os corpos que performam o feminino são reiteradamente instruídos a assumir práticas ligadas ao cuidado e à organização das atividades, com vistas a garantir a consolidação da estrutura familiar. Os conhecimentos matemáticos são tomados nesse cenário para garantirem, validarem e otimizarem essas práticas. Neste sentido, o livro de matemática dos anos iniciais de escolas do campo no Brasil ainda apresenta performances de gênero que os documentos já mencionados neste texto refutam (UNESCO, 2015; BANCO MUNDIAL, 2012). Igualmente, chocam-se com o proposto pelas pesquisas em educação matemática, tal como verificaremos na próxima seção.

4 POR QUE MENINAS PRECISAM APRENDER MATEMÁTICA? PESQUISANDO AS PESQUISAS

Nesta seção serão discutidos alguns resultados de Neto e Valero (2020). O estudo buscou compreender como o campo de pesquisas da educação matemática vem abordando a temática de gênero. Para isso, foi utilizada a estratégia de "pesquisa de pesquisas" (PAIS; VALERO, 2012) como uma abordagem qualitativa que busca as regularidades que emergiram dos textos selecionados na investigação. A ideia de promoção da equidade de gênero, tanto no acesso como na produção de conhecimento matemático, parecia ser uma pista bastante contundente acerca de como a temática vinha sendo tratada. Essa hipótese era reforçada por resultados de investigações em educação matemática passíveis de serem encontradas em países da América Latina em que a justiça social pode ser relacionada com ideias sobre equidade, inclusive equidade de gênero (URSINI; RAMIREZ, 2017).

No trabalho de Neto e Valero (2020), o objetivo foi descrever e analisar os modos pelos quais as pesquisas da referida área constroem a temática de gênero como objeto dos quais falam. Assumiu-se que as pesquisas realizadas em determinada época, por determinado campo de investigações, nos contam muito sobre as problemáticas, as demandas e as contingências de um determinado período.

As autoras relataram a dificuldade de encontrar material que articulasse a educação matemática aos estudos de gênero. A primeira tentativa foi buscar em periódicos nacionais bem avaliados pela Capes, considerando um período determinado: os últimos dez anos (2009 a 2019). A pesquisa foi feita utilizando os buscadores em cada um dos periódicos, a partir da inserção de termos como "gênero", "mulher" (no singular e no plural), "menina" (também no singular e no plural), "feminino", "feminização". No entanto, a busca nos períodos definidos e com os termos mencionados retornou somente dois artigos. Dessa maneira, os pesquisadores ou as pesquisadoras decidiram selecionar os artigos publicados em anais dos dois maiores eventos da área de educação matemática no Brasil (o Encontro Nacional de Educação Matemática – ENEM – e o Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática – SIPEM) dos últimos dez anos: 2009 até 2019. Além disso, selecionaram um artigo publicado em um periódico do ano de 2003 que apareceu como referência recorrente nas investigações selecionadas. Com a ampliação das fontes, foram encontrados um total de 18 artigos que tratam da temática investigada. Cada um desses 18 artigos recebeu uma codificação, composta por uma letra (que indica se o arquivo é proveniente de um periódico "P" ou de um evento "E"), um número que indica a ordem de codificação e o ano de publicação. Desse modo, por exemplo, uma pesquisa proveniente de um periódico, que foi o segundo arquivo encontrado no processo de busca e foi publicado no ano de 2014, recebeu o código *"E2_2014"*. Outra opção adotada foi por apresentar os excertos sempre em itálico, com o intuito de dar o destaque necessário em meio ao processo analítico.

Os resultados expõem a importância atribuída a esse conhecimento na sociedade brasileira atualmente, afinal, argumentam nos trabalhos que, *sendo a matemática um instrumento de poder, pela sua própria característica e pelos privilégios a ela conferidos sobre as outras áreas de* *conhecimento, particularmente quando se considera o espaço a ela dedicado no conjunto de saberes necessários à profissão técnica, o "empoderamento matemático" para as meninas viria a ser uma forma de fortalecer as suas raízes, permitindo-lhes conhecer e assimilar uma cultura dominante e masculina, sem se deixar dominar por esta cultura (E1_2019, p. 07; E14_2016, p. 06).* E esse movimento é relevante, pois é contundente o entendimento de *que o fato é que a matemática é a ciência mais importante no mundo moderno, ela nos dá o conhecimento para diversas áreas (E4_2019, p. 04*) e é peça chave para indivíduos terem êxito na racionalidade econômica e social vigente, tal como vários relatórios internacionais aqui trazidos já apontam. Para as mulheres, isso é, essencialmente, ainda mais importante visto que *é dito que quem sabe manipular a matemática sabe entender quando se está levando vantagem ou sendo enganado, não há chances de ser lesado quando se sabe administrar o seu rendimento (E4_2019, p. 03).* Portanto, o conhecimento matemático, além de ser uma ferramenta que dá possibilidade de assumir uma posição mais favorável nas relações de poder, instrumentalizaria o corpo que performa o feminino para se defender em um mundo cada vez mais corporativista e competitivo.

E qual a importância dessa inserção tão proclamada e requerida? A lacuna de participação feminina nesse processo de produção do conhecimento vem sendo alardeada como um problema de debate e resolução urgente: em parte, essa preocupação se deve ao fato de que *não há como desenvolver tecnologicamente de forma consistente uma Nação sem envolver um contingente imenso da sua população (E2_2019, p. 05)*. Assim, a ausência da participação das mulheres na dinâmica produtiva tem consequência no desenvolvimento econômico das nações, tal como já há alguns anos vem sendo apontado por diversas investigações e relatórios, conforme aqueles apresentados no início deste texto.

5 QUAIS AS NOÇÕES DE GÊNERO ESTAMOS APRENDENDO NAS AULAS DE MATEMÁTICA?

A partir desses dois trabalhos, descrevemos uma narrativa acerca de como o gênero vem sendo abordado no âmbito tanto da matemática escolar como no contexto das pesquisas da educação matemática como campo de investigações nos últimos anos no Brasil.

De um lado, vemos que o livro didático, importante instrumento na dinâmica escolar no Brasil (NETO, 2019), instrui os corpos a performarem o feminino com práticas que ainda remetem a uma racionalidade econômica, que Federici (2019) descreve como da emergência do capitalismo. Na atual organização neoliberal da economia e da sociedade, parece não ser mais possível dispensar um contingente tão grande de mão de obra. Estas, as mulheres, ficaram por séculos (no cenário ocidental) circunscritas às atividades domésticas e de cuidado, agora, o mercado parece constatar que elas representam mais da metade da população mundial e não podem ser desperdiçadas como força econômica produtiva. Disso, a segunda pesquisa aponta para o que vários setores da economia mundial vêm demandando de países em desenvolvimento – entre os quais o Brasil – e isso pode ser conferido por meio dos relatórios já discutidos neste texto (UNESCO, 2015; 2019).

Se o gênero é algo que fazemos, algo que está sempre em processo, uma sequência de atos que está reiterada e inevitavelmente acontecendo (BUTLER, 2010), concluímos que ser mulher tem diferentes possibilidades de acontecer nesses dois cenários apresentados por meio das pesquisas trazidas. Todavia, por mais que pareçam, essas duas representam não são necessariamente uma contradição em si, mas um conjunto de práticas que acabam incidindo sobre os sujeitos e moldando-os ao seu tempo. Foucault (2008) defende que devemos evitar a contradição enunciativa, contudo, ressalta que:

> a coerência [...] desempenha sempre o mesmo papel: mostrar que *as contradições imediatamente visíveis não são mais que um reflexo de superfície*; e que é preciso reconduzir a um foco único esse jogo de fragmentos dispersos. A contradição é a ilusão de uma unidade que se oculta ou que é ocultada: só tem seu lugar na defasagem existente entre a consciência e o inconsciente, o pensamento e o texto, a idealidade e o corpo contingente da expressão. (FOUCAULT, 2008, p. 170-171, grifo nosso).

Concluímos, pois, que o gênero é historicamente situado! O fato é que as performances do feminino, na atualidade, se constituem nessa dicotomia mesma, ainda que não pareçam se tangenciar, mas se amontoam, se organizam, nos ensinando sobre como viver o gênero em um determinado tempo, num determinado lugar.

Por mais que os resultados obtidos com a pesquisa nos livros didáticos pareçam ir na contramão de uma tendência mundial, que poderíamos chamar de empoderamento feminino, por meio do acesso e da inclusão nos espaços de discussão das ciências exatas, eles ajudam a compor o rol de possibilidades sobre como exercer sua função generificada de forma satisfatória em determinada sociedade. Ao mesmo tempo, o clamor pela inclusão de mulheres como contingente especializado encontra respaldo na narrativa de desenvolvimento econômico. Dessas maneiras, enfim, aprendemos a viver o gênero nas aulas de matemática.

REFERÊNCIAS

BANCO MUNDIAL. **The International Bank for Reconstruction and Development** / The World Bank. Disponível em: <https://www.gov.br/mdh/pt-br/navegue-por-temas/politicas-para-mulheres/arquivo/assuntos/conselho/relatorio-sobre-desenvolvimento-mundial-2012-2013-201cigualdade-de-genero-e-desenvolvimento/view> Acesso em 28 de jul. 2020, 2012.

BEAUVOIR, S. **O segundo sexo**. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1980.

BUTLER, J. **Deshacer el gênero**. Barcelona: Paidos, 2006.

BUTLER, J. **Problemas de gênero**: feminismo e subversão da identidade. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira, 2010.

FEDERICI, S. **Mulheres e a caça às bruxas**: da Idade Média aos dias atuais. 1 ed. São Paulo: Boitempo, 2019.

FOUCAULT, M. **A Arqueologia do Saber**. Rio de Janeiro: Forense Universitária. 2008.

FOUCAULT, M. **Ditos e Escritos IX**: genealogia da ética, subjetividade e sexualidade. 2ª ed. Rio de Janeiro: Forense Universitária, 2014.

GOMES, L. B. et al. **Alfabetização Matemática e Ciências** – 2º Ano. Coleção Campo Aberto. São Paulo: Global Editora, 2014a.

GOMES, L. B. et al. **Alfabetização Matemática e Ciências** – 3º Ano. Coleção Campo Aberto. São Paulo: Global Editora, 2014b.

HILLESHEIM, B. Trabalho doméstico: "O serviço de sempre". In: STREY, M. N.; CABEDA, S. T. L.; PREHN, D. R. **Gênero e Cultura**. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2004.

LEDER, G. Mathematics and gender: Changing perspectives. In D. A. Grouws (Ed.), **Handbook of research on mathematics teaching and learning** (pp. 597–622). New York: Macmillan, 1992.

MEAD, M. **Macho e fêmea**. Editora Vozes. 1971.

NETO, V. F. **Quando aprendo matemática, também aprendo a viver no campo?** Mapeando subjetividades. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2019.

NETO, V. F.; GUIDA, A. M. A Constituição do Sujeito-mãe nos Livros Didáticos de Matemática da Educação do Campo. **Educação**, v. 45, Publicação contínua, 2020.

NETO, V. F.; VALERO, P. A (In)equidade de Gênero em Educação Matemática: Pesquisando as Pesquisas. (Org.) GONÇALVES, H. J. L. **Educação Matemática e Diversidade** (s). Porto Alegre – RS: Editora Fi, 2020.

PAIS, A.; VALERO, P. Researching research: mathematics education in the Political. **Educational Studies in Mathematics**, 80(1), 9-24, 2012.

RIBEIRO, D. **Lugar de fala**. São Paulo, Polén, 2019.

ROMITO, P. Trabalho, maternidade e saúdes das mulheres: algumas notas metodológicas. In: OLIVEIRA, E. M.; SCAVONE, L. (Orgs.). **Trabalho, saúde e gênero na era da globalização**. Goiânia: AB, 1997.

SACHS, L. Potencialidade do Inventário da Realidade para Escolas do Campo em Áreas de Reforma Agrária. **Hipátia** - Revista Brasileira de História, Educação e Matemática, v. 4, p. 38-47, 2019.

UNESCO. Eliminating gender bias in textbooks: Pushing for policy reforms that promote gender equity in education. Education for All Global Monitoring Report. **Organização das Nações Unidas**. Paris, 2015.

UNESCO. Descifrar el códico: la educación de las niñas y mujeres en las ciencias, tecnología, ingeniería y matemáticas (STEM). **Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencias y la Cultura**, París, 2019.

URSINI, S.; RAMÍREZ MERCADO, M. Equidad, género y matemáticas en la escuela mexicana. **Revista Colombiana de Educación**, (73), 213.234, 2017.

VALERO, P. Human Capitals: School Mathematics and the Making of the Homus Oeconomicus. **Journal of Urban Mathematics Education**, v. 11, 2018.

Submetido em setembro de 2020.
Aprovado em novembro de 2020.

Vanessa Franco Neto

Doutora em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista (Unesp). Professora Adjunta na Faculdade de Educação da Universidade Federal do Mato Grosso do Sul (UFMS), Campo Grande, MS, Brasil. ID Lattes: 7067680318081607. Orcid ID: 0000-0002-2129-8040.

Contato: vanessa.neto@ufms.br.

Filosofia da Matemática em Teses Brasileiras

um levantamento bibliográfico entre 2015 e 2020

Mathematics Philosophy in Brazilian Theses

a bibliographic survey between 2015 and 2020

Maxwell Gonçalves **Araújo**
Instituto Federal de Goiás (IFGO)

Andrei L. Berres **Hartmann**
Prefeitura Municipal de Cândido Godoi (PMCG)

Luciana L. da Silva **Barbosa**
Instituto Federal de São Paulo (IFSP)

RESUMO

Mobilizados pela questão: “qual o foco das teses de doutorado que tematizam a Filosofia da Matemática produzidas no Brasil nos últimos cinco anos?”, objetivamos apresentar e discutir um levantamento bibliográfico sobre as produções brasileiras em nível de doutorado acerca da Filosofia da Matemática, defendidas entre 2015 e 2020. Utilizamos como corpus documental a BDTD e o Catálogo de Teses e Dissertações da Capes. Este estudo classifica-se como qualitativo, na forma de um levantamento bibliográfico. Através do termo de busca “Filosofia da Matemática” e refinamento dos dados, identificamos 27 trabalhos relacionados ao tema, que concentram-se na região Sudeste do Brasil e em duas instituições. Dentre essas pesquisas, sete apresentaram o termo procurado nas palavras-chave, sendo seis analisadas. A partir da leitura e análise das reflexões sobre a abordagem da Filosofia da Matemática presente nas teses, apontamos que a centralidade das produções esteve em assuntos distintos, como: Teorema da Incompletude de Gödel, Continuum, Conceito de Função Integrável e obra Philosophische Bemerkungen de Wittgenstein. Quanto à Filosofia da Matemática presente, destacamos o Conhecimento Transcendental de Kant, o Tractatus Logico-Philosophicus e o pensamento sobre a existência ou não de um objeto de Wittgenstein, além da argumentação de Leibniz em sua obra Monadologia.

Palavras-chave: Educação Matemática. Foco de teses de doutorado. Revisão de literatura.

ABSTRACT

Mobilized by the question: “what is the focus of doctoral theses produced in Brazil, in the last five years, with emphasis on Mathematics Philosophy?” we aim to present and discuss a bibliographic survey on Brazilian productions at the doctoral degree that are based on Mathematics Philosophy and were defended between 2015 and 2020. We used the BDTD and the Capes Catalog of Theses and Dissertations as our documentary corpus. This study is classified as qualitative, in the form of a bibliographic survey. Through the search term "Mathematics Philosophy" and by refining the data, we identified 27 studies related to the theme, which were concentrated in the Southeast region of Brazil and in two institutions. Among these surveys, seven presented the search term in the keywords and from those six were analyzed. Based on reading and analysis of the reflections on the Mathematics Philosophy approach presented in the theses, we point out that the centrality of the productions was in different subjects, such as: Gödel's Incompleteness Theorem, Continuum, Integral Function Concept and Wittgenstein's Philosophische Bemerkungen. Regarding the Mathematics Philosophy currently studied, we highlight Kant's Transcendental Knowledge, the Tractatus Logico-Philosophicus and the thought about the existence or not of an object presented by Wittgenstein, in addition to Leibniz's argumentation in his work Monadology.

Keywords: Mathematical Education. Focus of doctoral theses. Literature review.

v.6, n.1, p. 63-80, jun. 2021

1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Pesquisas recentes, a exemplo, as apresentadas por Nakano (2015), Rocha (2016), Batistela (2017), França (2017), Almeida (2019), Misse (2019) e Godoy (2019), têm discutido aspectos da Filosofia da Matemática. De acordo com Rocha (2016), a Filosofia da Matemática e a História da Matemática desempenham um papel importante no contexto educacional, sendo a preocupação da Filosofia da Matemática relacionada às questões passíveis de justificativas da História da Matemática.

Nossos primeiros estudos, reflexões e discussões sobre apontamentos realizados em alguns dos trabalhos supracitados foram desenvolvidos na disciplina de Filosofia da Matemática, do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática (PPGEM) da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" (Unesp), cursada durante o segundo semestre de 2020, no decorrer da pandemia mundial COVID-19.

Ao considerarmos os tópicos abordados nessa disciplina, como Intuicionismo de Brouwer, Continuidade, Infinito, Filosofia da Matemática de Lakatos e Teorema de Godel, além de estarem presentes em algumas teses previamente lidas, perguntamo-nos: qual o foco[1] das teses de doutorado que tematizam a Filosofia da Matemática produzidas no Brasil nos últimos cinco anos? A partir dessa pergunta, o presente artigo se constitui.

Assim, objetivamos apresentar e discutir um levantamento bibliográfico sobre as produções brasileiras em nível de doutorado acerca da Filosofia da Matemática, defendidas entre 2015 e 2020. Para a realização deste estudo teórico, utilizamos como *corpus* documental a Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações[2] (BDTD) e o Catálogo de Teses e Dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior[3] (Capes).

Neste texto, além desta seção inicial, trazemos mais seis seções. Na primeira, após esta introdução, apresentamos as considerações metodológicas, justificando a caracterização do estudo como um levantamento bibliográfico qualitativo, bem como a busca e seleção dos dados; posteriormente, realizamos uma descrição acerca do foco dos trabalhos eleitos para apreciação analítica, mobilizada pela pergunta de pesquisa; por meio dessa descrição, expomos algumas reflexões teóricas a partir das abordagens relacionadas à Filosofia da Matemática, presentes no corpus de análise; e, por fim, constam as considerações finais, seguidas das referências bibliográficas e de apêndice, que apresenta as produções encontradas.

2 CONSIDERAÇÕES METODOLÓGICAS

Com vistas a responder à pergunta de pesquisa e atender ao objetivo, este estudo caracteriza-se como qualitativo, na forma de um levantamento bibliográfico, conforme apresentado por Fiorentini e Lorenzato (2006). Em conformidade com Borba e Araújo (2020), a abordagem qualitativa de pesquisa permite a obtenção de informações mais descritivas, predominando a significância dada às ações realizadas. Depreendemos que nosso trabalho vai ao encontro do apontamento dos referidos autores, visto que pretendemos descrever elementos principais das teses, os quais nos possibilitam compreender tanto o foco da abordagem como a presença da Filosofia da Matemática no material selecionado para análise.

Para a realização do levantamento, por meio da palavra-chave "Filosofia da Matemática", utilizamos as plataformas de busca Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD) e o

---

[1] Neste artigo, compreendemos por "foco das teses" a centralidade dos estudos, sendo o tema principal, a pergunta de pesquisa e os objetivos traçados, além dos principais apontamentos e abordagens filosóficas.
[2] Disponível em: <http://bdtd.ibict.br/vufind/>. Último acesso em: 06 set. 2020.
[3] Disponível em: <https://catalogodeteses.capes.gov.br/catalogo-teses/#!/>. Último acesso em: 06 set. 2020.

Catálogo de Teses e Dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes), com o intuito de mapear teses defendidas entre 2015 e 2020 sobre o referido tema.

Em um primeiro momento, a busca de dados foi realizada na BDTD, no dia 01 de setembro de 2020. Inicialmente, foi possível identificar 74 trabalhos relacionados ao termo "Filosofia da Matemática", sendo 40 dissertações e 34 teses. Dentre as instituições que se destacaram, citamos a Universidade Estadual Paulista e a Universidade Estadual de Campinas, ambas com 11 pesquisas.

Com relação à distribuição das pesquisas por ano, localizamos produções realizadas entre 1988 e 2019, detalhadas no Quadro 1, a posteriori. Dentre essas, selecionamos 9 teses defendidas entre 2015 e 2020, utilizando os próprios recursos[4] da plataforma já informada, que atendiam ao recorte temporal estabelecido.

Com o objetivo de complementar os dados, foi realizada uma nova busca no Catálogo da Capes, no dia 05 de setembro de 2020, na qual, em um primeiro momento, obtivemos 104 resultados/estudos. Porém, identificamos, um impasse na plataforma, pois, a partir da busca com os recursos disponíveis[5], foram levantados 102 trabalhos. Desse modo, optamos por trabalhar com esse último número.

Com relação à distribuição por área de conhecimento, a plataforma de busca apresentou 39 trabalhos em Ensino de Ciências e Matemática, 21 em Filosofia, 19 em Educação, 16 em Ensino, 6 em Epistemologia e 1 em Matemática. No que diz respeito às instituições em que as investigações em cena foram realizadas, salientamos 36 trabalhos pela Universidade Anhanguera de São Paulo e 15 pela Universidade Estadual Paulista.

Também, por meio do recurso disponível no Catálogo da Capes, localizamos trabalhos realizados entre 1996 e 2019, distribuição detalhada no Quadro 1, além de 53 teses relacionadas à "Filosofia da Matemática", sendo 23 defendidas no período analisado (2015-2020).

Quadro 1: Distribuição geral das pesquisas por ano

Ano	BDTD	Catálogo Capes	Ano	BDTD	Catálogo Capes	Ano	BDTD	Catálogo Capes
1988	1	-	2004	2	1	2012	1	5
1993	2	-	2005	6	4	2013	5	13
1996	1	1	2006	3	1	2014	10	10
1999	-	1	2007	3	6	2015	6	10
2000	-	1	2008	3	2	2016	1	8
2001	-	2	2009	6	7	2017	5	9
2002	2	3	2010	4	5	2018	4	2
2003	1	2	2011	2	7	2019	6	2

Fonte: Autores (2021).

Com relação à distribuição apresentada no Quadro 1, observamos divergências entre os resultados exibidos pelas plataformas e uma maior complementação de dados, o que corrobora a importância de realizar este estudo em mais de um meio de coleta de dados. Esse fato pode ser perceptível, também, pela distribuição das pesquisas pelas instituições, pois conforme mencionamos,

[4] A BDTD contém, no lado esquerdo da tela, abas como instituições, repositório, programa, área do conhecimento e ano de defesa, as quais permitem refinar a busca de dados.
[5] No lado esquerdo da tela, é possível refinar a pesquisa, considerando os campos: tipo; ano; autor; orientador; banca; grande área conhecimento; área conhecimento; área avaliação; área concentração; nome programa; instituição; e biblioteca.

o Catálogo da Capes informou 36 trabalhos, cuja autoria é de egressos de doutorado da Universidade Anhanguera de São Paulo, ao passo que a BDTD não gerou resultados para essa instituição.

Ao comparar as produções obtidas nas duas plataformas, observamos a interseção de 5 pesquisas, a saber: Nakano (2015), Batistela (2017), Pimentel (2017), Misse (2019) e Godoy (2019). Assim, identificamos o total de 27 teses sobre "Filosofia da Matemática", defendidas entre 2015 e 2020. Apresentamos, no Quadro 2, uma síntese de dados sobre as pesquisas encontradas, envolvendo instituição de Ensino Superior, a região do país em que está situada, o Programa de Pós-graduação em que foi realizado o doutorado, a autoria e o ano de publicação da tese.

Quadro 2: Relação das teses mapeadas sobre "Filosofia da Matemática"

Autor	**Programa de Pós-Graduação e IES**	**Autor**	**Programa de Pós-Graduação e IES**
Sitoie (2018)	Ciências do Amb. e Sustent. na Amazônia (UFAM)	Souza (2015)	Educação Matemática (UNIAN)
Nakano (2015)	Filosofia (UFSCar)	Silva (2015)	
Castro (2016)	Educação (UFSCar)	Calil (2015)	
Cortese (2017)	Filosofia (USP)	Rolim (2015)	
Franzon (2015)	Educação Matemática (UNESP)	Cunha (2016)	
Oliveira (2015)		Xavier (2016)	
Correia (2015)		Sousa (2016)	
Batistela (2017)		Souza (2016)	
Missé (2019)		Rocha (2016)	
Godoy (2019)		França (2017)	
Pimentel (2017)	Filosofia (UFMG)	Santana (2017)	
Almeida (2017)	Filosofia (UNICAMP)	Liberal (2017)	
Almeida (2019)		Carvalho (2017)	
		Hermann (2018)	Ensino. de Ciênc. e Ed. Matemática (UEL)

Fonte: Autores (2021).

Inicialmente, destacamos o predomínio de trabalhos realizados junto à Universidade Anhanguera de São Paulo (UNIAN), 13 dentre os 27, e a Universidade Estadual Paulista (Unesp), com 6 produções, ambas localizadas na região sudeste do país. Ao considerarmos a distribuição das pesquisas por região, os dados coletados vão ao encontro de apontamentos apresentados pela Plataforma Sucupira e pela Capes. Segundo informações presentes na Plataforma[6], a região Sudeste é a que detém maior número de programas e cursos de pós graduação, 2003 e 3208 respectivamente. Também, essa região oferta praticamente metade dos cursos de doutorado acadêmico do Brasil, 1222 dentre os 2452 totais. Outros fatores que podem ser relevantes para o predomínio das pesquisas na região citada são apontados por Cirani, Campanario e Silva (2015) que indicam que o ensino senso estrito foi ampliado no país, com grande desigualdade na distribuição regional, e que essa expansão não ocorreu somente por iniciativas governamentais, mas também pela exigência da população brasileira por maior nível de escolarização.

Além do exposto, de acordo com o censo[7], atualizado do Diretório dos Grupos de Pesquisa no Brasil, o número de Instituições passou de 99, em 1993, para 531, em 2016, corroborando para um aumento exponencial de grupos de pesquisa no Brasil (4402 para 37640) nesse período, sendo 42,5% dos grupos localizados na região Sudeste. Esse mesmo censo revelou um aumento de 12% no número de doutores entre 2014 e 2016, e mais de 1100% entre 1993 e 2016.

[6] Disponível em: <https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/programa/quantitativos/quantitativoRegiao.jsf>. Último acesso em: 29 set. 2020.
[7] Disponível em: < http://lattes.cnpq.br/web/dgp/censo-atual/>. Último acesso em: 29 set. 2020.

Ademais, é pertinente abordar informações sobre os programas de pós-graduação em que as pesquisas foram desenvolvidas, os quais estão distribuídos em duas grandes áreas do conhecimento: Ciências Humanas e Multidisciplinar. Os trabalhos realizados na UNIAN e na Unesp foram desenvolvidos em Programas de Pós-Graduação em Educação Matemática e o trabalho realizado na Universidade Estadual de Londrina (UEL) em um Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. Todos eles estão relacionados à área de Ensino de Ciências e Educação Matemática e à grande área do conhecimento Multidisciplinar.

Em consonância com informações expostas por Cirani, Campanario e Silva (2015), de 1998 a 2011, a grande área Multidisciplinar teve um crescimento de 1083% em programas de pós-graduação *stricto sensu*, aumentando de 10 para 123 programas em nível de doutorado. Porém, Araújo-Jorge, Sovierzoski e Borba (2017) consideram que, embora tenha havido um crescimento em programas da área de Ensino, comparando as avaliações de 2010-2012 e 2013-2016, essa área distancia-se da área de Educação, sua geradora, por estar integrada à área Multidisciplinar, junto à Biotecnologia, Ciências Ambientais, Interdisciplinar e Materiais, ao invés de compor a grande área de Humanidades.

Algumas observações podem ser encontradas no estudo realizado por Reis et al. (2020), que apresenta dados importantes sobre a área de Ensino de Ciências e Matemática e Ensino. De acordo com esses autores, a área de Ensino de Ciências e Matemática foi criada em 2000 e ampliada em 2010, quando passou a ser chamada área de Ensino.

Por sua vez, os cinco trabalhos desenvolvidos em Programas de Pós-Graduação em Filosofia (NAKANO, 2015; CORTESE, 2017; PIMENTEL, 2017; ALMEIDA, 2017; ALMEIDA, 2019), além daquele realizado em um programa de Educação (CASTRO, 2016), estão alocados na grande área do conhecimento de Ciências Humanas. Nesse viés, informações, veiculadas pelo Diretório dos Grupos de Pesquisa, apontam que essa grande área de conhecimento detém o maior número de linhas de pesquisa no Brasil (18% do total de 147.392). Consideramos como fator positivo a realização de 5, dentre as 27 teses, em programas de Filosofia; o que nos proporciona apontar que o tema "Filosofia da Matemática" permite contribuições, tanto para matemáticos e educadores matemáticos, quanto para profissionais da área de Filosofia.

Assim, com base no exposto nesta seção, identificamos no *corpus* de análise seis teses que apresentaram o termo "Filosofia da Matemática" no título ou nas palavras-chave[8], a saber: Nakano (2015), Rocha (2016), Batistela (2017), França (2017), Misse (2019) e Godoy (2019). Realizada essa apuração, passamos à seção seguinte.

3 DESCRIÇÃO DO *CORPUS* DE ANÁLISE

Ao analisarmos os trabalhos de Nakano (2015), Rocha (2016), Batistela (2017), França (2017), Misse (2019) e Godoy (2019), a fim de identificar e compreender o foco de cada um, encontramos uma amostra heterogênea de abordagens relativas à Filosofia da Matemática. Cada tese traz uma perspectiva diferente, considerando seus objetivos pretendidos e problemas e serem respondidos. Nesse sentido, a seguir, dispomos o Quadro 3, que elucida o título e/ou o objetivo/pergunta de cada estudo, com vistas a subsidiar a apreciação analítica. A discussão dos trabalhos segue uma ordem cronológica de apresentação.

[8] Apesar da pesquisa de Almeida (2019) ter atendido a esses critérios, desconsideramo-la desta análise detalhada por estar escrita em língua inglesa. Entendemos que essa exclusão seria pertinente e adequada, a fim de privilegiar os estudos escritos em Língua Portuguesa.

Quadro 3: Teses abordadas

Título da Tese	Objetivo do trabalho ou pergunta de pesquisa
Um Estudo sobre Complementaridades presentes na Construção da Teoria dos Números Complexos	Analisar o caráter epistemológico do processo de construção da teoria dos números complexos, sob o ponto de vista do Princípio da Complementaridade na Educação Matemática
O Teorema da Incompletude de Gödel em Cursos de Licenciatura em Matemática	Apresentar uma proposta para inserção do teorema da incompletude de Gödel em cursos de Licenciatura em Matemática, buscando compreender como sentidos e significados deste teorema podem ser atualizados nestes cursos
Continuum: Matemática, Filosofia e Computação	Investigar e compreender o como o contínuo se presentifica, no trabalho com métodos numéricos, estando-se junto ao computador?
Um breve Panorama das Matemáticas Mistas e seus Desdobramentos	Contribuir bibliograficamente a respeito das matemáticas mistas no idioma português
Evolução do Conceito de Função Integrável	Descrever e analisar a evolução dos conceitos de integrais e funções integráveis por três diferentes e complementares pontos de vista: o histórico, o filosófico e o matemático
A Matemática das Philosophische Bemerkungen: Wittgenstein no contexto da Grundlagenkrise	Leitura e interpretação dos escritos de Wittgenstein sobre a matemática presentes nos "capítulos matemáticos" das Philosophische Bemerkungen

Fonte: Autores (2021).

Devido ao nosso limitado espaço para uma abordagem filosófica mais aprofundada, nossa discussão focaliza recortes de cada trabalho. Para tal, expomos um breve perfil dos aportes utilizados em cada um.

Iniciamos nossa discussão pela pesquisa intitulada "A Matemática das Philosophische Bemerkungen: Wittgenstein no contexto da Grundlagenkrise", de Nakano (2015). Nessa pesquisa, Nakano (2015, p. 2) define dois objetivos, o primeiro de "fornecer uma leitura e interpretação dos escritos de Wittgenstein acerca da filosofia da matemática no início do seu "período intermediário", além de buscar "desenvolver uma reflexão sobre a posição do autor a respeito da crise dos fundamentos da matemática que se instaurou no início do século XX" (NAKANO, 2015, p. 2). Para isso, o autor escolhe analisar a obra Philosophische Bemerkungen (PhBm) de Wittgenstein (1964).

A PhBm foi escrita no contexto de duas crises. A primeira, interna ao pensamento do autor, diz respeito a inconsistências encontradas no Tractatus Logico-Philosophicus[9], em que o autor se posiciona apenas em relação ao logicismo de Frege e Russell e é encarada pelo referido filósofo como uma crise nos fundamentos da lógica, pois era fruto de problemas incontornáveis que se manifestavam no momento da "aplicação da lógica", no momento de revelar aquilo que a lógica não podia prescrever, a saber, a forma lógica dos objetos simples e das proposições elementares. Já a segunda crise, que recebeu o codinome de "Grundlagenkrise der Mathematik[10]", diz respeito ao posicionamento de Wittgenstein diante das tendências filosóficas dominantes de sua época: o intuicionismo de Brouwer e Weyl; o formalismo de Hilbert; e o logicismo renovado de Ramsey.

[9] Obra cujo original foi publicado em 1921. Foi o único trabalho que Wittgenstein publicou em vida e é considerado um dos textos mais influentes, inspiradores e inovadores do pensamento moderno, mantendo seu predomínio em toda a discussão posterior sobre a filosofia da linguagem.
[10] Weyl, Hermann: Uber die neue Grundlagenkrise der Mathematik, em: ¨ Mathematische Zeitschrift, 10.1-2 (1921), pp. 39–79.

Em seu capítulo de conclusão, Nakano (2015) dedica-se a considerar em que medida as reflexões de Wittgenstein sobre a matemática nas PhBm tocam o solo da segunda crise. Neste sentido, o autor constrói relações entre a concepção de Wittgenstein e essas três escolas, limitando-se ao dito no "Tractatus", sem a intenção de exaurir o conteúdo do debate de Wittgenstein. Ao contrário disso, Nakano reconhece que seu intento propiciou o acesso a um ponto de vista privilegiado que permite a apreciação da postura de Wittgenstein face à crise que se instaurou na matemática de seu tempo. O pesquisador conclui seu estudo, demostrando que a perspectiva de Wittgenstein não se reduz a um sincretismo dessas três correntes filosóficas clássicas, mas "se constitui um pensamento original sobre a matemática que concebe essa crise como um produto de confusões conceituais a serem esclarecidas pelo trabalho filosófico" (NAKANO, 2015, p. 168). Assim, as concepções de Wittgenstein não surgiram como uma alternativa oposta as outras três, nem tampouco ao seu fracasso, diferentemente disso objetiva reconhecer que os problemas enfrentados carecem de sentido.

A segunda tese submetida à análise, "Evolução do Conceito de Função Integrável", Rocha (2016, p. 12) objetiva "descrever e analisar a evolução dos conceitos de integrais e funções integráveis por três diferentes e complementares pontos de vista: o histórico, o filosófico e o matemático". Além disso, a autora ilustra e fortalece a hipótese de seu estudo: "O progresso das Ciências e da Matemática foi concebido, até certo grau, como um processo de desenvolvimento de seus objetos e de sua particular noção de realidade" (ROCHA, 2016, p. 106).

No que que concerne às teorias que fundamentam o trabalho, Rocha (2016) apoia-se no referencial filosófico, com base na Semiótica, de Peirce, e no Princípio da Complementaridade na Educação Matemática. Já a perspectiva histórica e matemática empregada pela pesquisadora é tomada para apresentar uma evolução dos conceitos de "função de continuidade" e de "integrabilidade".

Rocha (2016) afirma que a evolução do conceito de função ocorreu paralelamente ao conceito de continuidade, beneficiando-se, também, das ideias desenvolvidas na Semiótica, a partir da construção de suas representações geométricas e algébricas. Já a evolução do conceito de integralidade teve sua origem junto ao método da quadratura de figuras planas, perpassando pelo método dos indivisíveis, de Cavalieri, culminando no cálculo de áreas limitadas pelos gráficos de certas funções, desenvolvido por Fermat.

Outro percurso apresenta os trabalhos de Cauchy e Riemann que apoiam-se na Geometria para desenvolver os conceitos "integral" e "integrabilidade", enquanto Newton e Leibniz atacam o problema via uma abordagem algébrica, por meio das antiderivadas. Percebe-se aí a presença de uma complementaridade de visões do problema: a visão geométrica e a visão algébrica, reflexo da complementaridade existente na Matemática entre a Geometria e a Álgebra, entre o contínuo e o discreto. Lebesgue, então, entra em cena para revolucionar a solução do problema, introduzindo a noção de medida de conjuntos, que generalizou a noção de distância euclidiana e ampliou o sentido do conceito, mostrando que o que interessa são as funções mensuráveis.

Esse trajeto histórico sobre as construções matemáticas dos objetos em foco evidencia a evolução de uma abordagem aritmética do conceito de função integrável para uma abordagem complementar algébrica. Percebe-se a mudança de uma abordagem intuitiva para uma abordagem complementar formal que partiu do método dos indivisíveis de Cavalieri para criar uma integral aritmética. Posteriormente, Newton estabeleceu o cálculo integral como a operação inversa da derivação, enquanto Leibniz construiu a integral definida para derivadas contínuas, atualmente conhecida como Teorema Fundamental do Cálculo. O resultado obtido por Leibniz foi abordado pela semiótica como uma representação para um cálculo de área, ampliando assim o conceito de integral.

A construção histórica dos conceitos de integrais e funções integráveis serviu para a autora comprovar a hipótese de que “o progresso das Ciências e da Matemática foi concebido, até certo grau, como um processo de desenvolvimento de seus objetos e de sua particular noção de realidade” (ROCHA, 2016, p. 16), durante a qual enfatizou-se as mudanças das intenções sobre este conceito. Tais mudanças são atribuídas às complementaridades existentes entre: a Aritmética e a Álgebra, Geometria e a Álgebra, contínuo e o discreto, intuição e o formalismo, rumo à construção de generalizações do conceito de funções integráveis.

O terceiro trabalho analisado, de autoria de Batistela (2017), toma como objeto de análise o Teorema da Incompletude de Gödel, cujo título é “O Teorema da Incompletude de Gödel em Cursos de Licenciatura em Matemática”. O objetivo dessa tese é propor a inserção do Teorema da Incompletude de Gödel como objeto de estudo em cursos de Licenciatura em Matemática, buscando responder a seguinte questão: “como sentidos e significados do teorema da incompletude de Gödel podem ser atualizados em cursos de Licenciatura em Matemática?” (BATISTELA, 2017, p. 7).

Em busca de possíveis respostas à problemática em pauta, o percurso traçado apresenta o contexto matemático presente no surgimento do Teorema da Incompletude de Gödel, trazendo três correntes filosóficas que tinham como objetivo fundamentar toda a Matemática: o Formalismo, através da aritmética de Peano; o Logicismo, mediante da Lógica; e o Intuicionismo, por intermédio dos constructos finitistas. O Teorema da Incompletude de Gödel (TIG) surge como uma resposta negativa à proposta de demonstrar formalmente a consistência da aritmética, do que dependia o sucesso da proposta Formalista (BATISTELA, 2017).

Outra questão perseguida pela autora gira em torno do seguinte questionamento: como a Ciência Matemática continuou após a publicação do resultado do TIG? A proposta apresentada pelo grupo Bourbaki foi concebida como a maneira que a Matemática acolheu o teorema da incompletude, não negando nem mesmo assumindo uma impossibilidade de progredir na Matemática, ao contrário disso, aceitando que “o aparecimento de proposições indecidíveis, até mesmo na teoria dos números naturais, é inevitável” (BATISTELA, 2017, p. 7).

Após a apresentação e discussão das ideias matemáticas e filosóficas em torno do TIG, Batistela (2017) dispõe uma proposta para incluir o Teorema da Incompletude como um dos conteúdos trabalhados nos cursos de Licenciatura em Matemática, com o objetivo de atualizar sentidos e significados sobre a ação de produzir e ensinar Matemática. A proposta da pesquisadora em questão aproxima o tema dos conteúdos já previstos nos planos de curso. Em suas considerações, a autora afirma ser de grande importância incluir, na formação inicial de professores, um resultado tão significativo da Lógica Matemática, sobretudo quando são consideradas as consequências desse teorema acerca do alcance do método de produção da Matemática e sobre a concepção de Matemática ensinada.

Finalmente, a investigação desenvolvida por Batistela (2017) permite concluir que é necessário criar oportunidades para que os futuros professores vivenciem experiências que os conduzam ao pensar matematicamente, lançando mão tanto das intuições quanto do método axiomático dedutivo, além de perceberem as possibilidades de aplicação da matemática enquanto Ciência a diversas situações no mundo. Nesse sentido, a estudiosa cita as ideias de Imenes (1989) quando assevera que “em se tratando de concepções de professores dessa ciência em relação a ela própria [...] afirma que o ponto de vista de um professor está ligado à visão de Matemática que aprendeu em seus cursos” (BATISTELA, 2017, p. 13). Além disso, a autora compreende que, ao se abordar o TIG sob uma perspectiva filosófica, abre-se um espaço para que o profissional matemático ocupe a posição de protagonista em seu trabalho científico “uma vez que o encontro com um indecidível implica que aquele sistema formal não é capaz de decidir sobre a veracidade daquela afirmação ou da negação dela" (BATISTELA, 2019, p. 13), incumbindo, portanto, ao matemático realizar o juízo.

A próxima discussão refere-se à pesquisa realizada por França (2017), intitulada "Um estudo sobre complementaridades presentes na construção da teoria dos números complexos", a qual consiste numa pesquisa bibliográfica de natureza histórica e filosófica, tematizando a História dos números complexos. Para tanto, o referido pesquisador selecionou e analisou os trabalhos sobre o tema em pauta, publicados entre os séculos XV e XIX, buscando amparo no Princípio da Complementaridade na Educação Matemática para compreender e explicitar seus aspectos epistemológicos. O *corpus* de França (2017) constitui-se de trabalhos realizados por: Girolamo Cardano, Raphael Bombelli, René Descartes, Abraham De Moivre, Leonhard Paul Euler, Caspar Wessel, Jean-Robert Argand e Carl Friedrich Gauss, os quais contribuíram para a posterior representação geométrica dos números complexos no plano.

No que diz respeito às perspectivas filosóficas, França (2017) fundamenta-se nos juízos analítico e sintético de Kant, no conceitualismo de Bernard Bolzano, na Semiótica de Frege, e na ideia de signo de Pierce, com o objetivo de estudar as interpretações históricas e filosóficas da construção de conceitos matemáticos relacionados à Teoria dos Números Complexos.

França (2017) contextualiza seu trabalho na Educação Matemática, justificando que compreender o caráter epistemológico da produção matemática dessa teoria – enfatizando suas complementaridades – contribui para a formação do professor de matemática e para seu trabalho em sala de aula, pois proporciona a identificação de vários obstáculos que precisaram ser ultrapassados pelos matemáticos da época. Dentre esses obstáculos, o autor evidencia a aceitação de alguns tipos de números e seus aspectos operacionais, o tipo de abordagem científica aplicado à Matemática, a simbologia usada e a dificuldade de publicar e comunicar novos resultados. No que diz respeito às complementaridades identificadas, o estudo de França (2017) aponta para a complementaridade existente entre duas perspectivas de construção do conhecimento matemático, presentes no período analisado: a descoberta ou a criação. A primeira afirma que o conhecimento ocorre por meio de descobertas, ao passo que a segunda defende que acontece mediante criações da mente, o que pôde ser evidenciado pela "alternância entre os métodos empíricos do início do período da construção deste conceito e o formalismo racional que começava a predominar no final" (FRANÇA, 2017, p. 170).

O próximo trabalho analisado aproxima a Filosofia da Matemática da Computação, investigando como um objeto matemático se presentifica junto ao computador. A tese de Misse (2019), intitulada "Continuum: Matemática, Filosofia e Computação", tem como objetivo compreender o sentido de continuidade, atendo-se ao que dispõe-se sobre o referido tema na Filosofia da Matemática, na Matemática e na Ciência da Computação. Para tanto, o autor dedica-se a uma análise histórica, visando compreender: a evolução desse objeto e os diferentes modos que a matemática o concebe; e sua dimensão sob a perspectiva da Filosofia da Matemática, frisando alguns desdobramentos sobre essas compreensões quando se analisa o conceito do continuum dentro do ambiente computacional. O autor também contemplou, em sua análise, o conceito de infinito, por perceber que o modo que desenvolveu seu trabalho aproximou ambos os conceitos (continuum e infinito), os quais passaram a ser discutidos em conjunto. Dessa forma, sua investigação procura responder a seguinte questão: "Como o contínuo se presentifica no trabalho com métodos numéricos, estando-se junto ao computador?" (MISSE, 2019, p. 18), propondo um movimento de investigação filosófica com a intenção de expor suas compreensões do sentido de continuidade.

O percurso histórico constituído por Misse (2019) visita os pensamentos da filosofia grega atomista e a ideia dos mônadas de Leibniz, consideradas essenciais para a posterior formalização matemática do conceito de continuum. Depois, o autor aborda as teorias de Cantor e Dedekind, que se valeram das ideias de Leibniz para a construção dos Números Reais e a formulação da hipótese do continuum. A partir desse momento, a tese focaliza o contínuo no âmbito da Ciência Matemática, com vistas a compreender o processo de formalização da Análise através da estruturação dos números reais. A discussão realizada delineou aproximações entre os modelos desenvolvidos por Dedekind e por Cauchy, considerados matematicamente isomorfos, porém com diferenças epistemológicas acentuadas. Misse (2019) entende que a construção efetuada por Dedekind olha para ideia geométrica de reta, reconhecendo a presença de todos os números reais sobre ela, enquanto a concepção de Cauchy concebe os números em potência, de modo que qualquer número real pode ser escrito por meio de uma sequência de números racionais, estabelecendo assim a analogia que toma a diferença entre o infinito real e o infinito potencial, respectivamente.

O caminho escolhido por Misse (2019) considera duas perspectivas de Análise: as aproximações entre os modelos desenvolvidos por Dedekind e por Cauchy, culminando no estudo da Análise por meio do modelo de Cauchy-Weierstrass, e as estruturas infinitesimais. Quanto à compreensão dos números reais de uma perspectiva da Matemática, seu estudo concluiu que

> [...] as duas perspectivas de Análise se distanciam quando tematizamos o conceito de número". Para o modelo de Cauchy-Weierstrass temos os números como entidades pontuais, que podem ser tomadas de modo discreto, mas que, pela propriedade completa, se constitui numa entidade contínua. Já o modelo dos infinitésimos vê os números diante de uma interdependência de valores em uma vizinhança, do mesmo modo que Husserl compreende os instantes temporais como agoras-duração que, ao se estenderem, constituem uma estrutura contínua (p. 93).

Construída sua compreensão sobre o conceito de continuidade no âmbito da Ciência Matemática, Misse (2019) buscou a construção de sua concepção sobre a continuidade junto à Ciência da Computação. Tal jornada teve início em reflexões a respeito do que é o computador, sua estrutura e qual concepção de números é possibilitada diante dele. Partindo da ideia de que o conceito de continuidade está fundamentado nas construções realizadas sobre os Números Reais, o autor verificou a necessidade de visitar a maneira como esses números são modelados e armazenados pelo computador. O fato de que determinados números só podem ser representados por meio de arredondamentos ou truncamentos poderia ter levado o pesquisador a concluir que seria impossível representar os números reais junto ao computador. No entanto, a epistemologia subjacente ao trabalho de Cauchy, que também está presente no trabalho de Turing (1936), aponta para a possibilidade de se trabalhar com qualquer número real, de modo que os possíveis lapsos observados podem ser preenchidos e, portanto, todas as funções computáveis são contínuas. Dessa forma, Misse (2019, p.95) conclui que

> [...] foi possível evidenciar a presença da continuidade em modos de se trabalhar com o ferramental da computação" e que o exercício filosófico desenvolvido no trabalho permitiu "efetuar uma articulação de significados de diversas áreas, as quais buscaram compreensões sobre a continuidade no decorrer da História (p. 95).

Por fim, apreciamos o trabalho de Godoy (2019), cujo título é "Um breve panorama das matemáticas mistas e seus desdobramentos". O objetivo do autor é contribuir para o conjunto de produções bibliográficas em português a respeito das matemáticas mistas. Tal área envolve sua construção história e as contribuições dos conhecimentos produzidos nessa área para o desenvolvimento da Matemática, da Física, e das Tecnologias, sobretudo das máquinas construídas para impulsionar o desenvolvimento Industrial na Inglaterra. Para tanto, Godoy (2019) define seu contexto de investigação em função de um local: Inglaterra; e uma sociedade científica: Sociedade Lunar de Birmingham.

O percurso histórico, objeto de sua análise, tem início quando da introdução das "matemáticas mistas" como área de produção de conhecimento científico, termo esse que apareceu pela primeira vez junto à publicação de Francis Bacon, intitulada Proficience and Advancement of Learnings no ano de 1605, na qual definiu uma classificação para as ciências matemáticas enquanto "matemática pura" – Aritmética e Geometria – e "matemática mista" – Arquitetura, Astronomia, Cosmografia, Engenharia, Música e Perspectiva.

Em 1623, Bacon publica sua obra De Dignitate et Augmentis Scientiarum, na qual altera sua concepção da matemática para além da Metafísica. Godoy (2019) realça, como principal mudança, a possibilidade de as ciências matemáticas contribuírem com as ciências da Física. Compreendemos que tal mudança de perspectiva de Bacon surgiu a partir das descobertas feitas, entre 1605 e 1623, no campo das ciências físico-matemáticas.

A classificação dada por Bacon, que inclui a matemática como um ramo da Metafísica, repercutiu em questionamentos filosóficos. Já o fato da maioria dos resultados ser proveniente de dados coletados a partir de experiências físicas, gerou críticas quanto à veracidade desses resultados. Para contornar tal situação, surgiram iniciativas no sentido de expressar as demonstrações da matemática mista em função de objetos da matemática pura, principalmente fazendo uso da geometria. Outra forma encontrada foi aproximar as ciências matemáticas das ciências físicas, despontando, assim, as ciências físico-matemáticas como um desdobramento da matemática mista.

Diante desse novo cenário científico, uma nova classificação da matemática fazia-se necessária e, no ano de 1751, D'Alembert e Diderot publicaram uma série denominada "Encyclopédie", com o objetivo de reclassificar o conhecimento humano. A matemática continuaria ramificada na metafísica, mas agora dividida em matemática pura, matemática mista e ciências físico-matemáticas. Nessa nova classificação, matemática mista e as ciências físico-matemáticas contemplavam os mesmos tópicos: Acústica, Arte de Conjecturar (probabilidades), Astronomia Geométrica, Mecânica, Óptica e Pneumática. A diferença efetuava-se na flexibilidade de utilizar os resultados da matemática com as ciências físicas. Apesar de essa classificação criar duas categorias distintas sob o ponto de vista conceitual, as ciências físico-matemáticas e as matemáticas mistas eram consideradas ciências sinônimas, sendo compreendidas como uma aplicação da matemática pura para a resolução de problemas observados no mundo físico.

Outro fato apresentado no trabalho de Godoy (2019) refere-se ao desuso gradual do termo "matemática mista" no século XIX, como consequência do aparecimento da "matemática aplicada". Além disso, as críticas de Kant em relação aos conhecimentos puros, os quais não concebiam a matemática como ramo da metafísica, contribuíram para o desuso da "matemática mista" .

Godoy (2019) conclui seu trabalho analisando as contribuições da "matemática mista" que, em conjunto com as ciências físico-matemáticas, foram utilizadas no decurso histórico para solucionar diversos problemas envolvendo grandezas físicas. Isso demonstra a importância da matemática mista para avanços no desenvolvimento da sociedade, destacando o aprimoramento tecnológico motivado pelo crescimento do setor industrial após a Revolução Industrial.

A partir da exposição do foco das teses elencadas para apreciação analítica neste estudo, percebemos que diferentes objetos matemáticos foram tematizados, tendo como pano de fundo percursos históricos de suas construções matemáticas, bem como diferentes perspectivas filosóficas, buscando compreender sua evolução, seus sentidos, significados e complementaridades. A respeito das correntes filosóficas contempladas nos trabalhos analisados, a próxima seção explora um recorte das principais escolas discutidas, acentuando alguns de seus principais aspectos filosóficos.

 v.6, n.1, p. 63-80, jun. 2021

4 ALGUMAS REFLEXÕES A RESPEITO DA FILOSOFIA DA MATEMÁTICA

Conforme discutimos no capítulo anterior, encontramos uma amostra heterogênea de abordagens relativas à Filosofia da Matemática. No entanto, diálogos podem ser estabelecidos entre alguns trabalhos encontrados no *corpus* de análise, conforme Quadro 4, a seguir.

Quadro 4: Teses e Abordagens Filosofias

Autor	Abordagem filosófica	Filósofo	Desenvolvimento teórico analisado
Nakano (2015)	Positivismo Lógico	Ludwig Joseph Johann Wittgenstein	Crise nos fundamentos e aplicação da lógica
Rocha (2016)	Semiótica	Charles Sanders Peirce	Trajeto histórico sobre as construções matemáticas dos objetos
Batistela (2017)	Lógica Matemática	Kurt Friedrich Gödel	Incluir, na formação inicial de professores, o Teorema da Incompletude de Gödel, um resultado tão significativo da Lógica Matemática
França (2017)	Intuicionismo	Immanuel Kant	Diálogo entre os juízos analítico e sintético, o conceitualismo, a Semiótica, e a ideia de signo
Missé (2019)	Racionalismo	Gottfried Wilhelm Leibniz	A evolução do Continuum e os diferentes modos que a matemática o concebe
Godoy (2019)	Empirismo	Francis Bacon	As matemáticas mistas como área de produção de conhecimento científico: as ciências físico-matemáticas

Fonte: Autores (2021).

Percebidas as principais centralidades das teses sobre Filosofia da Matemática, buscamos relações entre os teóricos citados e suas respectivas abordagens filosóficas. Pensando nessa "conversação", definimos uma linha não cronológica de ideias, destacadas sequencialmente de forma igual como possibilidades de intersecção de linhas de pensamento. Começamos por Wittgenstein.

Ludwig Joseph Johann Wittgenstei, em seu "Tractatus Logico-Philosophicus" (publicado em 1921), procura expor "a verdade dos pensamentos comunicados", cujas expressões lhe parecem intocáveis e definitivas. "Um pensamento correto a priori seria aquele cuja possibilidade condicionasse sua verdade", ou seja, "[...] só poderíamos conhecer a priori que um pensamento é verdadeiro se a verdade dêle fosse reconhecível a partir do próprio pensamento (sem objeto de comparação)" (WITTGENSTEIN, 1968, p. 61-62, grifo nosso).

"Espaço, tempo e côr (coloridade) são formas dos objetos" (WITTGENSTEIN, 1968, p. 58), ou seja, para o filósofo *o Espaço é o espaço lógico, em que o objeto existe caso não contrarie as 'leis lógicas'*. O Tempo é o tempo das proposições. Não podemos dizer, por exemplo, que "p" existe e não existe simultaneamente. Por fim, a Côr, em Wittgenstein, é tão material quanto o corpo. Da mesma forma que um corpo não pode ocupar dois lugares diferentes concomitantemente, ele não pode ter duas cores 'diferentes'. Porém, ao afirmar que algo é branco e não azul, o azul (excludente) deve fazer parte do campo semântico da minha afirmação, ou seja, deve ser uma cor significativa à minha proposição. "O modo pelo qual os objetos se vinculam no estado de coisas constitui a estrutura do estado de coisas. [...] A totalidade dos subsistentes estados de coisas é o mundo" (WITTGENSTEIN, 1968, p. 58). Os objetos estão ligados uns aos outros por meio de uma cadeia, a qual é determinada, única, formando uma estrutura. Essa 'garantia de unicidade da estrutura', nos dá a possibilidade da forma. A totalidade desses 'estados duradouros' (Formas) constituem o Mundo. Para o filósofo, as cores, por exemplo, possuem esta estrutura que, inicialmente, era analisada, para depois ser considerado o conceito de cor.

Immanuel Kant dispõe sobre Conhecimento Puro e Conhecimento Empírico e suas diferenças, considerando-se os conhecimentos e juízos a priori e os conhecimentos a posteriori. Para o teórico, "a crítica da razão acaba, necessariamente, por conduzir à ciência, ao passo que o uso dogmático da razão, sem crítica, leva, pelo contrário, a afirmações sem fundamento, a que se podem opor outras por igual verossímeis e, consequentemente, ao cepticismo" (KANT, 2001, p. 77). Com a publicação do livro "Crítica da Razão Pura", Kant desenvolve seus argumentos a respeito do Conhecimento Transcendental, que corresponde *"[...] a todo o conhecimento que em geral se ocupa menos dos objetos, que do nosso modo de os conhecer, na medida em que este deve ser possível a priori*" (KANT, 2001, p. 79). Ademais, o estudioso completa, frisando algo mais a respeito das várias Filosofias: "Um sistema de conceitos deste gênero deveria denominar-se filosofia transcendental. Mas esta filosofia é, por sua vez, demasiado ambiciosa para podermos começar por ela" (KANT, 2001, p. 79).

> Kant pensa a causalidade como a determinação por uma regra da sequência temporal dos fenômenos. Essa determinação se expressa em um princípio puro do entendimento, a "Segunda Analogia da Experiência". Cada um dos princípios puros do entendimento chamados de "Analogias da Experiência" trata da determinação objetiva de um dos aspectos da ordem do tempo, sendo eles: permanência, sucessão e simultaneidade. Na primeira edição da Crítica da Razão Pura, a Segunda Analogia, que diz respeito à determinação objetiva da sucessão temporal por uma regra, foi formulada de uma forma que evidenciava o ponto: "Tudo que acontece (começa a ser) pressupõe algo a que se segue de acordo com uma regra". Na segunda edição da Crítica da Razão Pura, a formulação é um tanto mais vaga nesse aspecto: "Todas as alterações ocorrem de acordo com a lei da conexão de causa e efeito" FAGGION, 2018, p. 29).

Gotfried Wilhelm Leibniz foi um polímata e filósofo alemão que publicou, em 1668, a primeira explicação clara e breve, de forma declarada, do princípio de razão suficiente (PRS), na obra "Demonstratio num Catholicarum Conspectus". Logo após, ainda em 1668, discorre sobre esse assunto na obra Confessio Naturae contra Atheistas. Já em 1670, publicou sua ideia em "Theoria Motus Abstracti", em 1672, em "Demonstratio Propositionum Primarum" e em "Existentia", em 1676. Além dessas obras, "Leibniz também menciona o PRS nos parágrafos § 44 e 196 da Teodiceia (1710) e no § 32 da "Monadologia" (1714)" (texto adaptado de SOUZA; FILHO, 2019, p. 2). Considerando, aqui, o que Leibniz dispõe em "Monadologia", revelamos:

> Os nossos raciocínios fundam-se sobre dois grandes princípios: o da contradição, pelo qual consideramos falso o que ele implica, e verdadeiro o que é oposto ao falso ou lhe é contraditório. E o da Razão Suficiente, pelo qual entendemos não poder algum fato ser tomado como verídico, sem que haja uma razão suficiente para ser assim e não de outro modo, embora frequentemente tais razões não possam ser conhecidas por nós (LEIBNIZ apud SOUZA; FILHO, 2019, p. 2).

É nessa obra que Leibniz afirma o Princípio da Não Contradição: uma tese não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo, ou seja,

> [...] *se uma proposição for verdadeira, então a sua contraditória é falsa, e se for falsa, a sua contraditória é verdadeira*. Por sua vez, o PRS estabelece que é necessária a pressuposição de uma causa ou razão suficiente para um evento qualquer ser considerado como verdadeiro ou existente, e, para ser assim e não de outra maneira. Segundo Leibniz, embora o PRS exija a indicação de condições, fundamentos ou razões, todavia, estas podem ser desconhecidas (SOUZA; FILHO, 2019, p. 2, grifos nossos).

Semelhantemente a Leibniz, Kant expõe esse assunto, afirmando que o princípio da não contradição "é um critério interno e negativo da verdade lógica e determina a possibilidade lógica de um conhecimento, pois prescreve apenas que o pensamento não se contradiga a si mesmo" (SOUZA; FILHO, 2019, p. 3). Por outro lado, "o PRS é um critério externo e positivo da verdade lógica e determina a realidade lógica do conhecimento, pois prescreve que o pensamento seja bem fundamentado logicamente" (SOUZA; FILHO, 2019, p. 3).

Já a Semiótica ou Teoria dos Signos de Charles Sanders Peirce explica o significado, a significação, a referência, a representação. Seu diálogo com as teorias de Wittgenstein e Leibniz fica claro quando observamos que

> Os relatos de Peirce são distintos e inovadores por sua amplitude e complexidade, e por capturar a importância da interpretação para a significação. Para Peirce, desenvolver uma teoria completa dos signos era uma preocupação filosófica e intelectual central. A importância da semiótica para Peirce é ampla. [...] Também *tratou a teoria dos signos como central para seu trabalho sobre lógica, como o meio para a investigação e o processo de descoberta científica*, e até mesmo como um meio possível para 'provar' seu pragmatismo (ATKIN, 2013, s. p., grifos nossos).

Kurt Friedrich Gödel foi um matemático, filósofo e lógico austríaco. Comparado, em importância para a História da Lógica, a Aristóteles, Tarski e Frege, publicou, em 1931, seus Teoremas da Incompletude, os quais restringem, intrinsicamente, quase todos os conjuntos de meios e processos axiomáticos empregados tanto na Filosofia da Matemática quanto na Lógica Matemática. Mediante seus teoremas, Gödel provou não ser possível atingir o que David Hilbert dispunha com seu Programa: formalizar a Matemática e demonstrar que a mesma é livre de contradições. Assim, como dito na sessão anterior: é necessário atualizar sentidos e significados sobre a ação de produzir e ensinar Matemática, [bem como] é necessário criar oportunidades para que os futuros professores vivenciem experiências que os conduzam ao pensar matematicamente, lançando mão tanto das intuições quanto do método axiomático dedutivo, além de perceberem as possibilidades de aplicação da matemática enquanto Ciência a diversas situações no mundo (BATISTELA, 2017).

Francis Bacon é considerado o pai da ciência e do empirismo moderno, sendo uma peça fundamental na transição do Renascimento para a Era Moderna. Em seu texto datado de 1607, "Cogitata et Visa", Bacon desenvolve suas ideias a respeito do seu método científico, o qual ficou conhecido por "indução". Francis rejeita o Silogismo, definindo sua proposta como um labor gradual e fidedigno que coleta dados e traz à tona a compreensão das coisas.

> Quando mais tarde ele desenvolveu seu método em detalhes, nomeadamente em seu Novum Organum (1620), ele ainda notou que *"[de] indução, os lógicos parecem dificilmente ter levado qualquer pensamento sério, mas eles passam por ela com um ligeiro aviso e se apressam para as fórmulas de disputa*" (BACON apud KLEIN; GIGLIONI, 2020, s. p., grifos nossos).
>
> *O método indutivo parte da experiência sensível e se move através da história* natural (fornecendo dados dos sentidos como garantia) para axiomas ou proposições inferiores, que são derivados das tabelas de apresentação ou da abstração de noções (KLEIN; GIGLIONI, 2020, s. p. , grifos nossos).

Após essas análises, averiguamos que "*a Matemática é uma ciência eminentemente dedutiva*" (BIANCONI, [?], p. 1, grifos nossos), o que nos remete à Lógica Matemática – uma parte dessa ciência que se ocupa em verificar se determinadas afirmações ou conjecturas são verdadeiras ou falsas,

> [...] o que significa que todo o trabalho matemático consiste em discursos que partem de premissas (ou hipóteses – declarações cujo valor verdadeiro é assumido) e seguem várias sentenças obtidas segundo algumas regras (as chamadas regras

> de inferência), até que a afirmação final resolva o problema proposto. *Até a resolução de equações tem esse caráter dedutivo*.

Nesse sentido, apresentamos, aqui, um exemplo, de resolução simples, que ilustra esse fato: resolver a seguinte equação linear 5x – 2 = 4x + 16. Obteremos a solução, quando, ao "isolarmos" a incógnita "x" no primeiro membro da equação, teremos, através das propriedades das operações básicas da matemática (adição, subtração, multiplicação e divisão), o seu resultado numérico no segundo membro, atingindo, assim, a solução do problema. A seguir, expomos o passo a passo da resolução:

1) 5x – 2 = 4x + 16 (equação a ser resolvida)
2) (–4x) + (5x – 2) = (–4x) + (4x + 16) (Propriedade da Igualdade)
3) (–4x + 5x) + (– 2) = (–4x + 4x) + (16) (Propriedade Associativa da Adição)
4) x – 2 = 16 (Resultado das Operações entre parênteses)
5) (x – 2) + 2 = 16 + 2 (Propriedade da Igualdade)
6) x + (– 2 + 2) = (16 + 2) (Propriedade Associativa da Adição)
7) x = 18 (Resultado das Operações entre parênteses e chegada à solução do problema) (texto adaptado de BIANCONI, [?], p. 2).

Diante disso, observamos que a natureza organizacional e lógica da matemática foi determinante nas teorias e abordagens filosóficas verificadas em nossa pesquisa. Essas características tornam o estudo da Filosofia da Matemática extenso e ímpar se comparada com outras abordagens que possuem funções diferentes, mas semelhanças formais, considerando-se seus aspectos filosóficos.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao nos propormos apresentar e discutir um levantamento bibliográfico sobre as produções brasileiras em nível de doutorado acerca da Filosofia da Matemática, defendidas entre 2015 e 2020, a partir do questionamento "qual o foco das teses de doutorado produzidas no Brasil, nos últimos cinco anos, que tematizam a Filosofia da Matemática?", observamos que a centralidade das produções esteve em assuntos distintos, como: Teorema da Incompletude de Gödel, Continuum, Conceito de Função Integrável, Matemáticas Mistas e obra a Philosophische Bemerkungen de Wittgenstein.

Como pontos que ilustram a Filosofia da Matemática e as convergências com relação a essa teoria presentes nos trabalhos, consideramos os argumentos de Kant (FRANÇA, 2017) a respeito do Conhecimento Transcendental, atribuindo este termo "[...] a todo o conhecimento que em geral se ocupa menos dos objetos, que do nosso modo de os conhecer, na medida em que este deve ser possível a priori" (KANT, 2001, p. 79) e as questões de Wittgenstein (NAKANO, 2015) em seu Tractatus Logico-Philosophicus (1921), no qual apresenta argumentos sobre o pensamento, afirmando que conhecer a priori se um pensamento é verdadeiro caso a verdade sobre ele fosse reconhecível sem objeto de comparação (WITTGENSTEIN, 1968).

Outro ponto de tendência de pensamento que merece destaque é a argumentação de Leibniz (tese de Misse, 2019) em sua obra Monadologia (1714), na qual afirma que se uma proposição for verdadeira, então a sua contraditória é falsa, e se for falsa, a sua contraditória é verdadeira. Também merece destaque a argumentação de Wittgenstein (NAKANO, 2015) com seu pensamento sobre a existência ou não de um objeto: Não podemos dizer, por exemplo, que existe e não existe ao mesmo tempo. Esses recortes nos fazem vislumbrar convergências de pensamento que nos remetem à Lógica Matemática e sua linguagem usual. Também, podem permitir indagações que sevirão de objetos para novos estudos.

Logo, esperamos que este texto contribua com discussões relacionadas à Filosofia da Matemática, sobretudo a pesquisadores preocupados sobre quando e onde as teses encontradas foram realizadas, bem como, principalmente sobre os principais temas abordados nesses trabalhos. A exemplo do exposto por Misse e Lammoglia (2020), ao abordarem um contexto histórico sobre a continuidade - tema abordado na tese de Misse (2019) -, observaram que ainda questões em aberto permanecem, possibilitando novas indagações sobre esse assunto.

Enfim, entendemos que investigações, discussões, artigos, dissertações e teses são necessárias para compreendermos aspectos da Filosofia da Matemática e os seus diversos focos. Nosso levantamento direciona aos Programas de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Estadual Paulista e Universidade Anhanguera de São Paulo, os quais têm realizado estudos nessa direção.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, E. L. B. **Análise das condições de verdade e dos requerimentos existenciais em axiomatizações da aritmética**. 2017. 138 p. Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Filosofia e Ciências Humanas, Campinas, SP. Disponível em: <http://www.repositorio.unicamp.br/handle/REPOSIP/330874>. Acesso em: 16 maio 2021.

ALMEIDA, H. A. **Contradições gratuitas**: em direção a uma interpretação nominalista de teorias contraditórias. 2019. 225 f. Tese (Doutorado em Filosofia) – Instituto de Filosofia e Ciências Humanas, Universidade Estadual de Campinas, Campinas. 2019.

ARAÚJO-JORGE, T. C.; SOVIERZOSKI, H. H.; BORBA, M. C. A Área de Ensino após a avaliação quadrienal da CAPES: reflexões fora da caixa, inovações e desafios em 2017**. Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia**, 10(3), 1-15, 2017. Disponível em: <https://periodicos.utfpr.edu.br/rbect/article/view/7744>. Acesso em: 28 set. 2020.

ATKIN A. **Peirce's Theory of Signs**. The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Summer 2013 Edition), Edward N. Zalta (ed.). Disponível em:https://plato.stanford.edu/archives/sum2013/entries/ peirce-semiótica /. Acesso em: 02 dez. 2020.

BATISTELA, R. de F. **O teorema da incompletude de Gödel em cursos de licenciatura em Matemática**. 2017. 139 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro. 2017.

BIANCONI, R. **Introdução à Lógica Matemática**. Material de apoio pedagógico – USP. 70 páginas. Ano de publicação desconhecido. Disponível em: https://www.ime.usp.br/~mat/0349/Cap-1-5.pdf. Acesso em: 03 dez. 2020

BORBA, M. C.; ARAUJO, J. L. (Org). **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. 6. ed. 1. reimp. Belo Horizonte: Autêntica, 2020.

CASTRO, R. S. **Jogos de linguagem matemáticos da comunidade remanescente de quilombos da Agrovila de Espera, Município de Alcântara, Maranhão**. 2016. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2016. Disponível em: <https://repositorio.ufscar.br/handle/ufscar/8592>. Acesso em: 16 maio 2021.

CIRANI, C. B. S.; CAMPANARIO, M. de A.; SILVA, H. H. M da. A evolução do ensino da pós-graduação senso estrito no Brasil: análise exploratória e proposições para pesquisa. **Avaliação** (Campinas), Sorocaba, v. 20, n. 1, p. 163-187, mar. 2015. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1414-40772015000100163&lng=en&nrm=iso>. Acesso em: 28 set. 2020.

CORTESE, J. F. N. **O infinito em peso, número e medida**: a comparação dos incomparáveis na obra de Blaise Pascal. 2017. 571 p. Tese (Doutorado em Filosofia) - Universidade de São Paulo, SP.

FAGGION, A. **Causa – causalidade**. Estudos Kantianos, v. 6, n. 2. Marília, 2018. p. 29-32. Disponível em: https://revistas.marilia.unesp.br/index.php/ek/article/view/8680/5592#:~:text=Kant%20pensa%20a%20causalidade%20como,%2D%20gunda%20Analogia%20da%20Experi%C3%AAncia%E2%80%9D. Acesso em: 02 dez. 2020.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em Educação Matemática**: percursos teóricos e metodológicos. Campinas: Autores Associados, 2006.

FRANÇA, S. M. **Um estudo sobre complementaridades presentes na construção da teoria dos números complexos**. 2017. 181 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo. 2017.

IMENES, Luiz Márcio Pereira. **Um Estudo sobre o Fracasso do Ensino e da Aprendizagem da Matemática**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1989.

KANT, I. **Crítica da razão pura**. 5. ed. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2001. Disponível em: <http://www.unirio.br/cch/filosofia/Members/dario.teixeira/teoria-do-conhecimento-2018-01/4-kant-critica-da-razao-pura/at_download/file>. Acesso em: 08 out. 2020. p. 62-83.

KLEIN, J.; GIGLIONI, G. **Francis Bacon**. The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Fall 2020 Edition), Edward N. Zalta (ed.). Disponível em: https://plato.stanford.edu/archives/fall2020/entries/francis-bacon/. Acesso em: 02 dez. 2020.

MISSE, B. H. L. **Continuum**: matemática, filosofia e computação. 2019. 100 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro. 2019.

MISSE, B. H. L.; LAMMOGLIA, B. Uma Perspectiva Histórica do Conceito de Continuidade Matemática. **Hipátia**, v. 5, n. 1, p. 132-142, jun. 2020. Disponível em: < https://ojs.ifsp.edu.br/index.php/hipatia/article/view/1460>. Acesso em: 15 mar. 2021.

NAKANO, A. L. **A matemática das Philosophische bemerkungen**: Wittgenstein no contexto da Grundlagenkrise. 2015. 234 f. Tese (Doutorado em Filosofia) – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos. 2015.

PIMENTEL, R. **Limitações do holismo confirmativo na matemática**. 2017. 152 f. Tese (Doutorado em Filosofia) - Faculdade de Filosofia e Ciências Humanas, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte. 2017.

REIS, A. C. E.; WENDLING, C. M.; MIGUEL, K. S.; PERON, L. D. C.; BAR, M. V.; SANTOS, S. C. S.; MEIER, W. M. B.; CUNHA, M. B. Análise dos Periódicos Qualis/CAPES: traçando o perfil da área de ensino de ciências e matemática. **Hipátia**, v. 5, n. 1, p. 11-24, jun. 2020. Disponível em: < https://ojs.ifsp.edu.br/index.php/hipatia/article/view/1445>. Acesso em: 25 mar. 2021.

ROCHA, I. A. **Evolução do conceito de função integrável**. 2016. 113 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo. 2016.

SOUZA, L. E. R. de; FILHO, J. P. do V. O princípio da razão suficiente na Crítica da Razão Pura de Kant e suas aplicações: as analogias, as antinomias e os princípios regulativos. **doispontos**: Curitiba, São Carlos, volume 16, número 3. 2019, p. 1-15. ISSN 2179-7412. Disponível em: https://revistas.ufpr.br/doispontos/article/download/66683/40325. Acesso em: 05 dez. 2020.

TURING, A. M. On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem. **Proceedings of the London Mathematical Society**, Series 2, n.42, p 230-265. 1936.

WITTGENSTEIN, Ludwig: **Philosophische Bemerkungen**, ed. por Rush Rhees, Frankfurt: Suhrkamp, 1964.

WITTIGENSTEIN, L. **Tractatus Logico-Philosophicus**. São Paulo: Companhia Editora Nacional – Editora da USP, 1968.

Submetido em março de 2021.
Aprovado em junho de 2021.

Maxwell Gonçalves Araújo

Mestre em Educação em Ciências e Matemática pela Universidade Federal de Goiás (UFG). Docente do Instituto Federal de Goiás (IFG), Goiânia, SP, Brasil. ID Lattes: 4736043944821771. Orcid ID: 0000-0003-2828-6170.

Contato: maxwell.g.araujo@unesp.br.

Andrei Luís Berres Hartmann

Licenciado em Matemática pela Universidade Federal de Santa Maria (UFSM). Professor da rede municipal de ensino da cidade de Cândido Godoi, Cândido Godoi, RS, Brasil. ID Lattes: 7162712940733464. Orcid ID: 0000-0001-5240-7038.

Contato: andreiluis_spm@hotmail.com.

Luciana Leal da Silva Barbosa

Mestra em Ciência da Computação pela Universidade Estadual Paulista (Unesp). Docente do Instituto Federal de São Paulo (IFSP), Birigui, SP, Brasil. ID Lattes: 4495309054700716. Orcid ID: 0000-0002-0828-9924.

Contato: lleals@gmail.com.

A Relação Professor-Aluno:
uma análise a partir da Psicologia Analítica

Teaching-Student Relationship:
an analysis through Analytical Psychology

Jader Otávio **Dalto**
Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR)

Carolina Caires **Motta**
Pontifícia Universidade Católica do Paraná (PUCPR)

RESUMO

A relação professor-aluno pode ser considerada como o centro da ação pedagógica em uma instituição de ensino. Assim, o objetivo deste trabalho é analisar essa relação e seus impactos no ensino e na aprendizagem escolar sob a perspectiva da Psicologia Analítica, relacionando a aprendizagem com os tipos psicológicos e sentimentos presentes nessa relação. Para isso foi desenvolvida uma pesquisa qualitativa, por meio de uma busca de artigos publicados em periódicos brasileiros disponíveis no portal PePSIC. Como resultado, foram obtidos apenas cinco artigos, analisados a partir dos procedimentos definidos pela Análise de Conteúdo, que consiste em um conjunto de ações de Análise de Discurso, a qual revelou, dentre outras coisas, que a relação professor-aluno é permeada por conteúdos psíquicos que acompanham e interferem no processo de ensino e aprendizagem e, por isso, mais que a apreensão de conteúdos curriculares, pode proporcionar transformações da personalidade de alunos e professores, desde que seja estabelecido um vínculo positivo e amoroso.

Palavras-chave: Psicologia Analítica. Ensino e Aprendizagem. Professor-Aluno.

ABSTRACT

Teacher-student relationship can be considered as the center of pedagogical action at school. The aim of this research is to analyze teacher-student relationship and the impacts on school teaching and learning according to Analytical Psychology, relating learning to the psychological types and feelings present in this relationship. For this, a qualitative research was developed based on a search for papers published in Brazilian journals available on the PePSIC webportal. As a result, only five articles were obtained, which were analyzed using the procedures defined by Content Analysis, which is a set of procedures for discourse analysis. The analysis revealed, among other things, that the teacher-student relationship is permeated by psychic contents that accompany and interfere in the teaching and learning processes and, therefore, more than learning curricular content, it can provide personality transformations as long as it is a positive and loving bond is established.

Keywords: Analytical Psychology. Teaching and Learning. Teacher-Student relationship.

1 INTRODUÇÃO

Os processos de ensino e aprendizagem na escola têm sido objeto de muitas investigações no Brasil, tendo em vista que, de acordo com resultados de avaliações de larga escala em nível nacional e internacional, o desempenho dos alunos brasileiros está abaixo do esperado. Muitas são as variáveis que interferem nesses processos, dentre elas, podemos citar a formação dos professores, as condições de trabalho, as físicas (dos estabelecimentos de ensino) e a própria relação que se estabelece entre professor e aluno no ambiente escolar.

A escola tem papel fundamental na educação das crianças. Sob o ponto de vista psicológico, Jung (2013a, p.61) afirma que funciona como meio de apoio para o processo de formação da consciência, de modo que, sem ela, "as crianças seriam inconscientes em um grau muito maior". Esse processo de formação de consciência, bem como os de ensino e aprendizagem, são influenciados fortemente pelas relações estabelecidas entre as figuras presentes na escola, sendo elas: o professor, o aluno e o conhecimento.

Para além de ensinar conteúdos, os professores, de acordo com Jung (2013a), ensinam, pelo exemplo, promovendo uma educação psíquica que conduz a criança para um mundo mais amplo. Para Jung, ensinar pelo exemplo não é um método de ensino, mas sim uma espécie de conhecimento transmitido de modo inconsciente (SAIANI, 2002).

A partir dessas considerações, pode-se investigar a relação professor-aluno à luz da Psicologia Analítica, dando ênfase aos tipos psicológicos e aos vínculos formados pelos atores do processo educacional. Assim, esta investigação tem como questão norteadora: como a relação professor-aluno pode influenciar na aprendizagem escolar a partir do que a literatura da área apresenta? Para buscarmos uma resposta para essa questão, foi definido como objetivo geral analisar o que se diz a respeito dessa relação e os impactos na aprendizagem escolar sob uma perspectiva junguiana.

2 ASPECTOS DA PSICOLOGIA ANALÍTICA

Para que se possa compreender os aspectos da relação professor-aluno a partir da Psicologia Analítica, é preciso que alguns conceitos dessa área sejam apresentados. Os primeiros deles são os de "inconsciente coletivo" e de "arquétipo". Antes, contudo, de forma breve, cabe apresentar a conceituação sobre "inconsciente". Na Psicanálise, ele é o local mais arcaico da estrutura psíquica, no qual residem as pulsões – representantes psíquicos dos estímulos somáticos (FREUD, 1980) e conteúdos de repressões secundárias (ZIMERMAN, 1999).

Não existe acesso direto aos conteúdos do inconsciente, mas estes podem se manifestar de forma disfarçada (em nível consciente) por meio dos sonhos, por exemplo. A partir desse conceito, Jung propôs o de "inconsciente coletivo", considerado como a parte da psique que se distingue do inconsciente pessoal pelo fato de que ele existe independentemente da experiência pessoal. É nessa estrutura da psique que se encontram imagens latentes, ou como Jung afirmava, "imagens primordiais", as quais são herdadas do passado ancestral.Contudo, apesar de herdá-las, os serem humanos não são capazes de lembrá-las de forma consciente; pois existem como predisposições ou potencialidades (HALL; NORDBY, 2014).

Os conteúdos do inconsciente coletivo têm a função de promover um padrão já formatado de comportamento pessoal que é seguido pelo indivíduo desde o momento do nascimento. Já os do inconsciente coletivo são os arquétipos, logo, a palavra "arquétipo" pode ser entendida como "modelo original" ou ainda "protótipo". Jung identificou muitos arquétipos, dentre eles, o do nascimento, da morte, da criança, do velho sábio, da mãe terra. De acordo com ele, a quantidade de arquétipos do inconsciente coletivo corresponde à quantidade de situações típicas na vida. Por meio de uma repetição infinita de experiências em nossa constituição psíquica, foram gravadas “formas sem conteúdo”, que possibilitam um tipo específico de percepção e ação (HALL; NORDBY, 2014).

Como exemplo, podemos citar o arquétipo materno. As infinitas experiências que nossos antepassados tiveram em relação ao cuidado, formação de vínculo, disposição relacional em geral, constituíram para essa “forma sem conteúdo” que existe no inconsciente, coletivo como uma possibilidade de manifestação desses aspectos na psique. As experiências pessoais que cada um tem com tais temas, em sua vida, dão conteúdo a esse arquétipo.

Jung não deu tanta importância para o arquétipo do professor-aluno, talvez por ele se preocupar mais com o desenvolvimento da psique do que com a educação em si. Entretanto, Saiani (2002, p. 106) considera plenamente viável a existência de um que esteja relacionado ao ensino e à aprendizagem, já que, para o autor, “a vivência de aprender e ensinar é arquetípica”.

De acordo com Saiani (2002), o arquétipo professor/aluno foi estudado por Adolph Guggenbühl-Craig (1978, *apud* SAIANI, 2002) o qual considera que o magistério é (assim como a medicina e o serviço social) uma profissão composta por um par de opostos, sendo que, nesse caso, formariam o par de opostos o professor (pensante) e o aluno (ignorante). Para Craig (1978, apud SAIANI, 2002, p. 111-2):

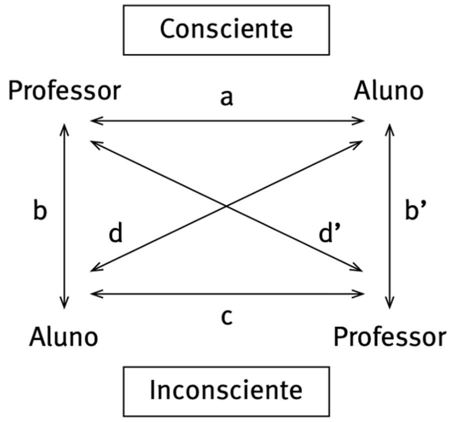
> A confrontação entre professor e aluno apresenta um paralelismo à tensão interior existente entre os estágios de adulto pensante e criança ignorante. Dentro do adulto, há uma criança que impele para um novo. O conhecimento do adulto torna-o rígido e fechado com respeito à inovação. Para permanecer emocionalmente vivo, o adulto deve conservar e cultivar o potencial de vida representado pela ingênua abertura e pela irracionalidade das experiências da criança que ainda não sabe nada. O adulto, portanto, nunca para de crescer; para de alguma forma manter a saúde psíquica, é preciso conservar uma certa ignorância infantil.

Nessa direção, Bandeira e Fortim (2018) fazem uma análise da relação professor-aluno a partir do arquétipo *puer-senex*. Para as autoras, aprender e ensinar são experiências arquetípicas e podem se dar a partir das polaridades *puer-senex* (jovem-velho), que tem caráter dual: possui em um de seus opostos, *puer*, associado ao aluno e, do outro, *senex*, associado ao professor. Nesse sentido, podem se apresentar um na forma do outro, pois “enquanto no plano da consciência um é constelado, seu par de oposto é ativado no plano inconsciente” (BANDEIRA; FORTIM, 2018, p. 29).

De acordo com o paradigma junguiano, toda relação humana é marcada por elementos inconscientes e conscientes. O aluno-aprendiz está associado de forma consciente à polaridade *puer*, enquanto o professor-mestre está associado, conscientemente, à polaridade *senex*. Para compreendermos os aspectos inconscientes da relação entre ambos, recorremos a Saiani (2002), que propôs o diagrama apresentado na Figura 1, em que a relação indicada pela seta *a* é a relação pedagógica, em nível consciente, pela qual professor e aluno interagem. Tal relação tem caráter “profissional”, é assimétrica e depende profundamente do perfil do professor, do ambiente escolar, da formação anterior do aluno, das concepções pedagógicas adotadas pela escola e pelo professor, além do tipo psicológico do professor e da forma como ele considera o aluno.

A partir da relação *a*, o professor projeta, inconscientemente, seu aluno interior, cujo vínculo está representado pela seta *b*. Da mesma forma, ao interagir com o professor, o aluno constela inconscientemente seu professor interior, cuja relação está representada pela seta *b’*. De acordo com Craig (1978, *apud* SAIANI, 2002), se a relação *b* não ocorre, o arquétipo é cindido, uma vez que o aspecto infantil do educador, de sujeito que aprende, é reprimido e projetado sobre o educando, assim aquele se torna detentor pleno de todo o saber enquanto este vai sendo considerado cada vez mais como ignorante. Quem ensina frequentemente queixa-se da falta de vontade de quem aprende, por isso torna-se uma pessoa triste e amarga, pois seu entusiasmo com o novo inexiste e, por meio da imposição do poder, tenta promover a reunificação do arquétipo (SAIANI, 2002). Similarmente, na ausência da relação *b'* – quando o adulto instruído/professor não está presente no aluno – também ocorre a cisão do arquétipo e este, por sua vez, não demonstra interesse em aprender por ver aquele como inimigo.

Figura 1: A relação professor-aluno



(a) Uma relação entre o professor e o aluno.
(b) Uma relação do professor com seu aluno interior.
(b') Uma relação do aluno com seu professor interior.
(c) Uma relação do aluno do professor com o professor do aluno.
(d) Uma relação do professor com o professor do aluno.
(d') Uma relação do aluno com o aluno do professor.

Fonte: Saiani (2002), adaptado

Se inexiste a relação entre o professor e o professor do aluno, indicada por *d'*, não há comunicação entre eles. O aluno, assim, muito provavelmente irá imitar o professor, sem se preocupar em aprender. Quando não existe a relação *d*, o aluno e seu professor não se integram, o que implica em um professor pouco empático diante das dúvidas, incertezas e dificuldades dos aprendizes, considerando-se como dono do conhecimento que deve ser transmitido. Quando não ocorre a relação *c*, ela inexiste entre o aluno do professor com o professor do aluno, não possibilitando a criação de uma "atmosfera simpática", de responsabilidade e necessária para que o ensino e a aprendizagem tenham êxito (SAIANI, 2002).

* * *

A relação professor-aluno também é influenciada pelas características próprias de cada sujeito. A esse respeito, a caracterização dos tipos psicológicos, proposta por Jung, pode auxiliar a análise dessa questão. Tal caracterização foi realizada a partir de duas atitudes: introversão e extroversão; e quatro funções estruturantes: pensamento, sentimento, sensação e intuição.

As atitudes introvertida e extrovertida baseiam-se na maneira sob a qual o sujeito dirige sua libido (energia). Um sujeito extrovertido dirige conscientemente sua libido para o objeto, orientando-se pelos fatos que o mundo exterior fornece, a partir de dados objetivos. Assim, interessa-se e dirige sua atenção aos acontecimentos, às pessoas e coisas do seu ambiente.

Considerando que a relação do consciente com o inconsciente é sempre compensatória, em nível inconsciente, o extrovertido dirige a energia a todas as necessidades ou pretensões que "são oprimidas ou reprimidas por uma atitude consciente demasiadamente extrovertida" (JUNG, 2013b, p. 351). A **extroversão** é, portanto, uma atitude objetiva.

O sujeito introvertido, por outro lado, afasta sua libido do objeto, orientando-se a partir de dados subjetivos. De acordo com Jung (2013b), esse tipo de sujeito, apesar de ver as condições externas, conscientemente age a partir da impressão subjetiva que tais condições lhe causam; "subjetivo" é entendido como "a ação ou reação psicológica que, sob a influência do objeto, se funde num novo estado psíquico" (JUNG, 2013b, p. 388). Em nível inconsciente, o sujeito introvertido apresenta "Uma relação compensatória com o objeto que se manifesta como vinculação incondicional e irreprimível ao objeto" (JUNG, 2013b, p. 391). Desse modo, a **introversão** é uma atitude subjetiva.

Cabe ressaltar que as duas atitudes são mutuamente exclusivas, de modo que inexistem simultaneamente na consciência, muito embora possam se alternar nela. É possível que uma pessoa seja introvertida em algumas ocasiões e extrovertida em outras. Entretanto, uma dessas atitudes sempre é predominante.

Além dessas atitudes pelas quais o indivíduo canaliza sua energia psíquica, a consciência também pode se orientar a partir de quatro funções psicológicas: pensamento, sentimento, sensação e intuição. De acordo com Jung (2008, p.74), "a sensação (isto é, a percepção sensorial) nos diz que alguma coisa existe; o pensamento mostra-nos o que é essa coisa; o sentimento revela se ela é agradável ou não e a intuição nos dirá de onde vem e para onde vai".

Mais especificamente, o **pensamento** pode ser considerado como uma função intelectual que busca a compreensão das coisas, a partir da associação de ideias para formação de uma nova, de um conceito geral ou ainda solução de uma situação problemática. O **sentimento** pode ser considerado como uma função avaliadora, na medida em que "aceita ou rejeita uma ideia tomando como base o sentimento agradável ou desagradável que tal ideia suscita" (HALL; NORDBY, 2014, p. 87). Pensamento e sentimento são, portanto, funções racionais, pois ambas exigem um julgamento para que o indivíduo se oriente frente as ações.

A **sensação** consiste em uma percepção das experiências conscientes que são produzidas pelos órgãos dos sentidos ou que têm origem no interior do corpo. É uma experiência concreta que não depende de qualquer pensamento ou sentimento. A **intuição** também apresenta essa característica, mas difere da sensação pelo fato de a pessoa não saber exatamente sua origem. Apesar de existir, a intuição, quando se manifesta, não se origina nos órgãos dos sentidos; pois surge "do nada" (HALL; NORDBY, 2014). Sensação e intuição são, assim, funções irracionais, pois independem da razão.

Se forem combinadas as duas atitudes com as quatro funções, tem-se oito tipos psicológicos. Nesse ínterim, o pensamento extrovertido utiliza as informações do mundo exterior, fornecidas pelos sentidos, para ativar o processo de pensamento. Uma pessoa desse tipo, em geral, procura estabelecer a ordem lógica das coisas, e dessa forma, tende a reprimir o sentimento, o que pode ser considerado como seu ponto fraco.

O pensamento introvertido, por sua vez, utiliza as informações do mundo interior para ativar processos de pensamento. Uma pessoa desse tipo, quando está diante de um problema, antes de tudo, situa os pontos de vista e ideias de modo a criar uma visão panorâmica do que está sendo estudado e, a partir desse processo, surgem ideias novas. Enquanto o tipo pensamento extrovertido valoriza e atua sobre os dados e ideias já existentes, o tipo pensamento introvertido considera os dados empíricos apenas para validar suas teorias. (SILVEIRA, 2003; HALL; NORDBY, 2014).

O sentimento extrovertido tem sua energia dirigida para o mundo objetivo e avalia as informações recebidas a sua volta confrontando-as com padrões tradicionais e estabelecidos socialmente. Uma pessoa desse tipo tende a ser tradicional e conservadora, ao mesmo tempo em que, por manter uma boa relação com os objetos exteriores, é acolhedora e afável. Já no tipo introvertido, o sentimento surge a partir das imagens primordiais oriundas dos arquétipos. Pessoas com esse perfil tendem a ser profundas, calmas, silenciosas, retraídas, difíceis de compreender, até porque são movidas por forças subjetivas (SILVEIRA, 2003; HALL; NORDBY, 2014).

Quando a sensação é extrovertida, o que se apreende pelos sentidos é determinado pela realidade objetiva na qual o sujeito se encontra. As pessoas desse tipo vivem a partir da apreciação sensorial, tendem a ser realistas, práticas, acumulam fatos sobre o mundo, mas, em geral, não se interessam pelo significado das coisas. Na sensação introvertida, as sensações são determinadas pela realidade subjetiva, sendo fortemente influenciadas pela realidade psíquica. Pessoas com esse tipo tendem a ser menos realistas, uma vez que agem de acordo com as experiências internas causadas pelos objetos do mundo externo (SILVEIRA, 2003; HALL; NORDBY, 2014).

A intuição extrovertida investiga as possibilidades de situações objetivas. As pessoas desse tipo tendem a buscar coisas que não assumiram forma definida, empreendendo várias iniciativas, alternando-se de objeto para objeto com o intuito de descobrir novas possibilidades no mundo real. Já na intuição introvertida, a investigação é realizada a partir dos aspectos da subjetividade, das imagens arquetípicas. Pessoas desse tipo alternam-se de imagem a imagem de seu mundo interno em busca de novas possibilidades (SILVEIRA, 2003; HALL; NORDBY, 2014).

3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Para que fosse possível analisar o que a literatura da área diz a respeito da relação professor-aluno e os impactos na aprendizagem escolar sob uma perspectiva junguiana, foi realizada uma pesquisa de caráter qualitativo (BOGDAN; BIKLEN, 1994), com o objetivo de compreender um fenômeno complexo, caracterizado por resultados transitórios. Para tanto foi marcada pela ausência da neutralidade do pesquisador, uma vez que é uma pesquisa essencialmente interpretativa, pela inexistência de uma análise prévia (refutada ou comprovada pela pesquisa), cujas compreensões surgiram durante o processo da pesquisa, de modo que elas mesmas – bem como os meios de obtê-las – puderam ser reconfigurados durante o desenvolvimento da análise (GARNICA, 2004). Enfim, esta pesquisa caracteriza-se por ser essencialmente interpretativa, uma vez que buscou compreender como a relação professor-aluno pode influenciar a aprendizagem, sem o intuito de comprovar ou refutar qualquer hipótese previamente considerada.

O estudo foi realizado a partir de uma busca por artigos publicados em periódicos brasileiros que tratam sobre a temática investigada, em agosto de 2020, no Portal Periódicos Eletrônicos em Psicologia – PePSIC, com a utilização das palavras-chave "jung, relação, professor"; "jung, relação, aluno";" jung, professor, aluno" em todos os índices de busca.

Para a verificação das informações, foram seguidas algumas orientações da Análise de Conteúdo (BARDIN, 2011). Para ela, a Análise de Conteúdo consiste em

> [...] um conjunto de técnicas de análise das comunicações visando obter por procedimentos sistemáticos e objetivos de descrição do conteúdo das mensagens indicadores (quantitativos ou não) que permitam a inferência de conhecimentos relativos às condições de produção/recepção (variáveis inferidas) dessas mensagens (BARDIN, 2011, p. 48).

Seguindo as orientações da autora, a análise foi realizada a partir dos seguintes procedimentos: pré-análise; exploração do material e tratamento dos resultados obtidos e interpretação. O objetivo do primeiro procedimento – pré-análise – é colocar o pesquisador em contato com as informações que vai analisar. É na leitura que, segundo Bardin (2011), as hipóteses emergentes vão surgindo, teorias vão sendo adaptadas e vislumbra-se possibilidades de aplicação de técnicas na análise. Assim, nessa etapa da pesquisa, os artigos resultantes da busca foram lidos individualmente, atentando-se para a pertinência e relevância do que apresentam em relação ao objeto desta investigação.

Na exploração do material, Bardin (2011, p.131) afirma que "se as diferentes operações da pré-análise forem convenientemente concluídas, a fase de análise propriamente dita não é mais do que a aplicação sistemática das decisões tomadas". A partir dessa consideração e, tendo em vista os objetivos da pesquisa, nesse momento procurou-se relacionar o conteúdo dos artigos com os tipos psicológicos junguianos, com impactos da relação professor-aluno na aprendizagem escolar e com sentimentos ambivalentes presentes nessa relação.

No último procedimento – tratamento dos resultados obtidos e interpretação – foram realizadas inferências acerca das informações em análise, tendo em vista os objetivos desta investigação e o movimento descrito pela autora: "o analista [...] tendo à sua disposição resultados significativos e fiéis, pode então propor inferências e adiantar interpretações a propósito dos objetivos previstos – ou que digam respeito a outras descobertas inesperadas" (BARDIN, 2011, p. 131).

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Nos resultados da busca no portal PePSIC (Quadro 1) foram encontrados apenas cinco trabalhos, um número considerado relativamente pequeno. Dois dos artigos foram publicados no ano de 2007, um no final de 2010 e apenas dois são mais recentes, com publicações em 2018 e 2019.

Quadro 1: Resultado da busca por artigos científicos no portal PePSIC

Ano	Referência
2007	ARBEX, Cláudia. Um olhar psicopedagógico para a relação professor-aluno atravessada por mitos culturais: implicações na prática educacional. **Construção Psicopedagógica,** Dez. 2007, vol.15, n.12, p.72-87.
2007	WAHBA, Liliana Liviano. O ensino da Psicologia analítica e o desenvolvimento do estudante. **Boletim de Psicologia,** Jun. 2007, vol.57, n.126, p.71-76.
2010	LACAVA, Lídia. Mito de Eros e Psiquê: - um caminho possível para pensar a docência. **Construção Psicopedagógica,** Dez. 2010, vol.18, n.17, p.5-19.
2018	BANDEIRA, V. F.; FORTIM, I. A relação professor-aluno e o arquétipo puer-senex. **Junguiana.** vol.36-1, p. 27-36, 2018.
2019	SILVEIRA, S. T.; MARTINS, P.; BURITY, P. K. M. C. G. Jung e Educação: aproximações e contribuições da tipologia junguiana para o processo educativo **Pesquisas e Práticas Psicossociais.** vol.14, n. 4. p. 2-12, out-dez, 2019.

Fonte: autores

Após essa busca, foi realizada a leitura do material coletado e verificou-se que todos constituiriam o *corpus* da pesquisa, uma vez que, mesmo indiretamente, neles foram apurados pontos importantes da relação professor-aluno que podem contribuir para a reflexão de seus impactos na aprendizagem. A seguir, são apresentados alguns aspectos gerais dos trabalhos encontrados.

Arbex (2007) realizou uma investigação que teve como objetivo discutir a relação professor-aluno enfatizando a interferência do universo patriarcal na atuação de homens e mulheres como professores de crianças da Educação Infantil e dos anos iniciais do Ensino Fundamental. A partir de uma pesquisa qualitativa, apresenta o relato de caso de um professor que foi contratado para atuar em sala de aula com crianças de quatro anos de idade. Para a autora, parece claro haver uma tendência em desvalorizar o educador e uma associação do papel que desempenha ao gênero feminino, o que poderia explicar o distanciamento dos homens nessa área de atuação.

Ao discorrer sobre o sistema patriarcal na educação, a pesquisadora mostra que tal sistema não permite espaço para a dialética entre as polaridades maternas e paternas – feminino e masculino, fazendo com que se forme uma educação rígida, autoritária e submissa. Pode-se pensar que a relação professor-aluno é fortemente influenciada por tais condições, de modo que professores tendem a usar sua autoridade para garantir a obediência dos estudantes. Há ainda uma contradição entre as concepções evidentemente patriarcais que regem esse tipo de educação e os sujeitos que nela atuam, prevalentemente do sexo feminino. O fato evidencia a inexistência de uma ligação direta do gênero às qualidades correspondentes a ele.

A autora ainda realizou entrevistas com outros professores que atuam nos anos iniciais e identificou neles sentimentos de isolamento, pois são frequentemente pressionados pela família e amigos que não enxergam o magistério como uma profissão adequada para homens.

Como conclusão, Arbex (2007) identificou uma acentuada polarização entre o masculino e feminino na consciência individual dos entrevistados, o que pode indicar uma dinâmica patriarcal ainda muito ativa. Para mudar esse quadro, ela afirma que "uma escuta voltada para os tabus e mitos associados à relação de aprendizagem entre professor e aluno parece ser de fundamental importância para a instauração de uma dinâmica de alteridade na educação" (ARBEX, 2007, p. 72).

Wahba (2007) discorre, em seu trabalho, sobre a experiência do ensino de Psicologia Analítica no Ensino Superior e na Pós-graduação e identifica, entre outras coisas, que a reflexão, estimulada pelos símbolos que emergem nas situações de ensino, favorece o desenvolvimento do aluno. Apesar de o foco do estudo não ser a relação professor-aluno em si, em alguns trechos são apresentados aspectos importantes para reflexão dessa temática em diferentes contextos.

Para a autora, "o professor tem um papel de mestre – orientador e recebe projeções de autoridade poderosa que pode ser admirada ou contestada. O aluno projeta figuras parentais ou dominantes na sua formação" (WAHBA, 2007, p. 73). Ao receber essa projeção, o professor responde com emoções de gratificação ou de repúdio o que, segundo a pesquisadora, pode gerar contestação e agressividade. Para lidar com tal situação, pode-se lançar mão do questionamento, uma vez que, um debate de ideias e opiniões pode exercer o diálogo consciente, minimizando o efeito das projeções (WAHBA, 2007).

Outro aspecto relevante apontado pela autora é o fato de o professor, em geral, ser visto como modelo de atuação e de sucesso profissional, recebendo, da mesma forma, projeções de idealização e desidealização. Na universidade, os estudantes, devido à sua idade, estão em processo de diferenciação da família enquanto modelo, de modo que os pais vão sendo desidealizados e o professor pode se tornar substituto de modelo de idealização.

Lacava (2010) apresenta resultados de uma pesquisa desenvolvida de mestrado, que teve como objetivo discutir a prática docente a partir da análise do mito de Eros e Psiquê, tema trabalhado a partir de oficinas de sensibilização com professoras dos anos iniciais do Ensino Fundamental, a partir de tarefas que faziam referência ao que Psiquê, de acordo com o mito, deveria fazer para resgatar o amor de Eros. O objetivo das oficinas era ampliar, nas professoras, a consciência de ser-si-mesmo para poder ser com os outros, considerada fundamental, pois "o professor, ao se reconectar com seu ser, com sua modalidade de aprendizagem, instaura novas qualidades na dinâmica relacional entre subjetividade e objetividade, real e ideal, razão e emoção interferindo na dinâmica do ensinar e do aprender" (LACAVA, 2010, p.6). Ainda de acordo com a autora, o estudo da relação professor-aluno se faz necessário porque nela está constelada uma dinâmica simbólica e arquetípica, pois, além dos conteúdos pessoais projetados nos professores e nos alunos, outros simbólicos também são aflorados e é por meio desse processo de simbolização "que o homem assume sua humanidade, tomando consciência de sua condição de ser no mundo" (LACAVA, 2010, p. 12).

As tarefas realizadas por Lacava (2010) tinham como objetivo fazer com que as professoras soubessem discriminar, esperar, conter a essência e lidar com a transformação. Para ela, a escolha do mito e o desenvolvimento das oficinas de sensibilização por meio das tarefas foi importante, pois, para que seja possível um novo significado ao momento em que estamos vivendo,

> [...] somente o saber diferenciar, através do olhar de águia, o essencial do secundário, saber aguardar o momento para a ação certa e precisa é que mobilizará transformações no ser e no fazer do ser humano, no ser e no fazer do professor que, certamente, se revelarão no ser e fazer do aluno (p. 17-18, grifo da autora).

Bandeira e Fortim (2018) apresentam um estudo de revisão de literatura sobre a relação professor-aluno a partir da análise do arquétipo *puer-senex*, a qual compreendem como um tipo particular de relação humana que tem aspectos conscientes e inconscientes. Assim recorrem a Saiani (2002) para analisá-la a partir do campo transferencial do professor-aluno (Figura 1). Para as autoras, essa relação pode ser compreendida como mestre-aprendiz, na qual "mestre estaria no plano da consciência associado ao arquétipo do senex e o aprendiz no plano da consciência associado ao puer" (BANDEIRA; FORTIM, 2018, p. 31), ambos constituindo duas faces do mesmo arquétipo.

O processo educacional, para as pesquisadoras, pode estar associado a uma **prática autoritária** ou **dialógica**. A primeira é fortemente caracterizada pela transmissão do conhecimento, algo exclusivo do *senex*, de forma geralmente opressora e absoluta, podendo estar associada a uma ruptura do arquétipo, de modo que esse polo estaria vivenciando apenas seus aspectos negativos. Uma prática **dialógica**, por outro lado, é marcada pelo aspecto positivo do *senex*, isto é, por disponibilidade, ajuda, abertura, tendo um caráter facilitador da aprendizagem. Nesse caso, não há uma polarização do arquétipo *puer-senex* e o professor e aluno podem participar de maneira dialógica e ativa no processo de ensino e aprendizagem, possibilitando transformação da personalidade total de ambos (BANDEIRA; FORTIM, 2018).

A leitura feita por Bandeira e Fortim (2018, p.34), da relação professor-aluno a partir do arquétipo *puer-senex*, permite que seja compreendida em um campo transferencial (citado anteriormente), de modo que o "professor deveria despertar o aspecto senex – professor interior – no aluno e o aluno deveria despertar o aspecto puer – aluno interior no professor". Além disso, as autoras ainda enfatizam a importância de se conhecer o tipo psicológico do professor e do aluno de modo a se estabelecer uma relação transferencial criativa. Tais ações contribuem com a não polarização e cristalização dos atores dessa interação, propiciando uma vivência articulada e positiva, no aspecto pedagógico.

Silveira, Martins e Burity (2019) realizaram um estudo bibliográfico com o objetivo de compreender a concepção de educação para Jung e contribuições possíveis para o processo educativo, em particular no que se refere à teoria dos tipos psicológicos. Nele defendem a ideia de que a tipologia de Jung pode, além de ajudar o indivíduo a desenvolver-se psicologicamente, servir de ferramenta para compreensão das diferenças individuais e do desenvolvimento da personalidade.

Apesar de o trabalho desenvolvido por Jung voltar-se mais para o contexto psicoterapêutico, para as autoras, o pensamento do estudioso pode ser utilizado em favor da educação, pois fornece, dentre outras coisas, uma ampla visão acerca das relações que o indivíduo estabelece subjetivamente e com o mundo exterior. Além disso, uma educação em sintonia com as ideias junguianas deveria fundar-se em um relação professor-aluno que fosse dialética e construtiva, o que vai de encontro com a concepção de educação vigente no mundo ocidental, criticada por Byington (1996) que, ao desconsiderar a vivência e a experimentação, faz com que a aprendizagem seja superficial.

De acordo com as autoras – citando Jung – o aprender pela vivência não se refere apenas à vivência de cada aluno, mas também na do próprio professor, pois "o mais importante não é o que o educador ensina por meio da linguagem, mas o seu verdadeiro ensinamento, o que parte de sua própria vivência" (SILVEIRA; MARTINS; BURITY, 2019, p. 4). Assim é preciso que o professor seja educado antes de educar, para não incorrer no erro de se transformar em apenas um comunicador de conceitos.

As pesquisadoras ainda apontam alguns aspectos da formação profissional da educação, que deve também se atentar para sua personalidade e potencialidades. Nessa direção, o educador em formação deve estar ativamente envolvido em seu processo, pois assim será capaz de estimular seus educandos para serem responsáveis por si mesmos. Logo, esse pensamento vai ao encontro de Jung, que considera "o tratamento psicoterapêutico como um encontro em que ambos, terapeuta e paciente, passam por transformações" (SILVEIRA; MARTINS; BURITY, 2019, p. 6). Na escola, apesar de o contexto não ser terapêutico, pode-se considerar a relação professor-aluno como um encontro, uma vez que ambos se transformam: aquele também aprende ao ensinar e este, por sua vez, também ensina ao aprender.

É preciso que seja pensada uma formação humanizada do educador, que enfatize não apenas aspectos técnicos, mas também a afetividade, a sensibilidade, a criatividade e a capacidade de lidar com seus próprios conteúdos e com os daqueles com quem tiver a oportunidade de estabelecer um encontro. Além disso, a identificação, por parte do educador, da sua tipologia com a dos educandos poderia favorecer o processo de ensino e aprendizagem, uma vez que seria possível compreender transferências positivas e negativas recebidas de sujeitos ou mesmo de turmas inteiras.

Após a leitura dos trabalhos obtidos na busca no portal PePSIC, procurou-se aspectos neles presentes que se relacionassem às seguintes temáticas: tipos psicológicos; impactos da relação professor-aluno na aprendizagem e sentimentos ambivalentes nela.

A temática *tipos psicológicos* esteve presente em dois dos artigos (Quadro 2), dos quais são apresentados alguns excertos selecionados em que esse tema é evidenciado e apresenta alguma menção à temática em questão.

Quadro 2: Excertos selecionados em que se evidencia o tema *tipos psicológicos*

Artigo	Excertos
Bandeira e Fortim (2018)	Para Ostwald, a atitude extrovertida-clássica pode favorecer o exercício da docência quando comparada à atitude introvertida-romântica. Embora Jung (2013a) ressalte as importantes contribuições de Ostwald à psicologia dos tipos, entende que o professor introvertido-clássico é compreendido de uma maneira reducionista. Como aponta Byington (1996), a atitude introvertida e as funções sentimento e intuição foram preteridas com a hegemonia da pedagogia racional a qual privilegiou a atitude extrovertida e as funções pensamento e sensação. Podemos considerar que não há um tipo psicológico ideal para a prática do ensino, mas sim a necessidade de um conhecimento, por parte do professor, da tipologia do aluno e de sua própria tipologia (LESSA, 2003; ANDRADE, 2011; ANJOS, 2013). Nesse sentido, Byington (1996) atribui ao professor a responsabilidade de desenvolver sua própria criatividade para apresentar aos seus alunos o conteúdo da melhor forma, sem priorizar o racional em detrimento do vivencial (p. 28).
Silveira, Martins e Burity (2019)	Quando formulou sua teoria dos tipos psicológicos, Jung (1921/2013) falou das atitudes e funções da consciência, em que os tipos seriam dimensões psicológicas que se referem à maneira usual de funcionamento cognitivo de um indivíduo. Messick (1976) define estilos cognitivos como atitudes estáveis, preferências ou estratégias habituais que determinam como o indivíduo percebe, recorda, pensa, aprende e se relaciona com os outros. O estilo cognitivo exerce uma forte influência sobre o que se hierarquiza da realidade e na perspectiva do mundo que é construído a partir dessa hierarquização. E uma dimensão da personalidade que permite reconhecer o invariante de uma pessoa por meio de comportamentos muito diferentes. Ao refletirmos sobre o estudo de Jung, pensando nas relações no ambiente da sala de aula, nos deparamos com um modelo educacional que, historicamente, supervaloriza o pensamento em detrimento do sentimento e da intuição, sendo esse um dos desafios na Educação até hoje. Convém ressaltar que, no sistema tipológico, não existe função melhor que outra, na medida em que cada função é mais indicada para determinada situação e todas são necessárias para a vida, sendo importante que

	possamos desenvolvê-las da melhor forma possível. Porém, em nossa cultura ocidental, é feita uma leitura distorcida das funções, pois se confunde pensamento com inteligência, sentimento com sentimentalismo, intuição com desorganização e sensação com falta de imaginação, além de facilitar uma melhor adaptação dos que apresentam uma atitude extrovertida, com função pensamento. A formação do professor seria enriquecida se fizesse parte dos seus aprendizados a identificação de sua tipologia e da tipologia dos seus alunos. Certamente, observaríamos grandes mudanças nas relações e desempenho dos alunos e de seu trabalho, pois, ao fazê-lo, se daria conta de que boa parte das transferências positivas e negativas que recebe de alunos ou até de turmas está relacionada com sua tipologia e muitos problemas de aprendizado também seriam selecionados devido à dificuldade dos diferentes alunos em se adaptar a um único modelo. O professor não pode ser simplesmente um transmissor de conteúdo ou achar que está ensinando para alguém idêntico a ele (Byington, 2003). Para o ensino se desenvolver, é preciso que seja estabelecida uma relação transferencial e que as diferenças sejam respeitadas e estimuladas, para que o espaço da sala de aula seja um ambiente propício para a criação e a transformação de professores e alunos. Essa condição se faz necessária para qualquer ambiente que tenha como objetivo a Educação, seja no primeiro contato com a escola, seja na universidade (p. 9-10). [...] a compreensão dos tipos psicológicos abre um caminho para melhor entendimento da psicologia humana em geral (p. 41).

Fonte: autores

A temática *impactos da relação professor-aluno na aprendizagem* foi identificada nos cinco artigos pesquisados (Quadro 3), cujos excertos tratam da temática evidenciada.

Quadro 3: Excertos selecionados em que se evidencia o tema *impactos da relação professor-aluno na aprendizagem*

Artigo	Excertos
Arbex (2007)	A relação professor-aluno, sob esse ponto de vista, confere um trânsito saudável intermediado pela expressão bipolar de cada parte. Ou seja, o professor ensina e aprende, enquanto o aluno aprende e ensina, compondo uma relação quaternária. [...] Ao ampliar o olhar acerca da função do professor na relação professor-aluno, a Psicopedagogia traz para o universo educacional uma realidade mais humanizada, numa relação mais horizontal, na qual transitam conteúdos psíquicos que permeiam a construção do conhecimento. Esses conteúdos não se limitam ao que professores e alunos trazem de suas vivências familiares, mas também às heranças culturais de seu tempo (p. 84-85).
Wahba (2007)	Aqui o professor tem um papel de mestre – orientador e recebe projeções de autoridade poderosa que pode ser admirada ou contestada. O aluno projeta figuras parentais ou dominantes na sua formação. O professor recebe projeções despertadas por essa autoridade no inconsciente do aluno, que pode responder com emoções de gratificação ou de afastamento e repúdio, ocasionando contestação e agressividade. O questionamento, por sua vez, quando apresentado em forma de debate, é uma forma de exercer um diálogo consciente, não atrelado às projeções, ou pelo menos, com um grau mínimo destas. [...] O professor é visto como modelo de atuação e sucesso profissional, e recebe projeções de sucesso com idealização e desidealização. A idealização é um processo de formação da identidade, ligado ao ideal de eu e ocorre naturalmente com as figuras que são consideradas modelo (p.73-74).
Lacava (2010)	O estudo da relação professor-aluno sempre se fez presente na história da Educação, pois nela pode estar constelada a dimensão de uma dinâmica simbólica e arquetípica, no sentido de que não são somente conteúdos pessoais que são projetados no professor e no aluno. Afloram, também, conteúdos simbólicos que veiculam uma energia psíquica que poderá ser encontrada entre outros seres humanos, que também vivenciaram esses papéis desde o início dos tempos (p. 7).
Bandeira e Fortim (2018)	Os modelos de educação mais modernos, entretanto, procuram modificar esse formato tradicional de educação em que professor transfere conhecimento, para um modelo dialético de educação, em que o professor desempenharia um papel de

v.6, n.1, p. 81-96, jun. 2021

	facilitador do processo de aprendizagem do aluno, estimulando sua ânsia pelo conhecimento. O estudo se faz relevante na medida em que a qualidade da relação professor-aluno interfere no processo de ensino-aprendizagem. Como aponta Byington (1996), este processo não se centraliza nem no professor, nem no aluno, mas na sua relação, que é primordial e absoluta no processo educacional. Sendo assim, a forma como essa relação se estabelece e influencia significativamente tanto a experiência do aluno quanto a do professor (p.28). Traçando um paralelo entre os objetivos propostos pela psicoterapia e o vínculo transferencial estabelecido entre terapeuta e paciente, descrito por Jung (2013b) e Penna (2005), com a educação e a relação professor-aluno, podemos dizer que a educação visa à transformação da personalidade total, isto é, em seus aspectos conscientes e inconscientes, sendo a relação transferencial professor-aluno fator decisivo para que tal transformação ocorra. [...] Por meio da vivência e do vínculo transferencial amoroso da relação professor-aluno, ocorre uma transformação da consciência durante o processo de ensino-aprendizagem, em que *puer-senex*, novo-velho, aluno-professor, objetivo-subjetivo e consciente-inconsciente se articulam, resultando em novos estados de consciência (BYINGTON, 1996) (p.30). Como é destacado por Aquino (1999), existe uma discriminação primária da posição do professor e do aluno, isto porque o professor configura-se como autoridade, o qual tem função continente e reguladora dos contornos da relação. Esta posição precisa ser constantemente validada pelo aluno, não devendo ocorrer exclusivamente devido à historicidade do professor como autoridade. Podemos dizer que a assimetria de poder permeia a relação professor-aluno, mas esta assimetria não sugere que o aluno não saiba nada. Por essa razão, o objetivo do professor não é conservar esta hierarquia, mas sim que essa situação seja apenas circunstancial, de modo a contribuir com a jornada do aluno, promovendo uma relação de paridade e alteridade. [...] Tendo em vista que o vínculo e a relação entre professor-aluno são condições fundantes para que o processo educacional se viabilize, a qualidade e a forma como o vínculo se estabelece terá impacto, tanto no processo de ensino-aprendizagem como no desempenho do professor e aluno. [...] Vale destacar que essa transferência pode se dar de maneira criativa ou defensiva, favorecendo ou não a relação professor-aluno e, consequentemente, o processo de ensino-aprendizagem (p. 33-34).
Silveira, Martins e Burity (2019)	Esse estilo vai de encontro ao que se espera que deveria ser a interação professor-aluno: uma relação dialética e construtiva (p.3). E preciso que ele mesmo seja uma pessoa correta e sadia, o bom exemplo é o melhor método de ensino (Jung, 1928a/2012, p. 65). Nem todos têm essa visão e a força de vontade para atuar sobre sua própria personalidade, o que acentua as dificuldades na relação ensino- aprendizagem. [...] A Pedagogia simbólica junguiana (BYNGTON, 2003) acontece com mais facilidade no ensino pré-escolar e fundamental, quando, devido à pouca idade dos alunos, acontece a superposição direta das funções didáticas com as funções parentais, o que propicia aos professores uma prática lúdica, imaginativa e afetiva, permitindo que esses profissionais se soltem mais nos níveis subjetivo, intuitivo e afetivo (p. 6-7). Wendt (2003) e Vergueiro (2009) pontuam que a relação professor-aluno é um acontecimento arquetípico, organizado por fatores conscientes e inconscientes [...] É importante e necessário que se absorvam, em todos os níveis educativos, novos métodos com uma noção simbólica e arquetípica para que se construa uma relação emocional aluno-professor participativa e construtivista (p.6-7). A temática sobre a relação entre educadores e estudantes tem atraído cada vez mais o interesse e a atenção de professores e psicólogos, bem como de outros acadêmicos, visto que pode interferir positiva ou negativamente na forma como o conhecimento é apreendido (p.10).

Fonte: elaborado pelos autores

A temática *sentimentos ambivalentes na relação professor-aluno* foi identificada em quatro artigos (Quadro 4), cujos excertos selecionados evidenciam a temática em questão.

Quadro 4: Excertos selecionados em que se evidencia o tema *sentimentos ambivalentes na relação professor-aluno*

Artigo	Excertos
Arbex (2007)	Ao conversar com alguns professores que atuam nos ciclos iniciais de ensino, foi possível identificar um sentimento comum de isolamento. Todos descreveram a pressão sofrida por parte da família e amigos, que não enxergam o magistério como uma profissão adequada para homens. Também tiveram que passar por uma espécie de teste de aprovação social nas instituições, no que diz respeito às competências pessoais, independentemente de suas habilidades profissionais (p. 82).
Wahba (2007)	Aqui o professor tem um papel de mestre-orientador e recebe projeções de autoridade poderosa que pode ser admirada ou contestada. O aluno projeta figuras parentais ou dominantes na sua formação. O professor recebe projeções despertadas por essa autoridade no inconsciente do aluno, que pode responder com emoções de gratificação ou de afastamento e repúdio, ocasionando contestação e agressividade. O questionamento, por sua vez, quando apresentado em forma de debate, é uma forma de exercer um diálogo consciente, não atrelado às projeções, ou pelo, menos, com um grau mínimo destas (p. 73).
Lacava (2010)	Essa proposta tem sua inserção em uma visão mais humana e construtivista de educação, em que se busca aliar a competência criadora à coerência pedagógica. Tarefa difícil, pois ao entrar em contato com o novo, com o diferente, sentimentos contraditórios podem gerar medo, insegurança, descobertas sobre nosso mundo interno, que muitas vezes nos intimidam e paralisam nossas ações. Entretanto, quando se acena com outro jeito de se contatar com essas questões, surge um novo clarão no meio do caminho, que acaba motivando e acenando como uma nova possibilidade... por que não tentar?! (p. 13).
Bandeira e Fortim (2018)	A transferência criativa incentiva o ensino e aprendizado, estando associada a sentimentos agradáveis e de bem-estar. Já a transferência defensiva desperta raiva, desprazer e brigas na relação professor-aluno, bloqueando ou limitando o processo de ensino-aprendizagem (p. 30).

Fonte: elaborado pelos autores

Após a identificação desses excertos, foram realizadas interpretações e inferências, apresentadas no texto da seção seguinte.

* * *

Ensinar e aprender são processos que ocorrem na escola e que, apesar de parecerem centrados no professor ou no aluno, têm como centro a relação que se estabelece entre esses sujeitos. Por meio de tal relação, não apenas o professor ensina e o aluno aprende, mas ambos ensinam e aprendem. Assim, transitam na intersecção de conteúdos psíquicos que acompanham e interferem a construção do conhecimento. Além da aprendizagem dos conteúdos curriculares, ocorre a transformação da personalidade total, a partir da relação transferencial professor-aluno. Quando esta é amorosa, ocorrem transformações de consciência por meio da articulação dos aspectos opostos – professor *versus* aluno; novo *versus* sábio; consciente *versus* inconsciente. Por essas e outras razões, é fundamental que a relação professor-aluno seja analisada.

Um dos aspectos que pode ser analisado acerca dessa questão está associado às características dos sujeitos. Nessa direção, pode-se lançar mão dos tipos psicológicos apresentados por Jung: pensamento, sentimento, sensação e intuição, acompanhados de uma atitude introvertida ou extrovertida. À primeira vista, parece que o professor com pensamento extrovertido seria o tipo mais adequado para a tarefa de ensinar. Entretanto, não há um tipo psicológico mais adequado para o ensino, somente a necessidade de o professor conhecer sua tipologia e a de seu aluno, a fim de que o processo de ensino e aprendizagem ocorra de forma satisfatória. Isso contribui para que haja uma mudança na educação tradicional, em que o educador basicamente expõe os conteúdos e os educandos os recebem e armazenam, para uma educação baseada no diálogo, na qual se orienta e se facilita a aprendizagem, sendo ambos sujeitos ativos, ou seja, responsáveis por ela. Muitas vezes, os problemas de aprendizagem apresentados pelos alunos estão relacionados com a tipologia do professor e com a dificuldade de se adaptarem a ela. As diferenças tipológicas entre alunos e entre eles e os professores precisam ser reconhecidas e respeitadas de modo que seja criado um ambiente voltado à educação eficaz.

A projeção é um dos aspectos que deve ser conhecida pelo professor, por ter papel de mestre, recebe dos alunos projeções de autoridade, de figuras parentais, podendo ser contestadas ou respeitadas. Ao receber essas projeções e, dependendo da forma como os alunos consideram a idealização, o educador pode responder de forma amigável, demonstrando gratificação, ou rude, às vezes com agressividade, o que pode estimular também a agressividade dos alunos. Estar consciente de tais projeções é condição necessária para que seja estabelecido um diálogo consciente entre alunos envolvidos nesse processo, de modo a ignorar ou pelo menos minimizar os efeitos delas.

Alunos e professores, ao entrarem em contato, estabelecem relações inconscientes com seus alunos e professores interiores. Problemas de aprendizagem podem ser identificados a partir da análise dessas relações arquetípicas. Por exemplo, quando o professor não se conecta com seu aluno interior, ocorre o rompimento do arquétipo, ocasionando repressão do aspecto infantil do professor, sendo projetado no aluno. Assim o educador tende a converter-se no detentor pleno do saber, queixa-se da falta de vontade de aprender do educando, tornando-se uma pessoa apática, desmotivada, pois seu entusiasmo com o novo inexiste, e, como forma de lidar com essa situação, tenta impor seu poder.

Talvez essa seja uma das explicações para a forte característica patriarcal na educação. O não estabelecimento da relação entre professor e seu aluno interior pode explicar a rigidez educacional, a autoridade e a submissão exacerbadas que tentam ser impostas e que vão de encontro com a perspectiva de uma educação dialética, que respeite as diferenças individuais.

No momento que se vive no Brasil, com a gênese das escolas cívico-militares, parece que tal movimento se sustenta também pela ruptura da relação entre professor e seu aluno interior.

É sabido que a maior parte dos professores, principalmente na Educação Infantil e nos anos iniciais do Ensino Fundamental, são do sexo feminino. Percebe-se, aqui, uma aparente contradição entre a perspectiva patriarcal da educação e o sexo de quem assume essa função, o que pode mostrar que tal perspectiva não está relacionada com o sexo do docente. Além disso, como a maior parte desse grupo é composto por mulheres, os homens que entram no magistério e lidam com crianças no início da escolarização podem se sentir solitários e isolados.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta pesquisa, buscou-se investigar como a relação professor-aluno pode influenciar na aprendizagem escolar a partir do que a literatura da área apresenta. Para isso foi realizada uma análise da relação professor-aluno e os impactos na aprendizagem escolar a partir da perspectiva junguiana, uma vez que, apesar de estar mais relacionada ao trabalho clínico, pode apresentar contribuições para o trabalho educacional.

A análise foi realizada a partir dos resultados de uma busca de artigos científicos publicados em periódicos brasileiros no Portal Periódicos Eletrônicos em Psicologia – PePSIC, que retornou apenas cinco trabalhos relacionados à temática, indicando um número reduzido de pesquisas que se voltam a investigar a temática, a partir da Psicologia Analítica, portanto, esse fato pode indicar a escassez de pesquisas da área.

Os resultados apontam também que não há um tipo psicológico que seja o mais adequado para o exercício da profissão de professor. Há, entretanto, a necessidade de que ele conheça seu tipo psicológico e o de seus alunos para que aprendizagem ensino-aprendizagem tenha êxito. Agindo assim, o professor pode estar mais aberto ao reconhecimento das diferenças individuais, fato que permite interferir positivamente na aprendizagem e proporcionar um ambiente dialético de ensino.

De acordo com os estudos encontrados, não há dúvidas de que a relação professor-aluno impacta fortemente na aprendizagem escolar. Por esse motivo, tal relação merece ser estabelecida de forma a criar um vínculo positivo e amoroso. Para tanto, dentre outras coisas, é necessário o reconhecimento das projeções dos alunos nos professores, das diferenças individuais, minimizando o efeito da autoridade daquele sobre este, a fim de estabelecer uma relação de paridade e alteridade.

Nesses mesmos textos não foi possível identificar aspectos de sentimentos ambivalentes na relação professor-aluno. Entretanto, não se pode negar sua existência e essa é uma das limitações desta pesquisa. Tendo em vista o número reduzido de publicações encontradas, como possibilidade de avançar nessa temática, podem ser feitas pesquisas bibliográficas que investiguem publicações em periódicos internacionais, dissertações e teses, além do desenvolvimento de pesquisas de campo envolvendo professores e alunos. Afinal, esse é um campo de pesquisa que merece atenção e pode contribuir muito com a Educação.

REFERÊNCIAS

ARBEX, C. Um olhar psicopedagógico para a relação professor-aluno atravessada por mitos culturais: implicações na prática educacional. **Construção Psicopedagógica,** dez. 2007, vol.15, no.12, p.72-87.

BANDEIRA, V. F.; FORTIM, I. A relação professor-aluno e o arquétipo puer-senex. **Junguiana.** v.36-1, p. 27-36, 2018.

BARDIN, L. **Análise de Conteúdio.** São Paulo: Edições 70, 2011.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. **Investigação Qualitativa em Educação:** uma introdução à teoria e aos métodos. Lisboa: Porto, 1994.

BYINGTON, C. A. B. **Pedagogia simbólica:** a construção amorosa do conhecimento do ser. Rio de Janeiro: Record, 1996.

FREUD, S. Artigos sobre a metapsicologia. O inconsciente. In FREUD, S. **Obras completas**, vol. 14. Rio de Janeiro: Imago. (Trabalho original publicado em 1915), 1980.

GARNICA, A. V. M. História Oral e Educação Matemática. In: BORBA, M.C.; ARAÚJO, J. L. (Orgs.) **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática.** Belo Horizonte: Autêntica, 2004. p.77-98.

HALL, C. S.; NORDBY, V. J. **Introdução à Psicologia Junguiana.** São Paulo: Cultrix, 2014.

JUNG, C. G. **O desenvolvimento da personalidade.** Obra completa, v. 17, 14. ed. Petrópolis: Vozes, 2013a.

JUNG, C. G. **O Homem e seus símbolos.** 2. ed. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 2008.

JUNG, C. G. **Tipos Psicológicos.** Obra completa, v. 6, 7. ed. Petrópolis: Vozes, 2013b.

LACAVA, L. Mito de Eros e Psiquê: um caminho possível para pensar a docência. **Construção Psicopedagógica,** Dez 2010, vol.18, no.17, p.5-19.

SAIANI, C. **Jung e a educação:** uma análise da relação professor/aluno. 2. ed. São Paulo: Escrituras, 2002.

SILVEIRA, N. **Jung Vida e Obra.** 19. ed. São Paulo: Paz e Terra, 2003.

SILVEIRA, S. T.; MARTINS, P.; BURITY, P. K. M. C. G. Jung e Educação: aproximações e contribuições da tipologia junguiana para o processo educativo **Pesquisas e Práticas Psicossociais.** v.14, n. 4. p. 2-12, out-dez 2019.

WAHBA, L. L. O ensino da Psicologia analítica e o desenvolvimento do estudante. **Boletim de Psicologia,** Jun 2007, vol.57, no.126, p.71-76.

ZIMERMAN, D. E. **Fundamentos Psicanalíticos.** Teoria, técnica e clínica. Porto Alegre: ARTMED, 1999.

Submetido em março de 2021.
Aprovado em julho de 2021.

Jader Otávio Dalto

Doutor em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL). Professor Associado da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), Cornélio Procópio, Paraná, Brasil. ID Lattes: 3499880434249661. Orcid ID: 0000-0001-7684-2480.

Contato: jaderdalto@utfpr.edu.br.

Carolina Caires Motta

Mestra em Psicologia pela Universidade Estadual Paulista (UNESP). Professora da Pontifícia Universidade Católica do Paraná (PUCPR), Londrina, Paraná, Brasil. ID Lattes: 2781293046500456. Orcid ID: 0000-0002-7701-3200.

Contato: carolina.caires@pucpr.br.

Entre traços, tramas e travessias

a mobilização da História Oral para compreender um Grupo Escolar

Between traces, plots and crossings

the mobilization of Oral History to understand a School Group

Grasielly dos Santos de **Souza**
Secretaria da Educ. e do Esporte do Paraná
(SEED-PR)

Mirian Maria **Andrade**
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
(UTFPR)

RESUMO

Este artigo é um desdobramento de uma pesquisa de Mestrado, a qual potencializou o uso de narrativas, produzidas de acordo com os parâmetros da História Oral, para tecer compreensões sobre uma proposta educacional – o Grupo Escolar Rural –, uma experiência pública do estado do Paraná, instituída por volta de 1940 e extinta em meados da década de 1970. O objetivo, neste texto, é, por meio das narrativas orais produzidas com professoras que vivenciaram o Grupo Escolar Rural Usina Bandeirantes, disparar uma discussão sobre como elas permitem compreender a escola, contribuindo para repensar outros de elementos que a compõem. A lente teórica para esse exercício analítico baseia-se na análise de singularidades amparadas em Martins-Salandim (2012), e refletir sobre uma escola rural, intencionalmente construída para atender a um público específico, considerada como modelo por aqueles que narram suas memórias.

Palavras-chave: História Oral. Grupo Escolar Rural. História da Educação Matemática.

ABSTRACT

This article is an offshoot of a master's research that enhanced the use of narratives, produced according to the parameters of Oral History, to make understandings about a rural educational proposal – the Rural School Groups –, a public educational experience in the state of Paraná, instituted around 1940 and extinguished in the mid-1970s. The objective, in this text, is through oral narratives produced with teachers who experienced the Grupo Escolar Rural Usina Bandeirantes, to trigger a discussion on how they allow understanding the school contributing to think of other of its constituent elements. The theoretical lens for this analytical exercise is based on the analysis of singularities supported by Martins-Salandim (2012), and it seeks to stop to think about a rural school, intentionally built to serve a specific audience, considered as a model by those who narrate their memories.

Keywords: Oral History. Rural School Groups. History of Mathematics Education.

 v.6, n.1, p. 97-108, jun. 2021

1 INTRODUÇÃO

Este texto trata de um recorte dos resultados de uma pesquisa de Mestrado intitulada *Da fuligem à edificação do Grupo Escolar Usina Bandeirantes: narrativas que contam história(s)*, envolvendo estudos sobre uma escola rural e os sujeitos que nos contaram as histórias nela vivenciadas. No nosso caso, os narradores protagonizaram o movimento de um Grupo Escolar Rural, e ainda, vivenciaram parte da vida em prol de uma educação campesina[1] no Norte Pioneiro do Estado do Paraná, no período de 1947 a 1977. Trata-se do Grupo Escolar Rural Usina Bandeirantes, localizado na zona rural do município de Bandeirantes-PR, nas imediações do complexo de uma usina de açúcar e álcool. Vale ressaltar que as compreensões apresentadas nesta pesquisa se referem às cinco narrativas de professoras parametrizadas na metodologia de pesquisa História Oral.

No anseio por elaborar uma compreensão sobre o Grupo Escolar Rural Usina Bandeirantes, olhamos para um movimento, um tempo, um povo, uma prática em suas inúmeras maneiras de se manifestar, de se estabelecer no presente, e, ainda, entender como essa escola foi apropriada pelos sujeitos e pela história. Não se trata mais um passado finito, acabado, mas sim, um passado sendo (re)construído por meio das teias de conexões do presente e de possíveis inúmeros futuros. Para tanto, lançamos mão de variadas possibilidades disparadas pelas narrativas nesse cenário, como um modo de produção de dados para o desenvolvimento desta pesquisa.

Buscamos assim, não por explicações de experiências, mas por meio de narrativas orais, cujas versões nos possibilitaram despertar para a elaboração de outras histórias que fazem pensar num futuro educacional, analisar e refletir sobre as escolas rurais de ontem para compreender as de hoje. Sobre a concepção de experiência, nossas inspirações estão em Larrosa (2016, p. 21-25) que não a considera apenas o que se faz, mas, principalmente, o que nos toca, e quando toca nos transforma de alguma maneira, deixando marcas.

> [...] a experiência é o que nos passa, nos acontece, o que nos toca. "Não o que se passa, não o que acontece, ou o que toca", que não considera a experiência apenas como o que se faz, mas principalmente, o que nos toca, e quando toca nos transforma de alguma maneira, deixando marcas. A experiência, a possibilidade de que algo nos aconteça ou nos toque, requer um gesto de interrupção, um gesto que é quase impossível nos tempos que correm: requer parar para pensar, parar para olhar, parar para escutar, pensar mais devagar, olhar mais devagar, e escutar mais devagar, demorar-se nos detalhes, suspender a opinião, suspender o juízo, suspender a vontade, suspender o automatismo da ação, cultivar a atenção e a delicadeza, abrir os olhos e os ouvidos, falar sobre o que nos acontece, aprender a lentidão, escutar aos outros, cultivar a arte do encontro, calar muito, ter paciência e dar-se tempo e espaço.

Apresentamos, com nossos registros, uma análise de singularidades segundo Martins-Salandim (2012), e nela buscamos salientar os movimentos de um Grupo Escolar Rural, sem a pretensão de redigir traços sobre sua história, mas sim, redesenhar e (re)constituir uma história educacional campesina, nos permitindo compreender, não só o universo escolar, mas também o desconhecido[2]. Nesse ínterim perguntamos e procuramos formas de romper com alguns dos silêncios e, por outro lado, questionamos as condições históricas que permitiram que essa experiência não permanecesse sepultada no passado. Trata-se, muitas vezes, de um redizer criador.

---

[1] Neste texto, assim como na nossa pesquisa, utilizamos o termo "campesino(a)" como um sinônimo de "rural".

[2] Os documentos oficiais do Grupo Escolar referente ao período estudado não foram encontrados. Foram realizadas buscas na Secretaria Municipal de Educação e, também, em escolas do município, cujas informações nos apontavam como possíveis lugares em que haviam sido guardados os documentos do Grupo Escolar, porém não houve êxito em nenhuma delas.

Isso posto, no que segue, discorremos sobre a importância das narrativas orais como fonte e sobre como mobilizamos a História Oral para produzi-las, e posteriormente exploramos o que nos foi possível compreender sobre a escola, ao lançarmos nosso olhar para as narrativas das professoras, tendo Martins-Salandim (2012) como lente teórica.

2 HISTÓRIA ORAL, NARRATIVAS E ANÁLISE DE SINGULARIDADES

A História Oral é assumida aqui como metodologia para criação de fontes orais, a partir de entrevistas que geram narrativas repletas de significados, conforme lançamos um olhar e, de acordo com nosso foco, alçamos outras possibilidades de interpretações e de caminhos a seguir, pois acreditamos que "as narrativas criam realidade enquanto comunicam" (GARNICA, 2014, p. 58). Na oralidade não lidamos com um discurso finalizado, mas com um discurso em processo, assim, ao contar e rememorar, lançamos uma entre as tantas possíveis versões históricas.

Dessa forma, a História Oral pode ser entendida como uma metodologia que permite construir fontes históricas, pois "Situa-se no terreno da contra generalização e contribui para relativizar conceitos e pressupostos que tendem a universalizar e a generalizar as experiências humanas" (DELGADO, 2010, p. 14). Desse modo, as entrevistas podem ser vistas como alicerce, já que a constituição de fontes históricas ocorre por meio das narrativas constituídas a partir da oralidade. Na busca por constituir uma história do Grupo Escolar, nos debruçamos nas possibilidades metodológicas pautadas na História Oral e acreditamos que essa metodologia possibilite que tal profusão de vozes reverbere, registrando, sempre de modo inaugural, marcas de uma experiência educacional.

Por tais aspectos, pode-se dizer que a História Oral colabora com o retorno das narrativas para o interior do discurso científico, dando-lhe legitimidade à pesquisa acadêmica, ao mostrar que metanarrativas são também teorizações:

> Aprendemos com as narrativas dos nossos entrevistados? Em que momentos, ou em que entrevistas, nosso ganho é maior do que o de simplesmente conhecer mais uma "versão" do passado? [...] uma das possíveis respostas é: quando a narrativa vai além do caso particular e nos oferece uma chave para a compreensão da realidade. E talvez isso aconteça mais incisivamente quando percebemos o trabalho da linguagem em constituir realidades (ALBERTI, 2004, p. 79).

Os colaboradores, cujas narrativas abordamos neste artigo, foram escolhidos por terem lecionado no Grupo Escolar Rural Usina Bandeirantes. Assumimos, nesses termos, os parâmetros da História Oral como fundamentais, a partir dos quais o pesquisador intencionalmente cria fontes históricas condizentes com as vertentes, tomando-as como versões. Os resultados da pesquisa realizada com professores e ex-alunos do Grupo Escolar encontram-se disponíveis na íntegra em Souza (2019).

A partir de leituras prévias sobre a história dos Grupos Escolares Rurais paranaenses, bem como do contexto educacional, histórico e social da época, e com um grupo de depoentes já estabelecido[3], elaboramos um roteiro para a realização das entrevistas. As questões norteadoras visavam nos possibilitar conhecer os aspectos da instituição escolar, numa sequência que abordasse um movimento que partisse não apenas de uma visão externa do Grupo Escolar, bem como de suas instalações e vestígios que nos "dissessem" mais sobre como foi constituído, quais os interesses envolvidos e como se desenvolvia a dinâmica escolar, até adentrar às salas de aulas,

[3] Nosso grupo de depoentes foi composto por três alunos e cinco professoras do Grupo Escolar. Para este artigo, fizemos um recorte e apresentamos nossas considerações diante das narrativas das professoras desse grupo.

abordando aspectos da relação que conectava professores, diretores, comunidade e os recursos empregados no processo de ensino e de aprendizagem.

Após realizar as entrevistas com nosso grupo de depoentes, iniciamos o tratamento dos áudios de cada entrevista. Realizamos a transcrição, que se trata da escrita, palavra por palavra, e também da tentativa do registro de entonações, pausas, expressões e tudo o mais revelado nesse momento. Acreditamos que, nessa etapa, o pesquisador procura reproduzir, o mais fiel possível, todos os elementos linguísticos no diálogo entre pesquisador e narrador durante a entrevista, sem cortes nem acréscimos. Entretanto entendemos que, ao transcrever uma entrevista, alguns elementos podem se perder, devido à limitação no ato de se transportar para o papel todos os aspectos nela apresentados. Sobre essa questão, solidariza conosco Matucheski (2016, p. 342) ao revelar que:

> Antes de encerrar este texto, quero registrar uma tristeza minha: em quase todas as gravações das entrevistas é possível ouvir os pássaros cantando na UFPR Litoral. Esse registro me faz lembrar a paz que sinto quando estou no espaço da UFPR Litoral, e isso – aqueles sons, aquela paz – deixou o processo de transcrição menos penoso e mais lírico, mas trouxe também uma angústia: "O que fazer, nas textualizações, quanto ao canto dos pássaros?"... Não consegui uma resposta para isso. Então, registro, aqui, a limitação do papel, a limitação do texto escrito, e a minha limitação como autora destes textos: não consegui registrar o canto dos pássaros; não consegui registrar as lágrimas de um colaborador desta pesquisa; e não consegui registrar o que senti enquanto realizava essas entrevistas.

Como nos antecipa a citação de Matucheski (2016), seguida da transcrição dos áudios, há um tratamento que é possível dar aos textos, que chamamos de "textualização". Organizamos e ajustamos as entrevistas para que sua leitura seja mais fluente: há uma limpeza de excessos e repetições, buscando, entretanto, manter a especificidade de cada uma, com o compromisso de não transformar o registro em algo artificialmente objetivo e racional. Ademais compreendemos a textualização como um processo de produção de significados, e, segundo Tizzo (2019, p. 379):

> [...] ao procedermos com o exercício de textualização, nos envolvemos com um processo de elaboração de compreensão dos aspectos que circundam as experiências que foram narradas pelo depoente, já que tentamos estabelecer coerências para os enunciados, e avaliar os significados que eles têm para quem os enuncia.

Esse texto passa pela leitura do depoente, com o intuito de que o reconheça como leitura plausível do que foi dito e faça as intervenções que julgar necessárias, como acrescentar, ocultar informações ou corrigir equívocos. Por fim, se estiver de acordo com a narrativa elaborada, o entrevistado autoriza, por meio de uma carta de cessão de direitos[4], a utilização do material para fins acadêmicos.

Contudo, a partir desse momento, temos a fonte constituída e, de acordo com Gonzales (2017, p. 38):

> Dessa forma, a fonte constituída a partir das negociações não é mais a entrevista em si, nem a gravação dela (na qual já são perdidos vários elementos, como olhares, movimentos, gesticulações), nem a transcrição. O que se tem é a fonte constituída que pode estar repleta de novos significados produzidos pelo colaborador.

[4] As textualizações, juntamente com as cartas de cessão de cada depoente, encontram-se disponíveis em Souza (2019).

Propusemos, assim, a análise de singularidades sobre e a partir de cada entrevista, lançando um olhar para os pontos que nos chamaram a atenção em cada uma delas, buscando "focar as potencialidades que as formas artísticas carregam para nortear – e deixar-se nortear – pelas narrativas geradas" (GARNICA, 2008, p. 86).

Buscamos e encontramos em Martins-Salandim (2012) o respaldo e a inspiração para nossa análise de singularidades, uma vez que consideramos as vozes emancadas das situações vivenciadas no Grupo Escolar, a partir da qual pudemos compreender melhor a perspectiva de cada depoente, além de evidenciar e registrar algumas características da instituição (como arquitetura do prédio escolar, regras, demandas e rotina instituídas, condições do trabalho docente, contextos e relações interpressoais).

Na perspectiva da autora, a análise de singularidades pode ser entendida como um processo de sistematização de uma etapa analítica que intenciona registrar, por meio do ponto de vista do pesquisador, aspectos que caracterizam os entrevistados e os depoimentos compostos na entrevista. Nesse sentido, "buscamos registrar nossas percepções de como cada narrativa apresenta-se, seu fio condutor, suas marcas" (MARTINS-SALANDIM, 2012, p. 242).

Feitas essas considerações sobre História Oral e narrativas orais, apresentamos, a seguir, brevemente alguns recortes do que a análise de singularidades ressaltou nas narrativas orais, que sob nosso olhar, forneceu uma ruptura de certas verdades cristalizadas, permitindo assim a adoção de nova perspectiva acerca da transformação do ambiente educacional.

3 EM SINTONIA COM... O NARRADO E O ESCUTADO NAS NARRATIVAS

Diante das considerações anteriores, reconhecemos que não há um modo único de olhar para as narrativas orais produzidas. Podemos, sob diferentes perspectivas, obter esse olhar, levando em conta que a história não é uma mera descrição do que aconteceu, mas envolve perspectivas distintas frente ao mesmo acontecimento.

Para tanto, cada uma das narrativas orais foi analisada individualmente, buscando a compreensão tanto de suas peculiaridades quanto das informações relevantes que cada uma fornecia para a pesquisa que nos propusemos desenvolver, com enfoque nas experiências reveladas e no modo como foram estruturadas: o que mais podíamos ouvir daquela narrativa para além do nosso tema específico de pesquisa?

As memórias sucitadas nesse processo fazem um cruzamento importante das vivências, mesmo que sejam entre o particular e o global, entre o indivíduo e o coletivo, e ainda constituem fundamentos a culturas, inserindo possibilidades múltiplas de registros do passado, (re)elaboração de representações, Por esse motivo a memória foi nosso ponto de partida para navegar no processo de constituição da referida escola, consdierando-se as vozes costuradas por meio de fragmentos das lembranças, tecidos de dimensões sociais que funcionam como âncoras no decorrer do processo narrativo.

***

O Grupo da Usina, como chamaremos o Grupo Escolar Rural Usina Bandeirantes, conforme pontuado inicialmente, localizava-se a 3 quilômetros da cidade de Bandeirantes - PR e foi construído no complexo de uma Usina de Cana de Açúcar e Álcool, em 1947. O fato gera um estranhamento, pois tal modalidade escolar até então era, predominantemente, um modelo de escola tipicamente urbano. Segundo Souza (2019), o sucesso dos Grupos Escolares Urbanos paulistas fez com que sua disseminação acontecesse para outros estados brasileiros, como Paraná, Minas Gerais, Espírito Santo e Rio Grande do Norte, os quais adotaram também o modelo educacional, na esperança de ordenar o ensino primário.

Em geral, nos anos de 1940 e 1950, no estado do Paraná, funcionavam predominantemente as modalidades de escolas isoladas ou casas escolares; os prédios muitas vezes eram simplesmente a adaptação de uma casa disponível na região, cedida pelo proprietário rural para ser usada como fins educacionais. Tais prédios eram predominantemente de madeira, com apenas uma sala de aula, sem (ou com existência precária de) sanitários e cozinha (SOUZA, 2019). Esse tipo de escola não existiu na fazenda que compõe o complexo da Usina e essa estrutura não corresponde à tematizada neste estudo.

Não havia escolas funcionando na região da fazenda, como revela Capelo (2013), de modo que foi fundada a modalidade de Grupo Escolar Rural, umas das poucas unidades rurais encontradas no estado do Paraná àquela época. Surge assim outro estranhamento: a edificação desse Grupo Escolar na área rural, um modelo de escola até então tipicamente urbano (SOUZA, 1998).

Deixando para trás a estrutura usual das escolas isoladas, mudando a paisagem da educação, a estrutura do Grupo Escolar, segundo as narrativas, era exuberante, funcionava em cômodos planejados, constituídos por algumas salas de aulas, uma para cada turma de alunos, e com seriação por sala. Sobressaíram também menções à higiene e limpeza do prédio. Fundamentadas nesses pressupostos de arquitetura que orientavam a construção dos prédios, encontramos nos documentos que abordam essas instituições escolares, descrições de características relacionadas à estrutura:

> Aqui, o prédio oferece melhores condições de conforto e higiene, mesmo quando adaptado. As classes apresentam, em geral, efetivo menos numeroso que o das escolas isoladas, e os alunos se distribuem por elas, segundo os respectivos graus de adiantamento. A um dos professores, seja sem regência da classe, ou também com encargos de ensino, entrega-se a responsabilidade do conjunto. O material é menos precário.Aí temos a escola comum nos meios urbanos (LOURENÇO FILHO, 1940, p. 658).

A série correspondente ao ano letivo tornou-se a matriz estrutural e assim passou a ser realizada a distribuição de conteúdos, horários, frequências de rotinas diárias, bem como organização das disciplinas, compostas por lições, pontos, aulas, exercícios e ainda “exames, festas de encerramento, exposição escolares e comemorações cívicas” (SOUZA, 1998, p. 23).

O relato de uma professora permitiu-nos entender a reestruturação no ensino primário, especialmente quando trata das condições de trabalho e infraestrutura da escola isolada em relação ao do Grupo Escolar, apresentando as reformulações sofridas ao longo dos anos nas escolas rurais. Percebemos, assim, aspectos relevantes como: diferenças de estruturação de perspectivas na educação rural paranaense; arquitetura do prédio escolar; características da estrutura; a organização da escola; o papel do professor e as condições de trabalho docente. Ela relatou que as mudanças foram positivas e, comparando com a escola isolada, o Grupo Escolar apresentava condições melhores para o ensino, no qual havia mais professores, uma sala para cada série, o papel do professor era lecionar, contava com uma organização pedagógica (o que veremos mais adiante), enfim, era uma escola moderna, assim como encontramos na literatura que trata sobre a organização dos Grupos Escolares e aborda sua constituição como uma promessa de superação das escolas isoladas.

Ao revelar o cenário da sala de aula na qual trabalhava, a professora apresentou traços e reconstruiu uma sala de aula como “linda e maravilhosa”. Nesse momento foi perceptível como a escola era representativa na vida dela. Enfatizou ainda, em vários momentos, revelando que era uma boa professora alfabetizadora. Mas como seria “uma boa alfabetizadora”? Desenvolver as práticas de leituras e de escritas? Talvez, para ela, essa condição se encaixe nos valores que ela mesma aponta: naquela época se uma pessoa aprendesse a ler, a escrever, a contar e fazer as quatros operações, era considerada uma alfabetizada. Uma boa educadora seria, portanto, quem cumpria essa lista com segura excelência.

Em cada narrativa, o conjunto de memórias representa todas as classes, recriando, por fim, a própria escola, o sentido de ser professor e todos os valores vinculados ao Grupo Escolar (disciplina, hierarquia, padronização e respeito...). De tudo o que escutamos, percebemos uma série de liturgias que indicam determinados rituais intrínsecos à escolarização que permeavam o cotidiano dessa instituição escolar e hoje se manifestam como pregnâncias nas memórias dos antigos alunos. Pode-se pensar que nas aulas, esses rituais fossem mais singelos, mas, à medida que a escola republicana se institucionalizava como espaço formativo de cidadãos, se fez necessário o investimento em muitos aspectos simbólicos que, pela recorrência em que aconteciam, marcam as memórias daqueles que passaram pelos Grupos Escolares.

As relações entre professores e alunos seguiam as normas sociais convencionadas, isto é, refletiam as relações exigentes entre pais e filhos com muito respeito. A presença de procedimentos autoritários nelas evidencia que a regra comum era a obediência e os limites, muito bem definidos, que transcendiam o sentimento de medo, pois o corpo docente e a equipe pedagógica desfrutavam do respeito e da admiração não só dos alunos como também de toda a comunidade, que apoiava as propostas oriundas da escola. Portanto, não se colocavam limites para o autoritarismo.

As narrativas contam que a experiência educacional desenvolvida no Grupo Escolar se constituía como uma escola modelo. Assim surgem – em algumas indagações: uma escola modelo de quê ou para quê? Regras, castigos? Obediência? Modelo de educação? Questões que fazem pensar no processo civilizador como constituinte do conceito de escola moderna emergente no século XX (CAPELO, 2013). Esses rituais instituem processos de civilidade, com vistas a produzir a autorregulação dos discentes.

As memórias dos sujeitos entrevistados na pesquisa revelam uma escola impregnada de conceitos próprios de uma época de consolidação dos Grupos Escolares, como instituições públicas de ensino. Suas impressões a respeito das práticas educativas desenvolvidas no Grupo Escolar Rural Usina Bandeirantes, ainda são comuns (ensino tradicional), enquanto outras nos parecem estranhas, tais como os castigos da época e os civismos, dadas às transformações vividas na escola contemporânea.

Os relatos nos permitem evidenciar também as estratégias pelas quais os(as) professores(as) rurais aprenderam a arte de ensinar, compreender uma trajetória de formação e atuação que abarca inúmeros aspectos dos componentes da vida docente da época. Ficam bem marcadas as diferenças de formação, até então leigos ou com formação muito distante da pretendida, no que tange aos aspectos pedagógicos e conteúdos específicos de disciplinas que lecionariam ou até mesmo já lecionavam.

As representações, nas suas narrativas, mostram-se como depoimentos em que se percebe o processo de alfabetização e de formação dos(as) professores(as), o perfil dos alunos que frequentaram as turmas e a estrutura física do lugar em que atuaram. Trazem as marcas do coletivo social, indicando que toda história está impregnada de vivências sociais, o que nos auxilia a compreender o processo de alfabetização dos alunos no período estudado.

Essas professoras se dedicaram para além do ensino das disciplinas escolares, no que se refere à apropriação de saberes e a serviços e práticas que a instituição podia oferecer à família, sobretudo à mãe-trabalhadora rural, no cuidado dos seus filhos (tempo dedicado às crianças e fornecimento de alimentação, pela merenda escolar), também desenvolveram um projeto no que diz respeito ao acesso à educação rural, pois direcionaram a trajetória de aprendizagem dos filhos dos trabalhadores rurais buscando dar-lhes uma aproximação à tradicional escola, ou seja "plantaram" naquelas terras novas condições de vida.

O corpo docente que atuava no Grupo Escolar tem formações diferenciadas e suas narrativas permitem perceber isso com clareza, algumas concluíram a Escola Normal, sem, contudo, nenhum tratamento específico ao contexto da zona rural. Como é ressaltado nas narrativas de três professoras, elas possuíam formação de magistério realizado na Escola Normal. Uma tinha formação de magistério na Escola Normal Secundária. Já outra não possuía nenhum tipo de formação, apenas um estudo de 1ª à 5ª série, primeiros anos de escolaridade. Ainda sobre a formação dos que ensinavam Matemática nas escolas primárias era bastante lacunar, mas os conteúdos a serem ensinados eram variados, embora nem sempre fossem cumpridos plenamente (CAPELO, 2013), a literatura nos apresenta que a maioria desses profissionais eram leigos não faz jus ao grupo docente entrevistado do Grupo Escolar, já que apenas uma professora era leiga.

Dos entrevistados, quatro iniciaram a carreira docente no Grupo Escolar, cujo ingresso não continha nenhum processo de seleção, como salienta uma das professoras; algumas inclusive receberam convite da diretora da escola para começar a lecionar na instituição e assim iniciaram a docência. As docentes contratadas para integrar a equipe, eram, em geral, muito jovens e recém-formadas, provavelmente pela escassez de profissionais da área, na época.

Uma particularidade de uma professora que surge em sua narrativa é ter lecionado em outra escola rural, diferentemente das outras, que iniciaram sua docência no Grupo Escolar. A narrativa desta nos presentificou ao revelar sobre como era lecionar em sua primeira escola, isolada, com instalações físicas de madeira, uma única sala de aula, com algumas carteiras rústicas, foi nesse cenário educacional ela trabalhou por doze anos, depois deu continuidade em sua carreira no Grupo Escolar. Além do mais, podemos ver de forma positiva o que ela observa sobre as implementações da política educacional brasileira e, sobretudo, no estado do Paraná, no que diz respeito às modalidades e expansões das escolas rurais; relata também sobre outras condições desse ambiente, como o ensino multisseriado, ela ser a única responsável pela escola, como ela encontrava os alunos, os processos de busca por matrícula escolar, as condições de instalação da escola, características abordadas na literatura como carentes de aparato escolar, marcadas por ser a escola de um só professor, apresentando suas instalações de madeira, contendo uma única sala de aula, de acordo com Faria Filho e Vidal (2000).

Por meio disso podemos perceber a diferenciação do Grupo Escolar com relação às escolas isoladas que também compunham as ruraisno que diz respeito às condições de trabalho vivenciadas pela professora. Sua particularidade no aspecto docência nos traz os traços da nova arquitetura e ainda a inovação pedagógica. Seu relato salienta que o Grupo era uma escola moderna, assim como encontramos na literatura (SOUZA, 1998 p. 45), que trata sobre a organização dos Grupos Escolares e abordam sua constituição como uma promessa de superação das escolas isoladas e nos traz os Grupos Escolares como "templos do saber".

Tais características, apontadas na narrativa dessa professora, se entrecruzam com o que apontam algumas pesquisas acerca da implantação de Grupos Escolares como uma renovação no sistema de ensino primário, pois apresentavam melhores condições de trabalho para os professores, com instalações aprimoradas, ensino seriado, várias salas de aula e professores. Para ela, tais instituições constituíram uma nova ordem escolar e possibilitaram que as professoras exercessem melhor sua função educativa no meio social.

A narrativa constituída a partir da entrevista com essa professora é marcada por sua busca em incorporar atividades diferenciadas, as quais possibilitassem aos alunos um melhor aproveitamento dos conteúdos. É com marcante saudosismo que ela descreve seus passos na carreira docente, trabalhando na Educação Rural e analisa, inclusive de maneira positiva, todo seu trabalho. Com riqueza nos detalhes, descreveu a estrutura do Grupo Escolar, contudo, apesar dos entraves enfrentados pela maioria dos alunos que se refletia nas professoras, sobretudo as limitações de natureza financeira, por meio do relato dela ficou claro que todos gostavam da escola e sacralizavam o ensino.

Destaca-se ainda no relato de outras duas professoras a imperiosa finalidade moralizadora, cívica e civilizadora da educação presente no Grupo Escolar. Atos como cantar o Hino Nacional eram extremamente rotineiros. As crenças católicas também eram tidas como uma exigência e, por isso, antes de começar as aulas, rezavam diariamente,.

A narrativa de outra professora reforça a valorização social do professor naquela época, enfatizando o respeito que recebia dos alunos, que provinha da importância dada à educação, pois era visto como o responsável pela formação do povo, o elemento reformador da sociedade, o portador de uma nobre missão cívica e patriótica. A professora ainda relata sobre as regras que compunha a educação no Grupo Escolar. Destacamos seu intenso entusiasmo por possibilitar abordagens alternativas dos conteúdos ministrados . De maneira categórica, afirma que, na época, levava os alunos para sua casa, para que conseguissem acompanhar as aulas.

Eram muitas as regras, que, segundo os depoimentos, funcionavam por terem sido acordadas pela equipe escolar. Para movimentar-se na escola, havia determinações bem definidas, descritas pelas depoentes: formar filas únicas separadas por turma, para entrar e para sair da sala de aula; cantar o hino nacional todos os dias; seguir regras de conduta e comportamento. Os relatos sobre os castigos inseridos nas escolas, como parte de punição àqueles que descumpriam as regras, revelam não mais cenas de palmatórias ou vara de marmelo, comuns nas escolas por largo período e que deixaram traços da sua presença nas instituições escolares até meados de 1970 (CAPELO, 2013), mas situações desconfortáveis para os alunos indisciplinados, tais como ficar de pé no canto da sala.

Contudo isso não significou a abolição dos castigos corporais que geravam humilhação perante os colegas. Pelas narrativas, percebemos que eram entendidos como parte do trabalho pedagógico, de modo que os pais não questionavam tal conduta; pelo contrário, reforçavam a necessidade e a concordância com eles. Sendo assim, as infrações a regras expostas podiam acarretar, por parte da diretora, advertência, suspensão, mas, sobretudo, longos sermões e severos castigos por parte dos pais, especialmente se fossem chamados para uma reunião com a diretora. Nas narrativas, fica claro que os alunos tinham como dever: estudar e obedecer.

No relato de umas das professoras encontramos traços de como surgiu a escola e as intervenções realizadas na época. Seu surgimento se deu por meio da iniciativa do dono da usina, dada a distância que os colonos e seus filhos se encontravam da cidade. Tal característica permite uma articulação predominante nas escolas rurais do Paraná: a importância do papel dos fazendeiros na sua permanência.

Aliadas a essa formação lacunar, devem ser consideradas as dificuldades naturais enfrentadas pelo corpo docente, alguns habituados à vida urbana — ainda que em cidades pequenas — conviviam com as dificuldades de locomoção e de falta de materiais didáticos. Uma dificuldade encontrada ao se lecionar no Grupo Escolar estava relacionada ao transporte. Para outra professora, que havia estudado em escola rural, essa dinâmica não era tão estranha, como parece ter sido para as outras. Uma das inúmeras dificuldades apontadas, pelo que encontramos na literatura, está vinculada ao acesso à escola devido à falta de transporte, o que exigia que se residisse em local próximo ou até mesmo nas escolas. Nas entrevistas encontramos sobressaído o mesmo empecilho, porém não atribuído à ausência de transporte, mas pela dificuldade e contratempos encontrados no dselocamento. A narrativa de uma das professoras esclarece que não queria deixar o Grupo, mas foi obrigada. Outra profissional que morava aos arredores do Grupo e foi pioneira, como a mesma se define, relata que aquela escola deixou marcas, assim como ela deixou nos alunos que passaram por aqueles bancos escolares.

Um discurso corrente de que muitos sacrifícios foram necessários para tornar possível a atuação em escolas rurais acaba por não revelar que tais sacrifícios eram necessários para se conseguir ingressar no Magistério, profissão almejada em virtude da falta de opções, do *status* social e dos bons salários. A zona rural servia, nesse sentido, a aspirações individuais de desenvolvimento profissional, configurando-se como uma "terra de passagem" (GARNICA, 2008). Como encontramos nas narrativas das professoras que ouvimos, algumas delas optaram por saírem do Grupo Escolar para lecionar nas escolas urbanas.

Nos dizeres de uma das professoras pioneiras, o que ensinava, suas metodologias e os recursos que buscava encontrar para possibilitar uma boa alfabetização aos seus alunosmostram que não contava com recursos, orientações ou auxílios para atuar nas precárias condições da escola rural. Por meio disso é possível perceber que eram constituídos pelo que se encontrava aos arredores da escola, assim a professora criava uma atmosfera interessante para os alunos.

A proposta didático-pedagógica dos Grupos Escolares, centrada na tríade escrever-ler-contar, formalmente não privilegiava um desses eixos em detrimento dos outros, mas não é equivocado afirmar que, se procurássemos uma ênfase temática, ela certamente recairia sobre o domínio da leitura e da escrita, de modo que tais competências pudessem apoiar o surgimento de um espírito cívico e de civilidade. Esses traços são abordados na narrativa de uma professora ao realtar como como ensinava os alunos. Em Matemática "enchia o quadro com exercícios e soluções", que os alunos tinham que acompanhar com máxima atenção e copiar no caderno. O sistema de avaliação era rigoroso: chamadas orais, exames finais, provas escritas, provas de leitura e de tabuada. Havia um cuidado todo especial com a letra dos alunos, uma cobrança que se estendia no desenvolvimento de muita caligrafia em sala de aula, como evidenciam duas professoras entrevistadas.

Tal narrativa ainda nos mostra, com efeito, o lado predominante sobre suas atividades em sala de aula, o modo como conduzia seu alunado, evidenciando o controle dos corpos, que nos passa uma impressão (ou uma falsa impressão) de que tudo naquela época funcionava bem. A professora nos conta como era a rotina do dia a dia na escola, ressaltando que os alunos já eram acostumados à disciplina exigida na época.

Naquela época cada professora lecionava todas as disciplinas básicas, um sistema de ensino que atribuía uma profissional por turma, em que a mesma deveria ensinar todos os conceitos de Matemática, Português, Redação, História, Geografia e Ciências.

Uma professora rememora que o deslocamento pela escola em direção ao interior do prédio se dava em filas e por turmas, que partiam do pátio, organizadas por altura, o que caracterizava algumas das exigências atribuídas às regras do Grupo.

Aquela era outra época, as relações no mundo do trabalho não eram as mesmas de hoje e, provavelmente, havia distintos arranjos familiares no cuidado com as crianças. E o que pensar sobre um horário exclusivo para aqueles que reprovavam no ano escolar? A narrativa de uma professorapermite compreender como conduzia os alunos que apresentavam maiores dificuldades de aprendizagem:ensinava-os em sua própria casa, no horário do contra-turno escolar, maneira encontrada por ela para que aa turma conseguisse acompanhar os conteúdos escolares e ainda minimizar as reprovações.

Além dessas dificuldades, nota-se também a extrema vigilância dos inspetores de ensino que, segundo Souza; Pereira (2019) fiscalizavam o trabalho de diretores, professores e funcionários dos grupos escolares e dos professores das escolas isoladas, verificando a regularidade e a eficiência do ensino, a frequência dos alunos e dos professores, o cumprimento dos programas, a metodologia no ensino das matérias, as condições dos prédios escolares e dos materiais didáticos e a aplicação dos exames finais. Eles orientavam diretores e professores sobre o cumprimento dos deveres, realizavam reuniões pedagógicas e divulgavam práticas desejáveis.

A história da educação escolar caipira, constituída nos desvãos da história oficial da educação brasileira, vai, pois, trilhando caminhos distintos daqueles trilhados pelos alunos e professores dos grandes centros.

Finalizamos esta breve análise sobre os aspectos do Grupo Escolar, com as palavras de um dos entrevistados: "A escola está lá ainda, mas, para minha tristeza, não funciona mais. Agora não tem mais nada, acabou tudo aquela coisa linda e maravilhosa, aquele Grupo acabou!".

Finalmente, além dessas nossas disposições, ressaltamos que transitar pelas memórias nos possibilitou abordar um Grupo Escolar circunscrito de tonalidades, uma descrição de um cárcere cultural que transforma indivíduos e, sobretudo, nos permitiu perceber, como destaca Larrosa (2017), que a escola é mais potente em sua forma do que em sua função.

4 ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

Esta pesquisa teve como objetivo principal registrar indícios de uma experiência educacional ruralista, os Grupos Escolares. Buscamos conhecer e compreender histórias, desfechos e consequências. Segundo aponta Bencostta (2012), ficam claras as balizas educacionais que fizeram a proposta erguer-se, manter-se, suportando diversas crises, e, por fim, sucumbir. Entre essas balizas, destacamos a formação das professoras e seus percalços perante lecionar no Grupo Escolar, a dedicação das professoras, valorização do professor perante a sociedade e a efetivação de estratégias visando à relação escola-família-comunidade.

Das memórias escolares emergem um passado de raízes pluriculturais e também um universo social único, ao percorrer as narrativas coletadas, percebemos que abrangem diferentes elementos que fizeram parte da escolarização individual e coletiva, permitindo pinçar fatos compartilhados, como: a importância da escola para aquela comunidade; a circulação das representações acerca do bom professor; os processos de escolhas e indicações para a carreira docente; as práticas educativas; os saberes ensinados e os materiais utilizados; as rotinas e as punições.

O Grupo Escolar em questão é o retrato de uma escola rural, a qual estabeleceu suas próprias regras, condutas, relacionando-se dessa forma com a comunidade e atribuindo ao seu contexto marcas de uma escola que buscava se encaixar na realidade comunitária. Edificou seu espaço para comportar os alunos, ensinou saberes para a população se tornar alfabetizada. Corroborando com o que afirma Lopes (2016), essas histórias apenas falam de um lugar. De um chão. De uma realidade. Mas, de um modo ou de outro, essa é a realidade de muitas escolas, de muitos professores, de muitos alunos. Uma realidade estampada Brasil afora.

REFERÊNCIAS

ALBERTI, V. **Ouvir contar:** textos em história oral. Rio de Janeiro: FGV. 2004.

BENCOSTTA, M. L. A. Grupos Escolares no Brasil: um novo modelo de escola primária. In STEPHANOU, M.; BASTOS, M. H. C.(Org.). **Histórias e memórias da educação no Brasil**, v. III: século XX. Petrópolis: Autores Associados, 2012. p. 68-77.

CAPELO, M. R. C. **Educação, escola e diversidade no meio rural**. Londrina: Eduel, 2013.

CURY, H. N. Concepções e crenças dos professores de Matemática. **Bolema**, Rio Claro, v. 12, n. 13, p. 29-43, 1999.

DELGADO, L. A. N. **História Oral**: memória, tempo, identidades. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica. 2010.

GARNICA, A. V. M. Cartografias contemporâneas: mapear a formação de professores de Matemática. In: A. V. M. Garnica (Org.), **Cartografias contemporâneas**: mapeando a formação de professores de Matemática no Brasil. Curitiba: Appris. 2014. p. 39-66.

GARNICA, A.V. M. **A experiência do labirinto**: metodologia, história oral e educação matemática. São Paulo: Unesp, 2008.

GONZALES, K. G. **Formar professores que ensinam matemática:** uma história do movimento das Licenciaturas Parceladas no Mato Grosso do Sul. 2017. 534 f. Tese (Doutorado em Educação para a Ciência) – Universidade Estadual Paulista, Bauru, 2017.

LARROSA, J. Notas sobre a experiência e o saber de experiência (Tradução de João Wanderley Geraldi). **Revista Brasileira de Educação**, n. 19, p. 20-28, 2002.

LARROSA, J. **Tremores**: escritos sobre experiência. Belo Horizonte: Autêntica. 2016.

LARROSA, J. (Org.). **Elogio da escola**. Tradução de Fernando Coelho. Belo Horizonte: Autêntica, 2017.

LOURENÇO FILHO, M. B. Alguns aspectos da educação primária. **Revista Brasileira de Estatística**, v. 4, 1940. p. 649-664.

MARTINS-SALANDIM, M. E. **A interiorização dos cursos de Matemática no estado de São Paulo**. 2012. 379 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2012.

MATUCHESKI, S. **Diferenciação e Padronização**: um estudo sobre o setor litoral da Universidade Federal do Paraná. 2016. 458 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2016.

SOUZA, R. F. de; PEREIRA, M. A. F. Memórias e representações da inspeção escolar nos álbuns de fotografia de Luiz Damasco Penna. **Cadernos de História da Educação**, v. 18, n. 3, p. 846-877, 2019.

SOUZA, R. F. de. **Templos de civilização**: a implantação da Escola Primária Graduada no Estado de São Paulo (1890-1910). São Paulo: Unesp, 1998.

SOUZA, G. S. **Da fuligem à edificação do Grupo Escolar Rural Usina Bandeirantes**: narrativas que contam história(s). 2019. 161 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2019.

TIZZO, V. S. **Mobilizações de narrativas na (e para a) formação de professores**: potencialidades no (e a partir do) Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência. 2019. 488 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2019.

Submetido em março de 2021.
Aprovado em junho de 2021.

Grasielly dos Santos de Souza

Mestre em Ensino de Matemática pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Professora da Secretaria da Educação e do Esporte do Paraná (SEED-PR). ID Lattes: 8489182553843569. Orcid ID: 0000-0001-6932-3754.

Contato: grasiellysantossouza@yahoo.com.br.

Mirian Maria Andrade

Doutora em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista (Unesp). Docente da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), Curitiba, Paraná, Brasil. ID Lattes: 1268942033771382. Orcid ID: 0000-0001-5004-6320.

Contato: andrade.mirian@gmail.com.

Uma versão da história do Cálculo Infinitesimal

A version of the history of the Infinitesimal Calculus

Gabriel Faria **Vieira**
Universidade Federal do Triângulo Mineiro (UFTM)

Mônica de Cássia **Siqueira Martines**
Universidade Federal do Triângulo Mineiro (UFTM)

RESUMO

Este artigo visa divulgar alguns resultados de uma pesquisa de iniciação científica em História e Epistemologia da Matemática, a qual objetivou conhecer uma parte da história do Cálculo Infinitesimal, apresentado primeiro por Leibniz, em seus artigos de 1684 de 1686 e, como foi desenvolvido posteriormente**.** A metodologia utilizada foi a análise documental, primeiramente em fontes terciárias, tais como a coleção de livros de História do Cálculo de Baron e Bos e, em seguida, buscou-se aprofundar o que nos foi mostrado no livro, buscando as fontes primárias (re)interpretando os cálculos apresentados. Trazemos uma breve contextualização sobre a situação do Cálculo no final do século XVII, mostramos alguns conceitos do Cálculo Infinitesimal de Leibniz, além de algumas de suas aplicações. Ao concluir este trabalho, pudemos perceber a importância do Cálculo como um novo método para traçar retas tangentes a uma curva num ponto dado e de calcular áreas abaixo das curvas, já que até então os cientistas da época utilizam vários métodos geométricos para solucioná-los, sem apresentar uma forma geral. Apesar do novo método atender a essa premissa, ainda apresentava problemas de rigor em relação aos conceitos matemáticos, o que levou, inicialmente, à certa desconfiança em relação a seu uso. Percebemos também que, além de Leibniz, diversos cientistas envolveram-se no desenvolvimento do Cálculo Infinitesimal, ajudando a moldá-lo para o Cálculo Diferencial e Integral que conhecemos atualmente.

Palavras-chave: História da matemática. História do cálculo. Cálculo Infinitesimal.

ABSTRACT

This article aims to divulge some results of a scientific initiation research in the history and epistemology of Mathematics, which aimed to know a part of the history of the Infinitesimal Calculus presented first by Leibniz in his articles from 1684 and 1686 and, as it was developed later. The methodology used was the documentary analysis, firstly in tertiary sources, such as the collection of books on the History of the Calculation of Baron and Bos, and then one sought to deepen what was shown in the book, looking for the primary sources, (re) interpreting the calculations presented. The article brings a brief contextualization about the situation of Calculus at the end of the 17th century, show some concepts of Leibniz's Infinitesimal Calculus, in addition to presenting some of its applications. At the end of this work, it was possible to see the importance of Calculus as a new method to solve problems of drawing tangent lines to a curve at a given point and of calculating areas below the curves, since until then scientists at the time used several geometric methods to solve them, without presenting a general way to solve such problems. Despite the new method being general, it still presented problems of rigor in relation to mathematical concepts, which led, initially, to a certain distrust in relation to its use. We also realized that, in addition to Leibniz, several scientists were involved in the development of the Infinitesimal Calculus, helping to shape it for the Differential and Integral Calculus that we know today.

Keywords: History of mathematics. History of calculus. Infinitesimal Calculus.

1 INTRODUÇÃO

O objetivo deste trabalho é mostrar alguns dos resultados da pesquisa de iniciação científica desenvolvida na área de História e Epistemologia da Matemática (MENDES, 2012), que propôs conhecer uma parte do Cálculo Infinitesimal apresentado por Leibniz, em artigos publicados em 1684 e 1686, na revista científica *Acta Eruditorum*[1], e como ele foi desenvolvido posteriormente, principalmente, pelos irmãos Jackob e Johann Bernoulli.

Apresentamos primeiramente os conceitos que, de acordo com Baron e Bos (1974a, p. 41-42), foram desenvolvidos por Leibniz utilizando os infinitesimais. Ainda segundo esses autores, alguns matemáticos, tais como os irmãos Jakob Bernoulli (1655 – 1705) e Johann Bernoulli (1667 – 1748), foram capazes de entender as publicações de Leibniz e utilizaram as técnicas do Cálculo Infinitesimal para resolver problemas. Johann, por sua vez, foi contratado pelo Marques de L'Hôpital[2] (1661 – 1704) para lhe dar aulas sobre o Cálculo, e, uma vez que havia aprendido, L'Hôpital publicou um livro sobre diferenciais do Cálculo Infinitesimal, utilizando as aulas e publicando as descobertas de Johann em seu nome.

As definições do Cálculo Infinitesimal constam nos referidos artigos de Leibniz, assim como as regras de diferenciação. Já suas aplicações pertencem ao livro de L'Hôpital, a um artigo feito por Johann Bernoulli e às lições dadas por este a L'Hôpital. Todas essas fontes encontram-se nos livros de História do Cálculo, de Baron e Bos, as quais utilizamos, e que foram traduzidas para nossa língua, constituindo-se, por esse motivo, em fontes terciárias. Também localizamos as fontes primárias e as usamos para compreendermos alguns dos cálculos apresentados na terciária.

A metodologia utilizada durante o desenvolvimento deste trabalho foi a análise documental de fontes históricas, a qual, de acordo com Lüdke e André (1986, p.38), pode ser utilizada como um recurso para tratar de dados qualitativos. Guba e Lincoln (*apud* LÜDKE; 1986, p.39) citam as vantagens em se trabalhar com esse tipo de método: os documentos são fontes estáveis, por isso não sofrem alterações e podem ser consultados sempre que necessário. Para a histórica da Matemática, é válido também destacar que:

> Outra vantagem dos documentos é que eles são uma fonte não reativa, permitindo a obtenção de dados quando o acesso ao sujeito é impraticável (pela sua morte, por exemplo) ou quando a interação com os sujeitos pode alterar seu comportamento ou seus pontos de vista. (LÜDKE, ANDRÉ, 1986, p. 39)

Trazemos primeiramente as definições dadas por Leibniz sobre diferenciais, de ordens superiores e integrais, seguidas das regras para multiplicação e divisão deles. Em seguida apresentamos algumas aplicações do Cálculo, como encontrar pontos extremos de uma curva e pontos de inflexão, ou ainda a curvatura em determinado ponto da curva e o método da integração por substituição.

2 DESENVOLVIMENTO

O Cálculo que estudamos teve grandes contribuições de Leibniz para seu desenvolvimento e foi publicado por esse autor em 1684, no entanto os problemas que o originaram são muito mais antigos. Por isso julgamos válido discorrer sobre sua história. Comentamos também sobre os anos iniciais que se seguiram a essa publicação, bem como seus divulgadores e o primeiro livro sobre cálculo publicado. Citamos também como Leibniz definiu alguns conceitos e algumas definições

[1] Revista Alemã fundada em 1682.

[2] Utilizaremos a grafia L'Hôpital, assim como adotada nos livros sobre história do cálculo de Baron e Bos.

dadas por L'Hôpital. Em seguida, apresentamos algumas de suas aplicações, das quais algumas trazem as respectivas demonstrações.

2.1 Uma história sobre o cálculo diferencial e integral

Os questionamentos que deram origem ao que hoje chamamos de “Cálculo Diferencial e Integral” têm início na Grécia antiga. Eram problemas relacionados, principalmente, à quadratura do círculo. Na busca por uma solução, a qual consistia em construir, com régua e compasso, um quadrado cuja área era igual à área de um círculo dado, é que surgem ideias de traçar retas tangentes às curvas e de calcular áreas abaixo das mesmas (BARON, BOS, 1974a).

Os séculos foram passando e vários estudiosos se debruçaram na busca de métodos gerais para se traçar retas tangentes e se calcular áreas abaixo de curvas. Somente por volta do final do século XVII e início do século XVIII, vemos o problema resolvido e uma luta épica sobre a prioridade da descoberta dos métodos gerais, entre dois cientistas: Newton e Leibniz. Entretanto, não entraremos em detalhes sobre esse desentendimento, pois não é o objetivo deste artigo (BARON, BOS, 1974b, 1974c).

O cálculo proposto por Leibniz teve como seus principais divulgadores os irmãos Bernoulli, os quais estavam entre os primeiros a conseguir entendê-lo e aplicá-lo. Estes, em conjunto com Leibniz, publicaram vários artigos na *Acta Eruditorum*, o que colaborou para a difusão do cálculo desse estudioso. Tais artigos não eram de fácil compreensão, pois mostravam sua aplicação e não os conceitos. Isso mudou com a publicação do livro *Analyse des Infiniments Petits*, escrito por L'Hôpital com base nas aulas que teve com Johann Bernoulli (BARON, BOS, 1974b, p.4).

Conforme Baron e Bos (1974b, p.5-6), tal livro causou grande controvérsia, pois L'Hôpital apenas mencionou Johann em seu início, não tendo declarado sua contribuição, e este, por sua vez, também não a exigiu quando o livro fora publicado. Somente o fez após a morte de L'Hôpital, mas não haviam provas de seu feito. Somente em 1921, quando foi achado um documento na biblioteca de Basiléia (Suíça), é que foi provada a contribuição de Johann para os conceitos presentes no livro de L'Hôpital. É também importante considerar que, à época, a credibilidade de Johann estava abalada devido às desavenças públicas com seu irmão Jakob, e isso colaborou para que o livro não lhe fosse creditado (BARON, BOS, 1974b).

2.2 Definições de diferencial e integral, por Leibniz

Segundo Baron e Bos (1974a, p.58), Leibniz definiu "diferencial como sendo a diferença infinitamente pequena entre dois valores consecutivos de y. Para uma curva traçada com relação a um eixo-x e um eixo-y, Leibniz considera a sequência das ordenadas y e a sequência correspondente das abscissas x". Portanto, dy é a diferença infinitamente pequena entre duas ordenadas y, e dx a diferença infinitamente pequena entre duas abscissas x.

Para Leibniz, segundo Baron e Bos (1974a, p.58), as diferenciais eram “infinitamente pequenas”, portanto, podiam ser comparadas entre si (a razão $\frac{dy}{dx}$ é finita), mas podiam ser desprezadas em relação às quantidades finitas ordinárias (por exemplo, $x + dx = x$)[3].

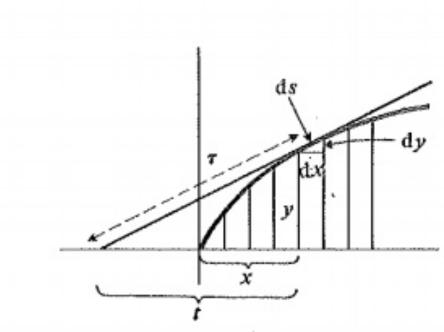
De acordo com Baron e Bos (1974a, p. 60), Leibniz definiu a integral como sendo a soma da área de retângulos infinitamente pequenos $y \cdot dx$ sob uma curva, representando-a pelo símbolo $\int$. Portanto, $\int ydx$ descreve a área abaixo da curva. Como não era indicado um intervalo de integração, também não eram explicitadas constantes de integração. Geralmente, a fronteira

[3] Números comuns, números naturais.

v.6, n.1, p. 109-123, jun. 2021

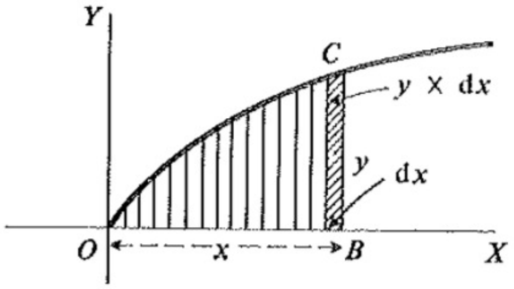
esquerda era a origem e $\int ydx$ indicava a área entre 0 e x. Também não existiam regras gerais pelas quais as integrais pudessem ser calculadas em todos os casos ou reduzidas a integrais conhecidas, porém havia uma série de métodos que poderiam ser utilizados em certos casos.

Figura 1: Representação das diferenciais $\boldsymbol{dx}$ e $\boldsymbol{dy}$.



Fonte: Baron e Bos (1974a, p.58)

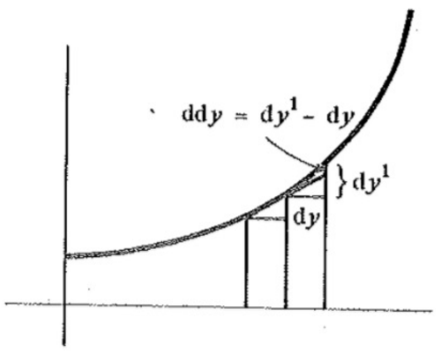
Figura 2: Representação da integral como a soma de infinitos retângulos $\boldsymbol{ydx}$.



Fonte: Baron e Bos (1974a, p.60)

Se os dy's consecutivos são diferentes, sua diferença é chamada por Leibniz de "diferencial de segunda ordem". Estas são infinitamente pequenas em relação às diferenciais de primeira ordem e denotadas por ddy. De maneira semelhante são formados ddx's,dds's etc. e diferenciais de ordens superiores. Porém, se os dx's ou dy's são iguais, então $ddx = 0$ e $ddy = 0$ (BARON, BOS, 1974a, p.60).

Figura 3: Representação de uma diferencial de 2ª ordem, por Leibniz.

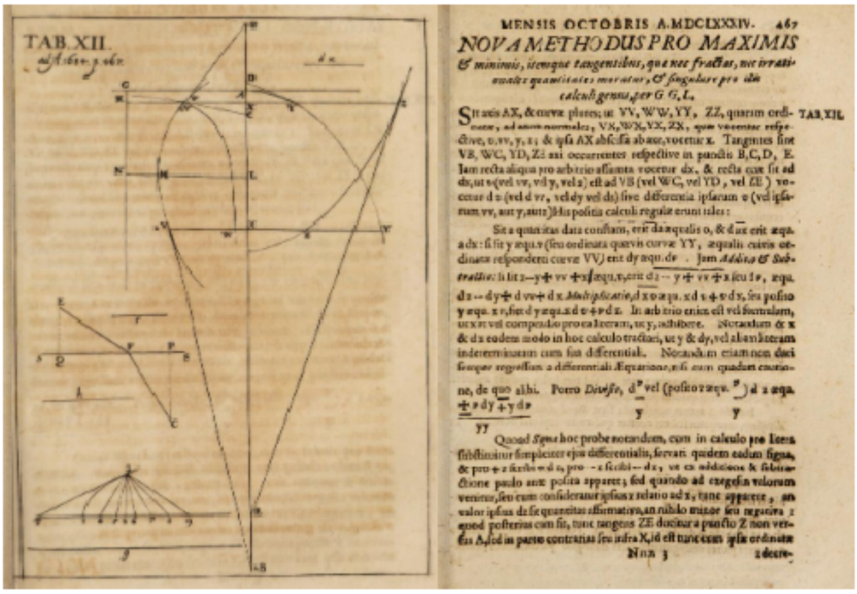


Fonte: Baron e Bos (1974a, p.60)

2.3 Operações envolvendo diferenciais e métodos do cálculo

Segundo Baron e Bos (1974a, p. 61-63), Leibniz publicou seu primeiro artigo sobre Cálculo Infinitesimal em 1684, no qual discursava sobre as diferenciais e dava algumas aplicações. O artigo trazia a definição de "diferencial", que havia sido modificada por Leibniz devido à sua insegurança sobre os infinitamente pequenos e algumas regras, tais como a do produto e a do quociente. Leibniz modificou a definição para que dx fosse um segmento de reta, e dy outro segmento de reta, tal que $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{\tau}$, onde $\tau \in \mathbb{R}$; posteriormente, ele assumiu novamente as diferenciais como “diferenças”. Embora no artigo tenham sido apresentadas as regras do quociente e do produto de diferenciais, estas não eram (e ainda não são) de fácil compreensão. Portanto, trouxemos essas regras como definidas no livro *Analyse*, escrito por L’Hôpital.

Figura 4: Cópia do artigo de Leibniz, publicado em 1684.


MENSIS OCTOBRIS A. MDCLXXXIV. 467

NOVA METHODUS PRO MAXIMIS

TAB. XII.

Fonte: https://archive.org/details/s1id13206500/page/466/mode/2up

2.3.1 Regras de diferenciação para produtos e quocientes

Conforme Baron e Bos (1974a, p.59), os Infinitesimais foram assumidos no livro de L'Hôpital como um postulado, ou seja, uma verdade matemática que não necessitava de demonstração. Estas podiam ser desprezadas em relação a quantidades finitas ordinárias, o que implicava em: $x = x + dx$, $y = y + dy$, etc. Portanto, para a diferencial de um produto, temos:

$$d(xy) = (x + dx)(y + dy) - xy = xy + xdy + ydx + dxdy - xy$$
$$= xdy + dx(y + dy) = xdy + ydx.$$

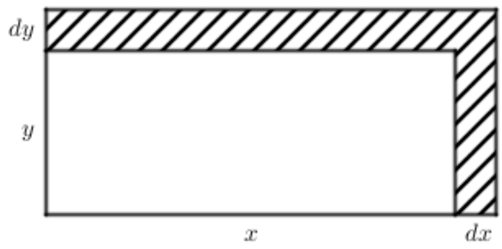
Podemos ver que L’Hôpital subtrai xy porque esta é a função nos produtos x, y originais, que está sendo subtraída do produto dos x e y com seus respectivos incrementos (é a definição de diferencial como a diferença da função produto nesses pontos (x, y) e $(x + dx, y + dy)$. Daí, como definido anteriormente no livro, é utilizada a definição $y + dy = y$, chegando-se à regra do produto para diferenciais. Pode-se também interpretar o produto de forma geométrica, o que acabou contribuindo para a aceitação das diferenciais ou nele como um acréscimo na área de um retângulo, no qual estaríamos interessados apenas na área do acréscimo, portanto eliminando xy. Como $dxdy$ é o produto de duas diferenciais, isto é, o produto de dois infinitamente pequenos, é tão próximo de 0 que se pode considerá-lo como tal. Portanto, como $dxdy = 0$, temos que $d(xy) = ydx + xdy$.

L'Hôpital (*apud* BARON, BOS, 1974b, p.9-10) traz também a regra da diferencial do quociente:

$$d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{y + dy}{x + dx} - \frac{y}{x} = \frac{xy + xdy - xy - ydx}{x^2 + xdx} = \frac{xdy - ydx}{x(x + dx)} = \frac{xdy - ydx}{x^2}$$

Aqui, o autor novamente subtrai a quantidade ordinária envolvida na operação, e utiliza novamente sua definição de “infinitamente pequenos”, pela qual $x + dx = x$, chegando assim à regra do quociente. Novamente, há uma explicação geométrica para a diferencial do quociente. Temos dois segmentos finitos, x e y, os quais sofrem acréscimos infinitamente pequenos, respectivamente dx e dy. Estamos interessados em saber apenas quantas vezes o segmento dx cabe no segmento dy, e não em quantas vezes o segmento x cabe em y; portanto, eliminamos $\frac{y}{x}$. Assim, como xdx é infinitamente pequeno em relação à x^2, podemos considerá-lo 0. Portanto, como $xdx = 0$, $d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{xdy-ydx}{x^2}$.

Figura 5: A regra do produto interpretada de forma geométrica.



Fonte: autores

Enquanto estudávamos tais regras, tivemos algumas dúvidas sobre como trabalhar com os infinitamente pequenos, pois nos pareceu estranho que uma quantidade pudesse simplesmente desaparecer no resultado. Para isso, consultamos *Analyse...* e confirmamos que, como estes eram considerados infinitamente pequenos, poderiam desaparecer ao final da operação pois são muito próximos à 0.

2.3.2 Valores extremos de uma curva

De acordo com Baron e Bos (1974c, p.3), os meios para determinar valores extremos sempre estiveram ligados aos métodos de tangentes, as quais, por sua vez, estavam ligadas com teorias de diferenciação. Durante o início da difusão do cálculo diferencial, a determinação de valores extremos foi reconhecida como uma aplicação útil e importante. L'Hôpital descreveu em *Analyse...* como encontrar os valores máximos e mínimos de uma curva, cujo método nos propusemos a estudar. O autor considera as curvas MDM ilustradas como na Figura 7.

De acordo com L’Hôpital (*apud* BARON; BOS, 1974c, p. 4-5), conforme a abscissa AP aumenta, se a ordenada PM aumenta a diferencial Rm será positiva. Caso PM diminua, Rm será negativo, sendo DE o extremo de tais curvas. L’Hôpital utiliza a lei da continuidade (muito frequente na época, sem mais rigores), segundo a qual as quantidades variáveis não saltam, podendo apenas variar gradualmente. Dessa forma, para que tais quantidades mudem de positivo para negativo, é necessário que passem por 0 ou ∞, bastando igualar a diferencial da curva a um destes.

O primeiro caso é parecido com o que utilizamos atualmente, que consiste em igualar a primeira derivada à 0. Para o segundo caso, L'Hôpital (*apud* BARON; BOS, 1974c, p.7) cita como exemplo para a aplicação do critério $dy = \infty$ a equação da curva $y - a = a^{\frac{1}{3}}(a-x)^{\frac{2}{3}}$.

Nessa mesma perspectiva, tomamos a primeira diferencial:

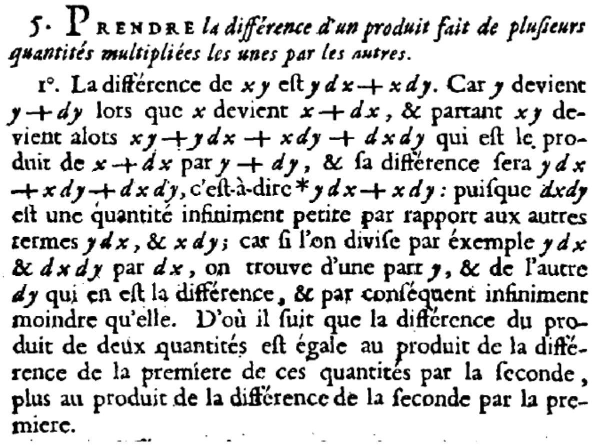
$$dy = a^{\frac{1}{3}}\left(\frac{-2}{3}(a-x)^{\frac{-1}{3}}\right)dx \Rightarrow dy = \frac{-2a^{\frac{1}{3}}}{3(a-x)^{\frac{1}{3}}}dx \Rightarrow dy = \frac{-2dx\sqrt[3]{a}}{3\sqrt[3]{a-x}}$$

Ainda segundo L'Hôpital (1974c, p.7), igualando-a a 0, teremos $-2dx\sqrt[3]{a} = 0$, o que não é interessante, pois não seria fácil encontrar os valores extremos da curva baseado nesse raciocínio. Seguindo as orientações de L'Hôpital, devemos igualar a equação a ∞, o que consiste em fazer o mesmo com o denominador da equação, levando-o a 0. Note-se que já havia a ideia de que números reais divididos pelos cada vez mais próximos de 0 tenderiam para o infinito, embora não houvesse o conceito de limite. Portanto:

$$3\sqrt[3]{a-x} = 0 \Rightarrow \sqrt[3]{a-x} = 0 \Rightarrow a - x = 0 \Rightarrow x = a.$$

Enfim, segundo L'Hôpital (*apud* BARON; BOS, 1974c, p.7), o extremo dessa curva (ordenada DE) está em $x = a$.

Figura 6: Trecho do livro original de *Analyse*, de L'Hôpital, que explica a regra do produto.

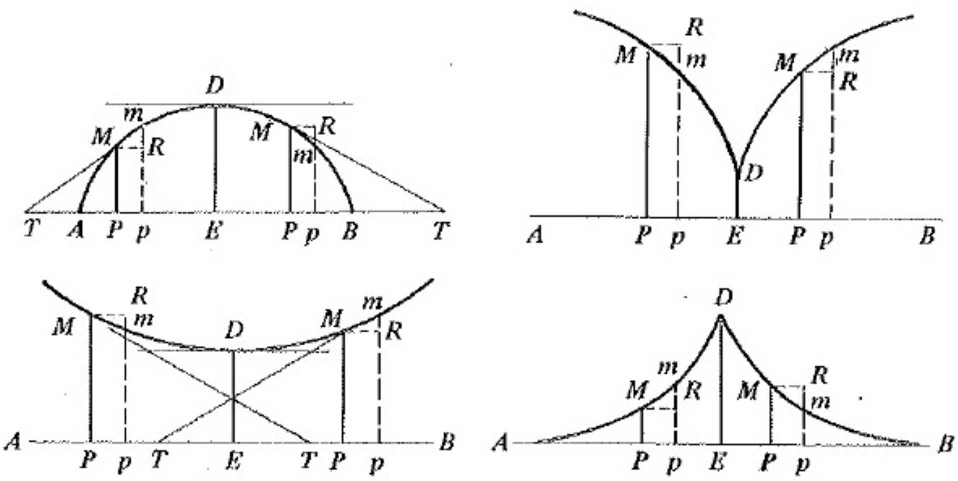


5. PRENDRE *la différence d'un produit fait de pluſieurs quantités multipliées les unes par les autres.*

1°. La différence de xy eſt $ydx+xdy$. Car y devient $y+dy$ lors que x devient $x+dx$, & partant xy devient alors $xy+ydx+xdy+dxdy$ qui eſt le produit de $x+dx$ par $y+dy$, & ſa différence ſera $ydx+xdy+dxdy$, c'eſt-à-dire * $ydx+xdy$: puiſque $dxdy$ eſt une quantité infiniment petite par rapport aux autres termes ydx, & xdy; car ſi l'on diviſe par exemple ydx & $dxdy$ par dx, on trouve d'une part y, & de l'autre dy qui en eſt la différence, & par conſéquent infiniment moindre qu'elle. D'où il ſuit que la différence du produit de deux quantités eſt égale au produit de la différence de la premiere de ces quantités par la ſeconde, plus au produit de la différence de la ſeconde par la premiere.

Fonte: *Analyse des Infiniment Petits*, 1696, p. 4

Figura 7: Exemplo mencionado por L'Hôpital: extremos de uma curva.



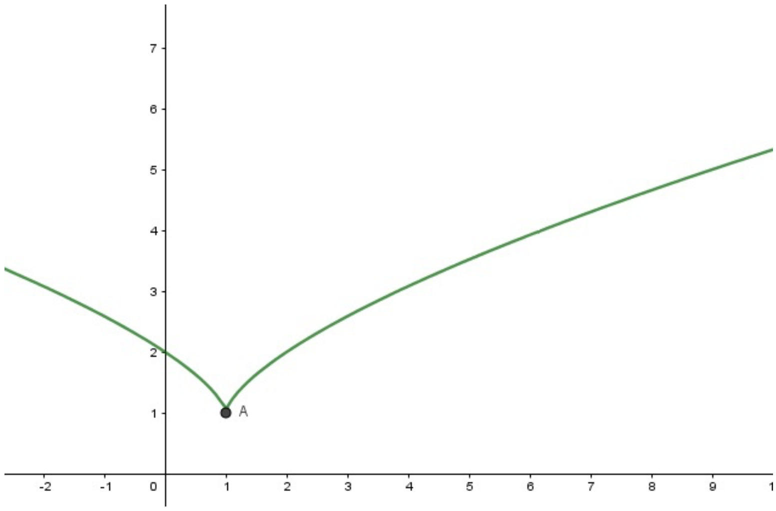
Fonte: Baron e Bos (1974c, p.4)

2.3.3 Pontos de inflexão

Segundo Baron e Bos (1974c, p.8), L'Hôpital definiu e obteve um método para calcular tais pontos, utilizando diferenciais de segunda ordem. Ele nos dá uma curva AFK, assim representada como na Figura 9.

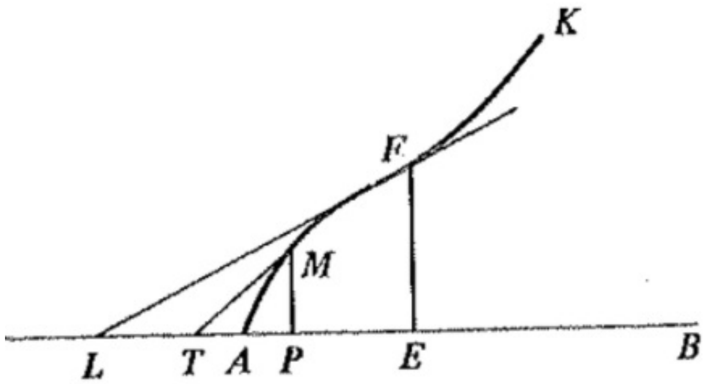
De acordo com L'Hôpital (*apud* BARON; BOS, 1974, p. 8), temos a linha reta AB como seu diâmetro (ou eixo) e as ordenadas PM, EF etc. paralelas entre si. Considerando F como o ponto de inflexão, traçamos a ordenada EF e a MP, sendo que M é um ponto qualquer da curva. Traçamos também as tangentes à curva, passando por F e por M. Em seguida, aumentamos a ordenada AP, isto é, avançamos no sentido positivo do eixo AB. Se a curva possuir um ponto de inflexão, até então AT, a distância entre o momento em que se começou a avançar e o ponto onde a tangente à M corta a reta AB, aumenta continuamente até que passe pela ordenada EF. A partir disso, a distância AT diminui.

Figura 8: Ilustração para $\mathbf{a} = \mathbf{1}$, onde o extremo seria $\mathbf{A} = (\mathbf{1}, \mathbf{1})$.



Fonte: autores

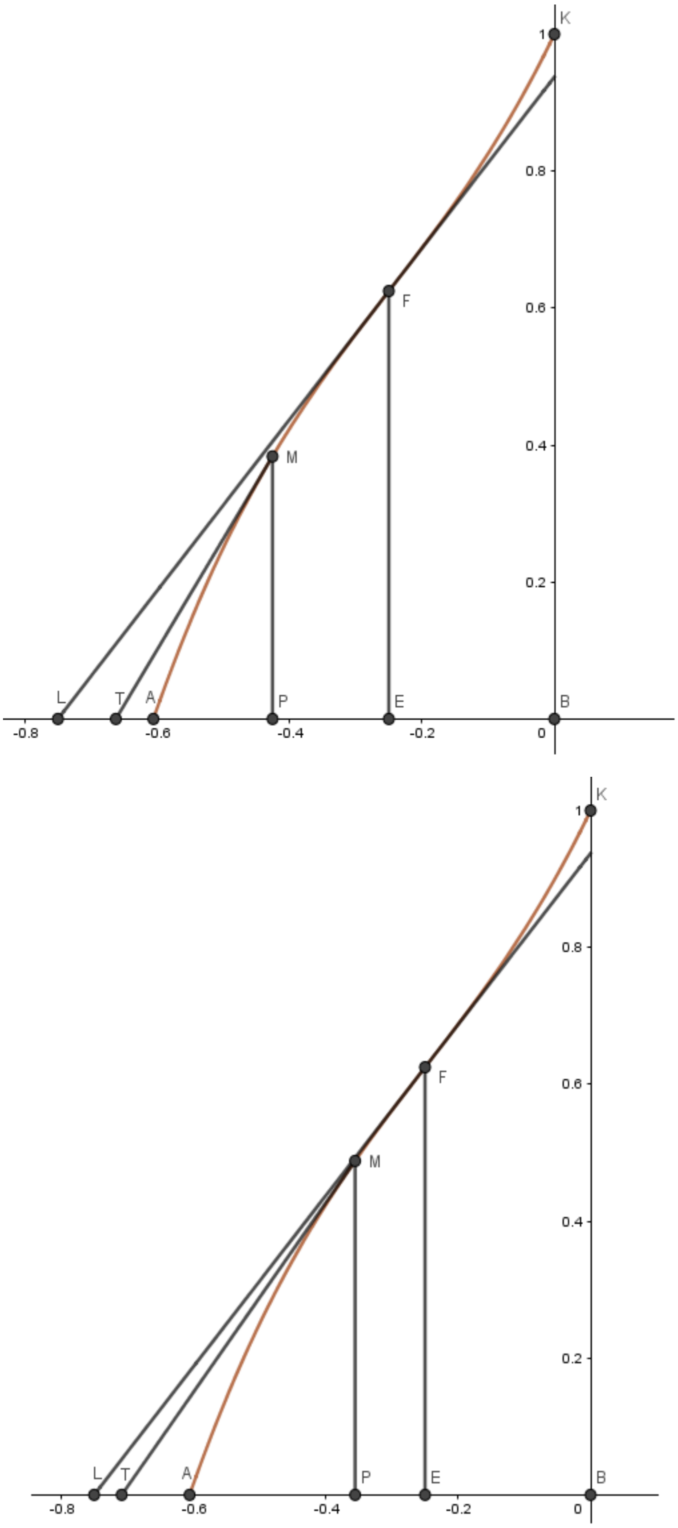
Figura 9: O exemplo dado por L'Hôpital sobre como encontrar pontos de inflexão.



Fonte: Baron e Bos, 1974c, p.8

Em seguida, o pesquisador afirma, em relação à Figura 9, que se chamarmos AE de x e EF de y, teremos $\mathrm{AL} = \mathrm{y} \cdot \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dy}} - \mathrm{x}$. Isso porque EL corresponde à subtangente, a qual, por seu turno, corresponde ao segmento pertencente a um eixo, com início no ponto onde a tangente o toca e terminando no ponto do eixo ortogonal ao de tangência; em termos modernos, seria equivalente a uma decomposição de forças de um vetor. A subtangente é dada por $\mathrm{EL} = \mathrm{y} \cdot \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dy}}$ (BARON; BOS, 1974b, p.10); subtrai-se AE (correspondente à x) e temos AL. Ele afirma também que as sucessivas distâncias dx's são constantes, concluindo que o ponto de inflexão corresponde ao extremo de AL, devendo, assim, encontrar esse extremo utilizando o método proposto por ele mesmo.

Figura 10: Representação do momento em que a distância $\mathbf{AT}$ chega em seu extremo em $\mathbf{AL}$, ou seja, na tangente do ponto de inflexão.



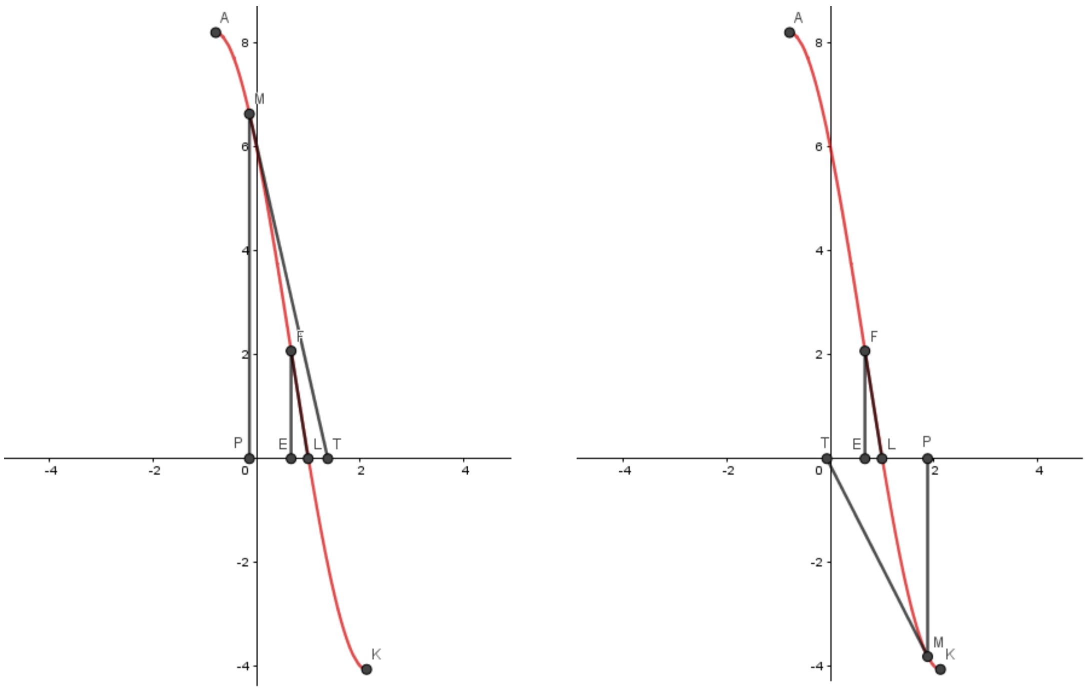
Fonte: autores

Por fim, usando a regra da diferencial, do produto e da soma, temos:

$$\mathrm{d(AL)} = \mathrm{d}\left(\mathrm{y}\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dy}} - \mathrm{x}\right) = \left(\mathrm{dy} \cdot \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dy}} + \mathrm{y}\left(\frac{-\mathrm{dxddy}}{\mathrm{dy}^2}\right)\right) - \mathrm{dx} = \mathrm{dx} - \frac{\mathrm{ydxddy}}{\mathrm{dy}^2} - \mathrm{dx} = \frac{-\mathrm{ydxddy}}{\mathrm{dy}^2}.$$

Como dx foi considerada constante, não pode ser 0, o que nos leva à $\frac{-\mathrm{yddy}}{\mathrm{dy}^2} = 0 \Longrightarrow -\mathrm{yddy} = 0 \Longrightarrow \mathrm{yddy} = 0$. L'Hôpital considera y diferente de 0, o que implica em $\mathrm{ddy} = 0$. Assim, descreve-o como método para encontrar pontos de inflexão e igualar a segunda derivada à 0. Entretanto, deve-se atentar ao fato de que extremos locais podem alterar o comportamento da curva, fazendo com que T ultrapasse L (Figura 11). Quando M se aproxima de F, um ponto de inflexão, o T, aproxima-se de L, atinge-o e começa a se afastar; entretanto, quando M aproxima-se de K, um extremo da curva, T ultrapassa L, contrariando o argumento de L'Hôpital, ao afirmar que L seria o ponto mais à esquerda da tangente. Assim, embora o argumento esteja correto algebricamente, geometricamente existem equívocos.

Figura 11: Quando o ponto $\mathbf{M}$ se aproxima do ponto $\mathbf{K}$, um extremo da curva, $\mathbf{T}$ ultrapassa $\mathbf{L}$



Fonte: autores

2.3.3 Raio de Curvatura

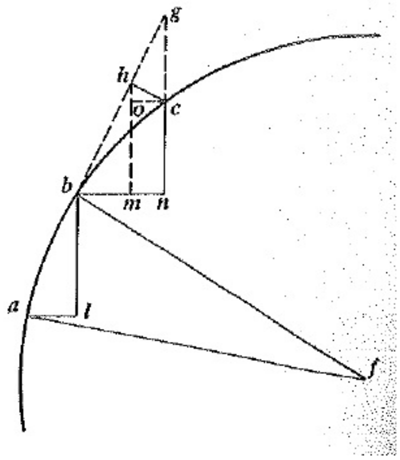
De acordo com Baron e Bos (1974c, p.10), a questão de curvatura foi estudada por Huygens (por volta de 1600) quando estava trabalhando com relógio pendular, embora ele não tenha apresentado uma regra geral para calcular o raio de curvatura. Tal fórmula foi publicada por Jakob Bernoulli, em 1694, com símbolos e notações leibnizianos, o qual a derivou quando buscava resolver um problema relacionado à forma de barras elásticas, conforme representação presente na Figura 12.

Em relação à Figura 12, é importante destacar que Bernoulli considerou como um ponto na Evoluta (centro de curvatura) da curva f como a posição limite de encontro das retas normais à curva em a e b, que, por sua vez, consistem no raio do círculo tangencial (círculo onde o raio é o de curvatura e o centro, o de curvatura).

Supõe-se, segundo Bernoulli (*apud* BARON; BOS, 1974c, p. 11), que tanto ab como ac sejam infinitamente pequenos. Além disso, o ângulo $a\hat{f}b$ é congruente ao ângulo $g\hat{b}c$ e, $bh \equiv bc$. A partir disso são construídas as linhas al, bn e co, são paralelas entre si e correspondentes às abscissas; portanto, como correspondem a elas e são infinitamente pequenas (pois ab e bc são), constituem diferenciais de x (dx's). Ao mesmo tempo são construídos também os segmentos bl, hom e gcn, paralelos entre si e correspondentes às ordenadas e, pelo mesmo motivo das abscissas, são diferenciais de y (dy's). Considera-se, enfim, que os dx's são iguais entre si.

Bernoulli (*apud* BARON; BOS, 1974c, p. 11) apresenta a seguinte relação: $\frac{\mathrm{gc}}{\mathrm{bc}} = \frac{\mathrm{gc}}{\mathrm{hc}} \cdot \frac{\mathrm{hc}}{\mathrm{bc}}$, que é possível porque o triângulo bng é semelhante ao triângulo chg (os ângulos reto e $\mathrm{h\hat{c}g}$ são congruentes), assim como o triângulo hcb é semelhante ao triângulo abf (como são isósceles, possuem dois lados proporcionais e $\mathrm{a\hat{f}b} \equiv \mathrm{h\hat{b}c}$). Assim, utilizando novamente a semelhança de triângulos, Bernoulli faz a seguinte manipulação: $\frac{\mathrm{gc}}{\mathrm{hc}} \cdot \frac{\mathrm{hc}}{\mathrm{bc}} = \frac{\mathrm{bg}}{\mathrm{bn}} \cdot \frac{\mathrm{ab}}{\mathrm{bf}} = \frac{\mathrm{ab}}{\mathrm{al}} \cdot \frac{\mathrm{ab}}{\mathrm{bf}}$. Novamente é utilizada a semelhança de triângulos, em que se deduz que o triângulo bng é semelhante ao triângulo alb ($\mathrm{b\hat{a}l} \equiv \mathrm{g\hat{b}n}$), pois ab é infinitamente pequeno, e os ângulos retos são equivalentes.

Figura 12: Ilustração sobre como derivar a fórmula do cálculo da curvatura.



Fonte: Baron e Bos (1974c, p. 11)

Ainda nessa perspectiva, como tratam-se de diferenciais, e como os dx's são constantes, ocorre a seguinte substituição: $\frac{\mathrm{gc}}{\mathrm{bc}} = \frac{\mathrm{gc}}{\mathrm{hc}} \cdot \frac{\mathrm{hc}}{\mathrm{bc}} = \frac{\mathrm{bg}}{\mathrm{bn}} \cdot \frac{\mathrm{ab}}{\mathrm{bf}} = \frac{\mathrm{ab}}{\mathrm{al}} \cdot \frac{\mathrm{ab}}{\mathrm{bf}} = \frac{\mathrm{ds}}{\mathrm{dx}} \cdot \frac{\mathrm{ds}}{\mathrm{z}} = \frac{\mathrm{ds}^2}{\mathrm{zdx}}$, em que ds consiste na diferencial do comprimento de arco e z no raio do círculo tangencial. Observe-se que: $\mathrm{gc} = \mathrm{gn} - \mathrm{nc} = \mathrm{bl} - \mathrm{nc}$; dessa forma, como gc pode ser escrita como a diferença de duas diferenciais, temos que gc é uma diferencial de 2ª ordem e: $\mathrm{gc} = \mathrm{gn} - \mathrm{nc} = \mathrm{bl} - \mathrm{nc} = \mathrm{ddy}$. Como bc também é infinitamente pequeno, corresponde à diferencial do comprimento de arco. Portanto: $\frac{\mathrm{gc}}{\mathrm{bc}} = \mathrm{ddy}/\mathrm{ds}$. Comparando as igualdades, temos que: $\frac{\mathrm{ds}^2}{\mathrm{zdx}} = \frac{\mathrm{ddy}}{\mathrm{ds}} \Longrightarrow \mathrm{z} = \frac{\mathrm{ds}^3}{\mathrm{dxddy}}$, correspondente ao raio do círculo tangencial, o qual fornece a curvatura.

Baron e Bos (1974c, p. 13-14) trazem um exemplo sobre como utilizar a fórmula dada por Bernoulli para encontrar a curvatura. No exemplo, consideram a curva $\mathrm{ay} = \mathrm{x}^2$ e o ponto (a, a). Desse modo, temos que: $\mathrm{ay} = \mathrm{x}^2 \Longrightarrow \mathrm{ady} = 2\mathrm{xdx}$ e $\mathrm{addy} = 2\mathrm{dxdx} + 2\mathrm{xddx}$. Mas como dx é considerado constante, $\mathrm{ddx} = 0$ e: $\mathrm{addy} = 2\mathrm{dxdx}$. Assim, com ds como a diferencial do comprimento de arco, temos que $\mathrm{ds} = \sqrt{\mathrm{dx}^2 + \mathrm{dy}^2} = \sqrt{\mathrm{dx}^2 + \left(\frac{2\mathrm{x}}{\mathrm{a}}\mathrm{dx}\right)^2} = \mathrm{dx}\sqrt{1 + \left(\frac{2\mathrm{x}}{\mathrm{a}}\right)^2}$. Utilizando a fórmula da curvatura, temos:

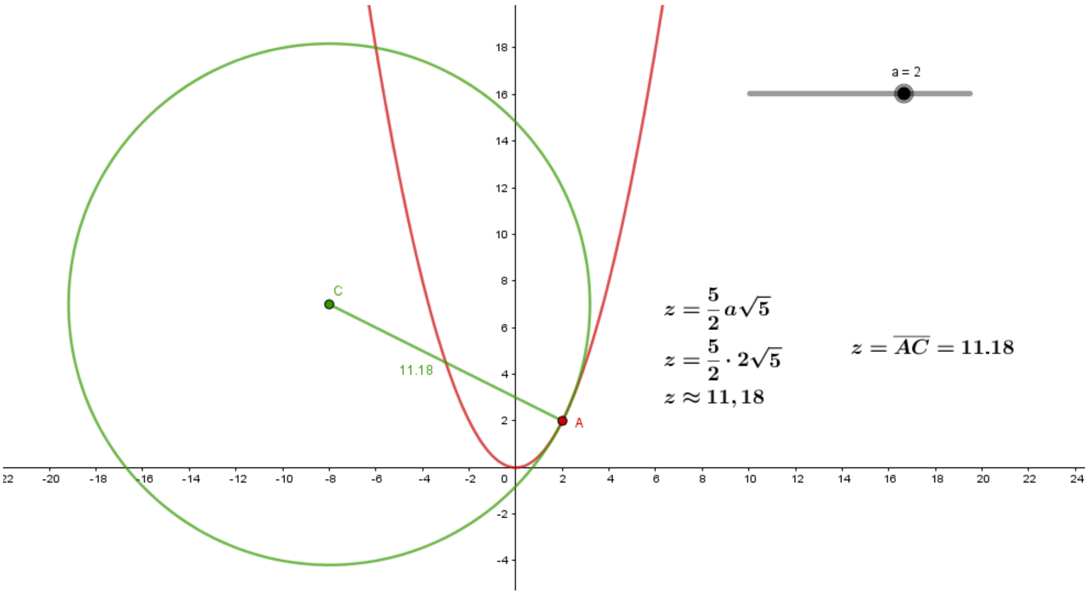
$$\mathrm{z} = \frac{\mathrm{ds}^3}{\mathrm{dxddy}} = \frac{\mathrm{dx}^3\left(\sqrt{\left(1 + \left(\frac{2\mathrm{x}}{\mathrm{a}}\right)^2\right)}\right)^3}{\mathrm{dx} \cdot \frac{2}{\mathrm{a}}\mathrm{dx}^2} = \frac{\mathrm{dx}^3\left(\sqrt{\left(1 + \left(\frac{2\mathrm{x}}{\mathrm{a}}\right)^2\right)}\right)^3}{\frac{2}{\mathrm{a}}\mathrm{dx}^3} = \frac{\mathrm{a}}{2}\left(\sqrt{\left(1 + \left(\frac{2\mathrm{x}}{\mathrm{a}}\right)^2\right)}\right)^3$$

Segundo Baron e Bos (1974c, p.14), substituímos $\mathrm{x} = \mathrm{a}$, obtendo:

$$z = \frac{a}{2}\left(\sqrt{\left(1+\left(\frac{2a}{a}\right)^2\right)}\right)^3 = \frac{a}{2}\left(\sqrt{1+2^2}\right)^3 = \frac{a}{2}\left(\sqrt{5}\right)^3 = \frac{5}{2}a\sqrt{5}.$$

Na Figura 13, z corresponde ao raio de curvatura, isto é, ao do círculo dela. Por sua vez, o círculo de curvatura corresponde, de acordo com Thomas (2012, p. 194), ao que tangencia uma curva em um determinado ponto P (ambos possuem a mesma reta tangente no ponto P). Sua curvatura é a mesma que a da curva em P e situa-se no lado côncavo desta. O método utilizado para ilustrar a Figura 13 foi o seguinte: primeiramente, utilizamos a fórmula encontrada por Baron e Bos que resulta em $5\sqrt{5} \approx 11{,}18$. Em seguida, optamos pela ferramenta Círculo Osculador, do GeoGebra, seguida pela ferramenta Raio, que fornece o raio de um determinado círculo; em nosso caso, do círculo osculador, que resultou em $11{,}18$.

Figura 13: Ilustração do exemplo anterior, para $\mathbf{a = 2}$



Fonte: autores

2.3.4 O Método da Substituição para Integrações

Baron e Bos (1974c, p.14) apontam que, na época aqui considerada, embora houvesse regras que permitissem diferenciar qualquer quantidade variável proposta (considerando que a curva fosse diferenciável), não se possuía uma maneira fixa de calcular integrais. Essa falta de regras constituía um dos maiores empecilhos no estudo do Cálculo Infinitesimal. Então, Newton e Leibniz estudaram diversas curvas com o intuito de construir tabelas indicando integrais destas e verificar quais tipos poderiam ser integradas. Embora não existissem regras para a integração, havia uma série de métodos e técnicas que poderiam ser usados para integrar curvas, destacando-se o método da substituição.

Segundo Johann Bernoulli (*apud* BARON; BOS, 1974c, p. 15), pode ser que houvesse muitas quantidades diferentes envolvidas na expressão que se desejava integrar, o que dificultava sua resolução. Nesse caso, Bernoulli explicou ao marquês de L'Hôpital que poderíamos tomar um termo dessa expressão e a igualar a outra variável qualquer, de modo a simplificar a integração. Em seguida, explicou que todos os outros termos envolvidos na expressão deveriam ser mudados em função da nova variável, incluindo as diferenciais. Somente após a integração era possível desfazer a substituição, chegando-se na integral desejada inicialmente.

Bernoulli (*apud* BARON; BOS, 1974, p. 15) cita como exemplo o cálculo da integral de $(ax + xx)dx\sqrt{a + x}$. Substituindo-se o termo $\sqrt{a+x}$ por y, temos que: $\sqrt{a+x} = y \Rightarrow a + x = yy \Rightarrow x = yy - a$, resultando na diferencial: $dx = 2ydy$. O autor explica que, fazendo as substituições necessárias, chegamos a: $(ax + xx)dx\sqrt{a+x} = [a(yy - a) + (yy - a)(yy - a)]2ydy \cdot y = (ayy - a^2 + y^4 - 2ayy + a^2)2yydy = 2y^6dy - 2ay^4dy$. Calculando-se a integral, obtemos: $\int 2y^6dy - 2ay^4dy = \frac{2}{7}y^7 - \frac{2}{5}ay^5$. Dessa forma é possível desfazer a substituição: $\frac{2}{7}y^7 - \frac{2}{5}ay^5 = \frac{2}{7}\left(\sqrt{x+a}\right)^7 - \frac{2}{5}a\left(\sqrt{x+a}\right)^5 = \frac{2}{7}(x+a)^3\sqrt{x+a} - \frac{2}{5}a(x+a)^2\sqrt{x+a}$, resultando em: $\int (ax + xx)dx\sqrt{a+x} = \frac{2}{7}(x + a)^3\sqrt{x+a} - \frac{2}{5}a(x+a)^2\sqrt{x+a}$.

Baron e Bos (1974, p. 16-17) explicam as diferenças do método de substituição utilizado por Bernoulli e o utilizado atualmente, valendo-se da notação atual para isso. Primeiramente, é descrito o método moderno, exemplo do qual se vale para resolvê-lo. Consideremos as funções $f(x)$, $g(x)$ e $k(x)$, nas quais $f(x) = g[k(x)]k'(x)$. Se $G(x)$ for a primitiva de $g(x)$, pela Regra da Cadeia, temos que: $\frac{d}{dx}\left[G[k(x)]\right] = G'[k(x)]k'(x) = g[k(x)]k'(x)$. Logo, se $F(x)$ for a primitiva de $f(x)$, então $F(x) = G[k(x)]$. Porém, se $k(x) = y$, temos que $k'(x) = dy$, resultando em: $\int_a^b g[k(x)]k'(x)dx = \int_{k(a)}^{k(b)} g(y)dy = G(y)|_{k(a)}^{k(b)}$.

De acordo com Baron e Bos (1974, p. 16-17), resolvendo o exemplo dado por Bernoulli com essa simbologia, temos que: $f(x) = (ax + x^2)\sqrt{a+x}$; se tomarmos $y = k(x) = \sqrt{a+x}$, veremos que $[k(x)]^2 = a + x \Rightarrow x = [k(x)]^2 - a$. Podemos concluir também que $k'(x) = \frac{1}{2}(a+x)^{\frac{-1}{2}}$, obtendo-se:

$$\begin{aligned} f(x) = g[k(x)]k'(x) &= (a+x)\sqrt{a+x} \cdot 2\sqrt{a+x} = 2x(a+x)(a+x) \\ &= 2[[k(x)]^2 - a][[k(x)]^2]^2 = 2[k(x)]^6 - 2a[k(x)]^4. \end{aligned}$$

Logo,

$$g(y) = 2y^6 - 2ay^4 \text{ e } \int g(y)dy = \int (2y^6 - 2ay^4)dy = \frac{2}{7}y^7 - \frac{2}{5}ay^5 = G(y).$$

Por fim, temos que $F(x) = G[k(x)] = \frac{2}{7}(a+x)^{\frac{7}{2}} - \frac{2}{5}a(a+x)^{\frac{5}{2}}$.

Ainda nessa linha de raciocínio, nota-se o uso da substituição de uma maneira diferente, na qual $\int_a^b g(x)dx = \int_{h(a)}^{h(b)} g[k(x)]k'(x)dx$, se $h[k(x)] = x$. Assim, utilizando essa simbologia, temos que $g(x) = (ax + x^2)\sqrt{a+x}$. Se tomarmos $h(x) = \sqrt{a+x}$, obtemos $h[k(x)] = x \Leftrightarrow \sqrt{[a + k(x)]} = x \Leftrightarrow a + k(x) = x^2 \Leftrightarrow k(x) = x^2 - a$, e, portanto $k'(x) = 2x$. Substituindo na integração, confirmamos que:

$$\begin{aligned} \int_{-a}^{x} g(x)dx &= \int_0^{(a+x)^{\frac{1}{2}}} \left[a(x^2 - a) + (x^2 - a)^2\sqrt{a + (x^2 - a)}\right] 2xdx \\ &= \int_0^{(a+x)^{\frac{1}{2}}} [(ax^2 - a^2 + x^4 - 2ax^2 + a^2)x]2xdx \\ &= \int_0^{(a+x)^{\frac{1}{2}}} 2x^2(x^4 - ax^2)dx \\ &= \int_0^{(a+x)^{\frac{1}{2}}} 2x^6 - 2ax^4dx = \frac{2}{7}x^7 - \frac{2}{5}ax^5|_0^{(a+x)^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{2}{7}\left[(a+x)^{\frac{1}{2}}\right]^7 - \frac{2}{5}a\left[(a+x)^{\frac{1}{2}}\right]^5 = \\ &= \frac{2}{7}(a+x)^{\frac{7}{2}} - \frac{2}{5}a(x+a)^{\frac{5}{2}}. \end{aligned}$$

3 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com este trabalho, pudemos perceber a potência do Cálculo Infinitesimal desenvolvido por Leibniz, o que, em grande parte, deve-se à sua notação, a qual facilitou as operações envolvidas. No entanto, embora a perspectiva leibniziana tenha representado um avanço para a Matemática, só foi parcialmente aceita, pois a partir dela o Cálculo poderia ser explicado utilizando-se a Geometria Euclidiana, embora apresentasse maior relação com a Álgebra do que os métodos geométricos utilizados até então, que derivavam parte dos geômetras gregos e parte da Geometria Analítica, de Descartes.

É interessante também observar como o Cálculo Infinitesimal deu origem ao atual Cálculo Diferencial e Integral, o qual originou-se e desenvolveu-se sem os conceitos de “função” e “limite”, que surgiriam depois, embora a busca por definir aquela tenha sido assídua nesse período, como podemos constatar em Zuffi (2016). Tal ausência era suprida, parcialmente, utilizando-se os Infinitesimais, o que causou grande desconfiança por parte dos cientistas da época. Um dos maiores problemas, por exemplo, eram as diferenciais de ordens superiores, pois consistiam em quantidades menores do que as que já eram infinitamente pequenas. Leibniz adotou a seguinte postura em relação aos Infinitesimais: acreditava que serviam como símbolos para exemplificar o que poderia ser explicado pelo método da exaustão.

Devido a tais problemas, o Cálculo Infinitesimal sofreu diversas críticas ao longo dos séculos, até que os conceitos de “limite” e “derivada” pudessem ser relacionados. As principais estavam relacionadas ao uso dos Infinitesimais, pois não havia como garantir a existência destes, embora seu uso levasse a resultados corretos.

Podemos concluir que o Cálculo Infinitesimal apresentado por Leibniz, apesar das críticas, consistiu numa importante ferramenta matemática, que pôde ser utilizada na resolução de diversos problemas ao longo dos séculos, mesmo que alguns de seus conceitos não sejam tão precisos sob o ponto de vista da Matemática atual.

REFERÊNCIAS

BARON, Margaret E., Bos, H.J.M. Unidade 3: Newton e Leibniz. In: **Curso de História da Matemática:** origens e desenvolvimento do cálculo. Tradução de José Raimundo Braga Coelho, Rudolf Maier e Maria José M.M. Mendes. Brasília: Universidade de Brasília, 1985, c1974a.

BARON, Margaret E., Bos, H.J.M. Unidade 4: O cálculo no século XVIII - Fundamentos. In: **Curso de História da Matemática:** origens e desenvolvimento do cálculo. Tradução de José Raimundo Braga Coelho, Rudolf Maier e Maria José M.M. Mendes. Brasília: Universidade de Brasília, 1985, c1974b.

BARON, Margaret E., Bos, H.J.M. Unidade 5: O cálculo no século XVIII - Técnicas e aplicações. In: **Curso de História da Matemática:** origens e desenvolvimento do cálculo. Tradução de José Raimundo Braga Coelho, Rudolf Maier e Maria José M.M. Mendes. Brasília: Universidade de Brasília, 1985, c1974c.

L'HÔPITAL, Guillaume-François-Antoine de. ***Analyse des infiniment petits, pour l'intelligence des lignes courbes***. Paris: A Paris, de L'Imprimerie Royale, 1696.

LÜDKE, Menga; ANDRÉ, Marli E. D. A. Métodos de coleta de dados: observação, entrevista e análise documental. In: LÜDKE, Menga; ANDRÉ, Marli E. D. A. **Pesquisa em Educação**: Abordagens Qualitativas. São Paulo: Epu, 1986. Cap. 3. p. 25-44.

MENDES, Iran Abreu. Pesquisas em história da Educação Matemática no Brasil em três dimensões. **Quipu**, 2012. Vol. 14, núm. 1, pp. 69-92.

THOMAS, George B. *et al*. **Cálculo.** Vol. 2. 12. ed. São Paulo: Pearson, 2012.

ZUFFI, Edna Maura. Alguns aspectos do desenvolvimento histórico do conceito de função. **Hipátia**, 2016. Vol. 1, núm.1, pp. 1-10.

Submetido em agosto de 2020.

Aprovado em novembro de 2020.

Gabriel Faria Vieira

Licenciado em Matemática pela Universidade Federal do Triângulo Mineiro (UFTM), Uberaba, Minas Gerais, Brasil. ID Lattes: 8316885136414563.

Contato: gabriel170898123@gmail.com

Mônica de Cássia Siqueira Martines

Doutora em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista (Unesp). Professora Adjunta da Universidade Federal do Triângulo Mineiro (UFTM), Uberaba, Minas Gerais, Brasil. ID Lattes: 6625047361725116 Orcid ID: 0000-0002-3143-9206

Contato: monica.siqueiramartines@uftm.edu.br

Uma Experiência “Pibidiana” de Resolução de Problemas do Pisa nas Aulas de Matemática

A "Pibidian" Experience of Solving Problems from Pisa Tests in Mathematics Classes

Tailine Audilia de **Santi**
Universidade Estadual Paulista (Unesp)
Fábio Alexandre **Borges**
Universidade Estadual do Paraná (Unespar)
Caio **Juvanelli**
Universidade Estadual de Londrina (UEL)
Vinícius Oliveira Romano da **Silva**
Centro de Educação Santa Rita (Cedus)

RESUMO

Um problema é uma situação na qual os estudantes não têm métodos estabelecidos para chegar a uma resposta correta. Baseado nisso, surge a estratégia de ensino através da Resolução de Problemas, a qual entende a possibilidade de se ensinar e aprender matemática por meio de tais atividades. No caso do presente relato, faremos uma análise baseada na aplicação de uma atividade adaptada do Programme for International Student Assessment (PISA) 2000, intitulada “Maçãs”. Como objetivo principal para o presente relato de experiência, temos o de identificar as principais contribuições formativas (do futuro professor) e de aprendizagem de Matemática quando utilizamos a estratégia de Resolução de Problemas. Dentre os referenciais teóricos adotados, destacamos os de Onuchic e Allevatto, cujas etapas propostas pelas autoras foram adotadas durante a aplicação em uma turma de 9º ano do Ensino Fundamental de um colégio público do interior do Estado do Paraná. Esta atividade faz parte de um projeto maior, desenvolvido junto ao Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID) em um curso de Licenciatura em Matemática. Dos cinco grupos formados para a resolução das atividades, totalizando 26 alunos, todos participaram das discussões e da plenária, contribuindo para a resolução, de forma que houve diversidade na escolha de estratégias matemáticas.

Palavras-chave: Ensino de Matemática. PIBID. PISA. Resolução de Problemas.

ABSTRACT

A problem is a situation in which students do not have established methods to arrive at a correct solution. Based on that, teaching strategy emerges through problem solving, which understands the possibility of teaching and learning mathematics through such activities. In the case of this report, we will make an analysis based on the application of an adapted activity of the Program for International Student Assessment (PISA) 2000, entitled “Apples”. The main objective of this current experience report was to identify the main formative and mathematical learning (future teachers’) contributions when we use the problem solving methodology. Among the theoretical frameworks adopted, we highlight Onuchic and Allevatto’s, whose steps proposed by the authors were adopted during the application in a 9th grade elementary school class of a public school in the interior of the State of Paraná. This activity is part of a larger project developed with the Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID) in a Mathematics Degree course. Out of the five groups formed for the resolution of activities, totalizing 26 students, all of them participated in discussions and plenary sitting, contributing to the resolution so that there was diversity in the choice of mathematical strategies.

Keywords: Mathematics Teaching. PIBID. PISA. Problem Solving.

1 INTRODUÇÃO

A Resolução de Problemas tem se apresentado como uma estratégia[1] de ensino destacável pela literatura de pesquisa em Educação Matemática, proporcionando situações em que o aluno lida com informações, analisa encaminhamentos, interpreta textos matemáticos, trabalha em equipe, promove a interdisciplinaridade, desenvolve a criticidade, dentre outras características em potencial. Baseando-nos nessa estratégia, aplicamos um problema em uma turma de 9º ano do Ensino Fundamental de um colégio estadual do município de Campo Mourão, desenvolvido com duração de 2 horas-aula. Dentre nossos objetivos iniciais, destacamos a abordagem de conteúdos matemáticos por meio da Resolução de Problemas, situações que envolvam os alunos em processos de investigação, a elaboração de questões, a formulação de conjecturas, o diálogo, a valorização do erro como oportunidade de aprendizado, a autonomia do estudante etc. Os acadêmicos que aplicaram o problema foram amparados pelo projeto Pibid. Esse programa oferece bolsas de iniciação à docência aos alunos de cursos de licenciatura, com objetivo de antecipar o vínculo entre os futuros professores e as salas de aula da rede pública. Com essa iniciativa, o Pibid faz uma articulação entre a Educação Superior (por meio das licenciaturas), a escola e os sistemas estaduais e municipais. Dessa maneira, sustentados por esse programa, foi possibilitada a participação ativa na sala de aula a qual o problema foi aplicado.

A busca por metodologias que visem melhorar a qualidade do ensino precisa ser uma das preocupações dos professores de matemática. É importante utilizar estratégias que envolvam os alunos efetivamente nos processos de ensino e aprendizagem, o que favorece diretamente a construção de um ambiente em que a matemática deixe de ser algo distante e desvinculado da realidade do aluno. A Resolução de Problemas pode contribuir para esse processo, visto que essa estratégia de ensino incentiva a criatividade e a participação direta do aluno em seu aprendizado quando aplicada de maneira adequada e com propósito de ensinar matemática por meio dessas atividades.

A Resolução de Problemas, dentre outras características, pode favorecer a valorização de um ensino de Matemática mais conceitual e menos procedimental. Nesse sentido, Romero destaca que:

> [...] os conteúdos de matemática são apresentados aos alunos como um interminável discurso simbólico, abstrato e incompreensível. O ensino da matemática tem se ocupado em garantir que os alunos dominem apenas técnicas e fórmulas, ao invés de desenvolverem também a compreensão acerca dos conteúdos. Há, portanto, necessidade de refletirmos em que aspectos a resolução de problemas ajuda os alunos na construção dos saberes matemáticos e como os professores podem planejar boas situações de aprendizagem e fazer intervenções adequadas às necessidades dos alunos em cada etapa do processo (ROMERO, s.d, p.2).

É importante então buscar formas de trazê-las para a sala de aula. Com a intenção de colaborar com o debate e mostrar que a aplicação dessa metodologia citada pode ser viável no ensino, bem como contribuir com a formação dos futuros professores, desenvolvemos o presente relato de experiência aplicando um problema em uma escola pública, descrevendo o referencial teórico utilizado bem como as análises das resoluções propostas pelos alunos para que possa

[1] Utilizaremos no presente relato o termo estratégia, ao invés de outros, como metodologia, por considerá-lo mais adequado ao que entendemos ser proporcionado pela Resolução de Problemas quando utilizada para se ensinar matemática. Metodologia, por exemplo, reflete algo mais estático. Já estratégia, entendemos como algo mais dinâmico, flexível, subjetivo.

servir de parâmetro para os profissionais da Educação Básica que desejem aplicar atividades com essas características. Nosso objetivo principal no presente texto, de características de um relato de experiência, é de identificar as principais contribuições formativas (do futuro professor) e de aprendizagem de Matemática quando utilizamos a metodologia de Resolução de Problemas.

2 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COMO ESTRATÉGIA DE ENSINO

Os estudos que culminaram na aplicação da presente atividade foram desenvolvidos por meio de um levantamento bibliográfico referente à Resolução de Problemas como uma estratégia de ensino e suas aplicações no ambiente escolar. A Resolução de Problemas tornou-se parte do ensino de matemática a partir dos anos 90 (D'AMBROSIO, 2009), por meio de propostas curriculares que vinculavam a Resolução de Problemas com o ensino de matemática, visando a interdisciplinaridade e atribuindo aplicações para os conceitos ensinados. Os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997, p.37) indicam como objetivos do ensino da Matemática:

> [...] resolver situações-problema, sabendo validar estratégias e resultados, desenvolvendo formas de raciocínio e processos, como dedução, indução, intuição, analogia, estimativa, e utilizando conceitos e procedimentos matemáticos, bem como instrumentos tecnológicos disponíveis (BRASIL, 1997, p.37).

A importância dada à Resolução de Problemas como meio para se ensinar Matemática é relativamente recente e os educadores matemáticos estão aceitando a ideia de que o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas merece atenção (ALLEVATO; ONUCHIC, 2009). Sobre a Resolução de Problemas, Onuchic (1999, p.207) salienta que:

> O problema é olhado como um elemento que pode disparar um processo de construção do conhecimento. Sob esse enfoque, problemas são propostos ou formulados de modo a contribuir para a formação de conceitos, antes mesmo de sua apresentação em linguagem Matemática formal. O foco está na ação por parte do aluno (ONUCHIC, 1999, p.207).

A característica principal da Resolução de Problemas na perspectiva de estratégia de ensino é considerar como problema todo contexto que pode ser problematizado e associado a um conceito matemático ou que podem desenvolver o raciocínio lógico-matemático. Essas situações podem ser jogos, atividades planejadas com brincadeiras, problemas que não são corriqueiros e até mesmo os problemas tradicionais, desde que sejam de cunho investigativo e permitam o processo de descoberta (SCHASTAI; PEDROSO, 2010). É relevante ressaltar que a perspectiva da Resolução de Problemas é uma proposta abrangente que permite ao aluno buscar uma gama de situações, reflexões e soluções e concerne ao professor mediar essas reflexões, buscando que o aluno comunique claramente suas ideias e consiga investigar a situação em todos os seus aspectos.

Dewey (1933), já na década de 1930, propunha ao professor não carregar o currículo com tantas regras e procedimentos, escolhendo os melhores problemas sem estabelecer caminhos de resolução, e que os projetos tivessem subsídios das experiências dos alunos. Na proposta desse autor, a criança deveria dispor-se de problemas reais e resolvê-los sem uma preocupação em seguir regras, procedimentos ou algoritmos. Como salienta Van de Walle (2009), "o sistema tradicional recompensa a aprendizagem de regras, mas oferece poucas oportunidades para realmente fazer matemática". Esse mesmo autor define um problema como "qualquer tarefa ou atividade para a qual os estudantes não têm métodos ou regras prescritas ou memorizadas, nem a percepção de que haja um método específico para chegar à solução correta" (VAN DE WALLE, 2001), evidenciando a importância do não estabelecimento de regras e sim a oferta de oportunidades de investigação, construção da autonomia e identificação de soluções. Ainda para este autor, a Resolução de Problemas deve ser tratada como um método de ensino e salienta que a introdução do conteúdo deve partir da realidade dos alunos por meio de uma contextualização problemática.

A Resolução de Problemas é fundamentada em recomendações dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (BRASIL, 1996; 1997; 1998; 1999), das Diretrizes Curriculares Estaduais (DCE) (PARANÁ, 2006) e do Conselho Nacional dos Professores de Matemática – NCTM, em inglês – (NCTM, 2000), pois conceitos e situações são introduzidos e aprendidos por meio da Resolução de Problemas, bem como o desenvolvimento de habilidades matemáticas. Mais recentemente, a Base Nacional Comum Curricular, aprovada em 2017, fortaleceu novamente a importância da Resolução de Problemas como promotora de "competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos" (BRASIL, 2017, p.266).

Durante o processo de ensino e de aprendizagem por meio da Resolução de Problemas, é importante que o professor busque oportunidades de entender a compreensão do conteúdo por parte dos alunos e saber se os conceitos foram entendidos. Os questionamentos levantados são de extrema importância, visto que o professor pode analisar e interpretar o desenvolvimento das habilidades matemáticas dos alunos. Cabe destacar que, muito mais do que apenas mudar as atividades, repensar a conduta docente durante a aplicação da atividade é indispensável, visto que uma mesma atividade pode ser aplicada seguindo ou não os preceitos da Resolução de Problemas como um meio para se ensinar e aprender matemática.

Ainda com relação ao papel do professor frente a essa estratégia, Pólya (2006) salienta que "o professor deve auxiliar, nem de mais nem de menos, de tal modo que ao estudante caiba uma parcela razoável do trabalho" (p.1), uma vez que tais problemas são para incentivar que o aluno identifique qual caminho é mais viável para a resolução e para que ele desenvolva os seus saberes matemáticos. O professor seria, portanto, um mediador entre o problema proposto e o aluno, deixando que esse entenda de maneira independente o que o problema propõe.

As resoluções de problemas podem englobar muitos conceitos matemáticos em um único problema, e quanto mais o aluno se interessar em resolvê-lo, mais conceitos ele conseguirá compreender e ter uma discussão com o professor sobre tais assuntos. Nesse sentido, cabe destacar o fato de que tais temáticas surgem da necessidade de seu uso durante a atividade de resolução, promovendo um estudo de diferentes conceitos de maneira interligada e não isoladamente. É importante que o professor não entregue soluções prontas, mas incentive o aluno para compreender e resolver o problema por diferentes caminhos. Para ensinar por meio da Resolução de Problemas, é fundamental que o professor seja consciente de que todos os alunos são capazes de criar ideias significativas sobre matemática (VAN DE WALLE, 2001). Conforme esse autor, professores de matemática devem envolver em seu trabalho quatro componentes básicos: a valorização da disciplina Matemática em si mesma – gostar de matemática, a compreensão de como os estudantes aprendem e constroem suas ideias, possuir a habilidade de planejar e selecionar atividades que ofereçam aos estudantes um aprendizado de matemática em um ambiente de Resolução de Problemas e ter a habilidade em incorporar a avaliação ao processo de ensino para aumentar a aprendizagem e aprimorar desenvolvimento dos estudantes.

Cada estudante é singular e isso torna o ambiente de sala de aula multifacetado, e compete ao docente reconhecer essa pluralidade no momento de selecionar um problema para aplicar. É importante que o problema compreenda diversas realidades. Dessa forma, não há métodos prescritos para a aplicação desta estratégia em sala de aula (SHIMIZU, 2003; KRULIK; RUDNICK, 2005; ONUCHIC; ALLEVATO, 2005; VAN DE WALLE; LOVIN, 2006), mas o professor é responsável por buscar o método que melhor se aplica ao seu contexto.

Onuchic *et al.* (2014) propuseram um itinerário a fim de subsidiar os professores para a aplicação de um problema. Este roteiro consiste em dez passos, os quais são: (1) Proposição do problema, (2) leitura individual, (3) leitura em conjunto, (4) resolução do problema, (5) observar e incentivar, (6) registro das resoluções na lousa, (7) plenária, (8) busca do consenso, (9) formalização do conteúdo, (10) proposição e resolução de novos problemas.

A proposição do problema é o momento em que o professor seleciona a atividade que mais se adequa, do seu ponto de vista, ao conteúdo a ser introduzido, posto que nessa estratégia de ensino os problemas são propostos aos alunos antes de lhes ter sido apresentado formalmente o conteúdo matemático, e é importante que o problema faça com que os estudantes sintam-se desafiados a resolvê-lo. A leitura individual é solicitada aos alunos a fim de que esses se sintam familiarizados com o problema e iniciem a interpretação individualmente. Em seguida, a leitura em conjunto possibilita uma melhor compreensão da atividade e, contando com o auxílio do docente, os alunos nesse momento esclarecem as possíveis dúvidas que surgirem – seja por palavras desconhecidas, interpretação do texto, contextos etc. É importante solicitar aos alunos que formem grupos para a resolução do problema de maneira que esses construam mutuamente estratégias.

Durante a resolução do problema, o professor assume o papel de observador e deve incentivar os alunos a resolverem a atividade, sem interferir nas estratégias de resolução adotadas pelos alunos. O professor pode estimular os discentes a utilizarem conhecimentos prévios e tentar métodos diferentes para a resolução, mas não deve indicar, no entanto, sucessos ou insucessos no decorrer da resolução, ou até mesmo responder questões elaboradas pelos alunos de modo que desmotive a busca pelo desafio da resolução. Em seguida, é necessário realizar o registro das resoluções dos grupos na lousa para que todas as estratégias sejam visualizadas, possibilitando a plenária.

Na plenária, cada caminho utilizado é discutido e os alunos são convidados a defenderem seu ponto de vista. O professor coloca-se como mediador e guia das discussões, esclarecendo dúvidas e incentivando a participação de todos os alunos. A busca do consenso é dada de maneira que toda a sala discuta sobre os resultados e analisem os processos para chegar a uma solução, para que haja unanimidade quanto ao resultado correto, sem, necessariamente, adotarem os mesmos caminhos da resolução. O professor assume o papel de organizador das ideias, formalizando o conteúdo na lousa, em linguagem matemática, padronizando os conceitos vistos por meio do problema e utilizando esse para exemplificar a situação. Após a formalização do conceito, novos problemas podem ser propostos.

Para que essa metodologia seja devidamente trabalhada, é necessário que os docentes envolvidos não se apeguem a planejamentos de conteúdos e currículos sequencialmente instituídos para um determinado período letivo. É de extrema importância que os professores deem sentido à aprendizagem dos estudantes, evitando a simples representação de conceitos e o ato de decorar fórmulas e conteúdos. Afinal de contas, seguir a prescrição dos conteúdos inviabiliza a Resolução de Problemas da maneira como estamos aqui defendendo, já que a defesa das regras não contempla o espírito investigador e criativo necessário às atividades de Resolução de Problemas.

A metodologia de Resolução de Problemas pode ser aplicada de modo que o professor a utilize para introdução de um conteúdo, ou até mesmo para discutir conceitos previamente apresentados, a fim de desenvolver o potencial dos alunos. Schroeder e Lester (1989) apresentam três caminhos diferentes para abordar Resolução de Problemas: “[...] (1) ensinar sobre resolução de problemas; (2) ensinar matemática para resolver problemas; e (3) ensinar matemática através da resolução de problemas” (SCHROEDER; LESTER, 1989 *apud* ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p.79).

Quando o professor estabelece seus critérios de avaliação de aprendizagem, ele expressa indiretamente uma conduta política que se fundamenta num conjunto de princípios e valores que identificam suas concepções de sociedade, educação, escola, ensino etc. Essas concepções muitas vezes exprimem preconceitos em relação aos alunos que ferem a sua formação e classificam o erro como a falta de conhecimento e a insuficiência de habilidades matemáticas. Ao trabalhar com a Resolução de Problemas e tomando-a como uma estratégia de ensino, no entanto, essas concepções pré-estabelecidas e preconceitos precisam ser ressignificadas e é imprescindível que o professor tome uma conduta que não se atenha somente para os caminhos que o aluno está tomando para obter sucesso, como também para os erros ocasionados durante a resolução. Luckesi destaca que:

> No caso da solução bem ou malsucedida de uma busca, seja ela de investigação cientifica ou de solução prática de alguma necessidade, o não-sucesso é, em primeiro lugar, um indicador de que ainda não se chegou à solução necessária, e, em segundo lugar, a indicação de um modo de como não se resolver essa determinada necessidade. O fato de não se chegar à solução bem-sucedida indica, no caso, o trampolim para um novo salto (LUCKESI, 2002, p.56).

Os erros impulsionam a investigação e a busca por soluções, visto que é a partir do insucesso que o aluno inicia o processo de aprendizagem e descoberta, e começa uma busca por novas estratégias de resolução do problema, observando a situação com maior clareza e com novos caminhos de solução.

3 DESCRIÇÃO DO CONTEXTO DA APLICAÇÃO DO PROBLEMA

O problema foi aplicado em uma turma de 9º ano de um colégio estadual localizado no município de Campo Mourão – Paraná, onde fomos oportunizados a acompanhar e tomar conhecimento da turma por oito aulas[2] que precederam a proposição do problema. Anteriormente à aplicação do problema, por meio do projeto Pibid, desenvolvíamos encontros semanais na UNESPAR juntamente com os demais participantes do projeto e coordenadores, para discutir e analisar problemas do PISA que poderiam ser futuramente aplicados em sala de aula. Contávamos ainda com instruções do professor orientador para desenvolver uma melhor aplicação do problema.

---

[2] Nesse período de observação, nós, acadêmicos pibidianos, esclarecíamos dúvidas dos alunos, desenvolvíamos discussões de metodologias de ensino-aprendizagem da matemática e aplicávamos atividades. Contamos com o auxílio da professora regente e tínhamos o seu apoio quanto às práticas pedagógicas. Fomos norteados pelo principio base do PIBID, ressaltado no artigo 4º da Lei do Pibid, que confere como um de seus objetivos a inserção de “licenciandos no cotidiano de escolas da rede publica de educação, de maneira a proporcionar oportunidades de criação e participação em experiências metodológicas, tecnológicas e práticas docentes de caráter inovador e interdisciplinar que busquem a superação de problemas identificados no processo de ensino-aprendizagem” (CAPES, Portaria nº 096/2013).

Contamos com a participação de 26 alunos na turma com faixa etária de 13-14 anos e o tempo destinado para a resolução do problema foi de duas horas-aula. Para a aplicação, seguimos o roteiro constituído por dez passos descritos por ONUCHIC *et al* (2014). Cabe destacar que a participação da professora regente da turma foi secundária, ficando a aplicação sob a responsabilidade dos acadêmicos pibidianos. A professora regente acompanhou e auxiliou na atividade quando necessário.

Já na escola, entregamos a atividade e solicitamos para que formassem grupos, compondo-se assim quatro grupos de cinco alunos e um grupo de seis alunos. Para um melhor entendimento do que estava sendo pedido no problema, fizemos a leitura juntamente com a turma com uma breve explicação e solicitamos que os cálculos deveriam ser registrados em uma folha. Durante a aplicação e a plenária, utilizamos gravadores para registrar a fala dos alunos para, posteriormente, obtermos uma melhor análise das discussões. Nomeamos os grupos formados de Grupo I, Grupo II, Grupo III, Grupo IV e Grupo V. O problema do PISA aplicado, denominado “Maçãs”, é composto por quatro questões e foi adaptado pelos licenciandos com algumas modificações no enunciado. As adaptações foram necessárias para readequarmos a atividade para a série em questão, visto que o problema original trazia consigo informações que nós, pibidianos, julgamos desnecessárias para uma boa resolução. Esse problema foi retirado dos Itens Liberados de Matemática, do Exame PISA de 2000 (BRASIL, s.d). Essa atividade envolve, em sua maioria, o conteúdo de Números Naturais, Número Quadrado Perfeito, Valor Numérico, Expressões Algébricas, Sequências, Progressões Aritméticas, Equações e Funções. Esse último conteúdo seria introduzido pela professora regente na aula seguinte e, conforme solicitado por ela, utilizamos a aplicação do problema como uma forma de introduzi-lo. Revisamos também conceitos que já haviam sido apresentados anteriormente.

A turma era participativa nas aulas conforme observamos durante o período em que acompanhamos o andamento em sala, eram curiosos e muitos deles demonstravam interesse na disciplina e nos conteúdos, apesar dos alunos apresentarem conversas excessivas e dificuldades de aprendizagem. A turma contava ainda com diversos alunos que estavam em “recuperação” – avaliação que permite aos alunos que não atingiram a média realizar uma nova prova avaliativa para alcançar a nota –, alunos que possuíam total desinteresse na disciplina por apresentar dificuldades e também havia aqueles que se destacavam no sentido de possuir facilidade de aprendizagem. No geral, a turma era plurifacetada e tais características puderam ser observadas com cautela, como já mencionado, no período de observação concedido aos licenciandos, precedendo a aplicação do problema. Tal observação nos proporcionou maior contato com a turma, melhor relacionamento e pudemos reconhecer as dificuldades de cada aluno para uma melhor condução da aplicação do problema e da plenária.

4 EXPERIÊNCIAS DA APLICAÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS

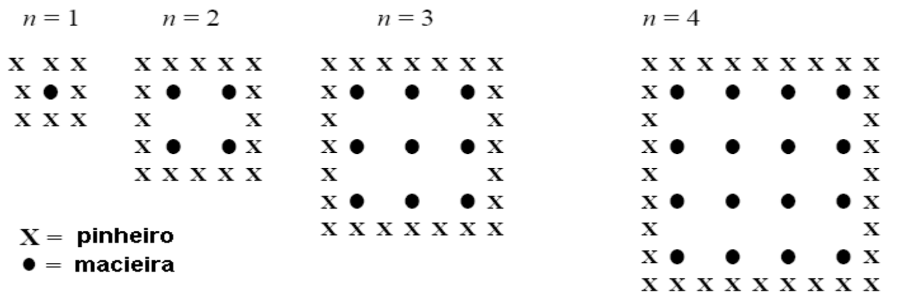
A aplicação do problema teve início quando dialogamos com os alunos sobre a estrutura da aula e de como havíamos intencionado o trabalho em equipe e a importância do envolvimento de todos nas etapas da aplicação do problema. Dispomos então uma folha com o problema a cada integrante dos grupos e percebemos que esses ficaram receosos quanto à aplicação, pois não haviam tido experiências com atividades diferenciadas desse tipo em sala de aula. Podemos justificar o receio dos alunos pela ruptura no Contrato Didático estabelecido, como cita Brousseau (1986; 1988). Para esse autor, o Contrato Didático diz respeito à “[...] um conjunto de comportamentos do professor esperados pelo aluno e, também, a um conjunto de comportamentos do aluno esperados pelo professor” (*apud* MEDEIROS, 2001, p.32).

Os estudantes, a princípio não compreenderam a nossa proposta, alegando ser um trabalho diferente e que não haviam sido apresentados ao conteúdo utilizado na resolução do problema. Realizamos a leitura com os grupos e, durante a leitura, diversos questionamentos já haviam sido formalizados e apresentados. Solicitamos aos grupos que utilizassem os conhecimentos prévios que haviam aprendido até então, tentassem escrever os seus trajetos para o resultado de maneira que ficasse claro o processo que utilizaram, que explicassem em todo o momento o seu raciocínio escrito e oralmente e questionassem os colegas sobre as soluções possíveis. No decorrer da aplicação, notamos uma mudança no comportamento dos alunos. Esses, que se mostraram inquietos e hesitaram no início, apresentaram maior interesse e curiosidade, mostrando domínio na resolução e elaborando respostas com clareza, mesmo com insegurança e esperando a confirmação do processo de suas resoluções em cada passo que desenvolviam.

A seguir, apresentamos o problema do PISA (2000), com adaptações, denominado "Maçãs", e os resultados dos grupos.

Quadro 1: Problema: Maças[3]

Um fazendeiro planta macieiras em uma área quadrada. Para protegê-las contra o vento, ele planta pinheiros ao redor do pomar. O diagrama abaixo mostra essa situação, na qual se pode ver as macieiras e os pinheiros, para um número (*n*) de filas de macieiras: (Temos $n \in \mathbb{N}$).



1 - Complete a tabela abaixo:

n	**Número de macieiras**	**Número de pinheiros**
1	**1**	**8**
2	**4**	
3		
4		
5		

2 – Encontre uma relação entre o número de fileiras de macieiras e a quantidade de pinheiros. Depois, encontre uma relação entre o número de fileiras de macieiras e a quantidade de macieiras.

3 – Sendo *n* o número de fileiras de macieiras, existe um valor *n* para o qual o número de macieiras é igual ao número de pinheiros. Encontre o valor de *n*, mostrando o método usado para fazer os cálculos.

4 – Suponha que o fazendeiro queira fazer um pomar muito maior com muitas fileiras de árvores. À medida que o fazendeiro aumenta o pomar, o que crescerá mais rápido: o número de macieiras ou o número de pinheiros? Explique como você encontrou a sua resposta.

Fonte: autores

[3] Adaptado do problema Maçãs pelos pibidianos, extraído do PISA/2000.

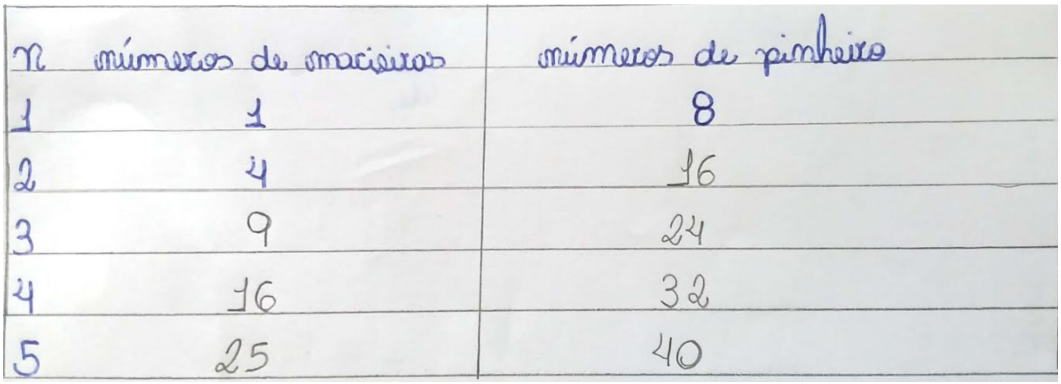
 v.6, n.1, p. 124-142, jun. 2021

4.1 Questão 1

Para completar a tabela da questão 1, conforme a figura 1, os alunos contaram no diagrama apresentado no enunciado quantas ● (macieiras) e quantos **x** (pinheiros) havia em cada situação. Porém, quando tiveram que completar a linha na qual n = 5, apresentaram certa dificuldade. Nessa etapa, alguns grupos perceberam antecipadamente regularidades na tabela, o que contribuiu para a construção da resolução na questão 2. Um dos alunos desse grupo, ao encontrar a quantidade de pinheiros quando $n = 5$, esclareceu: *A sequência está "subindo" de 8 em 8, no caso tem que multiplicar por 8. Então o próximo número* [de pinheiros] *será 40, porque 8 vezes 5 é 40*.

Outros grupos, no entanto, não perceberem relações e construíram outro diagrama com 5 linhas e 5 colunas para poderem contar e completá-la. Nesse momento, salientamos a importância da contagem no ensino da matemática, pois essa "desenvolve a habilidade de raciocínio combinatório e a capacidade de elaborar estratégias para a sua resolução" (ZANIN, 2005, p.5). Alguns alunos questionaram se não há outra maneira de se resolver a questão. Nesse momento, sugerimos que eles analisassem a tabela que já haviam completado em busca de outras possibilidades.

Figura 1: Solução apresentada pelo Grupo I



n	números de macieiras	números de pinheiro
1	1	8
2	4	16
3	9	24
4	16	32
5	25	40

Fonte: Registros do Grupo I

4.2 Questão 2

O Grupo II apresentou duas resoluções diferentes para a relação do número de macieiras com o número de fileiras n. A primeira solução foi multiplicar $n \cdot n$, como sugeriu um dos integrantes do grupo: *Para encontrar o número de macieiras tem que multiplicar a fileira por ela mesma, porque o número de macieiras é o quadrado do número de fileiras*.

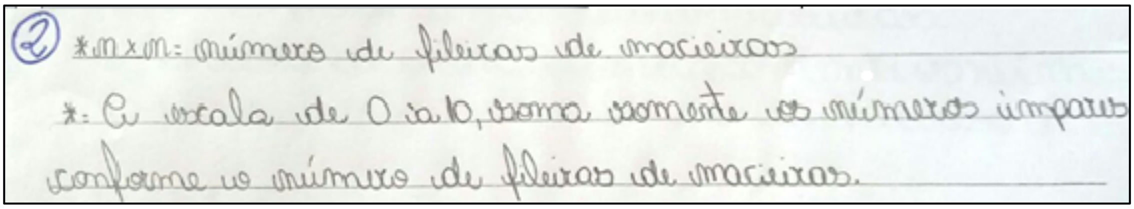
A segunda solução proposta foi somar a sequência de números ímpares ao número de macieiras conforme o número de fileiras. Um dos alunos comentou: *Quando n é igual a 1, a gente tem uma macieira. Quando n é igual a 2, tem que somar o 3 ao número de macieiras, porque é o próximo número ímpar. Assim, são 4 macieiras, e a sequência vai aumentando gradativamente*. Esse aluno observou que o número de macieiras é o resultado da soma de uma sequência de números ímpares no conjunto dos números naturais e que o número n indica a quantidade de números da sequência a serem utilizados. Ao questionarmos o grupo se este método funcionaria sempre, eles ficaram pensativos. Minutos depois, os alunos disseram que testaram para vários números de fileiras e todos funcionaram. Eles enfatizaram, no entanto, que o método mais fácil e rápido é o primeiro método: multiplicar o número de fileiras por ela mesma.

Em relação à quantidade de pinheiros, o Grupo II discutiu: *O número de pinheiros está indo de 8 em 8*, no entanto, não souberam escrever a solução no papel. O grupo I apresentou as mesmas soluções, inclusive também identificaram a sequência de números ímpares somados ao número de macieiras. Os grupos III, IV e V identificaram as relações para o número de macieiras elevando o número de fileiras de macieiras ao quadrado. Um integrante do grupo V expôs oralmente: *O número de fileiras de macieiras ao quadrado é igual ao número de macieiras, porque as macieiras estão plantadas em forma de quadrados.* Consideramos interessante esse aluno ter pensado dessa maneira, por ter identificado essa relação percebendo que as macieiras estavam plantadas em uma área quadrada, como exposto no enunciado do problema. Os demais grupos notaram a relação pela própria sequência de números.

Os grupos IV e V conseguiram estabelecer uma relação entre o número de fileiras de macieiras e a quantidade de pinheiros. Na figura 5, observamos que esse grupo multiplicou o número de pinheiros quando há somente uma fila pelo número total de fileiras. Esse grupo ainda comentou: *Como está indo de oito em oito, temos que multiplicar o n por oito, ficando $8n$. É uma sequência.* O grupo III apresentou uma solução semelhante, e um dos integrantes do grupo disse: *Encontramos uma relação. Se multiplicar oito por n, encontramos o número de pinheiros, porque "tá" sempre somando oito.* O grupo V concluiu: *Na primeira fileira tem 8 pinheiros. Na segunda 16. Então temos que 8 vezes o número de fileiras é igual ao número de pinheiros*.

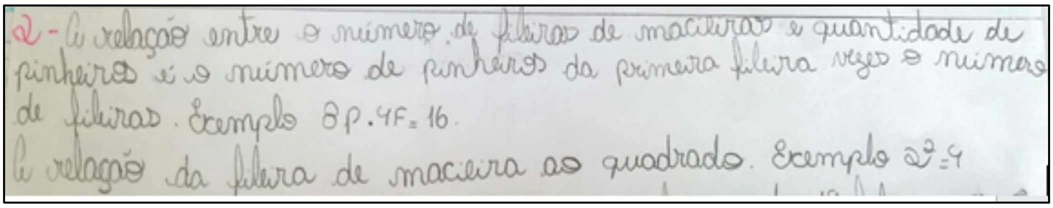
Alguns grupos apresentaram maior dificuldade para chegarem à conclusão de que o número de macieiras é igual ao número de fileiras n multiplicado por ele mesmo, ou seja, n^2.

Figura 2: Solução apresentada pelo Grupo II



Fonte: Registros do Grupo II

Figura 3: Solução apresentada pelo Grupo V



Fonte: Registros do Grupo V

4.3 Questão 3

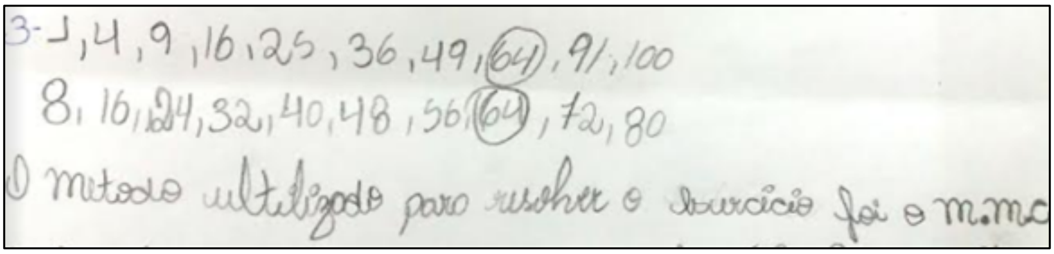
O Grupo I utilizou-se das sequências numéricas para obter o número de fileiras n de macieiras que é igual ao número de pinheiros, e esse raciocínio foi correto. Apesar de nomear o método como Mínimo Múltiplo Comum (MMC), nesse caso não ocorreu a minimização, mas a descoberta de para qual valor numérico, com os dados do problema, as duas expressões seriam iguais. Na primeira sequência, conforme a figura 6, temos que esses números não são múltiplos de algum número, mas sim quadrados perfeitos. Não obliteramos, no entanto, que a solução está correta e essa é uma estratégia válida. As correções quanto às notações foram esclarecidas na plenária.

Os grupos II e III apresentaram uma solução semelhante, indicando que, quando houvesse 8 fileiras, o número de pinheiros e macieiras seria igual.

O Grupo V encontrou uma igualdade por meio das sequências. O Grupo IV comentou oralmente que *O número deve ser 64, pois o 8 quando multiplicado por ele mesmo dá 64, e no número de pinheiros tem que multiplicar o 8 pela oitava* [fileira]. Esse raciocínio derivou-se do fato de que, para encontrar o número de pinheiros, é necessário multiplicar por 8 o número de fileiras de macieiras, enquanto para encontrar o número de macieiras, deve-se elevar o número de fileiras de macieiras n ao quadrado. Portanto, os valores seriam iguais quando $n = 8$. Os grupos II e III apresentaram uma solução semelhante, indicando que, quando houvesse 8 fileiras, o número de pinheiros e macieiras seria igual.

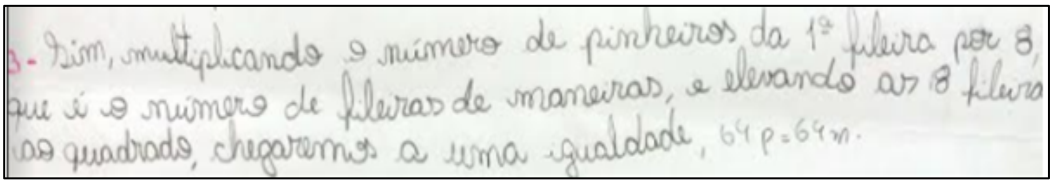
Os grupos, em sua maioria, completaram as linhas da tabela para obter essa igualdade, isto é, encontrar um número n de filas em que o número de macieiras e de pinheiros será igual. Porém, esperávamos que os alunos não utilizassem esse princípio e, sim, as expressões já descobertas. Nenhum grupo estabeleceu uma equação igualando as duas expressões obtidas, ficando assim com $n^2 = 8 \cdot n$. Eles não cogitaram a possibilidade de resolver algebricamente o problema procurando o valor da incógnita, apesar de terem visto o conteúdo de equações e também não mobilizaram esse conceito mesmo oralmente. Os métodos utilizados pelos grupos, não obstante, foram válidos e apresentaram resultados coerentes. Notamos que, ao não relacionar a situação problema com uma solução via equações, possivelmente esse seja mais um sinal de que esses alunos não estão acostumados com tal tipo de atividade e que, por não resolverem problemas dessa forma, não relacionam conceitos com a realidade, principalmente durante o momento em que aprenderam em sala de aula tal temática. Entre outras palavras, eles sabiam o algoritmo, sabiam resolver o problema, mas não fizeram a relação entre as duas situações.

Figura 4: Solução apresentada pelo Grupo I



Fonte: Registros do Grupo I

Figura 5: Solução apresentada pelo Grupo V



Fonte: Registros do Grupo V

4.4 Questão 4

Quanto à resolução da questão 4, os grupos articularam formas de resolução semelhantes. Esses observaram que, a partir da nona fileira, o número de macieiras ultrapassa a quantidade de pinheiros. Os grupos encontraram a solução construindo uma tabela e escrevendo as sequências conforme a quantidade de fileiras aumentava. Os alunos construíram um quadro (Quadro 2).

A primeira forma de resolução esperada era, de fato, o preenchimento das linhas na tabela. Com isso, observaram o crescimento do número de macieiras e de pinheiros. De início, os alunos pensaram que o número de pinheiros cresceria mais rápido por ser um produto, ou seja, o número de fileiras é sempre multiplicado por 8. Mas perceberam que, a partir do número $\boldsymbol{n}$ = 9, o número de macieiras crescerá mais rápido, pois é uma potência de expoente 2, ou seja, a representação de um quadrado perfeito. Um dos integrantes do Grupo V comentou que o número de macieiras estava aumentando cada vez mais a sequência de crescimento, enquanto o número de pinheiros sempre estava crescendo de oito em oito. Outra maneira possível é por meio da construção de gráficos. No entanto, essa representação gráfica não havia sido introduzida formalmente e, portanto, pensamos em construir juntamente com os alunos durante a plenária como uma forma introdutória ao conceito.

A seguir, apresentamos as discussões da plenária e as conclusões que os alunos chegaram quanto ao consenso das soluções.

Quadro 1: Quantidade de macieiras e de pinheiros

N	Macieiras	Pinheiros
1	1	8
2	4	16
3	9	24
4	16	32
5	25	40
6	36	48
7	49	56
8	64	64
9	81	72
10	100	80
11	121	88
12	144	96
13	169	104
14	196	112

Fonte: Os autores

5 DISCUSSÃO DA RESOLUÇÃO DO PROBLEMA

Para a conclusão das etapas da aplicação do problema, convidamos os alunos para o momento de reflexão de suas resoluções. Todos os grupos se prontificaram a ir até a lousa descrever as suas estratégias e, entre eles, organizaram-se para decidir qual questão cada grupo resolveria. Não houve qualquer receio nesse momento quanto à participação da plenária e todos os grupos se envolveram atentamente. O Grupo III iniciou a discussão apresentando na lousa a solução da questão I, a qual propunha completar a tabela com os dados do diagrama. Essa equipe utilizou a contagem e, para encontrar os valores quando $n = 5$, buscaram regularidades na tabela. Essas discussões nos encaminharam para a questão 2, a qual os alunos deveriam encontrar relações entre o número de fileiras *n* com a quantidade de macieiras e pinheiros. O Grupo II imediatamente se propôs a resolvê-la e um integrante do grupo foi até a lousa para explicar como se deram as suas estratégias. Esse grupo iniciou as discussões mostrando uma forma diferente de encontrar a quantidade de macieiras, que é a partir das sequências de números ímpares. O integrante do grupo fez o seguinte esquema na lousa:

n = 1 → macieiras = 1

n = 2 → macieiras = 4 = (1+3)

n = 3 → macieiras = 9 = (1+3+5)

n = 4 → macieiras = 16 = (1+3+5+7)

n = 5 → macieiras = 25 = (1+3+5+7+9)

Com essa resolução, o restante da turma – com exceção do Grupo I, pois esses também pensaram dessa forma – ficou intrigado, o que nos possibilitou uma discussão importante nesse momento tanto para nós, pibidianos, quanto para os estudantes. Essa oportunidade foi adequada para se falar sobre sequências. Expusemos aos alunos que existem diversas sequências, como a sequência de Fibonacci, uma Progressão Aritmética (PA), uma Progressão Geométrica (PG), e mostramos ainda que o número de pinheiros do problema em questão nada mais é do que uma PA de razão 8. Questionamos para o Grupo II se esses haviam encontrado uma maneira diferente, ou se outro grupo também havia encontrado. Esses, por sua vez, responderam que haviam encontrado a relação n^2, escrevendo-a na lousa. Os demais grupos também encontraram essa solução, e o Grupo V acrescentou que isso ocorria pelo fato das macieiras estarem plantadas em uma área quadrada. Em relação à quantidade de pinheiros, o Grupo II não havia escrito no papel a relação $8 \cdot n$, mas perceberam, no entanto, que a sequência estava crescendo "de oito em oito". O Grupo V acrescentou que bastava multiplicar o 8 pelo número de fileiras n para obter a sequência.

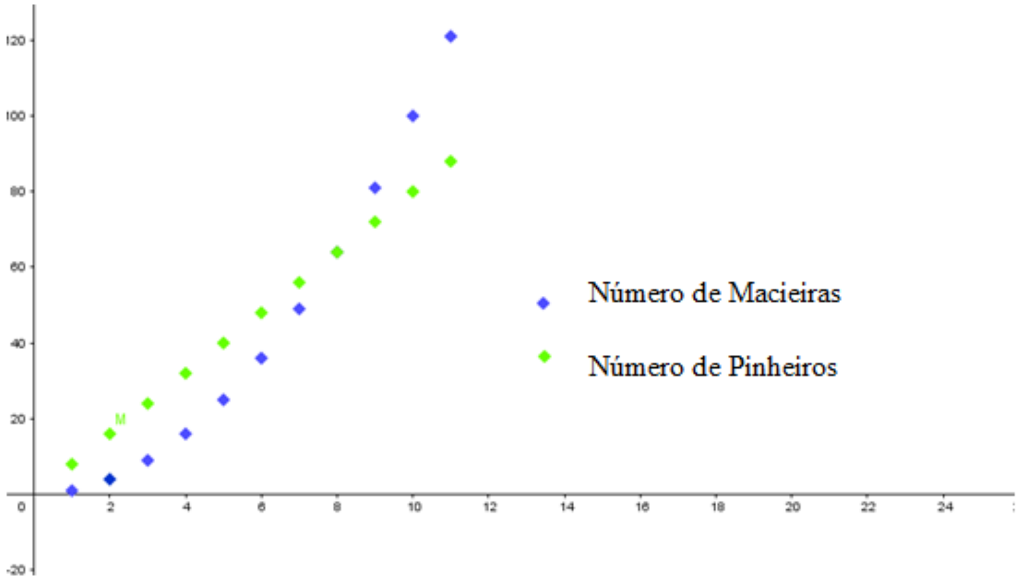
Para a resolução da questão 3, o Grupo V se propôs a resolver. Esse grupo desenhou uma tabela e mostrou que, quando n = 8, teremos a mesma quantidade de pinheiros e macieiras, sendo esse 64, e se substituirmos nas expressões $8 \cdot n$ e n^2 o n por 8, obteremos o mesmo resultado. Questionamos a todos se conheciam uma forma diferente de resolver e apontamos que estávamos procurando por um número de fileiras n desconhecido. Relembramos então o conceito de incógnita, que é a grandeza a ser determinada na solução de uma equação. Um dos alunos questionou se poderíamos obter uma equação a partir das duas relações. Escrevemos então a equação no quadro da seguinte maneira: $n^2 = 8 \cdot n$. Solicitamos que os grupos resolvessem a equação. Completamos dizendo que essa é uma equação quadrática incompleta, pois não apresenta o valor do coeficiente "c".

Os alunos relembraram nesse momento, pois haviam estudado o conteúdo e encontraram o valor de *n* pela Fórmula de Báskara, encontrando o valor de $n = 8$, o mesmo valor obtido anteriormente por meio das sequências. Eles obtiveram também o valor de $n = 0$ e questionamos se esse valor para n é plausível, visto que a proposta do problema pressupõe que não exista um número "zero" de filas de macieiras. Assim, concluímos que $n = 0$, para o número de filas de árvores, é uma situação irreal, enquanto outras questões, conforme comentamos com os alunos, que envolvem generalização de sequências numéricas, por exemplo, admitem $n = 0$ como primeiro termo.

Em relação à questão 4, o Grupo IV se dispôs a resolvê-la. A questão solicitava que os alunos buscassem formas de afirmar qual número de árvore crescerá mais rápido conforme o pomar aumente: o de maçãs ou o de pinheiros. Esse grupo apontou por meio de cálculos que o número de macieiras cresceria mais rápido. O grupo substituiu o valor numérico $n = 9$ em ambas as expressões encontradas, obtendo assim: $9^2 = 81$ e $8 \cdot 9 = 72$, concluindo assim que, a partir da nona fileira, o número de macieiras cresceria mais rápido. Como nenhum aluno havia pensado diferente, decidimos utilizar a tabela construída por eles para construir na lousa o gráfico correspondente que mostra que o número de árvores de macieiras crescerá mais rápido que o número de árvores de pinheiros, aproveitando esse momento para introduzir alguns conceitos de Função.

Inicialmente, construímos o Plano Cartesiano, conteúdo que havia sido apresentado pela professora regente em aulas anteriores, e localizamos os pontos fornecidos pela tabela no gráfico, como na Figura 7.

Figura 7: Gráfico correspondente ao Quadro 2



Fonte: os autores

Partindo da interpretação da tabela e do gráfico que construímos, concluímos conjuntamente que o crescimento do número de macieiras é mais rápido porque tem um crescimento semelhante ao de uma função exponencial, enquanto o crescimento do número de pinheiros é semelhante a um crescimento aritmético. Nesse momento, um aluno perguntou se poderíamos traçar a linha "ligando" os pontos do gráfico, sendo essa uma boa oportunidade para questionar o que estaríamos representando se traçássemos essa linha. Explicamos que traçando a linha estaríamos considerando todos os Números Reais em cada intervalo, o que nesse caso não se aplica, uma vez que estamos trabalhando com o conjunto dos Números Naturais, conforme explicitado no próprio enunciado do problema. Não podemos considerar, por exemplo, 4,5 árvores, ou seja, quatro árvores e meia, ou, ainda, um quarto de fileira.

Nesse momento, introduzimos o conceito de dependência e independência, explicando que a quantidade de macieiras e de pinheiros depende do número n de fileiras de macieiras. Dessa forma, quanto mais filas, mais macieiras e pinheiros haveria. Logo após, introduzimos o termo "variável" e explicamos aos alunos que uma variável é um símbolo – que geralmente é uma letra –, utilizado para representar valores diversos em um mesmo problema, ou seja, um valor não fixo, que poderá variar nesse problema em função de outro. Tomamos como exemplo a variável n do problema: ela assume diversos valores, os quais sempre estão variando conforme a sequência aumenta. Tomamos o cuidado para que a variável não seja confundida com incógnita, que é um valor a ser descoberto numa equação e que torna uma sentença verdadeira. Finalizamos assim a plenária.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com o presente texto, objetivamos identificar as principais contribuições formativas (do futuro professor) e de aprendizagem de Matemática quando utilizamos a Resolução de Problemas. Tal intento veio por meio do relato da experiência que tivemos enquanto alunos do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Paraná (UNESPAR), propiciadas pelo Pibid, experiências essas aqui exemplificadas por uma das atividades. Utilizamos um problema como ponto de partida para o trabalho com alunos do 9º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública do interior do Paraná. Um dos nossos objetivos secundários durante essa aplicação foi o de proporcionar aos alunos uma forma diferente de estudar matemática em relação à perspectiva tradicional[4] de ensino, bem como obter novas experiências e nos aproximarmos do âmbito escolar enquanto pibidianos. Obtivemos sucesso na escolha do problema a ser aplicado, visto que foi pertinente aos assuntos a serem trabalhados em sala de aula pela professora regente e contribuiu significativamente para introdução do conceito de Funções, bem como com a revisão do conteúdo de equações, entre outros conteúdos já trabalhados. Durante a aplicação, percebemos que alguns alunos tiveram dificuldade em aceitar esse tipo de dinâmica, no entanto, desenvolveram as atividades propostas e participaram das resoluções no decorrer da aula.

Uma das dificuldades que existe na aplicação da Resolução de problemas na sala de aula é o tempo, considerando que a estrutura escolar (currículo, bimestralização/semestralização etc.) foi pensada numa perspectiva diferente daquela defendida pelos preceitos atuais da Educação Matemática, quer seja, considerar cada vez mais o estudante como sujeito/ator principal do seu próprio aprendizado. No entanto, apesar de dificuldades como essas, o trabalho com essa metodologia contribuiu tanto para o aprendizado dos alunos quanto para nós, acadêmicos em formação inicial de futuros professores de Matemática. Além disso, pudemos perceber que houve engajamento e participação dos alunos no desenvolvimento das tarefas, valorizaram o próprio trabalho como também o trabalho e discussões em grupo. Ressalta-se a importância de que os futuros professores vivenciem experiências como essa já na formação inicial, no sentido de experimentarem as estratégias metodológicas de ensino e aprendizagem já em ambientes nos quais irão atuar, ambientes complexos e para os quais deve ser pensada a profissionalização docente.

Foi interessante para nós analisar a maneira com que os alunos resolveram a questão apresentada nesse relato, que é um problema sobre macieiras e pinheiros, visto que, além de determinar as fórmulas para o cálculo das quantidades de cada árvore, o aluno também precisa igualar ambas as expressões e resolver uma equação polinomial incompleta de 2º grau em busca de uma incógnita. Apesar desse conceito não ter sido mobilizado pelos alunos, nós, Pibidianos, o apresentamos e discutimos com eles. Além disso, introduzimos o conceito de Funções, comentando sobre gráficos, variáveis dependentes e independentes. Esse problema proposto, portanto, nos permitiu observar essa complementaridade entre as abordagens da generalização de padrões, de equações e da Resolução de Problemas.

Concluímos dizendo que, apesar dos problemas que podem ocorrer quando há uma mudança para uma estratégia de ensino que privilegia a participação ativa do aluno, essa

---

[4] Nosso entendimento no presente texto para o termo “tradicional” seriam as aulas que não valorizam o diálogo, a criticidade e a criatividade, mas se centram no pensar do professor. Dentre essas aulas, as mais comuns seriam aquelas que se iniciam pela definição/fórmula matemática, seguindo por um exemplo e exercícios para que o aluno repita o processo. Tal característica difere quando adotamos a Resolução de Problemas como uma estratégia metodológica para o ensino.

experiência foi bem sucedida e construtiva para nós acadêmicos e também para os alunos envolvidos. Deixamos, por fim, uma reflexão para todos os responsáveis pela organização de avaliações como o PISA, para além dos questionamentos políticos já existentes quanto à legitimidade dessas ações: é preciso promover o diálogo entre as formações iniciais, continuadas e tais avaliações, no sentido de que não haja tanta discrepância entre o que se faz cotidianamente nas aulas de Matemática com as exigências impostas nesses testes aos estudantes, para que esses não sejam “pegos de surpresa” com estratégias, conteúdos, linguagens para as quais não se sente preparado.

REFERÊNCIAS

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R. **Ensinando Matemática na Sala de Aula através da Resolução de Problemas**. Boletim GEPEM, Rio de Janeiro, Ano XXXIII, n.55, p.1-19, jul./dez. 2009.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1996.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: matemática.** Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília: MEC/SEF, 1997. 142p.

BRASIL. Ministério da Educação e Desporto. "**Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) Matemática** – Terceiro e Quarto ciclo do Ensino Fundamental" – Brasília, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio:** ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC/Semtec, 1999.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. **PISA 2000:** relatório nacional. Brasília, 2001. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/internacional-novo-pisa-resultados>. Acesso em 15 dez 2017.

BRASIL. **Portaria 096, de 18 de julho de 2013**. Regulamento do programa institucional de bolsa de iniciação à docência. Brasília, DF. 2013. Disponível em: <https://www.capes.gov.br/images/stories/download/legislacao/Portaria_096_18jul13_AprovaRegulamentoPIBID.pdf> Acesso em 06/10/2019.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**: Educação é a Base. Brasília: MEC/CONSED/UNDIME, 2017. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 13 de novembro de 2019.

BROUSSEAU, G. Le Contrat didactique: Le Mileu. In: **Recherches en Didactique des Mathematiques**, nº 9 (3), p. 309-336. 1988.

D'AMBROSIO, B.S. **A Evolução da Resolução de Problemas no Currículo Matemático.** Miami University: Ohio, EUA. 2009. 7 p.

DEWEY, J. (1933). **How we think**: A Restatement of the Relation of Reflective Thinking to the Educative Process. Boston: D.D. Heath & Company.

KRULIK, S. Y., RUDNICK, J. A. **Problem-Driven Math:** Applying the Mathematics Beyond Solutions. Chicago, IL: Wright Group/ McGrawHill, 2005.

LUCKESI, C.C. **Avaliação da aprendizagem escolar:** estudos e proposições. 12. Ed. São Paulo: Cortez, 2002.

MEDEIROS, K.M. O Contrato Didático e a Resolução de Problemas Matemáticos em Sala De Aula. **Educação Matemática em Revista**, n. 9/10, abr. 2001.

NCTM. National Council of Teachers of Mathematics. **Principles and Standards for School Mathematics**. Reston: Library of Congress Cataloguing, 2000.

ONUCHIC, L R.; ALLEVATO, N. S. G. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de matemática através da Resolução de Problemas. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. (Orgs). **Educação Matemática**: pesquisa em movimento. 2.ed. São Paulo: Cortez, 2005.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G.; NOGUTI, F. C. H.; JUSTULIN, A. M. (Orgs.). **Resolução de Problemas:** teoria e prática. Paco Editorial. Jundiaí. 2014.

ONUCHIC, L.R., ALLEVATO, N.S. G. Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **Bolema**, v. 25, n. 41, p. 73-98, 2011.

ONUCHIC, L.R. Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. In: BICUDO, M. A. V. (Org). **Pesquisa em Educação Matemática**: Concepções & Perspectiva. São Paulo, SP: Editora UNESP, 1999.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. Superintendência de Educação. DCE **- Diretrizes Curriculares da Rede Pública de Educação Básica do Estado do Paraná** – Disciplina de

Matemática e EJA - Curitiba: SEED/2006.

POLYA, G. **A Arte de resolver Problemas**. Editora Interciência, Rio de Janeiro, 2006.

ROMERO, D. D. **O ensino da Matemática através da Resolução de Problemas**. Disponível em: http://livrozilla.com/doc/1567368/o-ensino-da-matem%C3%A1tica-atrav%C3%A9s-da-resolu%C3%A7%C3%A3o-de-problemas. Acesso em: 13 de novembro de 2019.

SCHASTAI, M. B.; PEDROSO, S. M. D. A resolução de problemas ainda é um problema? In: ENEM, X, 2010, Salvador. **Anais**. Disponível em: http://www.sbembrasil.org.br/sbembrasil/index.php/anais/enem. Acesso em: novembro, 2019.

SHIMIZU, Y. **Problem Solving as a Vehicle for Teaching Mathematics:** A Japanese Perspective, en Lester, Jr, F. K. (Ed.): **Teaching Mathematics through Problem Solving.** Prekindergarten Grade 6, 205-214. Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc. 2003.

VAN DE WALLE, J. A. **Matemática no ensino fundamental:** formação de professores e aplicação em sala de aula. Tradução de Paulo Henrique Colonese. 6. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009. WU, H. Fractions, decimals, and rational numbers.

VAN DE WALLE, J. A. **Elementary and Middle School Mathematics**. New York:, 4ª edição, Logman, 2001.

VAN DE WALLE, J. A; LOVIN, H. L. **Teaching Student-Centered Mathematics**. New York: Pearson, 2006.

ZANIN, A. C. **Estatística e Problemas de Contagem no Ensino Fundamental.** Disponível em:<http://www.ime.unicamp.br/erpm2005/anais/m_cur/mc05.pdf>. Acesso em 05/12/2017.

Submetido em março de 2019.
Aprovado em novembro de 2020.

Tailine Audilia de Santi
Graduação em Licenciatura em Matemática pela Universidade Estadual do Paraná (Unespar). Mestranda do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Estadual Paulista (Unesp), Rio Claro, SP, Brasil. ID Lattes: 9280225395058314.
Contato: tailine1998@gmail.com.

Fábio Alexandre Borges
Doutorado em Educação para a Ciência e o Ensino de Matemática pela Universidade Estadual de Maringá (UEM). Docente da Universidade Estadual do Paraná (Unespar), Campo Mourão, PR, Brasil. ID Lattes: 6339328194070311. Orcid ID: 0000-0003-0337-6807.
Contato: fabioborges.mga@hotmail.com.

Caio Juvanelli
Graduação em Licenciatura em Matemática pela Universidade Estadual do Paraná (Unespar). Mestrando do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina (UEL), Londrina, PR, Brasil. ID Lattes: 6637078675056639. Orcid ID: 0000-0002-5171-9731
Contato: caio.juvanelli@hotmail.com.

Vinícius Oliveira Romano da Silva
Graduação em Licenciatura em Matemática pela Universidade Estadual do Paraná (Unespar). Professor do Centro de Educação Santa Rita (Cedus), Campo Mourão, PR, Brasil. ID Lattes: 6339328194070311. Orcid ID: 0000-0003-0337-6807.
Contato: vinyromano12@gmail.com.

A Matemática Está em Tudo
uma proposta de divulgação científica na Amazônia

Math is in Everything
a proposal for scientific dissemination in the Amazon

Claudina Azevedo **Maximiano**
Instituto Federal do Amazonas (IFAM)

Pedro Italiano **Neto**
Instituto Federal do Amazonas (IFAM)

Venício **Favoretti**
Instituto Federal do Amazonas (IFAM)

RESUMO

A proposta deste trabalho é relatar a experiência vivenciada na *Semana Nacional de Ciência e Tecnologia*, evento multidisciplinar que teve por objetivo discutir o fazer ciência na Amazônia. O evento foi realizado em duas calhas de rio - o Purus e o Solimões - com atividades envolvendo os municípios de Lábrea e Tefé, no estado do Amazonas. A *Semana* produziu um movimento em torno das ações dialógicas, abordando questões relacionadas ao ensino, à pesquisa e à extensão. Ao longo do evento foram desenvolvidas diversas atividades utilizando-se uma pluralidade de recursos metodológicos, dentre os quais se destacam: palestras, seminários, exposições, programa de rádio, experiências em laboratório, cine-fórum, teatro de fantoches e jogos. O objetivo da *Semana* foi alcançado, considerando-se o envolvimento das pessoas das cidades, comunidades e aldeias. Como resultado do evento, podemos destacar que o tema nos instigou a pensar em atividades interdisciplinares e transdisciplinares, além da aproximação dos alunos e da comunidade com a matemática enquanto prática presente no cotidiano. Dessa forma, acreditamos ter apresentado a matemática como uma área que dialogue com as diversas áreas do conhecimento acadêmico e tradicional.

Palavras-chave: Ciência. Tecnologia. Matemática. Atividades Interdisciplinares.

ABSTRACT

The purpose of this work is to report the experience lived in the National Week of Science and Technology, a multidisciplinary event that aimed to discuss the doing of science in the Amazon. The event was held in two river gutters - the Purus and the Solimões - with activities involving the municipalities of Lábrea and Tefé, in the state of Amazonas. The Week produced a movement around dialogical actions, addressing issues related to teaching, research and extension. Throughout the event, several activities were developed using a plurality of methodological resources, among which stand out: lectures, seminars, exhibitions, radio program, laboratory experiences, cine-forum, puppet theater and games. The objective of the Week was achieved, considering the involvement of people from cities, communities and villages. As a result of the event, we can highlight that the theme has led us to think about interdisciplinary and transdisciplinary activities, in addition to the approximation of students and the community with mathematics as a practice present in daily life. Thus, we believe that we have presented mathematics as an area that dialogues with the various areas of academic and traditional knowledge.

Keywords: Science. Technology. Math. Interdisciplinary Activities.

1 INTRODUÇÃO

A *Semana Nacional de Ciência e Tecnologia* (SNCT) realizada em 2017 no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Amazonas (IFAM) - *campi* Lábrea e Tefé, teve como tema "A Matemática está em tudo" destacando o subtema "Somando e multiplicando experiência de Ensino, Pesquisa e Extensão". Rompendo com a questão geográfica, conectamos duas calhas de rios paralelos: o Purus e o Solimões. Tal iniciativa, sinérgica e criativa, possibilitou-nos produzir um projeto e apresentá-lo à chamada CNPq/MCTIC/SECIS nº 02/2017 - Semana Nacional de Ciência e Tecnologia. Nosso projeto foi aprovado pelo referido órgão com o título: *A matemática está em tudo: somando e multiplicando experiência de ensino, pesquisa e extensão na Amazônia*. Por conseguinte, a SNCT se insere no contexto dos eventos em que dialogam o tripé Ensino, Pesquisa e Extensão e, nesse sentido, se constitui em um evento singular, no qual os educadores do IFAM, dos *campi* Lábrea e Tefé, bem como de outras instituições de ensino e pesquisa tiveram oportunidade de socializar suas pesquisas e ações nas áreas de ensino, extensão e inovação.

A proposta do projeto foi promover a interlocução entre o espaço acadêmico (sala de aula) e a realidade dos povos e das comunidades tradicionais da Amazônia, a partir das conexões e experiências realizadas pelos docentes, discentes e técnicos nos *campi* do IFAM e profissionais de outras instituições. Segundo o site do CNPq:

> A Semana Nacional de Ciência e Tecnologia (SNCT), evento criado em 2004 por decreto presidencial, tem como principal objetivo destacar a importância da ciência e tecnologia para a vida das pessoas e para a melhoria da qualidade do ensino no Brasil. Esse evento anual é financiado com recursos do Ministério da Ciência, Tecnologia, Inovações e Comunicações (MCTIC) e ocorre simultaneamente em quase todos os estados brasileiros. [..] O MCTIC propõe um tema diferente a cada ano, levando as instituições participantes do evento a desenvolverem atividades educacionais e lúdicas (palestras, filmes, vídeos, experimentos, jogos, brincadeiras, entre outros) mostrando os avanços científicos e tecnológicos relativos à temática predefinida. As atividades criam ambiente propício para a troca de ideias, promovendo debates e estimulando o despertar de vocações científicas (CNPq, 2017).

Em 2017, a SNCT apresentou como tema *A matemática está em tudo*, instigando-nos a pensar sobre a dinâmica da matemática enquanto expressão da inventividade humana na criação e na relação das pessoas com as coisas e com o mundo. A matemática faz parte da história da humanidade. Os gregos, egípcios e chineses apresentam estudos matemáticos desde a antiguidade. Aproximando-nos da história brasileira, podemos destacar a presença da matemática na arte e artefatos dos diversos povos Indígenas. Na concepção do CNPq:

> Conhecida como "a ciência das ciências" e por outro lado, não reconhecida como ciência por outros, a Matemática tem tantas definições quanto aplicações, e é tão útil quanto prazerosa. Ela explora o raciocínio lógico e abstrato, e é usada como ferramenta essencial em incontáveis áreas do conhecimento humano, como a Física, Biologia, Química, Engenharia, Economia, Administração de negócios, Artes, Agricultura e até a Medicina. Ela está tão presente na nossa vida cotidiana, que, às vezes, a gente nem nota. [...] O estudo da Matemática começou de maneira mais simples com os números, naturais, inteiros e operações aritméticas e todos os povos desenvolveram suas próprias formas de contar números. Pode parecer exagero, mas não é: o "zero" é umas das maiores e mais importantes invenções da mente humana! A partir daí, suas aplicações foram se multiplicando e se tornando mais complexas como na Álgebra, Geometria, Trigonometria, Porcentagem, Estatística, Topologia, Teoria dos jogos, dentre outras (CNPq, 2017).

A proposta da SNCT 2017 foi apresentar a matemática como uma área que pode produzir uma série de experiências e descobertas, dialogando com as diversas áreas do conhecimento acadêmico e tradicional. Considerando essa prerrogativa, os *campi* Lábrea e Tefé do IFAM propuseram como subtema do evento: *Somando e multiplicando experiências de Ensino, Pesquisa e Extensão*, no intuito de provocar os servidores e a comunidade a problematizarem o ensino da matemática, retirando-a da "moldura" do isolamento, apontando as inter-relações do saber matemático com todo o conhecimento acadêmico e com as práticas ligadas aos saberes tradicionais.

Um dos objetivos da SNCT foi promover um espaço interdisciplinar de interlocução de conhecimentos, tendo como base a matemática, a partir da perspectiva interdisciplinar presente nas experiências de pesquisa, ensino e extensão promovidas no IFAM, *campi* Lábrea e Tefé, em sinergia com outros atores sociais presentes nesses municípios. Ao longo deste texto, destacaremos as atividades desenvolvidas na SNCT 2017 e seus impactos nos municípios de Lábrea e Tefé.

2 PERCURSOS PARA A CONDUÇÃO DAS PROPOSTAS DE TRABALHOS

A partir da perspectiva apresentada por Paulo Freire (1987), fomos provocados a construir um processo metodológico tendo como referência a situação social amazônica. A perspectiva apresentada se fundamentou na construção de um diálogo permanente com os diversos participantes envolvidos no processo educativo, pensando-o enquanto ato educativo que se constitui numa práxis estruturada na realidade amazônica.

> Enquanto na prática "bancária" da educação, antidialógica por essência, por isso não comunicativa, o educador deposita no educando o conteúdo programático da educação, que ele mesmo elabora ou elaboram para ele, na prática problematizadora, *dialógica por excelência*, este conteúdo, que jamais é "depositado", se organiza e se constitui na visão do mundo dos educandos, em que se encontram seus temas geradores (FREIRE, 1987, p.102, grifo nosso).

Para a realização da SNCT partimos do entendimento de que, segundo Rodrigues (2007), a matemática é colocada no topo da classificação das ciências: a primeira classe das ciências da descoberta, a ciência heurística mais abstrata e a mais geral, a que faz as descobertas da natureza mais suprema. No evento, pensamos a matemática como um elemento de ligação para o desenvolvimento da SNCT e a concretização desse diálogo entre os saberes.

No contexto amazônico, os sujeitos se multiplicam. Por esse motivo, a proposta foi produzir um diálogo com os chamados povos e comunidades tradicionais. Segundo Almeida (2007), esses sujeitos sociais se autodenominam quilombolas, seringueiros, ribeirinhos, pescadores artesanais, indígenas, entre outros. Apontamos, aqui, a diversidade de povos e comunidades tradicionais que ocupam a Amazônia, em especial no espaço geográfico em que se circunscreveu o evento. A ideia que perpassou a reflexão metodológica foi realizar um evento em que se pauta o fazer científico-pedagógico em um diálogo com os conhecimentos tradicionais. Assim, foram propostas atividades que confluíssem num diálogo com a realidade amazônica, considerando-se a diversidade sociocultural dessa região e, ainda, as inúmeras dificuldades de se fazer ensino, pesquisa e extensão na Amazônia.

A partir da SNCT, desafiamo-nos a pensar propostas de atividades para as comunidades ribeirinhas e de terra firme as quais, muitas vezes, devido às distâncias, não possuem a presença da escola formal. Destacamos, ainda, a questão de atividades inclusivas para pessoas que são público alvo da educação especial, problematizando e apontando para inovações no âmbito do ensino da matemática. Foram, também, realizadas atividades voltadas para as "salas de recursos" presentes nas escolas das redes estadual e municipal de ensino, assim como para os grupos de idosos.

A inserção nos diversos contextos sociais amazônicos produziu sinergias que repercutiram no processo de aproximação desses sujeitos com as perspectivas de divulgação e popularização da ciência. Tal esforço metodológico teve por finalidade estimular a aplicação de estratégias inovadoras, no intuito de divulgar e implementar ações concretas que possibilitassem à comunidade perceber a presença da matemática em seu cotidiano.

Ao longo do evento, foram desenvolvidas as seguintes atividades: exposições fixas e itinerantes, seminários, mostra de teatro, mostra de vídeo, interação com a realidade virtual, programa de rádio, produção de vídeos, mostra de matemática, oficinas, palestras, minicursos, mesas-redondas, sessões de filmes (cine-fórum), jornada técnico-científica. Tais atividades foram realizadas em diversos espaços públicos, no intuito de popularizar as ações da SNCT, além das dependências dos campi Lábrea e Tefé, proporcionando grande participação de pessoas nas exposições, apresentações teatrais e mostras de matemática,

As ações tiveram como público-alvo os discentes do IFAM, dos *campi* Lábrea e Tefé, assim como alunos e professores das redes municipal e estadual de ensino, comunidades indígenas, ribeirinhas e de terra firme, salas de recursos da Secretaria Municipal de Educação e Cultura (SEMEC) e Secretaria Estadual de Educação (SEDUC), que atendem o público alvo da educação especial. Foram atingidas, diretamente, cerca de 3 mil pessoas, envolvendo os dois municípios.

2 IMPORTÂNCIA E IMPACTO DAS AÇÕES PARA O DESENVOLVIMENTO CIENTÍFICO, TECNOLÓGICO E INOVAÇÃO

O projeto possibilitou a realização de atividades que abordaram o tema *ciência* de forma abrangente. As atividades se propuseram a provocar nos participantes o entendimento sobre como a matemática está presente nas ações diárias. O evento aproximou os professores e alunos das comunidades, aldeias e o público da cidade, estimulando o aprendizado e o compartilhamento dos saberes numa lógica que ultrapassou os espaços escolares. Foram momentos de vivência e troca entre o que construímos com uma base científica e o que é produzido pelas pessoas nas comunidades no cotidiano.

Nesse contexto, destacamos um momento singular no campus Lábrea: o seminário *Educação do Campo: Casa Familiar Rural*, realizado em parceria com a Associação dos Produtores Agroextrativistas da Assembleia de Deus do Rio Ituxi (APADRIT), Associação Agroextrativista dos Moradores da Resex Ituxi (AMARI) e o Instituto Chico Mendes de Conservação da Biodiversidade (ICMBIO). Estiveram presentes nesse seminário dez jovens da Reserva Extrativista Ituxi, que relataram sobre a situação atual da educação na RESEX. Ao longo do seminário, foi exposta a situação dramática de muitos jovens que estão há mais de quatro anos sem estudar, aguardando a criação da Casa Familiar Rural (CFR). Ao final, os jovens reivindicaram a implantação de uma Casa Familiar Rural (CFR) como espaço para formação acadêmica e técnica, com o objetivo de garantir o futuro das comunidades da RESEX do Ituxi. Foi produzida uma carta às autoridades, reivindicando a criação da CFR na RESEX do Ituxi.

Essa discussão está inserida no contexto da Educação do Campo e o seminário foi um espaço de interlocução com os sujeitos que vivenciam essa experiência, buscando, como nos diz Hage (2014, p.1177), “ouvir os sujeitos do campo e aprender com suas experiências de vida, de trabalho, de convivência e de educação; oportunizá-los o acesso à informação, à ciência e às tecnologias, sem hierarquizar os conhecimentos, valores e ritmos de aprendizagem”. A experiência desse seminário acentuou o caráter político do evento, no sentido de pautar uma reflexão sobre a importância de se investir em educação, ciência e tecnologia no Amazonas, com o destaque para projetos que dialoguem com a realidade local e que respondam aos anseios das comunidades.

Destacamos, ainda no município de Lábrea, o espaço *Ciência Móvel*, que foi realizado em parceria com as Secretarias de Meio Ambiente (SEMMA), de Saúde (SEMAS), de Educação e Cultura (SEMEC) e Instituto de Desenvolvimento Agropecuário do Amazonas (IDAM). Por meio dessa atividade, levamos às comunidades e aldeias diversas ações multidisciplinares. O espaço *Ciência Móvel* foi realizado em uma comunidade de terra firme, no Ramal Tauaruã, na Aldeia Boa Vista, Terra Indígena Caititu, Povo Apurinã, assim como na comunidade ribeirinha da Praia do Pirão.

Foi uma experiência de troca entre os nossos alunos, professores, técnicos e profissionais das secretarias junto aos professores, alunos e comunidades visitadas. O estímulo às atividades extramuros foi singularmente uma das principais estratégias da SNCT. Para os moradores de algumas dessas comunidades, foi notório o entusiasmo com a presença do IFAM. Dentre as atividades desenvolvidas, destacamos: matemática na horta, jogos matemáticos, fantoche com as histórias de grandes matemáticos e a realidade virtual.

Silva e Matos (2019), buscando compreender o processo de ensinagem da matemática escolar com foco no cotidiano de comunidades remanescentes de quilombos, destacam que o desenvolvimento das atividades escolares está atrelado ao fortalecimento da valorização da cultura local, dos ritos e dos conhecimentos históricos, fortalecendo as relações étnicas na busca por igualdade e formação do saber.

Nas atividades da SNCT, inserimos o projeto *Banzeiro do conhecimento: biblioteca itinerante*, que nasceu para ir ao encontro de comunidades da Reserva Extrativista do Rio Ituxi, na qual vivem comunidades em áreas muito distantes da sede do município de Lábrea, pela relevância da ação, sobretudo por despertar para a importância do ato de ler como busca de descoberta de novos conhecimentos.

Outro espaço de divulgação da ciência aconteceu por meio do *Cine Fórum*. Proporcionamos ao espectador o contato com a linguagem cinematográfica e mostramos histórias que possuem o saber matemático como elemento central do enredo dos filmes, os quais foram exibidos sempre em versão dublada para maior acessibilidade da população. Ao fim da apresentação foram realizados debates sobre a importância da matemática no enredo do filme e na vida. Dentre os filmes apresentados, destacamos *Jogo de Imitação*, que traz a seguinte sinopse:

> Durante a Segunda Guerra Mundial, o governo britânico monta uma equipe que tem por objetivo quebrar o Enigma, o famoso código que os alemães usam para enviar mensagens aos submarinos. Um de seus integrantes é Alan Turing (Benedict Cumberbatch), um matemático de 27 anos estritamente lógico e focado no trabalho, que tem problemas de relacionamento com praticamente todos à sua volta. Não demora muito para que Turing, apesar de sua intransigência, lidere a equipe. Seu grande projeto é construir uma máquina que permita analisar todas as possibilidades de codificação do Enigma em apenas 18 horas, de forma que os ingleses conheçam as ordens enviadas antes que elas sejam executadas. Entretanto, para que o projeto dê certo, Turing terá que aprender a trabalhar em equipe e tem Joan Clarke (Keira Knightley) sua grande incentivadora.

Destacamos, também, o filme *Teoria do Tudo*:

> Baseado na biografia de Stephen Hawking, o filme mostra como o jovem astrofísico (Eddie Redmayne) fez descobertas importantes sobre o tempo, além de retratar o seu romance com a aluna de Cambridge Jane Wide (Felicity Jones) e a descoberta de uma doença motora degenerativa quando tinha apenas 21 anos.

Segundo Corrêa e Scherer (2012), as mídias digitais são ferramentas aliadas ao processo de ensino e aprendizagem, contribuindo na melhoria dos resultados. Outro fator que deve ser levado em consideração, é o fato de que as mídias digitais vão além das tecnologias modernas. De acordo com Moraes e Sá (2011), desde a impressora tipográfica, rádio, telefone, jornais impressos, revistas, livros, teatro, cinema, dentre outros, todos são exemplos de mídia. Para Moraes e Sá (2011), o termo mídia digital refere-se à mídia eletrônica. De modo geral, a mídia digital pode ser definida como o conjunto de veículos e aparelhos de comunicação baseados em tecnologia digital, permitindo a distribuição ou comunicação digital das obras intelectuais escritas, sonoras ou visuais.

Nesse direcionamento, outra atividade de destaque foi o programa de rádio *Estação ENEM*, em parceria com a Rádio Comunitária de Lábrea, TV Nazaré e Rede Vida de Televisão. Esse programa teve por objetivo alcançar um público abrangente, no intuito de preparar os estudantes para o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). Os programas aconteceram na Rádio, dos dias 24 a 27 de outubro, no horário das 10h30min às 11h30min. A cada dia, professores de cada um dos eixos da Base Nacional Comum estiveram na rádio, apresentando conteúdos e dicas para o ENEM. Foi uma atividade singular, que alcançou um público significativo na reta final de preparação para as provas do ENEM 2017.

Na concepção de Dorigoni e Silva (2008):

> As reflexões em torno do assunto mídia e educação vem sendo aprofundadas há várias décadas dado a constatação de sua influência na formação do sujeito contemporâneo e da necessidade em explorar o assunto diante do rápido desenvolvimento das novas tecnologias de informação e comunicação. (DORIGONI; SILVA, 2008, p. 01).

A atividade na rádio proporcionou uma experiência singular para os professores da base comum do IFAM *campus* Lábrea, pois foram desafiados a organizar os programas de rádio, os quais possuem uma linguagem específica, caracterizando um meio de comunicação de massa, para apresentarem elementos e conceitos dos diversos componentes curriculares que são cobrados dos alunos nas provas do ENEM.

Na dinâmica da SNCT, produzimos a *Exposição de Ciência e Tecnologia*. O espaço da Biblioteca do IFAM *campus* Lábrea transformou-se no local de encontro promovido por uma exposição plural, na qual provocamos o diálogo entre os saberes tradicionais, os recursos tecnológicos e a Arte. A exposição compreendeu várias temáticas: apresentação do material audiovisual produzidos pelos alunos do campus; a exposição de uma “pipa poliédrica”, organizada por um professor da Escola Estadual Balbina Mestrinho; maquetes sobre sistemas de irrigação produzidos pelos alunos dos 2º anos do curso Técnico Integrado de Agropecuária; apresentação dos desenhos do aluno Lucas Souza, denominada a *Arte de Retratar*; um varal de cordel, organizado pelo professor Ronilson Lopes; banners com os projetos do PIBIC Jr. 2017; um cenário amazônico: uma “colocação” (espaço provisório ocupado pelo seringueiro), remetendo a um antigo seringal, representando o projeto de extensão *Expedições Purus*. (MAXIMIANO;SILVA, 2017).

No *campus* Lábrea foram ofertadas inúmeras palestras. Dentre elas, destacamos: *Música e matemática: o experimento de Pitágoras*; *Orçamento familiar: como organizar as finanças domésticas*; *Etnomatemática: cestaria, noções matemáticas e grafismo indígena na prática de artesãs Ticuna do Alto Solimões*; Roda de conversa: estratégias didáticas no ensino da matemática. Uma oficina que teve bastante destaque, também, foi a *Atividade lúdica: brincando com os números*, na qual os participantes puderam ter a experiência de aprender matemática com brincadeiras. No município de Tefé realizou-se basicamente as mesmas atividades, com destaque para as oficinas realizadas pelos alunos. A parceria com o Instituto de Desenvolvimento Sustentável Mamirauá possibilitou o contato com os pesquisadores e as comunidades tradicionais da região do Médio Solimões.

O encerramento das atividades da SNCT ocorreu com a exposição *História da Matemática*. A proposta foi mostrar que a matemática está em tudo. A história dessa disciplina é tão antiga quanto a própria história da humanidade. Durante a exposição foi possível verificar a contribuição da matemática para o desenvolvimento da tecnologia que conhecemos. E essa experiência perpassa muitos personagens nas mais diversas civilizações. Desde os primórdios, o homem utiliza a matemática para facilitar a vida e organizar a sociedade. A matemática foi usada pelos egípcios na construção de pirâmides, diques, canais de irrigação e estudos de astronomia. Os gregos antigos a formalizaram e desenvolveram vários conceitos. Hoje está presente nas mais diversas áreas como, por exemplo, engenharia, arquitetura, medicina, informática, física, química etc. A exposição mostrou os matemáticos famosos e suas contribuições, a origem e as aplicações de conteúdos relevantes da matemática e jogos didáticos sobre a temática. Os trabalhos foram expostos na forma de banners, maquetes, apresentações virtuais e teatrais, como foi o caso de um trabalho sobre Isaac Newton. Como resultado, despertou a curiosidade das pessoas que ali passaram as quais, por sua vez, puderam conhecer um pouco mais dessa história tão rica e que continua sendo construída.

Durante a SNCT foram ofertados no município de Lábrea 06 minicursos, 15 palestras e 14 oficinas com temas variados, porém focados na matemática, além de diversas atividades inseridas na ação Ciência Móvel, desenvolvida em parceria com o ICMBIO, FUNAI, SEMEC e SEMA. Durante essa ação, realizamos atividades na aldeia Boa Vista, Terra Indígena Caititu, na Comunidade Praia do Pirão, rio Purus e na comunidade de Terra Firme, no Ramal Tauaruã. Foram realizadas, ainda, duas exposições: a *Exposição de Ciência Tecnologia*, produzida na Biblioteca do IFAM *campus* Lábrea, e *Exposição História da Matemática*, que encerou a SNCT em Lábrea.

Em Tefé, destacamos a exposição *O Manejo do Pirarucu em Tefé*. O peixe pirarucu tem a pesca proibida em território nacional. Sua pesca é permitida apenas sob o manejo comunitário, realizado por associações das comunidades ribeirinhas das Reservas de Desenvolvimento Sustentável (RDS) Mamirauá e Amanã. Essa atividade ocorre com a supervisão científica do Instituto de Desenvolvimento Sustentável Mamirauá (IDSM) e do ICMBIO. Para a realização desse trabalho de manejo, é necessário realizar cálculos de densidade da população de peixes pirarucu nos diversos lagos das RDS.

Outra exposição que merece destaque é a *Exposição dos Projetos de Pesquisa PIBIC Jr. 2016/2017* nas quais, habitualmente, foram realizadas apresentações orais dos trabalhos de PIBIC Jr., dos trabalhos que serão concluídos em 2017, além dos resultados parciais dos projetos iniciados em 2017. Foram realizadas, ainda, 21 oficinas, 01 peça de teatro, 01 mostra de vídeo e 01 exposição relatando a história da matemática.

3.1 Palestras e Oficinas: experimentando a matemática

No intuito de ilustrar a dinâmica da SNCT, trazemos o relato de duas experiências realizadas pelos autores deste texto durante o evento. A proposta é demonstrar como o tema do evento foi explorado de forma criativa, possibilitando aos participantes a compreensão da ciência no cotidiano e, ainda, demonstrar que não existe um saber isolado, que a construção do conhecimento é uma produção feita com base na realidade na qual estamos inseridos.

3.1.1 Palestra: *Probabilidade aplicada à genética*

A palestra intitulada *Probabilidade aplicada à genética* foi ministrada por dois professores de forma interdisciplinar, sendo um com formação em matemática e outro com formação em biologia. Além de apresentar a probabilidade ligada diretamente à matemática, procurou-se relacionar sua importância no estudo da transmissão de características hereditárias, uma área de estudo exclusiva da biologia. A palestra foi disponibilizada a partir da inquietação de ambos os professores ao perceberem, no decorrer das aulas de biologia e matemática, que os alunos apresentavam dificuldades em assimilar o conteúdo "probabilidade" e, por vezes, manifestavam rejeição. Nesse sentido, o objetivo da palestra foi possibilitar que os participantes pudessem perceber uma aplicação prática da probabilidade em uma área do conhecimento para além da matemática, mostrando que, apesar de serem disciplinas distintas, biologia e matemática podem complementar-se em diversos conteúdos. Para ministrar a palestra, os professores envolvidos planejaram os conteúdos e a metodologia com antecedência. O planejamento foi de singular importância para deliberar os procedimentos e o conteúdo a serem ministrados. Como elemento criativo, foi produzida uma paródia com a música "Baba", utilizada como enceramento da palestra. O material selecionado foi retirado de livros didáticos e paradidáticos, além de arquivos disponíveis na internet. A ideia foi criar um espaço envolvente e com a participação ativa dos inscritos.

A ação teve como ponto de partida o levantamento dos conhecimentos prévios dos participantes acerca da temática. Esse levantamento foi necessário pelo fato de que a maioria dos participantes era composta por alunos de cursos e séries diferentes. A exposição teve um caráter dialógico, com a abertura de espaços para a troca de experiências entre os palestrantes e os alunos. A partir desse levantamento, o professor de matemática iniciou sua explanação, de forma a introduzir conceitos e exemplos de aplicação da probabilidade nas diversas áreas do conhecimento, com exemplos relacionados ao próprio cotidiano dos discentes. Para auxiliar na exposição do conteúdo foram utilizados o quadro branco e a projeção audiovisual.

No contexto da temática "genética", os palestrantes evidenciaram exemplos de aplicação da probabilidade no estudo da genética, enfocando os trabalhos realizados por Gregor Mendel (1822-1884), que utilizou ervilhas como objeto de pesquisa e, graças aos cálculos probabilísticos, demonstrou os mecanismos de transmissão das características hereditárias, conseguiu abrir caminho para inúmeras construções da genética moderna. Como forma de dinamizar ainda mais a ação e fixar melhor as informações, ao final da palestra foi cantada uma paródia relacionada ao tema. Na composição da paródia havia informações com foco na fórmula geral do cálculo probabilístico.

Santos (2010) afirma que desenvolvimento do pensamento probabilístico se relaciona diretamente com as diferentes ações didáticas empregadas aos alunos na escola, tendo em vista que os mesmos podem apresentar pouca ou nenhuma experiência probabilística. Portanto, faz-se necessária uma intervenção com a finalidade de despertar novos conceitos frente à temática.

Embora a palestra em foco se trate de uma atividade pontual, podemos afirmar que o trabalho interdisciplinar ajuda a romper com um modelo de ensino fragmentado e abstrato, isto é, que não apresenta relação com o cotidiano dos alunos, implicando maior motivação em aprender. O trabalho interdisciplinar possibilita diversificar as ações e os recursos didáticos, ao contribuir significativamente para prender a atenção dos alunos. O uso da lousa, projeções, paródias e envolvimento dos alunos são fatores que devem ser levados em consideração.

Constatou-se, ao final da atividade, por meio do *feedback* dos alunos, que a matemática e a genética, por vezes consideradas vilãs pelo certo grau de dificuldade, ou até mesmo pela abstração, podem ter uma aceitação positiva por parte dos alunos. Para ajudar a superar as diversas dificuldades, é imprescindível uma contextualização prática e o trabalho interdisciplinar.

3.1.2 Oficina Produção de Biodiesel

O incentivo e a utilização de fontes de energias renováveis aparecem cada dia de modo mais comum em nosso cotidiano, pois existe a necessidade de garantir, cada vez mais, o desenvolvimento sustentável na sociedade atual garantindo a matéria prima para as futuras (CORADINI et al. 2014). Os sinais de alerta de que precisamos de energia limpa são frequentes; então, entender os mecanismos da produção de biodiesel e o funcionamento econômico da sociedade em geral para a problemática energética é, a cada dia, mais indispensável para entender fatores decisivos no cenário atual do setor energético, que utiliza, na sua maior parte, o consumo energético de fontes não renováveis. Assim, torna-se mais compreensível a ligação entre países produtores de petróleo com países industrializados. Todo esse contexto despertou a necessidade de oferecermos a oficina *Produção de Biodiesel,* ministrada pelo Professor Pedro Italiano, com um roteiro de aula prática feito a partir do trabalho de Schuchardt et al. (2007), destacando-se a utilização de conhecimentos matemáticos como noções de pesos e medidas, proporções e temperaturas.

O público dessa oficina foi variado: desde pequenos agricultores rurais a alunos de Ensino Médio do IFAM. Antes de irem ao laboratório de química do IFAM-campus Lábrea, os participantes foram direcionados a uma sala de aula para assistirem a uma palestra sobre todo o contexto de energias renováveis e segurança no laboratório. Após um momento de fundamentação teórica, os participantes foram direcionados ao laboratório de química, onde foram divididos em grupos de cinco pessoas; cada pessoa recebeu um roteiro da prática para produção de biodiesel, a fim de que todos pudessem manipular as ferramentas como vidraria, reagentes e máquinas do laboratório. Durante a oficina surgiram várias dúvidas sobre o biodiesel e como ele poderia ser utilizado na substituição do óleo diesel. Muitos ficaram impressionados em saber que já se utiliza uma pequena quantidade em porcentagem ao óleo diesel e que, segundo Osaki et al. (2011), o biodiesel pode ser misturado em qualquer proporção, sendo assim, foram criadas grandes expectativas com relação a esse tipo de combustível renovável.

No tocante às questões de conteúdo matemático, os participantes puderam verificar o peso utilizando a balança analítica para mensurar os reagentes (hidróxido de sódio, álcool) e as medidas, utilizando as vidrarias, como bureta, para medir quantidades de óleo necessárias para cada prática. Os participantes também tiveram acesso a um agitador magnético com chapa de aquecimento para facilitar a agitação e o aquecimento da solução e puderam usar, na prática, um termômetro para medir a temperatura e um cronômetro para medir o tempo necessário para a formação do biodiesel.

Após esses processos, todo o material foi dispensado em um funil de decantação, para que pudesse ficar em repouso, no qual foi possível observar a separação do biodiesel menos denso e da glicerina formada ao fundo neste processo. Em relação à proporção, foram feitos cálculos matemáticos com regra de três simples para saber se 100 mL de óleo produziriam 90 mL de biodiesel. O mesmo foi feito para os outros reagentes. Durante toda a prática de produção de biodiesel na oficina, foi necessário ter muita atenção e utilizar conhecimentos físicos, químicos e matemáticos.

No fim da oficina, por meio de perguntas aos participantes, constatamos que todos compreenderam que o biodiesel é um combustível de origem renovável, que pode ser feito a partir de óleos vegetais ou animais; assim como verificaram que é fácil produzir biodiesel, que o Brasil tem potencial de ser líder mundial na produção de biodiesel e que este combustível pode gerar uma melhor distribuição de renda no Brasil, pois pode incentivar o cultivo de plantas oleíferas por pequenos produtores rurais e extrativistas.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A VIII SNCT do IFAM *campi* Lábrea e Tefé foi um evento singularmente diverso e apresentou, na sua metodologia, uma dinâmica dialógica e múltipla. *A matemática está em tudo*, tema motivador, instigou-nos a pensar em atividades interdisciplinares e transdisciplinares. As diversas disciplinas da base comum e da base técnica foram inseridas nas diversas atividades criadas a partir da área de interesse dos docentes e outros agentes sociais que atuaram no evento.

O universo do público alcançado foi bem diverso: alunos dos cursos integrados, subsequentes e superiores dos *campi* Lábrea e Tefé, alunos das redes municipal e estadual e, ainda, os chamados povos e comunidades tradicionais, por meio de atividades desenvolvidas em comunidades e aldeias.

Dentre os resultados alcançados pela ação, destacamos: aproximação dos alunos e comunidade da matemática, enquanto prática presente no cotidiano. Por conseguinte, outro ponto de destaque foi o seminário sobre *Educação do Campo*, que culminou com a produção de uma carta aberta, apontando os anseios das comunidades - sobretudo dos jovens da Reserva Extrativista Ituxi - especialmente na urgência da criação de uma "Casa Familiar Rural". A realização de atividades em comunidades de terra firme, ribeirinhas e indígena, por meio da ação "Ciência Móvel" e o programa de rádio "Estação ENEM" ampliaram o alcance do evento para um número significativo de pessoas, com as quais não tivemos contato direto, porém essas ações oportunizaram sua participação em uma atividade importante do evento.

Não menos relevante, foi a busca de promovermos o diálogo entre a matemática, outras áreas do conhecimento científico e artes, a partir de exposições, do teatro e do cinema; o estímulo à leitura, com o projeto da biblioteca itinerante *Banzeiro do Conhecimento*; a socialização dos projetos e resultados de pesquisa de Iniciação Científica; a realização de oficinas e minicursos em diversas áreas de conhecimento. É importante ressaltar o diálogo inter/pluridisciplinar possibilitado a partir dos conteúdos matemáticos, a abertura do diálogo com os diversos sujeitos, alcançados por esta ação/projeto. E, ainda, o trabalho em conjunto das equipes de organização da SNCT nos *campi* Lábrea e Tefé.

Foram atingidas direta ou indiretamente mais de três mil pessoas, em uma ação integrada e inovadora, no sentido de tornar um tema acadêmico mais próximo da realidade das pessoas, a partir do contexto de um evento acadêmico, pensado para criar uma sinergia com as pessoas inseridas no contexto amazônico. A partir desse pensamento, apresentamos o subtema *somando e multiplicando experiências de ensino, pesquisa e extensão na Amazônia*.

Consideramos que todo o esforço despendido para a realização da SNCT nos campi Lábrea e Tefé trouxe bons resultados, alcançando os objetivos do referido evento: apresentar a matemática como uma área fascinante que pode produzir uma série de experiências e conhecimentos, divulgando a ciência acadêmica em diálogos com a população das comunidades locais.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, A. A. Apresentação. In: SHIRAISHI NETO, J. (Org.). **Direito dos povos e das comunidades tradicionais no Brasil: declarações, convenções internacionais e dispositivos jurídicos definidores de uma política nacional.** Manaus: UEA, 2007.

CORADINI, G. C.; FROZZA, M. S.; LOPES, T. A. M.; VILANOVA, E. **Biodiesel x sustentabilidade: uma alternativa viável do aproveitamento do óleo residual de cozinha no munícipio de Santa Maria/RS.** Disponível em: <https://www.google.com/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=&ved=2ahUKEwjLm6aN4K3uAhWSRDABHU6lAq0QFjABegQIARAC&url=http%3A%2F%2Farquivofee.rs.gov.br%2Fwp-content%2Fuploads%2F2014%2F05%2F201405237eeg-mesa9-biodieselsustentabilidade.pdf&usg=AOvVaw3UE_cjYkLpm3U3tfAOMMCY> Acesso em: 07 jul. 2020.

CORRÊA, D. S.; SCHERER, S. **Uso de TIC nas práticas de acadêmicos de um curso de Licenciatura em Matemática na modalidade EaD**. 2012. Disponível em <http://www.uems.br/eventos/semana2012/arquivos /49_2012- 09-28_15-44-41.pdf.> Acesso em: 20 abr. 2020.

DORIGONI, G. M. L; SILVA, J. C. **Mídia e educação:** o uso das novas tecnologias no espaço escolar. 2008. Disponível em: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/1170-2.pdf>. Acesso em: 22 abr. 2021.

FREIRE, P. **Pedagogia do oprimido**. 17ª ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1987.

HAGE, S. A. M. Transgressão do paradigma da (multi)seriação como referência para a construção da escola pública do campo. **Educ. Soc**., Campinas, v. 35, n. 129, p. 1165-1182, out.-dez.2014.

KAMII, C; DEVRIES, R. **Piaget para a educação pré-escolar.** 2. ed. Porto Alegre: Artes Médicas, 1992.

LOPES, C. M**. Início das atividades da VIII SNCT 2017.** IFAM/Campus Lábrea. Disponível em: <http://www2.ifam.edu.br/campus/labrea/noticias/inicio-das-atividades-da-viii-snct>. Acesso em: 02 fev. 2020.

MAXIMIANO, C. A.; SILVA, D. V. O. **Anais da Semana Nacional de ciência e tecnologia do IFAM Campus Lábrea, 23 a 29 de outubro de 2017**. Amazonas: IFAM, 2017.

MORAES, H. J. P.; SÁ, J. B. **Mídia e educação:** reflexões, relatos e atuações. In: Simpósio sobre Formação de Professores: tecnologias e inovação na educação básica, 3. RAUEN, Fábio José (Org.). Anais... Tubarão: Ed. da Unisul, 2011. p. 1-8.

MORETTI, V. D. **Educação matemática nos anos iniciais do ensino fundamental**: princípios e práticas pedagógicas. 1ª. ed. São Paulo: Cortez, 2015.

OSAKI, M.; BATALHA, M. O. **Produção de biodiesel e óleo vegetal no Brasil: realidade e desafio.** Disponível em: <https://ageconsearch.umn.edu/record/134561.> Acesso em: 07 jul. 2020.

RODRIGUES, C. T. Matemática como Ciência mais Geral: Forma da Experiência e Categorias. **Cognitio-Estudos**: Revista Eletrônica de Filosofia, São Paulo, v. 4, n. 1, p. 37-59, 2007.

SANTOS, J. A. F. L. **O movimento do pensamento probabilístico mediado pelo processo de comunicação com alunos do 7º ano do ensino fundamental.** Dissertação (Mestrado) - Universidade São Francisco, Itatiba, SP, 2010.

SCHUCHARDT, U.; RINALDI, R.; GARCIA, C.; MARCINIUK, L.; ROSSI, A.V**.** Síntese de biodiesel: uma proposta contextualizada de experimento para laboratório de química geral. **Química Nova**, v. 30, n. 5, 1374-1380, 2007.

SILVA, R. A; MATTOS, J. R. L. A. Etnomatemática em uma Comunidade Quilombola da Região Amazônica: elo entre conhecimento empírico e escolar. **Hipátia**, v.4, n. 1, p. 116 – 127, jun. 2019.

.

Submetido em novembro de 2020.
Aprovado em abril de 2021.

v.6, n.1, p. 143-154, jun. 2021

Claudina Azevedo Maximiano

Doutorado em Antropologia Social pela Universidade Federal do Amazonas (UFAM). Docente do Instituto Federal do Amazonas (IFAM), Lábrea, AM, Brasil. ID Lattes: 4386960179349872.

Contato: claudina.maximiano@ifam.edu.br.

Pedro Italiano Araújo Neto

Licenciatura em Ciências Biológicas pelo Instituto Federal do Piauí (IFPI). Docente do Instituto Federal do Amazonas (IFAM), Lábrea, AM, Brasil. ID Lattes: 0082246421586738.

Contato: predo.italiano@ifam.edu.br

Venício Favoretti

Mestrado em Ciências e Humanidades pela Universidade Federal do Amazonas (UFAM). Docente do Instituto Federal do Amazonas (IFAM), Lábrea, AM, Brasil. ID Lattes: 1841389359157129.

Contato: venicio.favoretti@ifam.edu.br

O Ensino da Estatística Inspirado na Educação Matemática Crítica

um projeto baseado em propostas investigativas para estudantes da educação básica

The Teaching of Statistics Inspired in Critical Mathematical Education

a project based on investigative proposals for basic education students

Dilson Ferreira **Ribeiro**
Colégio Municipal Pelotense (CMP)

RESUMO

Este relato de experiência mostra o desenvolvimento de um projeto que ensina estatística básica para estudantes do sétimo ano do Ensino Fundamental. Dentre os conteúdos ministrados tem-se: coleta de dados; construção e análise de tabelas e gráficos; porcentagem. O objetivo do projeto é permitir aos estudantes um olhar crítico em relação aos fatos que ocorrem em sua comunidade, conseguindo apresentar suas opiniões por meio de conhecimentos matemáticos. O texto aqui apresentado tem como objetivo refletir sobre a experiência de uma proposta de intervenção, pautada na Educação Matemática Crítica. Para isso, são destacadas seis etapas do projeto: apresentação/escolha do tema; produção de uma redação; elaboração de questões para entrevistas; realização das entrevistas; organização dos dados coletados; apresentação dos dados encontrados. A escrita versa em torno das habilidades sugeridas pela BNCC e das dificuldades encontradas pelos estudantes na realização das etapas. Na conclusão, a compreensão sobre a necessidade de desenvolver uma proposta de ensino significativo, permitindo que estudantes assumam o papel de protagonistas, tornando a Matemática mais do que um conjunto de regras, mas uma ferramenta capaz de auxiliar na compreensão e reflexão de temas que, por vezes, estão presentes no dia a dia de todas as pessoas.

Palavras-chave: Educação Matemática Crítica. Ensino de Matemática. Estatística.

ABSTRACT

This experience report shows the development of a project that teaches basic statistics to students in the seventh grade of elementary school. Among the contents taught are: data collection; construction and analysis of tables and graphs; percentage. The aim of the project is to allow students to take a critical look at the facts that occur in their community, managing to present their opinions through mathematical knowledge. The text presented here aims to reflect on the experience of an intervention proposal, based on Critical Mathematical Education. For this, six stages of the project are highlighted: presentation / choice of theme; production of an essay; elaboration of interview questions; conducting the interviews; organization of the collected data; presentation of the data found. The writing is about the skills suggested by the BNCC and the difficulties encountered by students in completing the stages. In conclusion, the understanding of the need to develop a meaningful teaching proposal, allowing students to assume the role of protagonists, making Mathematics more than a set of rules, but a tool capable of helping in the understanding and reflection of themes that, sometimes they are present in everyone's daily life..

Keywords: Critical Mathematics Education. Mathematics teaching. Statistic.

1 INTRODUÇÃO

Este artigo, no formato de relato de experiência com perspectiva descritiva, apresenta a realização de uma proposta de ensino de estatística para estudantes da Educação Básica. O objetivo do presente relato é refletir sobre a experiência de uma intervenção, pautada na Educação Matemática Crítica. Na estrutura aqui apresentada, o ensino da estatística é associado ao desenvolvimento da criticidade do estudante, o que permite a escrita se apropriar, em alguns momentos, da Educação Matemática Crítica. Para isso, é oportuno destacar que a Educação Matemática Crítica, segundo AlrØ e Skovsmose (2006, p. 18), "[...] preocupa-se com a maneira como a Matemática em geral influencia nosso ambiente cultural, tecnológico e político e com as finalidades para as quais a competência matemática deve servir.", ou seja, a Educação Matemática Crítica não vai estar preocupada apenas com a eficiência dos estudantes em saber regra de três, porcentagem, interpretação e construção de gráficos estatísticos ou suas habilidades em desenvolver uma pesquisa, mas preocupada em relação à forma como a Matemática aprendida pode influenciar seu comportamento e suas atitudes na busca por uma participação mais ativa na construção de uma sociedade melhor para todos.

A proposta foi desenvolvida em uma escola pública no interior do Rio Grande do Sul e teve como objetivo permitir aos estudantes um olhar crítico em relação aos fatos que ocorrem em sua comunidade por meio das aulas de Matemática. Nessas considerações, a perspectiva de que a Matemática "[...] valorize a identidade dos sujeitos e reconheça o contexto social, político e cultural em que estão inseridos como ponto de partida para a definição de assuntos relevantes que orientem os conhecimentos matemáticos a serem estudados." (SCHEEREN; JUNQUEIRA, 2020, p. 108), fazendo com que formem e apresentem suas opiniões por meio de conhecimentos matemáticos.

O público-alvo desta proposta foram estudantes do sétimo ano, cuja característica, numa turma formada por 25 integrantes, era o fato de aproximadamente 90% estarem cursando o sétimo ano pela segunda ou terceira vez. Na ocasião, a ideia foi propor uma metodologia diferenciada em sala de aula, já que a maioria das aulas eram ministradas apenas com atividades passadas na lousa ou embasadas em atividades sugeridas pelo livro didático. Nessa diferenciação, a necessidade de promover "[...] espaços para a reflexão crítica sobre as diferentes linguagens e seus processos de construção, disseminação e uso, incorporando-os ao processo pedagógico, com a intenção de possibilitar o desenvolvimento da criticidade e da criatividade [...]" (BRASIL, 2017, p. 6). Dessa forma, é permitido que o estudante se utilize da linguagem matemática para explanar suas ideias e sua criticidade em relação a um determinado assunto.

Para isso, foi lançada uma proposta baseada em conceitos de estatística para desenvolver cálculos com porcentagem, regra de três e análise de tabelas de frequências: absoluta e percentual. Nessa proposta, o discente desenvolveu o papel de pesquisador, investigando temas de pesquisa de sua preferência por meio do desenvolvimento de seis etapas, melhores descritas no decorrer do texto, que perpassaram pela pesquisa teórica, elaboração de questões, produção de uma redação, entrevista e organização/exposição de dados.

Sobre as etapas, a proposta teve por intuito tornar o estudante um pesquisador. Essas etapas foram organizadas em seis momentos, estruturando o desenvolvimento de habilidades e competências de investigador, pretendidas de acordo com o planejamento do professor. De acordo com a Base Nacional Comum Curricular – BNCC, o ensino de estatística tem como embasamento a abordagem de fatos presentes em situações cotidianas do estudante. Dessa forma, a BNCC destaca: "[...] todos os cidadãos precisam desenvolver habilidades para coletar, organizar, representar, interpretar e analisar dados em uma variedade de contextos, de maneira a fazer julgamentos bem fundamentados e tomar as decisões adequadas." (BRASIL, 2017, p. 230). Por essa razão, esta proposta de ensino prezou o desenvolvimento do raciocínio, da interpretação de índices estatísticos e do exercício de explicar determinados fenômenos e/ou situações por meio da análise de dados estatísticos.

A justificativa para a implementação deste projeto deu-se pela necessidade de desenvolver habilidades de interpretação em relação às situações do cotidiano. Nessa busca por aproximação entre os conteúdos escolares e o que ocorre na vida dessas pessoas, o propósito foi estreitar a relação entre os conteúdos matemáticos e as vivências dos estudantes. Essa mesma proposta é desenvolvida desde 2018 e teve em outras edições a adaptação para a primeira série do Ensino Médio. No entanto, o presente relato vai apresentar as fases desenvolvidas no ano de 2019 com o sétimo ano do Ensino Fundamental. Escolheu-se essa edição por estar mais completa. Na seção seguinte, serão descritas as etapas desta proposta de ensino.

2 AS ETAPAS DO PROJETO

Nas etapas apresentadas a seguir, levou-se em consideração a capacidade de organização do estudante, de explanação sobre um determinado tema, bem como o desenvolvimento de habilidades, as quais permitiram que a criticidade fosse valorizada. Na explanação das ideias desses estudantes, valorizou-se a cultura local ou situações comuns a uma comunidade. Em relação ao termo cultura, Bicudo (2004, p. 21) considera "[...] como o conjunto de mitos, valores, normas de comportamento e estilos de conhecimento compartilhados por indivíduos vivendo num determinado tempo e espaço". Dessa forma, este projeto valorizou o cotidiano daquela comunidade escolar, seus anseios, suas reivindicações, de forma que o ensino da Matemática ganhe mais sentido e, por esse trajeto, os discentes tornem-se mais críticos e protagonistas em seu processo de construção de conhecimento.

Nas considerações ao propor a Matemática conduzida por um viés mais crítico, Tomaz e Soares (2008), alicerçados nas concepções de Ole Skovsmose, destacam que a apresentação de um tema de pesquisa deve cumprir condições as quais perpassem por: a) ser um assunto conhecido dos estudantes; b) ser passível de discussão; c) ter um valor em si próprio, não sendo apenas ilustrativo para introduzir um tema matemático; d) ser capaz de criar ideias de como ou onde se utiliza a Matemática; e) desenvolver algumas habilidades matemáticas e f) privilegiar a criticidade, mais do que apenas a resolução de um cálculo matemático.

O projeto foi desenvolvido em seis etapas. Em todas elas, o objetivo de permitir o protagonismo do estudante se faz presente. Além disso, foram lançadas aos participantes propostas as quais tornem o projeto único e diferenciado para cada grupo de trabalho. Essa diferenciação fez cada grupo ter uma realidade ou um caminho, se assim podemos afirmar, diferente dos demais grupos, sendo, dessa forma, uma experiência única para cada estudante ou grupo de estudantes.

2.1 A Primeira Etapa: a escolha do tema

Na primeira etapa, realizada em sala de aula, o professor abriu espaço para que a escolha do tema a ser trabalhado seja do interesse de todos. Trabalhar com algo que não os motive poderia ocasionar desestímulo na realização das atividades propostas. Para isso, foi dito que quanto mais o estudante tivesse interesse pelo que vai pesquisar, melhor seria seu trabalho.

Essa associação da Matemática com temas de seu cotidiano permite o exercício da reflexão, seja sobre o fato ou sobre a utilização dos conteúdos. É um exercício crítico, tornando a Matemática essencial para o desenvolvimento da competência chamada materacia. Esse termo tem origem na

Literacia que, segundo Paulo Freire, "[...] pode se referir também à competência para interpretar uma situação como algo que pode ser alterado ou à identificação de mecanismos de repressão." (ALRØ; SKOVSMOSE, 2006, p. 19). Sendo assim, a materacia corresponde a essa mesma noção denominada por Freire. Ainda segundo AlrØ e Skovsmose (2006, p. 19), Ubiratan D'Ambrosio utiliza em vários trabalhos sobre Etnomatemática o termo matemacia para o mesmo significado. Dessa forma, o autor destaca a necessidade da interpretação crítica no ensino da Matemática.

> Empregamos matemacia para designar uma competência ainda não muito bem especificada que inclui a 'leitura crítica' do contexto sociopolítico. Como descrito em Skovsmose (1994), matemacia vem a ser mais que um entendimento de números e gráficos, é também uma habilidade para aplicar números e gráficos a uma série de situações. Ela inclui também a competência para refletir e reconsiderar sobre a confiabilidade das aplicações. Assim como Rogers e Freire concluíram que as aprendizagens significativa e política são favorecidas pelo diálogo, esperamos encontrar recursos para o desenvolvimento da matemática no diálogo que acompanha a cooperação investigativa. (ALRØ; SKOVSMOSE, 2006, p. 143).

Apropriando-se dos termos definidos acima, a noção de matemacia permite destacar a relevância para a democracia e para o desenvolvimento do cidadão crítico e reflexivo, já que para Skovsmose (2008) "Referências à vida real parecem ser necessárias para estabelecer uma reflexão detalhada sobre a maneira como a matemática opera em nossa sociedade". (SKOVSMOSE, 2008, p. 38).

Em se tratando do desenvolvimento desta etapa, cabe destacar a dificuldade encontrada em sala de aula em relação aos argumentos ou posições críticas sobre um determinado tema. Ratifica-se que o tema foi escolhido pelo estudante, portanto, foi pressuposto que o mesmo teve um prévio conhecimento ou curiosidade sobre o assunto e que desejou arguir sobre isso durante o espaço proposto. No entanto, a dificuldade maior nessa fase inicial foi permitir a esse público o espaço de protagonista em uma aula de Matemática. Em uma sala com aproximadamente trinta pessoas, convencer que naquele momento o estudante assume a condução dos debates e/ou discussões, e que não estamos deixando de propor situações que conjecturam com os conhecimentos matemáticos, foi a primeira barreira a ser vencida. Para isso, a solução encontrada foi dar confiança a esse público, permitindo o respeito ao seu ponto de vista, ganhando espaço para que conduzissem, mediante o planejamento do professor, o desenvolvimento das próximas etapas.

Considerando que cada etapa descrita tem um planejamento específico para cada turma, adequando-se à participação de todos e ao entusiasmo da turma, o momento de debate e escolha do tema proposto levou aproximadamente três períodos de 35 minutos. Na continuidade das etapas do projeto, é esperado que o estudante comece a fazer as devidas investigações sobre o assunto. Para isso, é dado o início da segunda etapa.

2.2 A segunda etapa: a investigação teórica sobre o tema e a produção de uma redação

No trabalho destacado para a construção deste relato, diversos foram os temas abordados pelos estudantes. Dentre esses temas, destacaram-se: Aborto, sendo escolhido por dois grupos com opiniões contrárias sobre o tema; Aquecimento Global; Depressão; Discriminação; Drogas; Esporte; Feminismo; Futebol; Homofobia; Identidade de gênero; Porte de Armas; Programa de TV; Racismo; Suicídio; e Violência no Trânsito. Devido à amplitude na quantidade de temas, não serão apresentados dados numéricos e excertos de todas as pesquisas feitas, mesmo todas elas tendo a mesma relevância para este relato. Para exemplificar as etapas desenvolvidas pelos estudantes, optou-se por apresentar excertos e dados quantitativos do tema sobre suicídio.

Considerando a amplitude de temas, há que se valorizar o destaque dado pela BNCC em relação às competências específicas de Matemática para o Ensino Fundamental, a qual salienta a "[...] autonomia, responsabilidade e flexibilidade, no desenvolvimento e/ou discussão de projetos, que abordem, sobretudo, questões de urgência social, com base em princípios éticos, democráticos, sustentáveis e solidários, valorizando a diversidade de opiniões [...]" (BRASIL, 2017, p. 223). Essa valorização em relação à diversidade de opiniões está presente a cada instante, em cada etapa. Para Pais (2001, p. 53): "Na diversidade desse espaço de problemas, são estruturadas as condições ideais para que ocorra uma aprendizagem mais significativa, mostrando, portanto, que essa noção é de fundamental importância para a didática da matemática". Dessa forma, propor um tema para o desenvolvimento de um determinado conceito matemático é um dos caminhos mais adequados para que essa construção de conhecimento seja mais significativa ao estudante, ou seja, tenha uma relação mais estreita entre seus interesses e o seu cotidiano.

Ao escolher seu tema de pesquisa, o estudante foi orientado a fazer uma leitura para que aprofunde seu conhecimento e, na sequência, produza uma redação cuja estrutura mostrou o seu conhecimento sobre o tema escolhido. Ao escolher o tema, simultaneamente ocorre a formação das duplas ou trios. Essa organização foi necessária para que ocorra a troca de saberes, o aprendizado mútuo e o desenvolvimento do trabalho em grupo, muito destacado na BNCC. A formação desses grupos não tem intervenção do professor, sendo eles os responsáveis por desenvolverem um trabalho em conjunto, com seu colega, até a última etapa.

A conclusão do desenvolvimento da segunda etapa, se consolidou na entrega da redação. Essa produção escrita é o referencial que o professor necessita para saber se os grupos estão sabendo expor suas opiniões em relação ao tema escolhido. Para isso, a escrita pode ter como referência um estudo, uma reportagem ou uma notícia, mas deve conter na sua essência o ponto de vista daquelas pessoas que desenvolvem o trabalho em sala de aula e não trechos extraídos de textos produzidos por outras pessoas.

No desenvolvimento do tema sobre suicídio, um dos trechos que chamou a atenção na redação apresentada mostrava a preocupação dos pesquisadores (estudantes) em relação ao que leva uma pessoa a cometer um atentado à própria vida. No destaque de um dos excertos, tem-se: "Ao questionar sobre quais motivos uma pessoa tem para cometer suicídio, passa por nossa cabeça o sofrimento que essa pessoa pode estar passando devido a problemas em sua casa, falta de aceitação de seus amigos ou descontentamento com seu corpo." Nessas considerações, foi perceptível a compreensão dos estudantes sobre os diversos fatores que podem levar uma pessoa ao suicídio. Essa relevância, segundo esses estudantes, foi levantada por meio de acontecimentos os quais ocorreram em sua comunidade ou até mesmo com seus familiares. Dessa forma, é oportuno salientar que a escrita desses estudantes fornece material para que eles desenvolvam as questões a serem aplicadas no momento da coleta de dados, apresentada na etapa seguinte.

Após a entrega da redação, o professor realizou uma leitura inicial, orientando o estudante a corrigir possíveis erros de digitação e valorizando a produção de uma escrita única daquele estudante, descartando cópias de trechos de reportagens que podem ter sido utilizadas como balizadoras para sua escrita. Nessa etapa, a redação retornou, para que em etapas seguintes a mesma fosse entregue novamente, devidamente corrigida, para somente nesse momento ser feita a avaliação de sua produção. Ou seja, a redação foi a primeira entrega feita pelos grupos, mas sua correção final ocorreu apenas na finalização do trabalho.

A dificuldade maior desta etapa foi a elaboração de um texto próprio que demonstre suas opiniões e sentimentos sobre um tema escolhido. O que se percebe é o quanto houve um enrijecimento por parte dos estudantes em desfrutar de sua liberdade de argumentação. Para muitos, a ausência dessa liberdade vai ao encontro de seus relatos quando afirmam que aulas de Matemática são praticamente aulas expositivas, as quais o professor faz um modelo e o mesmo é aplicado na resolução de uma quantidade significativa de exercícios.

Com isso, considera-se a necessidade de os professores educarem "[...] os alunos a ser abertos e críticos [...]". (ALRØ; SKOVSMOSE, 2006, p. 26-27). Essa criticidade converge para atitudes as quais permitam ao estudante elaborar suas questões, suas situações, sendo por vezes protagonista. Dessa forma, dá-se a continuidade do projeto com a terceira etapa, a qual baseia-se na elaboração de duas questões sobre o tema. Para a realização desta etapa, os estudantes tiveram um prazo de sete dias. Enquanto isso, em sala de aula, eram apresentados exemplos que estruturariam as etapas seguintes do projeto.

2.3 A terceira etapa: elaboração de questões para as entrevistas

Por meio do desenvolvimento da terceira etapa, ocorreu a aproximação do estudante com o núcleo do projeto. Nessa etapa ele teve que elaborar duas questões com múltipla escolha. Para isso, foi indicado que em apenas uma dessas questões ocorresse a opção sim ou não. A outra deveria ter de três a quatro alternativas. As questões foram elaboradas com base no tema escolhido e, em suas opções, estavam subtendidas as possíveis respostas dos entrevistados. Dessa forma, esteve presente a interpretação do estudante sobre de que forma ele achava que seu grupo de entrevistados pensava. Assim, por meio dos resultados que eles encontraram, realizou-se o percurso para a conclusão do projeto.

Nessa elaboração, os estudantes exercitam/criam a relação entre as alternativas de cada questão e o tema de sua pesquisa. Esse exercício vai ao encontro das recomendações da BNCC que enfatiza que os estudantes devem relacionar "[...] observações empíricas do mundo real a representações (tabelas, figuras e esquemas) [...]" (BRASIL, 2017, p. 221).

Na elaboração das alternativas de cada questão está sendo colocada em prática a criação de categorias para variáveis qualitativas nominais ou ordinais. Segundo Cazorla, Utsumi e Monteiro (2021, p. 26): "Uma variável qualitativa revela uma característica agrupada em categorias, podendo ser nominal ou ordinal. Nominal é quando suas categorias não apresentam ordenação [...]. Por sua vez, a variável é ordinal quando suas categorias apresentam uma ordenação natural [...]".

A possibilidade de ter uma questão com variável qualitativa ordinal proporcionaria uma amplitude maior de possibilidades de representações gráficas.

Como exemplo, apresenta-se uma pergunta desenvolvida por uma dupla de estudantes do sétimo ano, com aproximadamente 15 anos de idade:

Na sua opinião, o que leva as pessoas a cometerem suicídio?

a) Tristeza por não contar com o apoio da família para resolver seus problemas.
b) Insatisfação devido ao bombardeio de modelos ditos corretos, apresentados pelas redes sociais.
c) Influências negativas vindas de seu grupo de amigos.
d) Problemas psicológicos.

Avaliando o teor da pergunta, percebeu-se a criticidade e opinião em relação ao tema investigado. Quanto à liberdade na elaboração, cabia ao professor apenas orientá-los como, por exemplo, sugerir opções menos repetitivas, ajudar na concordância, expor seu ponto de vista para que percebam a possibilidade de elaborar de outra forma, ficando mais clara para o entrevistado, mas mantendo a mesma ideia inicial.

Valorizar as competências de saberes e vivências está presente na BNCC, sendo oportuno o desenvolvimento de proposta de ensino por meio das vivências dos estudantes. Para Fiorentini (2003, p. 107) “[...] refletir sobre as vivências e construir significados novos e mais completos [...]” são reflexões que todos os professores podem fazer, quando propostas situações de ensino.

Sendo assim, percebeu-se na apresentação das questões, em alguns temas abordados, as dúvidas, as curiosidades e até mesmo os sentimentos desses estudantes que, de certa forma, terão a oportunidade de coletar respostas para os seus questionamentos. Essas respostas, que serviram de base para a sequência do projeto, foram ao encontro das angústias ou desejos desses estudantes.

Na avaliação técnica sobre a elaboração de uma questão, destaca-se que a maior dificuldade desses estudantes esteve em lançar uma pergunta rápida, precisa e com concordância. Além disso, as alternativas precisam atingir as suas expectativas devendo estar presentes as respostas que eles desejam encontrar, bem como as respostas que seu público pode imaginar. Por essa razão, é um exercício que necessitou de vários olhares. Eles elaboraram, mostraram ao professor, o qual fez suas primeiras considerações. Em seguida, eles fizeram as devidas correções ou adaptaram e lançaram para os colegas. A exposição das questões antes de serem propostas na etapa seguinte foi considerada como uma entrevista piloto, ocorrida em aula mesmo, e que serviu para realizar as últimas adequações para que os dados pudessem ser coletados. Após essa etapa, desenvolvida como tarefa para casa [na elaboração das questões] e depois trabalhada em aproximadamente duas ou quatro aulas de 35 minutos [para discussão entre os colegas], os estudantes foram encaminhados para o trabalho de campo, o qual é descrito na etapa seguinte.

2.4 A quarta etapa: a realização das entrevistas

Nesta etapa os estudantes foram convidados a entrevistar no mínimo 50 pessoas e o prazo para a coleta de dados foi de sete dias. A escolha do número limite de entrevistados ficou a critério dos estudantes, no entanto foi estabelecido um número mínimo de aproximadamente 50 para que os dados coletados fossem significativos. Embora no começo tenha sido espantoso o número mínimo de entrevistados, eles perceberam que, em uma dupla, cada um deles acabaria entrevistando aproximadamente um mínimo igual a 25 pessoas e, desses, alguns estavam na própria família, restando poucos para atingir a meta. Esses poucos foram encontrados na sua comunidade, na escola durante o intervalo ou até mesmo nas suas redes sociais.

A realização desta etapa foi a distância, com prazo de uma semana para ser concluída, podendo contar com a orientação do professor por meio de rede social. Todas as pessoas entrevistadas devem responder às duas questões elaboradas. Durante a entrevista, foi adotada uma estratégia para anotar as respostas dos entrevistados. Após, as perguntas e o número de respostas que cada alternativa recebeu foram levadas de forma organizada para a próxima aula. Nesse momento, possíveis erros como falta de opção respondida pelos entrevistados surgiram. A orientação que eles tiveram foi que se a maioria das pessoas respondesse algo que eles não haviam escolhido como resposta, esta outra opção tornaria-se então uma nova possibilidade de resposta para, dessa forma, não perder a questão e valorizar a ideia considerada pelos entrevistados. Assim, a organização dos dados e a conclusão do projeto tornou-se mais sólida. O quadro 1 exemplifica a forma sugerida para registrarem as respostas dadas pelos entrevistados. Na etapa seguinte, esses dados deram origem aos cálculos de frequência absoluta e frequência relativa, desenvolvidos com o acompanhamento do professor em sala de aula.

Foram mínimas as dificuldades encontradas nesta etapa. Por se tratar de um processo simples, acredita-se que ao chegarem neste nível do projeto os estudantes já haviam internalizado a proposta. Apenas surgiu a dúvida se cada um dos integrantes entrevistava a metade e se é feita

 v.6, n.1, p. 155-169, jun. 2021

apenas uma pergunta por componente do grupo, o que logo é esclarecido quando se reitera que todos os componentes devem fazer as duas perguntas, podendo dividir o número de entrevistados.

Quadro 1: Representação dos dados coletados durante as entrevistas.

Você sabe o que é setembro amarelo?	
Opções	Respostas
SIM	⧅ ⧅ ⧅ ⧅ ⧅ ⧅ ⧅ ǀǀ
NÃO	⧅ ⧅ ⧅

Fonte: Dados obtidos por intermédio de uma dupla de estudantes do sétimo ano.

Além disso, a orientação dada nesta etapa foi para que se apresentassem como estudantes de sua escola, explicassem, ao abordar as pessoas, o tipo de trabalho que estão realizando e, além disso, fizessem uma abordagem em que o entrevistado conseguisse compreender sobre qual tema estavam fazendo a coleta de dados. De acordo com os relatos, alguns estudantes, quando estiveram coletando dados sobre o tema feminicídio, afirmam que muitas pessoas não sabiam definir o verdadeiro significado dessa palavra. Sendo assim, surge uma oportunidade de o estudante expor seus conhecimentos, trabalhar os conceitos que foram abordados nas primeiras etapas, quando o mesmo pesquisou e desenvolveu uma redação sobre o tema. Com isso, percebeu-se a necessidade deste projeto ser estruturado por etapas em que uma se consolida por meio da outra. Assim, conforme relatado em sala de aula, as pessoas também acabaram adquirindo conhecimento sobre o tema e, em contrapartida, contribuíram para que o projeto fosse consolidado com dados verdadeiros, por opiniões de pessoas que realmente estavam decididas a contribuir com a pesquisa.

Em outros temas essa contribuição e esse aprendizado mútuo entre estudantes e entrevistados também ocorreram. Para o tema relacionado ao suicídio, por exemplo, as pessoas entrevistadas por uma dupla de estudantes acabaram se doando à pesquisa, indo mais além do que apenas responder às perguntas. Alguns dos entrevistados contribuíram com suas experiências de vida, casos com amigos ou família. Foram depoimentos que serviram de base para que esses estudantes fizessem o fechamento do trabalho com a exposição de experiências reais, as quais oportunizaram uma discussão em um grande grupo que expôs o verdadeiro sentimento de uma pessoa que passa por tal situação. Essa situação gerou contribuições em mais temas pesquisados, como nas pesquisas referentes ao suicídio ou depressão, ganhando contribuições dos entrevistados que foram além das respostas dadas às suas perguntas. Temas como racismo, homofobia, identidade de gênero foram responsáveis por gerar discussões em sala de aula, as quais contribuíram para a construção do conhecimento, muito mais do que se imaginava em uma aula de Matemática.

Com isso, de acordo com a BNCC, destaca-se uma das competências específicas de Matemática para o Ensino Fundamental, a qual fundamenta-se no processo de interação entre os pares, "[...] trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder a questionamentos [...], de modo a identificar aspectos consensuais ou não na discussão de uma determinada questão, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles." (BRASIL, 2017, p. 223).

Existem autores, como Espinosa e Fiorentini (2005) que destacam a necessidade de haver a interlocução entre os sujeitos. Neste caso, podendo ser estabelecida entre entrevistadores e entrevistados, ou entre os colegas em sala de aula no momento de expor os dados encontrados e as situações vividas. Para os autores, há uma cumplicidade entre o que ocorre com os grupos, num destaque aos processos de significação em momentos de troca de experiências. Para os autores

> [...] os saberes, conhecimentos, ideias e práticas (re)significados na interlocução não são de autoria exclusiva de um sujeito específico A ou B, pois não representam exatamente o que A ou B haviam trazido para discussão. O que é dito ou produzido por cada um no grupo é, na verdade, de todos aqueles que participam do processo. Entretanto, olhando sob outra perspectiva, há [...] significados próprios que se diferenciam daqueles produzidos pelos outros. Ou seja, o que resulta do processo de (re)significação é, ao mesmo tempo, plural e singular. (ESPINOSA; FIORENTINI, 2005, p. 160).

Nessas considerações, os autores enfatizam que as palavras do outro entrelaçam-se com sua própria expressividade. E nesse universo, em momentos de orientar as discussões, entrou em cena, apenas como um orientador, o professor. Para a realização desta etapa, o professor foi desafiado a atender um número excessivo de dúvidas, sem respostas prontas ou acabadas permitindo, dessa forma, que sua metodologia de ensino não fique cristalizada, como destacaria Isabel Petraglia (2003). Além disso, levou-se em consideração a saída de uma zona de conforto por parte do professor e a ideia de que o mesmo não retorne a ela. Estar em uma zona de risco não é estar desconfortável, mas considerar que todo dia é diferente e que situações diferenciadas devem ser valorizadas para que novas propostas de ensino ganhem destaque.

> A questão é que trocar o paradigma do exercício por um cenário para investigar implica também deixar uma zona de conforto e entrar em uma zona de risco. O que pode acontecer na sala de aula torna-se imprevisível. O ponto, porém, é não retornar para a zona de conforto proporcionada pelo paradigma do exercício, mas tirar proveito do potencial de aprendizagem que passa a existir na zona de risco associada ao cenário para investigação. (ALRØ; SKOVSMOSE, 2006, p. 130).

Na aula seguinte a tarefa era trazer os dados e, assim, realizar a etapa cinco, apresentada a seguir.

2.5 A quinta etapa: a organização dos dados coletados

Neste momento os grupos retornaram à sala de aula, após a realização das entrevistas. Com a orientação do professor, contabilizaram os dados coletados para cada resposta e fizeram a organização em tabelas. Para essa organização/representação dos dados, foram suficientes quatro períodos de 35 minutos, sendo dois utilizados para a construção das tabelas e mais um para a representação dos dados em forma gráfica. Nessas tabelas foram apresentadas as questões, as opções de respostas e os valores das frequências absoluta e percentual de cada alternativa, conforme pode ser percebido na Tabela 1.

Tabela 1: Distribuição dos entrevistados de acordo com seus conhecimentos sobre o que é setembro amarelo.

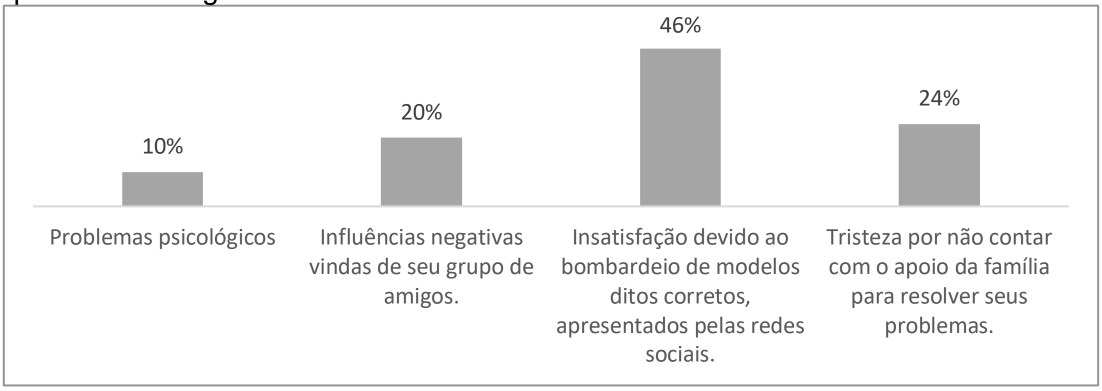
Opções	Frequência Absoluta	Frequência Percentual
SIM	37	71,1%
NÃO	15	28,9%
TOTAL	52	100%

Fonte: Dados obtidos por intermédio de uma dupla de estudantes do sétimo ano.

Foi nessa ocasião que o conteúdo de Matemática ganhou a característica de ferramenta auxiliar para que esses estudantes conseguissem externar os resultados obtidos por meio da realização das entrevistas. Dessa forma, eles perceberam o quão necessário foi compreender uma leitura de dados matemáticos para que um determinado assunto consiga ser apresentado. O gráfico

1 apresenta outra questão sobre o mesmo tema para que se tenha uma ideia dos outros cálculos realizados pelos estudantes.

Gráfico 1: Distribuição dos entrevistados de acordo com sua visão sobre as razões que levariam alguém a cometer suicídio.



Fonte: Dados obtidos por intermédio de uma dupla de estudantes do sétimo ano.

Como pode ser observado na leitura do gráfico 1, o tipo selecionado foi de colunas. No entanto, conforme Cazorla, Utsumi e Monteiro (2021, p. 30) outros tipos de gráficos, como o gráfico circular, pictograma ou gráfico de barras, poderiam se adequar à representação dessa variável qualitativa nominal.

Na apresentação dos gráficos, aproximadamente a terça parte dos grupos preferiram a utilização de software com planilhas eletrônicas. Para isso, alguns dirigiram-se ao laboratório de informática, outros realizaram em casa ou trouxeram seus computadores para a sala de aula. Nesta etapa, o professor ficou atento ao desenvolvimento dos cálculos, orientou em caso de dúvidas ou de possíveis erros. Nessa orientação, coube ao professor o desenvolvimento de alguns exemplos para a turma, utilizando dados fictícios e organização bem próxima daquela utilizada pelos estudantes.

No entanto, o que mais chamou a atenção foi o momento de quantificar os dados obtidos. Nessa ocasião ocorreu a interpretação de forma correta em relação aos números percentuais apresentados. Os estudantes perceberam, ao encontrar um valor absurdo, que este poderia estar errado, já que vivenciaram a construção dos dados. Para exemplificar, eles percebem que o maior percentual deve estar presente na opção à qual a maioria das pessoas respondeu e que a soma de todos os percentuais das respostas deve ser igual ou aproximado de 100%. Por exemplo: em um determinado grupo o valor absoluto encontrado em uma das opções de resposta foi igual a 30, sendo que esse grupo tinha entrevistado 55 pessoas. Quando encontraram o percentual igual a aproximadamente 183%, perceberam que o valor estava errado, já que o total da somatória entre os percentuais não poderia exceder os 100%, devido ao entendimento sobre porcentagem. Com isso, entenderam que algo estava errado em seu cálculo e, logo em seguida, sem o auxílio do professor, conseguiram encontrar o que haviam multiplicado de forma errada, no momento de realizar os cálculos. O erro encontrado foi que o valor equivalente a 30 respostas, num total de 55, fora considerado como 100%, mas esse valor percentual deveria ter sido atribuído aos 55, que equivalia ao total de entrevistados.

Essa vivência permitiu classificar o conteúdo matemático como uma ferramenta positiva para a explanação dos resultados, ganhando sentido a aprendizagem de porcentagem ou a realização de regra de três, bem como suas estratégias em apresentar uma tabela de dados por meio de frequências: absoluta e percentual. Segundo depoimentos dos próprios executores do projeto, é muito melhor desenvolver os cálculos com algum propósito do que fazer uma lista de exercícios que foi elaborada por outra pessoa, muitas vezes sem significado algum.

Nessa perspectiva, o professor desenvolveu seu trabalho com o propósito de reflexão sobre sua ação. Para Bicudo (2004, p. 256): “Reflexão-sobre-a-ação refere-se ao pensamento deliberado e sistemático, ocorrendo após a ação, quando o professor faz uma pausa para refletir sobre o que acredita ter acontecido em situações vividas em sua prática”. Ela ocorre em simultâneo à sua prática, com as experiências que viera a ter, fazendo com que ocorra um diálogo, permitindo o improviso de acordo com as situações apresentadas e crescendo a cada dia que passa.

Após a organização dos dados em tabelas e gráficos, os estudantes foram orientados a escrever de forma sucinta a interpretação de cada gráfico, sendo dessa forma encaminhados para a sexta etapa.

2.6 A sexta etapa: a apresentação dos dados

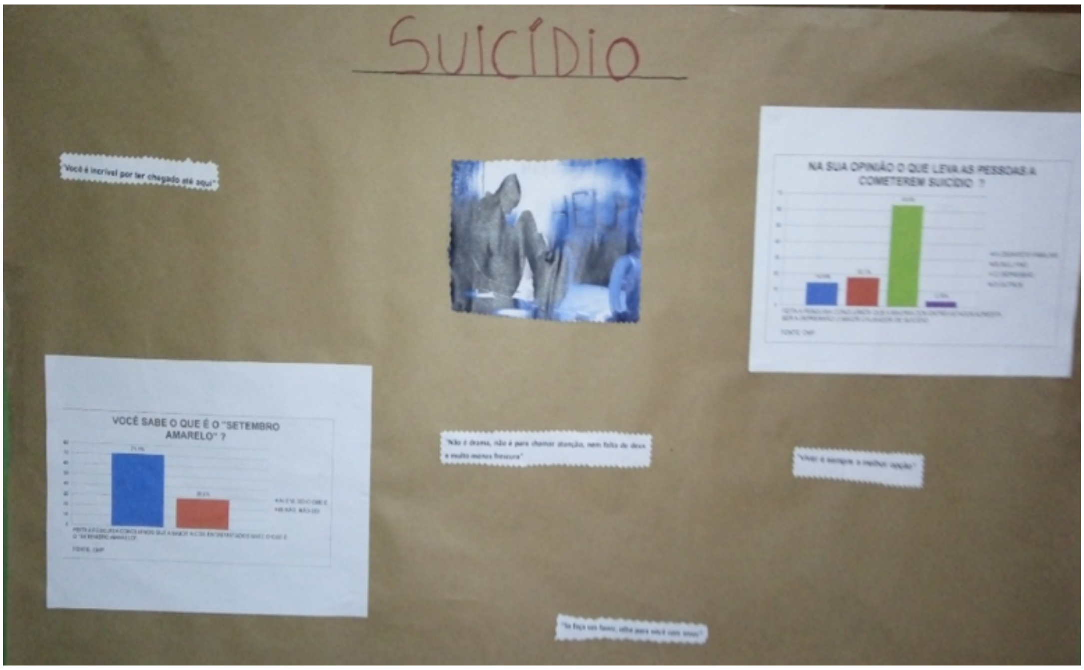
Nesta etapa, diante dos gráficos que mostraram a opinião dos entrevistados sobre o tema que eles escolheram para o desenvolvimento do projeto, os grupos foram orientados para redigir um ou dois parágrafos com sua interpretação em relação aos dados obtidos. Nessa interpretação, foi permitido expor seu conhecimento sobre o fato, mas, impreterivelmente, o estudante teve de relatar a opinião dos entrevistados e não a sua. Para Chassot (2000 apud KNIJNIK; WANDERES; OLIVEIRA, 2004, p. 435) “[...] a escola, muito mais do que reprodutora de conhecimentos, é um espaço político [...] com amplas possibilidades de propiciar uma educação crítica. [não devendo] buscar a homogeneização de seus alunos [...]”. Dessa forma, sua escrita deve estar de acordo com o que os entrevistados responderam e deve, acima de tudo, mostrar sua capacidade de interpretação de gráfico e análise de dados estatísticos. Nesse momento, o professor assumiu mais uma vez o papel de orientador, tendo de estar disponível para a realização de uma primeira leitura para saber se os objetivos da etapa foram atingidos. Para o desenvolvimento da escrita em cada gráfico foram utilizados apenas dois períodos de 35 minutos. Após a primeira entrega ao professor, foi feita uma primeira correção e, nos casos em que houve a necessidade de reescrita, os estudantes receberam a devida orientação e tiveram mais um dia para realizar a entrega definitiva.

Além disso, foi pedido para que os estudantes construíssem um mural para expor os dados encontrados e, num último momento, expusessem aos colegas as dificuldades, as aprendizagens sobre seu tema e o que encontraram como resposta para seus questionamentos. Na construção dos murais, a orientação é que elaborassem uma frase que chame a atenção daqueles que irão apreciar seu trabalho, apresentada em meio a imagens e dados matemáticos que retratem os resultados alcançados na pesquisa. Esse exercício foi necessário para ser trabalhada mais uma vez a habilidade de interpretação e produção escrita. Isso ocorre pelo entendimento que se tem sobre o público com o qual se está trabalhando. Segundo os estudantes, dificilmente alguém vai parar para ler redações coladas em murais, mas vai ter assunto em suas redes de conversa sobre aquela frase ou aquela imagem sobre um tema de seu interesse. Para a realização dos murais, foi pedido que fizessem um esboço no caderno da forma como iam apresentar seus dados de pesquisa. O material para a construção do mural, como gráficos pintados, recortes de frases, canetas hidrocores e cola vieram de casa. O papel pardo foi fornecido pela escola e a organização quanto à maneira como iam apresentar os dados era livre, valorizando a criatividade de cada estudante. A figura 1 mostra o exemplo de um dos murais construídos pelos estudantes e, em seguida, fixado nos corredores da escola.

Por fim, durante cada apresentação, foi gerado um debate em que os demais colegas, os quais não pesquisaram sobre o tema, contribuíram com sua opinião e, dessa forma, vieram a somar com o trabalho de todos. Dessa forma, para a realização desta etapa, foram necessários aproximadamente quatro períodos de 35 minutos, dependendo do nível de participação da turma.

 v.6, n.1, p. 155-169, jun. 2021

Figura 1: Mural do grupo de pesquisa sobre suicídio.



Fonte: Dados obtidos por intermédio de uma dupla de estudantes do sétimo ano.

Em alguns momentos, foi percebido que a dificuldade dos estudantes esteve em se manifestar sobre trabalho do outro. Essa oportunidade de criticar, contribuir, opinar sobre o tema dos demais colegas foi, para esse grupo de estudantes, algo diferenciado daquilo que já estavam acostumados a fazer. Para alguns, o receio foi que, se dessem uma opinião contrária, poderiam estar proporcionando algum descrédito ao trabalho do colega. No entanto, com uma conversa oportuna entre estudantes e professor, os critérios foram bem estabelecidos, permitindo a troca de opiniões, a avaliação entre os grupos de forma salutar, sempre respeitando a opinião ou as condições de trabalho desenvolvido pelos pares. Para Bicudo (2004) essa etapa concretiza uma das cinco dimensões que formam a base do construcionismo, chamada de Dimensão Sintônica. Para o autor:

> [...] ao contrário do aprendizado dissociado, normalmente praticado em sala de aulas tradicionais, a construção de projetos contextualizados e em sintonia com o que o aprendiz considera importante fortalece a relação aprendiz-projeto, aumentando as chances de que o conceito trabalhado seja realmente aprendido. (BICUDO, 2004, p. 267-268).

Após a realização das etapas, para a comunidade escolar, ficou a exposição dos murais nos corredores da escola e a reflexão, a cada momento que se deparavam com os temas trabalhados expostos. Para as aulas de Matemática, o diferencial de abordar temas que inicialmente estariam presentes apenas em capítulos de livro ou em listas de exercícios. Esses conteúdos conseguiram ser apresentados de forma mais dinâmica e com maior participação dos principais interessados, permitindo assim que a Matemática não seja algo pronto, acabado, mas com alguma relação com a vida. E, por fim, para essa comunidade escolar, ficou o aprendizado significativo, as atividades de pesquisador e investigador que eles até então não imaginavam que iam desenvolver e a percepção de que a Matemática é muito mais do que teorias e algoritmos.

3 ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

Na apresentação desta proposta, foi percebido o interesse de todos em sair do sistema tradicional de ensino, como a resolução de exemplos e exercícios. Esse sentimento esteve presente no rosto de cada participante, no entusiasmo em realizar as etapas, na curiosidade sobre a forma como iriam construir as etapas seguintes e na percepção do quanto a Matemática, a qual em outros momentos não passou de algo abstrato, poderia ser relacionada com temas do cotidiano ou que despertasse sua curiosidade. Desse grupo, como já citado, a grande maioria já havia cursado o sétimo ano em anos anteriores e, nessa ocasião, já tinha uma pequena lembrança de regra de três e porcentagem, no entanto, a totalidade de estudantes nunca havia ouvido falar sobre tabela de frequências.

Oportuno destacar, além disso, que a ideia de propor tal atividade era para que esses grupos conseguissem alcançar melhor seus objetivos, já que foi percebido o quão prejudicial seria manter um sistema de aula tradicional [expor o conteúdo e fazer uma lista de exercícios] para estudantes com tamanha defasagem de idade/série. Essa consideração sobre ensino tradicional pode ser verificada quando autores defendem a ideia de que a definição de tradicional vai variar de país para país, conforme AlrØ e Skovsmose (2006), podendo adotar-se nesta ocasião como uma prática pedagógica a qual "[...] o aluno quase não tinha a oportunidade de experimentar constatação de contradição em seu próprio raciocínio." (PAIS, 2001, p. 76). Sendo assim, com esta proposta de ensino, foge-se à prática tradicional já que o estudante teve a oportunidade de vivenciar e construir seu conhecimento.

Avaliando o teor da proposta, percebeu-se que, na maioria das vezes, há uma falta de estímulo para que estudantes desenvolvam seu senso crítico. Desenvolver um trabalho em que foi pedido inicialmente um texto, ou uma crítica sobre um tema de sua preferência, foi uma das etapas mais difíceis a serem realizadas. Esses estudantes estão acostumados a desenvolver um exemplo e, por meio desse modelo, reproduzir a resolução de um algoritmo para todo o resto. Desenvolver uma proposta com mais personificação é algo novo nesta comunidade escolar e deve ser explorado em outras propostas.

Dessa forma, após o fechamento de todas as atividades, pode-se dizer que o trabalho foi de grande valia e que o desempenho dos estudantes propiciou uma melhora significativa em seus rendimentos. Para exemplificar, logo depois da conclusão do trabalho, foram propostos exercícios sobre porcentagem e regra de três, elaborados a partir de temas os quais esses estudantes também pudessem achar importante, ganhando dessa forma um significado às práticas desenvolvidas em sala de aula. Sendo assim, foi possível compreender que o conteúdo matemático ganhou solidez e sentido para esses estudantes, os quais utilizaram os devidos algoritmos para encontrar a solução de questões apresentadas.

Nas aulas seguintes, com a apresentação de outro conteúdo como juros simples, foi percebida uma melhora significativa quanto ao nível de participação e interesse da turma. Para exemplificar, os estudantes tentavam relacionar o novo conteúdo com uma possível aplicabilidade em seu cotidiano, mostrando dessa forma que para esses estudantes ficou internalizada a necessidade de aprender conteúdos matemáticos por meio de alguma aplicabilidade.

Para concluir, destaca-se que propostas dessa natureza devem estar presentes em outros momentos durante o ano letivo, já que o projeto foi desenvolvido pontualmente em um período dentro de um trimestre. Além disso, enfatiza-se a validade do projeto ao desenvolver e aprimorar as habilidades de leitura e interpretação, quando a proposta aqui apresentada proporcionou momentos em que conteúdos matemáticos foram mais do que apenas a resolução de determinados algoritmos, mas saber o que fazer após os resultados encontrados.

Para alguns estudantes, quando a primeira versão da redação foi descartada por ser baseada em cópias de reportagens ou falta de posicionamento sobre o tema escolhido, constatou-se que tamanha dificuldade ocorreu pelo fato desses estudantes não compreenderem como realizar uma redação que mostrasse sua crítica em relação ao tema escolhido. Além disso, esses estudantes não estavam acostumados a expor suas ideias ou interpretar as ideias de um grupo de pessoas por meio de dados numéricos. Por essa razão, a confecção dos gráficos e dos murais assumem papel importante e necessário para o fechamento do projeto. Nessas atividades, é possível constatar que até mesmo os estudantes saem de suas zonas de conforto, já que foram desafiados em diversos momentos a realizar uma tarefa diferenciada, não permanecendo no conforto de receber exercícios que podem ser resolvidos mediante a leitura de um modelo.

Sendo assim, os resultados obtidos após a realização do projeto perpassaram pela autonomia do estudante, quando este foi orientado a escolher um tema, desenvolver a escrita, aprimorar sua capacidade de argumentação e construir estratégias [questões] para saber organizar a opinião de um determinado grupo [entrevistados]. Além disso, ocorreu o desenvolvimento de habilidades referentes ao trabalho em grupo, o respeito à opinião do outro e a validade de conteúdos matemáticos associados com acontecimentos reais, permitindo dessa forma tratar o ensino de forma significativa. Com isso, um dos principais resultados alcançados está no fato dessas pessoas despertarem interesse pela Matemática, compreendendo que a resolução de algoritmos ou necessidade de interpretar situações problemas têm um propósito que poderá ser útil em suas vidas. Assim, o projeto mostrou a possibilidade de o professor trabalhar com pessoas mais críticas, interessadas em perguntas e exigentes na apresentação de um novo conteúdo, havendo a necessidade de relação entre entes matemáticos e sua respectiva aplicabilidade na vida das pessoas.

REFERÊNCIAS

ALRØ, H; SKOVSMOSE, O. **Diálogo e aprendizagem em educação matemática.** Belo Horizonte: Autêntica, 2006

BICUDO, M. A. V; BORBA, M. C. **Educação matemática:** pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez Editora, 2004.

BRASIL. **Base Nacional Comum curricular:** educação é a base. Brasília, DF: MEC, 2017.

CAZORLA, I. M.; UTSUMI, M. C.; MONTEIRO, C. E. F. Variáveis estatísticas e suas representações em gráficos: reflexões para seu ensino. **Números – Revista de Didacta de las Matemáticas**, v. 106, p. 23-32, jan. 2021.

FIORENTINI, D. **Formação de professores de matemática.** Campinas: Mercado das Letras, 2003.

KNIJNIK, G; WANDERER, F; OLIVEIRA, C. J. (org.). **Etnomatemática, currículo e formação de professores.** Santa Cruz do Sul: EDUNISC, 2004.

ESPINOSA, A. J; FIORENTINI, D. (Re)significação e reciprocidade de saberes e práticas no encontro de professores de matemática da escola e da universidade. In: NACARATO, A. M; FIORENTINI, D. (orgs.). **Cultura, formação e desenvolvimento profissional de professores que ensinam matemática:** investigando e teorizando a partir da prática. São Paulo: Musa Editoria; Campinas: UNICAMP, 2005.

PAIS, L. C. **Didática da matemática:** uma análise da influência francesa. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

PETRAGLIA, I. **Pensamento complexo e educação**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2013.

SCHEEREN, V; JUNQUEIRA, S. M. S. Educação matemática crítica e espaços democráticos de formação: aproximações e desafios em um contexto de escola do campo. **Hipátia**, v.5, n.1, p. 106-119, jun. 2020.

SKOVSMOSE, O. **Desafios da reflexão em educação matemática crítica.** Campinas: Papiros, 2008.

TOMAZ, V. S; SOARES, M. M. M. **Interdisciplinaridade e aprendizagem da matemática em sala de aula.** Belo Horizonte: Autêntica, 2008.

Submetido em setembro de 2020.
Aprovado em janeiro de 2021.

Dilson Ferreira Ribeiro

Doutor em Ciências e Matemática pela Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul (PUCRS). Professor do Colégio Municipal Pelotense (CMP), Pelotas, RS, Brasil. ID Lattes: 1909808501277506. Orcid ID: 0000-0002-0777-9796.

Contato: dilsondfr@gmail.com.

Recorrências Lineares e Equações Diferenciais Lineares

uma breve apresentação de suas similaridades

Linear Recurrences and Linear Differential Equations

a brief presentation of their similarities

Antônio Manual da Silva **Andrade**
Escola de Ensino Fundamental e Médio Prof. Arruda (EEFM)

Marcos Ferreira de **Melo**
Universidade Federal do Ceará (UFC)

RESUMO

Este trabalho trata de elencar as diversas similaridades que há entre as Recorrências Lineares e as Equações Diferenciais Lineares. Tais semelhanças foram apresentadas pelo professor Marcos Melo (segundo autor deste artigo) aos seus alunos de Matemática Discreta, numa turma do curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT. Durante as aulas sobre Recorrências Lineares, mostrou-se que há uma grande similaridade entre um conteúdo de Matemática que se trabalha no Ensino Médio e outro que só é explorado no Ensino Superior. Visto que os alunos cursavam mestrado em Matemática, foi possível trabalhar com eles um tópico (em nível de Ensino Médio) de Matemática Discreta, destacando suas similaridades com uma parte importante da teoria de Equações Diferenciais (cujo assunto é de Ensino Superior). Os alunos da Disciplina observaram que a resolução de uma recorrência linear segue o mesmo procedimento adotado para se resolver uma equação diferencial linear. Com isso, apreciaram uma possibilidade de trazer problemas matemáticos mais profundos para o cotidiano de suas classes da educação básica. Destaca-se que tais discussões acabaram se transformando na dissertação de mestrado do professor Antônio Andrade (primeiro autor deste artigo).

Palavras-chave: Ensino de Matemática. Recorrências Lineares. Matemática Discreta. Equações Diferenciais Ordinárias.

ABSTRACT

This work brings a lot of similarities between Linear Recurrences and Linear Differential Equations. Those commonalities were presented by the professor Marcos Melo (second author of this paper) to his students in a class of Discrete Mathematics of the course Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT. During the classes about Linear Recurrences, it was highlighted the existence of a big similarity between a mathematics content of high school and another one which usually lies in the setting of higher education. As long as we worked with mathematics master students, it was possible to address to them a Discrete Mathematics subject (of high school level) and compare it with an important feature of the Differential Equations theory (a content related to advanced mathematics). The students of the class observed that when we are solving a linear recurrence, we are actually adopting the same procedure we use to find a solution for a linear differential equation. With this in mind, the students enjoyed an approach they can use in order to bring to their classes some deeper mathematics problems from high school perspective. Those discussions became part of the master thesis of the teacher Antonio Andrade (first author of this paper).

Keywords: Mathematics teaching. Linear recurrence. Discrete Mathematics. Ordinary Differential Equations.

1 INTRODUÇÃO

O Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT é um programa formado por uma rede de Instituições de Ensino Superior, no contexto da Universidade Aberta do Brasil (UAB)/Coordenação de Aperfeiçoamento Pessoal de Nível Superior (CAPES). O PROFMAT tem como público-alvo prioritário professores de Matemática em exercício na Educação Básica, especialmente em escolas públicas, com o objetivo principal de fomentar o domínio aprofundado de conteúdo matemático relevante para docência desses professores.

Nesse contexto, o perfil do acadêmico desse Mestrado é o de um profissional já inserido no sistema educacional, tratando-se, majoritariamente, de um professor que possui anos de experiência com ensino de Matemática na Educação Básica. Assim, ao discutir tópicos que seus alunos muitas vezes têm ensinado em suas classes, o docente do PROFMAT se depara com desafios que envolvem apresentar os conteúdos programados no curso levando em conta o conhecimento prévio de seus alunos, bem como enriquecer os tópicos em pauta com mais detalhes e ajudá-los a ver os assuntos por novos ângulos. Um fator importante para o docente é fazer pesquisas; por isso em vez de incluir em suas aulas apenas fatos básicos que vêm à mente, ele pode pesquisar fatos históricos menos conhecidos, apresentar resultados mais recentes e discutir aplicações práticas diferentes das rotineiramente trabalhadas. Tudo isso acaba contribuindo para que o estudante do programa em questão, que também é um professor em atuação/formação, tenha um olhar mais crítico e reflexivo sobre sua prática pedagógica, conforme destacado por Cararo, Loureiro e Klüber (2020) no contexto de formação de professores.

Falando sobre esse processo de ensino-aprendizagem em um curso de Mestrado Profissional, Moreira e Nardi (2009) observam que, tendo em vista que os mestrandos já são professores geralmente experientes, o papel do docente não é o de ensiná-los a ensinar, e sim o de dar ênfase à aprendizagem, à natureza do conhecimento, às novas abordagens no ensino, à elaboração de estratégias e recursos instrucionais inovadores a serem implantados em sala de aula e, ao mesmo tempo, à reflexão sobre sua metodologia. Segundo os autores, esse nível de ensino é um excelente fórum em que especialistas da educação e pesquisadores das chamadas “áreas duras” cooperam e contribuem para a melhoria do ensino no país.

A partir do exposto, visando a um aprofundamento do tópico Recorrências Lineares da disciplina Matemática Discreta, do PROFMAT da Universidade Federal do Ceará (UFC), campus Prof. Prisco Bezerra, Fortaleza, no ano de 2016, realizamos algumas exposições específicas na disciplina citada, apontando as grandes similaridades que há entre Recorrências Lineares e as Equações Diferenciais Lineares, uma parte destacada da importante teoria das Equações Diferenciais Ordinárias. Tal experiência de ensino destacou a possibilidade de se inserir no cotidiano da Educação Básica problemas físicos e matemáticos práticos e mais aprofundados que podem ser resolvidos por meio de uma estratégia quase idêntica à que é utilizada para resolver problemas básicos de Recorrências Lineares.

Com isso em mente, o objetivo deste artigo é apresentar os aspectos comuns que há entre as Recorrências Lineares e as Equações Diferenciais Lineares, contando com um exemplo concreto de como um tópico avançado pode ser introduzido no contexto do Ensino Médio. A seguir, apresentamos de forma sucinta o conteúdo acerca das Recorrências Lineares para posteriormente relacioná-lo com a teoria das Equações Diferenciais Lineares.

2 RECORRÊNCIAS LINEARES

Muitas sequências são definidas por intermédio de uma regra que permite calcular qualquer termo em função do(s) antecessor(es) imediato(s) (LIMA, E. L. et al, 2006). Por exemplo, uma progressão aritmética (x_n) de razão r e primeiro termo a pode ser definida pela recorrência $x_{n+1} = x_n + r$ $(n \geqslant 1)$, com $x_1 = a$. Outro exemplo bem conhecido é o de uma progressão geométrica (y_n) de razão q e primeiro b, que pode ser definida por $y_{n+1} = q.y_n$ $(n \geqslant 1)$, com $y_1 = b$. Esses exemplos são o que chamamos de recorrências de primeira ordem, visto que qualquer termo da sequência é dado em função do termo antecessor imediato. Quando um termo qualquer é dado em função dos dois termos antecessores imediatos, dizemos tratar-se de uma recorrência de segunda ordem. Um exemplo clássico de uma recorrência de segunda ordem é a sequência de Fibonacci (F_n), que é dada pela recorrência $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ $(n \geqslant 0)$, com $F_0 = 0$ e $F_1 = 1$.

É importante destacar que uma recorrência, isoladamente, não define a sequência. Por exemplo, a recorrência $x_{n+1} = x_n$ (progressão aritmética de razão zero) é satisfeita por qualquer sequência constante. Para que ela fique determinada, é necessário também o conhecimento do(s) primeiro(s) termo(s), e isso é garantido pelo teorema, que chamaremos de Teorema de Existência e Unicidade para recorrências, fazendo assim alusão à nomenclatura clássica da teoria de Equações Diferenciais.

TEOREMA DE EXISTÊNCIA E UNICIDADE PARA RECORRÊNCIAS: Uma recorrência de primeira ordem, $x_{n+1} = f(x_n)$, com uma condição inicial $x_1 = a$, tem sempre uma só solução. Do mesmo modo que uma recorrência de segunda ordem $y_{n+2} = g(y_{n+1}, y_n)$, com condições iniciais $y_1 = b$ e $y_2 = c$, sempre tem solução única. Uma demonstração para esse teorema pode ser dada através do uso do Princípio da Indução.

Ilustrando a utilidade desse teorema com os exemplos acima mencionados, observamos a obtenção, sem ambiguidade, das soluções de tais recorrências. Mais precisamente, temos: a) $x_n = a + (n-1)r$, $(n \geqslant 1)$ (fórmula do termo geral da progressão aritmética de razão r e primeiro termo a); b) $y_n = b.q^{n-1}$, $(n \geqslant 1)$ (fórmula do termo geral da progressão geométrica de razão q e primeiro b); c) $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$, $(n \geqslant 0)$ (fórmula dos números de Fibonacci).

O teorema não nos diz como obter tais soluções, apenas garante a existência e a unicidade delas. Entretanto, ao serem garantidas a existência e a unicidade da solução de uma recorrência, buscam-se estratégias que permitem a determinação de sua solução, o que é feito com êxito, em particular, para as chamadas Recorrências Lineares.

Uma recorrência de primeira ordem $x_{n+1} = f(x_n)$, é dita linear quando f é uma função do primeiro grau, ou seja, f é da forma $f(x) = ax + b$, com a e b constantes. Por exemplo, com $f(x) = x + r$, exibe-se uma progressão aritmética de razão r, e com a função $f(x) = qx$, constrói-se uma progressão geométrica de razão q. De forma semelhante, diz-se que uma recorrência de segunda ordem $y_{n+2} = g(y_{n+1}, y_n)$ é linear quando g é uma função de primeiro grau com duas variáveis, isto é, g é dada por $g(x, y) = ax + by + c$, para certas constantes a, b e c. Para melhor ilustrar a questão, basta observar que a sequência de Fibonacci foi apresentada com a função particular: $g(x, y) = x + y$.

O caso de uma progressão geométrica $y_{n+1} = q.y_n$ $(n \geqslant 1)$, com $y_1 = b$, é de resolução imediata, pois $y_n.y_{n-1}\ldots y_2.y_1 = (qy_{n-1})(qy_{n-2})\ldots(qy_1)y_1 = q^{n-1}(y_{n-1}\ldots y_2.y_1).b$, o que implica, quando $q \neq 0$, que $y_n = b.q^{n-1}$, para todo $n \geqslant 1$.

Para alcançar nossos objetivos, vamos nos concentrar no processo de resolução das Recorrências Lineares de segunda ordem, pois com elas podem ser resolvidos diversos problemas de Matemática Discreta, processo análogo ao procedimento adotado para encontrar solução de Equações Diferenciais Lineares de segunda ordem, que muitas vezes estão relacionadas a problemas físicos e matemáticos não triviais.

Assim como é feito na teoria de Equações Diferenciais, inicialmente trataremos das recorrências de segunda ordem homogêneas, que são recorrências da forma $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n =$

0. Admitiremos sempre que $q \neq 0$, pois se $q = 0$, a recorrência é, na realidade, uma progressão geométrica, cujo processo de resolução já foi discutido anteriormente.

Tendo em vista essa proximidade entre as progressões geométricas e as recorrências de segunda ordem homogêneas, Lováz et al (2003) sugerem que tais recorrências devem se comportar como uma progressão geométrica. Na prática, o que eles propõem, levando em conta a fórmula do termo geral de uma progressão geométrica, é que para resolver a equação de recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ busquem-se soluções da forma $x_n = cr^n$, em que c e r são constantes a serem determinadas. Ora, ao substituirmos $x_n = cr^n$ na recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$, obtemos $0 = x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = cr^{n+2} + p(cr^{n+1}) + q(cr^n) = cr^n(r^2 + pr + q)$, o que indica que r é uma solução da equação do segundo grau $r^2 + pr + q = 0$, a qual é chamada de equação característica associada à recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$. Se aplicarmos esse procedimento à sequência de Fibonacci, que é dada pela recorrência $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, buscaremos resolver a equação característica relacionada por $r^2 - r - 1 = 0$, cujas raízes são $r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, ambas presentes na fórmula dos números do matemático mencionado anteriormente. Esse fato é um caso particular do que chamaremos a seguir de Teorema Fundamental das Recorrências Lineares, uma consequência do Teorema de Existência e Unicidade.

TEOREMA FUNDAMENTAL DAS RECORRÊNCIAS LINEARES[1]: Sejam r_1 e r_2 as raízes da equação característica $r^2 + pr + q = 0$. Tem-se que a) se r_1 e r_2 são raízes reais e distintas, então todas as soluções da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ são da forma $x_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n$, c_1 e c_2 constantes reais[2]; b) se $r_1 = r_2 = r$, então todas as soluções da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ são da forma $x_n = c_1 r^n + c_2 n r^n$, c_1 e c_2 constantes reais; c) se $r_1 = \rho\big(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\big)$ e $r_2 = \rho\big(\cos(\theta) - i\sin(\theta)\big)$ são raízes complexas, então todas as soluções da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ são da forma $x_n = \rho^n\big(c_1\cos(n\theta) + c_2\sin(n\theta)\big)$, c_1 e c_2 constantes reais.

Usando o item (a) desse teorema e as considerações que fizemos acima sobre as soluções da equação característica associada à sequência de Fibonacci, obtemos, levando em conta as condições iniciais $F_0 = 0$ e $F_1 = 1$, a fórmula geral dos números de Fibonacci $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$, $(n \geqslant 0)$, agora justificada.

Para ilustrar um pouco mais o que fizemos acima, resolvemos dois problemas práticos, usando Recorrências Lineares de segunda ordem: 1) Fixado um inteiro positivo n, de quantas maneiras pode-se cobrir um tabuleiro de xadrez $2xn$ usando dominós idênticos[3]? 2) Cinco vendedores de semelhante competência disputarão, sob as mesmas condições, o cargo de gerente da loja em que trabalham. Ao final de cada mês, um deles será indicado como o vendedor do mês, e quem for indicado por três meses consecutivos, assumirá o cargo de gerente. Qual é a probabilidade de ninguém assumir o cargo de gerente nos n primeiros meses?

Para resolver o problema 1, indiquemos por M_n o número de maneiras que queremos determinar. Note que $M_1 = 1$, pois para um tabuleiro $2x1$ só há uma maneira de cobri-lo usando 1 dominó. Para um tabuleiro $2x2$ há duas maneiras: dois dominós em pé ou dois deitados. Isso significa que $M_2 = 2$. Agora, para um tabuleiro $2xn$, com $n > 2$, vamos olhar para ele disposto na horizontal. Há duas opções: ou colocamos no tabuleiro o primeiro dominó em pé ou deixamos os dois primeiros deitados. Para o primeiro caso, existem M_{n-1} maneiras de completar o tabuleiro $2x(n-1)$ que resta. Para o segundo, temos M_{n-2} maneiras de completar o tabuleiro $2x(n-2)$

[1]Para uma demonstração deste teorema, consulte Lima E. *et al* (2006).
[2]Intuitivamente, a ideia é buscar uma solução em forma de uma progressão geométrica $x_n = c_0 r^n$, observando que r deve resolver a equação característica associada.
[3]Um dominó é uma peça de tamanho $2x1$.

restante. Portanto, M_n é a solução da recorrência $M_n = M_{n-1} + M_{n-2}$ $(n \geqslant 3)$, com $M_1 = 1$ e $M_2 = 2$. Visto que a equação característica associada é $r^2 - r - 1 = 0$ (a mesma da sequência de Fibonacci), concluímos, usando o teorema acima com as condições iniciais $M_1 = 1$ e $M_2 = 2$, que

$$M_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$ [4]

Para resolução do problema 2, denotemos por P_n a probabilidade de nenhum vendedor assumir o cargo de gerente nos n primeiros meses. Tendo em vista que um vendedor assume o cargo de gerência só após ser indicado o do mês por três vezes consecutivas, nenhum dos cinco vendedores em questão poderá assumir o cargo de gerência nos primeiros dois meses, ou seja, $P_1 = P_2 = 1$. Calculemos agora P_{n+2}, com $n \geqslant 1$. Sabendo que os vendedores disputam o cargo sob as mesmas condições, qualquer um pode ser indicado como o vendedor do primeiro mês. Se no segundo mês o vendedor indicado for diferente daquele do primeiro mês (probabilidade 4/5), basta que a partir daí ninguém seja indicado três vezes consecutivamente (probabilidade P_{n+1}). Mas se o vendedor do segundo mês for o mesmo do primeiro (probabilidade 1/5), no terceiro mês deverá ser indicado um diferente (probabilidade 4/5) e doravante nenhum vendedor deve ser indicado em três meses consecutivos (probabilidade P_n). Essa discussão nos diz que P_n é a solução da recorrência

$$P_{n+2} = \frac{4}{5}P_{n+1} + \frac{1}{5}.\frac{4}{5}P_n \ (n \geqslant 1),$$

com $P_1 = P_2 = 1$. Para concluir, resolvemos a equação característica associada $r^2 - \frac{4}{5}r - \frac{4}{25} = 0$, encontramos as raízes $r_1 = \frac{2}{5}(1+\sqrt{2})$ e $r_2 = \frac{2}{5}(1-\sqrt{2})$, e concluímos que

$$P_n = \frac{5}{16}.\left(\frac{2}{5}\right)^n\left[(2+\sqrt{2})(1+\sqrt{2})^n + (2-\sqrt{2})(1-\sqrt{2})^n\right].$$

Para encerrar o que fizemos em comparação com o que aparece na teoria de Equações Diferenciais, discutimos as recorrências de segunda ordem não homogêneas, ou seja, as Recorrências Lineares da forma $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = f(n)$. Observa-se que se a_n é uma solução particular da equação $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = f(n)$, então a substituição $y_n = x_n - a_n$ transforma a equação em $y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n = 0$, o que nos indica que, para resolver uma equação de recorrência não homogênea, basta encontrar uma solução particular e acrescentá-la à solução geral da equação homogênea associada. Para ilustrar esse caso, consideramos o problema seguinte.

Problema 3: considere o experimento de lançar uma moeda repetidamente até se obterem duas caras seguidas. Sendo E_n o número de experimentos para os quais duas caras são obtidas até o n-ésimo lançamento, encontre uma relação de recorrência para E_n e uma fórmula para essa sequência. Use tal resultado para calcular a probabilidade de se obterem duas caras consecutivas, para o caso particular de o experimento ser realizado com até 10 lançamentos da moeda.

Inicialmente, note que $E_2 = 1$, pois o experimento consiste em obter uma cara no primeiro lançamento e outra no segundo lançamento. Em seguida, note que $E_1 = 0$, uma vez que para obter duas caras consecutivas em até três lançamentos há dois experimentos: uma cara no primeiro lançamento e outra no segundo; uma cara no segundo lançamento e outra no terceiro lançamento. A seguir, temos três situações a considerar: ou ocorre cara no primeiro lançamento e outra no segundo, ou ocorre coroa no primeiro lançamento (restando obter duas caras consecutivas dentre os $n-1$ lançamentos que restam) ou cara no primeiro lançamento e coroa no segundo (restando obter duas caras consecutivas dentre os $n-2$ lançamentos que restam). As três situações revelam que E_n é solução da recorrência não homogênea $E_n = E_{n-1} + E_{n-2} + 1$ $(n \geqslant 4)$, com $E_2 = 1$ e $E_3 =$

[4]Lembre-se que os números de Fibonacci são todos inteiros, embora a fórmula geral seja dada em termos de combinações de números irracionais.

2. Visto que $a_n = -1$ é uma solução particular dessa recorrência[5], $E_n = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n - 1$ é a solução geral da equação $E_n = E_{n-1} + E_{n-2} + 1$. Assim, tendo $E_2 = 1$ e $E_3 = 2$, concluímos que

$$E_n = \frac{1}{10}\left[(5+\sqrt{5})\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + (5-\sqrt{5})\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] - 1.$$

Finalmente,

$$\frac{E_{10}}{2^{10}} = \frac{1}{2^{10}}\{\frac{1}{10}\left[(5+\sqrt{5})\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{10} + (5-\sqrt{5})\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{10}\right] - 1\} \approx 86{,}81\%$$

é a probabilidade de se obter duas caras consecutivas com até 10 lançamentos de uma moeda.

A seguir apresentamos, de forma breve, os resultados de Equações Diferenciais que são análogas às Recorrências Lineares apresentadas até aqui.

3 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES

Uma equação diferencial ordinária (EDO, por simplicidade) é uma relação funcional entre uma função (incógnita) e uma única variável independente e suas derivadas, além da própria variável independente. A ordem de uma EDO é definida como sendo aquela da mais alta derivada que ocorre na equação (OLIVEIRA e TYGEL, 2005). Por exemplo, a segunda lei de Newton indica que o movimento vertical de um corpo de massa m sob a ação da gravidade g é descrito pela EDO de segunda ordem $m\frac{d^2x}{dt^2} = -mg$, sendo $x = x(t)$ a posição da partícula num instante t. Integrando esta equação, obtemos a EDO de primeira ordem $\frac{dx}{dt} = - + c_{1,}$ em que c_1 é uma constante. Integrando mais uma vez, concluímos que $x(t) = \frac{-1}{2}gt^2 + c_1t + c_2$, sendo c_2 uma constante. Nota-se que se for fixada a velocidade inicial $\frac{dx}{dt}(0)$, fica determinada a constante $c_{1,}$ e o mesmo ocorre para a constante c_2, quando estiver dada a posição inicial $x(0)$. Isso ilustra que uma EDO não determina, por si só, a função, pois fixada a outras condições iniciais, temos uma solução diferente para a EDO $m\frac{d^2x}{dt^2} = -mg$.

No caso acima, vimos que, com uma condição inicial, foi possível resolver uma EDO de primeira ordem e, com duas condições iniciais, resolvemos uma de segunda ordem. Para o caso das recorrências de primeira e segunda ordem, este fenômeno (existência e unicidade a partir de condição(ões) inicial(is) fixada(s)) estava presente no que fora chamado de Teorema de Existência e Unicidade para recorrências. Entretanto, no caso das EDO, nem sempre é possível garantir que uma equação admita solução. Além disso, existem as que admitem mais de uma solução, mesmo estando fixada(s) a(s) condição(ões) inicial(is). A seguir exibimos uma condição que garante a existência e a unicidade de solução de uma EDO.

TEOREMA DE EXISTÊNCIA E UNICIDADE PARA EDO[6]: Seja $f: \Omega \to R$ uma função contínua definida num aberto Ω do plano (x, y). Suponhamos que a derivada parcial com relação à segunda variável, $\frac{\partial f}{\partial y}: \Omega \to R$, seja contínua também. Então, para cada$(x_0, y_0) \in \Omega$, existe um intervalo aberto I contendo x_0 e uma única função diferenciável $\phi: I \to R$ com $(x, \phi(x)) \in \Omega$, para todo $x \in I$, que é a solução da EDO

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

[5]Basta observar que se $a_n = -1$, então $a_{n-1} + a_{n-2} + 1 = -2 + 1 = -1 = a_n$.
[6]Para uma demonstração deste teorema, consulte Figueiredo e Neves (2001).

$$y(x_0) = y_0.$$

Esse teorema garante que é possível resolver as EDO Lineares. A forma geral de uma EDO Linear de Primeira Ordem é $\frac{dy}{dx} = p(x)y + q(x)$, sendo $p: (a, b) \to R$ e $q: (a, b) \to R$ funções contínuas. A EDO $\frac{dy}{dx} = -gx + c_1$, que vimos anteriormente na discussão sobre o movimento vertical de um corpo de massa m sob a ação da gravidade g, é um exemplo de EDO Linear de Primeira Ordem.

Se $p, q, f: (a, b) \to R$ são funções contínuas, então uma EDO de segunda ordem da forma $\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = f(x)$, é chamada EDO Linear de Segunda Ordem. Quando p e q são constantes, dizemos tratar-se de uma EDO Linear de segunda ordem com coeficientes constantes. A EDO $m\frac{d^2x}{dt^2} = -mg$, também vista na discussão sobre o movimento vertical de um corpo de massa m sob a ação da gravidade g, é um exemplo de EDO linear de segunda ordem com coeficientes constantes.

A grande similaridade entre o método de resolução de uma EDO da forma $\frac{d^2y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + qy = f(x)$, com p e q constantes, e o modo como resolvemos uma recorrência da forma $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = f(n)$ foi o que motivou a presente experiência de trabalho. Inicialmente buscou-se a solução da EDO homogênea associada $\frac{d^2y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + qy = 0$. Devido às propriedades básicas da função exponencial[7], Figueiredo e Neves (2001) indicam que a busca pela resolução dessa EDO Linear homogênea deve ser realizada via uma função exponencial da forma $y = e^{rx}$, em que r é uma constante. Em um segundo momento, substituindo $y = e^{rx}$ na equação $\frac{d^2y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + qy = 0$, obtemos $0 = \frac{d^2y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + qy = (r^2 + pr + q)e^{rx}$, o que indica que r deve ser solução da equação do segundo grau $r^2 + pr + q = 0$, que é denominada equação característica associada à EDO $\frac{d^2y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + qy = 0$.

De modo análogo ao que vimos para Recorrência Lineares, temos, no contexto das EDO Lineares de segunda ordem com coeficientes constantes, um resultado que será chamado de Teorema Fundamental das EDO Lineares de Segunda Ordem, que também é uma consequência do Teorema de Existência e Unicidade.

TEOREMA FUNDAMENTAL DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS LINEARES DE SEGUNDA ORDEM[8]: Sejam r_1 e r_2 as raízes da equação característica $r^2 + pr + q = 0$. Tem-se que a) se r_1 e r_2 são raízes reais e distintas, então todas as soluções da EDO $\frac{d^2y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + qy = 0$são da forma $y = c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_2x}$, c_1 e c_2 constantes reais; b) se $r_1 = r_2 = r$, então todas as soluções da EDO $\frac{d^2y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + qy = 0$ são da forma $y = c_1e^{rx} + c_2xe^{rx}$, c_1 e c_2 constantes reais; c) se $r_1 = \alpha + i\beta$ e $r_2 = \alpha - i\beta$ são raízes complexas, então todas as soluções da EDO $\frac{d^2y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + qy = 0$ são da forma $y = e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x + c_2\sin\beta x)$, c_1 e c_2 constantes reais.

Com o caso não homogêneo, lida-se da mesma maneira como foi feito com as Recorrências Lineares não homogêneas. De fato, se $a = a(x)$ é uma solução particular da EDO $\frac{d^2y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + qy = f(x)$, então a mudança $y = a + z$ transforma a equação em $\frac{d^2z}{dx^2} + p\frac{dz}{dx} + qz = 0$, ou seja, a solução geral da EDO não homogênea $\frac{d^2y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + qy = f(x)$ é da forma $y(x) = a(x) + z(x)$, em que $a = a(x)$ é uma solução particular e $z = z(x)$ é a solução geral da EDO homogênea associada (dada pelo teorema fundamental).

[7]Por exemplo, $y = e^{rx}$ é tal que $\frac{dy}{dx} = re^{rx}$ e $\frac{d^2y}{dx^2} = r^2e^{rx}$.

[8]Para uma demonstração deste teorema, consulte Figueiredo e Neves (2001).

Nesse ponto da experiência, observamos que, com o uso deste teorema fundamental, diversos problemas físicos e matemáticos não triviais, modelados por EDO lineares de segunda ordem, podem ser facilmente resolvidos usando a mesma técnica de resolução de Recorrências Lineares de segunda ordem.

Por fim, podemos resumir o que foi feito ao longo da pesquisa por meio das seguintes tabelas, que trazem as similaridades existentes entre esses dois assuntos um tanto distintos entre si.

Tabela 1: Comparação entre recorrências e EDO com raízes reais distintas[9]

Recorrência/EDO	**Equação característica**	**Solução com raízes[10] reais** $r_1 \neq r_2$
$x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$	$r^2 + pr + q = 0$	$x_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n$
$\frac{d^2y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + qy = 0$	$r^2 + pr + q = 0$	$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$

Fonte: Autores

Tabela 2: Comparação entre recorrências e EDO com raízes reais iguais

Recorrência/EDO	**Equação característica**	**Solução com raízes iguais a** r
$x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$	$r^2 + pr + q = 0$	$x_n = c_1 r^n + c_2 n r^n$
$\frac{d^2y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + qy = 0$	$r^2 + pr + q = 0$	$y = c_1 e^{rx} + c_2 x e^{rx}$

Fonte: Autores

Tabela 3: Comparação entre recorrências e EDO com raízes complexas

Recorrência/EDO	**Equação característica**	**Solução com raízes complexas[11]**
$x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$	$r^2 + pr + q = 0$	$x_n = \rho^n\big(c_1\cos(n\theta) + c_2\sin(n\theta)\big)$
$\frac{d^2y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + qy = 0$	$r^2 + pr + q = 0$	$y = e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x + c_2\sin\beta x)$

Fonte: Autores

4 DESCRIÇÃO METODOLÓGICA E ANÁLISE DA EXPERIÊNCIA

O Teorema Fundamental das Recorrências Lineares mostra como resolver completamente uma recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$, enquanto o Teorema Fundamental das Equações Diferenciais Ordinárias Lineares de Segunda Ordem apresenta a resolução total de uma EDO $\frac{d^2y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + qy = 0$, sendo p e q constantes reais.

---

[9]Perceba a semelhança entre as soluções gerais x_n e y.

[10]Solução geral da recorrência/EDO com parâmetros reais c_1 e c_2 e raízes da equação característica.

[11]$r_1 = \alpha + i\beta = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ e $r_2 = \alpha - i\beta = \rho(\cos\theta - i\sin\theta)$.

Muitos problemas práticos de Matemática Discreta são formulados e resolvidos por meio de recorrência lineares, enquanto diversos problemas práticos de Equações Diferenciais são modelados por EDO lineares. A grande similaridade que há entre as resoluções dessas equações foi um dos motivos que nos levou a esta experiência de ensino: apresentar, num curso de Matemática Discreta, os fundamentos teóricos para a resolução de recorrências, tendo como ponto de vista os presentes na resolução de EDO.

Para alcançar nossos objetivos a pesquisa bibliográfica e o planejamento adequado[12] foram necessários para apresentar aos alunos as relevantes interseções entre as teorias citadas. Para tanto, eles foram expostos às duas teorias de maneira simultânea por meio de exercícios (alguns apresentados aqui neste artigo) e de resultados que expunham a similaridade entre as teorias.

Ao final dessas aulas expositivas os alunos puderam relembrar o que já haviam aprendido acerca da teoria das Equações Diferencias no contexto da disciplina de Matemática Discreta. Levados a refletir em seu próprio ensino, puderam também vislumbrar uma nova abordagem de ensino e uma nova estratégia instrucional.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Essa experiência de ensino proporcionou aos alunos uma oportunidade para refletir sobre o modo como conduzem suas aulas, sobretudo por estarem no Mestrado e possuírem certo domínio dos tópicos que são discutidos em Matemática Discreta. A forma como as Recorrências Lineares foram trabalhadas com eles os surpreendeu, pois jamais esperavam que seriam discutidos temas de Equações Diferenciais, algo que, a priori, encontrava-se em um contexto distante, na área de Análise Matemática.

Ter em vista que a equação característica associada a uma recorrência ou a uma equação diferencial é uma equação do segundo grau, apresenta novos horizontes ao estudo (muitas vezes mecânico e sem graça) de tais equações no Ensino Básico. Por exemplo, a dificuldade de contextualizar o estudo dos números complexos no Ensino Básico desaparece quando se propõe um problema prático por meio de uma recorrência (ou mesmo de equação diferencial) linear de segunda ordem, cuja equação característica admite raízes complexas[13]. Pensando que esses alunos/professores podem não só introduzir novos problemas de Matemática Discreta ou até mesmo de Equações Diferenciais (usando a linguagem da Física, por exemplo), mas repetir tal experiência utilizando outros tópicos do Ensino Básico, cremos que a atividade realizada contribuiu para a formação deles, fomentando nesses profissionais a necessidade da busca contínua por novas estratégias de ensino e pesquisa.

[12]Planejamento das aulas sobre recorrências lineares, de modo a não comprometer o calendário de apresentação dos demais conteúdos da disciplina.

[13]Lembre-se que as funções seno e cosseno são soluções reais da EDO $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$, cuja equação característica $r^2 + 1 = 0$ só possui raízes complexas.

REFERÊNCIAS

CARARO, E.F.F.; LOUREIRO, D.Z.; KLÜBER, T.E. Metodologias de Pesquisa em Investigações sobre a Formação de Professores que Ensinam Matemática. **Hipátia – Revista Brasileira de História, Educação e Matemática**, v. 5, n. 1, 2020.

FIGUEIREDO, D. G.; NEVES, A. F. **Equações Diferenciais Aplicadas.** 2. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2001. Coleção Matemática Universitária.

LIMA, E. L. et al. **A Matemática do Ensino Médio.** v. 2. 6 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. Coleção do Professor de Matemática.

LOVÁSZ, L. et al. **Matemática Discreta.** Rio de Janeiro: SBM, 2003. Coleção Textos Universitários.

MOREIRA, M. A.; NARDI, R. O mestrado profissional na área de Ensino de Ciências e Matemática: alguns esclarecimentos. **Revista Brasileira de Educação Científica e Tecnológica**, v. 2, n. 3, set/dez. 2009.

OLIVEIRA, E. C.; TYGEL, M. Métodos Matemáticos para Engenharia. Rio de Janeiro: SBM, 2005. **Coleção Textos Universitários**.

Submetido em maio de 2021.

Aprovado em junho de 2021.

Antônio Manual da Silva Andrade

Mestrado Profissional pela Universidade Federal do Ceará (UFC). Professor da Escola de Ensino Fundamental e Médio Prof. Arruda (EEFM), Sobral, CE, Brasil. ID Lattes: 6252771460701952.

Contato: antoniomanoelsilvaandrade@gmail.com.

Marcos Ferreira de Melo

Doutorado em Matemática pela Universidade Federal do Ceará (UFC). Professor da Universidade Federal do Ceará (UFC), Fortaleza, CE, Brasil. ID Lattes: 6252771460701952. Orcid ID: 0000-0002-7014-1066.

Contato: mcosmelo@mat.ufc.br.