# HIPÁTIA

*Υπατία*

## REVISTA BRASILEIRA DE HISTÓRIA, EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA

ISSN 2526-2386



v.5, n.2, dezembro 2020

**Instituto Federal de São Paulo**

# HIPÁTIA

## Υπατία



INSTITUTO FEDERAL São Paulo

UTFPR UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

UNICAMP

# HIPÁTIA

## Υπατία

**REVISTA BRASILEIRA DE HISTÓRIA, EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA**

**v.4, n.2, dezembro de 2020**



**Instituto Federal de São Paulo**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **HIPÁTIA** | **São Paulo (SP)** | **v. 5** | **n. 2** | **p. 222-409** | **dez. 2020** |

# LINHA EDITORIAL

A HIPÁTIA - Revista Brasileira de História, Educação e Matemática, conforme sugere seu nome, aceita trabalhos de História da Matemática, Educação Matemática e de Matemática (pura e aplicada). A revista foi oficialmente criada em 8 de março de 2016. Duas concepções principais nos norteiam: ajudar a ampliar a participação da mulher na ciência no Brasil e abrir um espaço para jovens pesquisadores (mestres, doutorandos ou doutores que tenham obtido título há, no máximo, cinco anos). Isso significa que procuramos dentro da composição de nosso Conselho Editorial, Conselho Científico e em nossas edições, obter uma maioria de pesquisadores ou de trabalhos cujos autores atendam a pelo menos um desses quesitos. É salutar destacar que, no entanto, contribuições de outros pesquisadores continuam sendo de grande valia. A revista é composta por cinco seções : **1) Ensaios**, na qual são aceitos textos discursivos de caráter crítico **2) Artigos**, na qual são aceitos trabalhos completos ou com resultados parciais consistentes; **3) Iniciação Científica**, na qual são aceitos trabalhos concluídos decorrentes de pesquisas em nível de graduação (iniciação científica, trabalho de conclusão de curso, monografias resultantes de trabalhos orientados por docentes etc.); **4) Relatos de Experiência**, na qual são publicados textos que descrevam precisamente uma dada experiência que possa contribuir de forma relevante para as áreas da HIPÁTIA; **5) Resenhas**, na qual são aceitas resenhas de livros, dissertações e teses, ou outros formatos de interesse publicados preferencialmente há não mais que sete anos.

# SUMÁRIO

# EDITORIAL

uma edição em tempos de pandemia

S. César **Otero-Garcia**
Editor-chefe

Línlya **Sachs**
Miriam Cardoso **Utsumi**
Coeditoras

O ano de 2020 certamente ficará marcado na história como o ano da pandemia da Covid-19. Essa marca, no caso particular do Brasil, é especialmente triste. Se, por um lado, sempre fomos o povo que acreditou que o Brasil seria o país do futuro, o país que estaria entre as grandes potências do mundo, entre os ditos países mais ricos, invariavelmente próximos dos Estados Unidos; por outro, não poderíamos esperar que isso fosse alcançando com uma marca tão ruim, afinal, não são os EUA o modelo de sucesso global? Pois bem, até 31 de dezembro os EUA já tinham passado da marca de 340mil mortes, na segunda posição temos o Brasil com seus mais de 190 mil mortos.

Ao longo de 2020, o Brasil não se aproximou dos EUA, no que se refere à pandemia, apenas no número de mortes. O negacionismo de seus presidentes foi bastante semelhante. Se, por um lado, a não comprovação científica da eficácia da cloroquina não foi motivo suficiente para desacreditar o medicamento aos olhos de Bolsonaro, por outro, as pesquisas promissoras com relação às vacinas, sim. Então, ficamos assim, tomamos cloroquina, mas nos negamos a tomar a vacina. Milhares de brasileiros morrem, sobretudo os pobres, e o presidente tira o feriado do fim de ano para nadar na praia e, mais uma vez, provocar aglomerações.

A vida tem valor inestimável, porém parece que para os presidentes dos EUA e do Brasil, a vida do cidadão comum não tem grande valor quando o que está em risco é a economia ou a imagem política deles perante parte da população que o apoia. A vida tem valor, mas a dos infectados pelo vírus, não. Seguindo essa montanha russa de contradições, quando a Argentina legalizou o aborto, Bolsonaro tratou logo de se pronunciar em sua “rede oficial” lamentando a decisão. Será que o que vale mesmo é a vida ou são nossos preceitos?

Seja como for, Hipátia, a matemática, foi uma cientista. Hipátia, a revista, um periódico científico. Falávamos do negacionismo da ciência, sobreviveremos a um Brasil assim? Antes fosse algum tipo proselitismo apenas, mas não é, mais uma vez temos anúncio de cortes de verbas nas universidades e institutos federias. E os investimentos na Capes e CNPq? Minguam mais e mais pelo menos desde 2017. O ataque à ciência não é só discurso ou tentativa de criar uma legião de seguidores. Se o nado de Bolsonaro ante a seus seguidores nos faz lembrar semelhante atitude de Mussolini, o ataque à ciência nos remete à Idade Média. Mas, dizem, o fascismo e o nazismo foram ideologias comunistas, mesmo que a União Soviética tenha sido uma das adversárias do Eixo na segunda guerra mundial. O que importa é que o partido de Hitler tinha "socialista" no nome, ainda que o partido pelo qual Bolsonaro se elegeu também seja "social" e até mesmo "liberal". Citamos antes o caso da cloroquina e da vacina; o negacionismo brasileiro é democrático e não atinge apenas as ciências exatas ou biológicas: tudo faz sentido quando nada parece fazer.

O psicanalista hindu-inglês Wilfred R. Bion nos ensinou que quando grupos não conseguem cooperar plenamente, eles podem se organizar em torno de supostos básicos como o messianismo (o grupo elege um líder carismático) e o ataque-fuga (o grupo elege um inimigo externo ou supostamente externo). Bolsonaro tem Messias no nome, mas não faz milagre, ele mesmo disse isso ao debochar das vítimas da Covid, ao mesmo tempo, muitos votaram nele para livrar o país do comunismo, o mesmo que os militares já tinham varrido do país na época da ditadura brasileira que, por pouco, não se alinhou ao Eixo na segunda guerra não fosse pela intervenção (de novo) dos EUA na América Latina. Podemos ver de novo mais algumas contradições e outras situações que não são mera coincidência?

A ciência brasileira sofre. Nas universidades e institutos federais não nos dedicamos apenas ao ensino. Quando dizemos "apenas" não é porque o ensino seja uma atividade menor, mas sim porque se faz várias outras além das vinculadas a esse eixo (minúsculo, por favor). Fazemos pesquisa, fazemos extensão. As universidades e institutos, mesmo quando da paralisação das aulas, não pararam. No primeiro semestre de 2020 publicamos o primeiro número do ano da Hipátia e, agora, publicamos o segundo. Como nós, outros institutos e universidades seguiram publicando seus periódicos, suas pesquisas, promovendo ações de extensão, aproximando (não fisicamente no momento) a comunidade do meio dito "acadêmico".

Devemos seguir, em 2021 talvez o vírus dê uma trégua, mas certamente o ataque à ciência não dará, pois, por mais mortal que esteja sendo a Covid, não há doença pior na história da humanidade que a ignorância, a ignorância que hoje não permite que se salve mais vidas vítimas da Covid, a ignorância que matou tantas pessoas em guerras, a ignorância que permite que milhares de vidas morram todos os anos por falta de alimento, por falta de acesso a recursos básicos, a tratamento de saúde. Essa ignorância também foi a que matou, em um ato de intolerância religiosa, a mulher que dá nome a esta revista.

Fechamos mais um ano, e como ele, como é tradicional para quem nos acompanha, publicamos mais uma edição da Hipátia que, apesar da Covid, do cenário político brasileiro, do negacionismo científico, não será a última; ao menos essa é a esperança, mesmo que tenha sido ela justamente a última a restar na caixa que Pandora abriu quando liberou todos os males à humanidade. Abrimos este número 2 do volume 5 com o ensaio de Plínio Cavalcanti Moreira, *Formação Matemática na Licenciatura e Prática Docente na Escola: o caso da unicidade da decomposição em primos*. Na sequência, temos cinco artigos e quatro trabalhos de iniciação científica. Desejamos a todos os interessados uma boa leitura e um científico 2021.

São Paulo, dezembro de 2020.

# FORMAÇÃO MATEMÁTICA NA LICENCIATURA E PRÁTICA DOCENTE NA ESCOLA: O CASO DA UNICIDADE DA DECOMPOSIÇÃO EM PRIMOS

## PROSPECTIVE TEACHER EDUCATION AND SCHOOL TEACHING PRACTICE: THE CASE OF THE UNIQUENESS OF PRIME DECOMPOSITION

MOREIRA, Plinio Cavalcanti[1,2]

**RESUMO**

Neste texto discutimos o Teorema Fundamental da Aritmética, tomando como referência as formas como o tema é trabalhado na Educação Básica e nos cursos de Licenciatura em Matemática. Defendemos uma discussão desse tópico, situada no contexto específico do ensino escolar, em ambas as instâncias de trabalho de educação matemática, mas principalmente nos processos de formação inicial do professor. Como contribuição nesse sentido, apresentamos uma demonstração "escolar" da unicidade da decomposição em primos, contrastando a viabilidade de seu ajustamento ao trabalho docente sobre o tema no sexto ano do Ensino Fundamental, com as (im)possibilidades de adaptação de duas demonstrações acadêmicas desse mesmo fato, as quais aparecem frequentemente em livros-texto utilizados em cursos de formação de professores de matemática para a Educação Básica.

**Palavras-chave:** Educação Matemática. Prática docente escolar. Formação de professores. Saber docente. Teorema Fundamental da Aritmética.

**ABSTRACT**

We discuss the way the Fundamental Theorem of Arithmetic is dealt with in school teaching as compared to the correspondent way this topic is examined in (Brazilian) Math Teacher Education. We argue that it is viable, as well as manageable, to develop a situated (in the school teaching context) discussion of the uniqueness of prime decomposition of natural numbers, both in Mathematics Teacher Education Programs and in the school itself, where this issue is essentially ignored. As a contribution, we present a "school" proof of the uniqueness of prime decomposition in the set of natural numbers, contrasting the possibilities of adapting it to the teaching of mathematics in sixth-grade classes, with the (im)possibilities of adjusting two academic proofs, often presented in textbooks used in Math Teacher Education courses in Brazil.

**Keywords:** Mathematics Education. School teaching practice. Teacher education. Teachers' Mathematical Knowledge. Fundamental Theorem of Arithmetic.

## 1 INTRODUÇÃO

O leitor encontrará, neste texto, uma discussão sobre o ensino do Teorema Fundamental da Aritmética na escola e nos cursos de Licenciatura em Matemática, bem como três formas de justificar a unicidade da decomposição em primos de números naturais. Duas delas, embora corretas do ponto de vista matemático, muito dificilmente, a nosso ver, se prestariam a adaptações pedagogicamente viáveis ao trabalho escolar com o assunto no sexto ano do Ensino Fundamental (o leitor com alguma experiência docente com o sexto ano poderá avaliar por si mesmo). A terceira

[1]Doutorado em Educação pela Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG). Departamento de Educação Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP), Ouro Preto, MG, Brasil. Endereço eletrônico: pliniocavalcantim@gmail.com.

[2]Agradeço aos professores que são ou foram meus alunos de Fundamentos de Álgebra no curso de Mestrado Profissional em Educação Matemática da UFOP, pelas trocas de ideias sobre esse assunto, ao longo dos vários anos em que lecionei essa disciplina.

demonstração busca seus fundamentos em valores e objetivos próprios do contexto em que se desenvolve a educação matemática escolar.

Em outras palavras, mostramos duas possibilidades de justificativa da unicidade da fatoração em primos que, embora matematicamente corretas, podem ser vistas como não pedagogicamente adequadas para a prática docente escolar; e uma terceira justificativa que, ainda correta do ponto de vista matemático, contorna as questões de natureza lógica, psicológica, cognitiva e semiótica que se colocam diante de uma eventual tentativa de adaptação das duas primeiras ao trabalho docente no sexto ano de escolaridade.

## 2 A UNICIDADE DA DECOMPOSIÇÃO EM PRIMOS PRECISA SER IGNORADA NA PRÁTICA DOCENTE ESCOLAR?

Dado um número natural maior que 1, ou ele é primo ou é composto. O Teorema Fundamental da Aritmética (TFA) afirma que se for composto, pode ser escrito de maneira única como produto de primos. Vamos separar esse teorema em duas afirmações:

- todo número composto pode ser escrito como produto de primos;
- não existem duas formas diferentes de escrever o número composto como produto de primos, a não ser pela ordem dos fatores.

A primeira afirmação, acima, é relativamente simples de se justificar, usando, basicamente, de forma iterada, o entendimento do que significa número composto e número primo. A questão mais relevante para a formação do professor é aquela normalmente ignorada nos livros didáticos escolares: será que um mesmo número composto pode ser escrito como produto de fatores primos de duas maneiras diferentes? O TFA diz que não, mas é preciso refletir um pouco sobre isso para que se possa entender o sentido que essa unicidade alcança.

O número 80 pode ser escrito como produto de outros números de várias maneiras (por exemplo: 4x20; 2x2x2x10; 2x40; 2x2x2x2x5, entre outras). A segunda afirmação do TFA garante que o único produto de primos que resulta em 80 é 2x2x2x2x5, não há outro (o que pode mudar é a ordem dos fatores). No caso do 80, é possível escrever todos os produtos possíveis e conferir que só há um em que os fatores são todos primos. Mas e um número com 23 dígitos, por exemplo? Como podemos ter certeza de que só há uma maneira de escrever tal número como produto de primos?

É claro que se fatorarmos o número dado, utilizando o algoritmo usualmente ensinado na escola, chegaremos sempre a um mesmo resultado, o que pode induzir a ideia de que não é necessário discutir a questão da unicidade. O problema desse raciocínio é que o algoritmo escolar fornece sempre a mesma fatoração em primos para um dado número, simplesmente porque, em N, a fatoração em primos é única. Se não fosse, o algoritmo daria apenas *uma* fatoração em primos (maiores detalhes na seção 5).

Outro argumento, que também funde, incorretamente, as duas afirmações do TFA em apenas uma, pode ser encontrado em textos publicados na internet sobre o tema, e repete o mesmo tipo de falha lógica apontada anteriormente. A ideia seria, basicamente, a seguinte: escrevemos o número composto a ser fatorado em primos, como produto de dois naturais maiores que 1. Decompomos novamente cada um desses dois fatores do produto em dois novos fatores maiores que 1, caso sejam ambos compostos (os que forem primos permanecem fixados até o final do processo). Isso dá origem a uma árvore de possibilidades. No caso do composto dado ser 36, teríamos, por exemplo, as duas “árvores” a seguir, dentre outras possíveis:

| | |
|---|---|
| 36 | 36 |
| 2 l 18 | 6 l 6 |
| 2 l 3 l 6 | 2 l 3 l 2 l 3 |
| 2 l 3 l 2 l 3 | |

Segundo essa argumentação, o que garantiria a unicidade da decomposição em primos seria o "critério de parada", ou seja, o processo é finalizado quando todos os fatores da horizontal se tornam primos (etapa, aliás, em que nem há mais a possibilidade de continuação).

De fato, todos que fatorarem um número natural composto, utilizando esse esquema de árvore descrito acima, chegarão à mesma fatoração final. Isso é verdadeiro, mas não pode ser usado para garantir a unicidade. Por quê? Porque a unicidade, ou melhor, um fato logicamente equivalente a ela, está embutido na própria concepção dessa forma de obter a fatoração em primos. Esse fato, utilizado iteradamente nesse esquema de decomposição em primos descrito anteriormente, é o seguinte: pressupõe-se que *todos* os divisores primos de um número composto estejam entre aqueles que aparecem na justaposição dos fatores primos dos (dois) números cujo produto resulta no composto a ser fatorado. No entanto, isso só "funciona" porque a decomposição em primos é única no conjunto dos naturais, ou seja, já se supõe a unicidade embutida no próprio processo de fatorar em primos.

Como no caso do algoritmo usual, se não valesse a unicidade, esse processo forneceria, no final, apenas *uma* fatoração possível do número composto dado. Extrapolando, por um momento, a questão escolar que queremos discutir aqui, podemos examinar o seguinte exemplo, para comprovar o que acabamos de dizer acima: no conjunto Z[$\sqrt{-5}$] = {a+b$\sqrt{-5}$, a,b inteiros}, munido da adição e multiplicação usuais dos complexos ($\sqrt{-5} = \sqrt{5}\,i$), o elemento 6 poderia ser substituído por dois produtos diferentes, pois, em tal conjunto, 6 = 2x3 e 6 = (1+$\sqrt{-5}$)(1-$\sqrt{-5}$). Assim, poderíamos chegar, no final da fatoração de 36 em Z[$\sqrt{-5}$], a pelo menos duas formas distintas de produto de elementos que são análogos aos que chamamos de primos em N (ou seja, não são divisíveis por nenhum outro, exceto 1 e eles mesmos).

Os fatos que acabamos de comentar acima mostram que a questão da unicidade no TFA não é tão simples, sugerindo a relevância pedagógica de se colocar a seguinte questão aos alunos da escola, quando se trabalha esse assunto: será que, usando outra maneira de fatorar, não seria possível chegar a uma fatoração de algum número, na qual aparecesse um primo diferente daqueles encontrados quando se usa o algoritmo usual? Como se sabe, a resposta é não, mas é preciso argumentar para convencer. Parece simples, mas não é. Em *Gowers's Weblog*, encontra-se um artigo tratando dessa questão, no qual o autor apresenta quatro possibilidades de resposta para a pergunta "Por que o Teorema Fundamental da Aritmética não é óbvio?"[3]

Por outro lado, até onde pudemos observar através do exame de alguns livros universitários usados nas licenciaturas e também de uma busca na internet, as justificativas para a unicidade da decomposição em primos usualmente conhecidas lidam com pré-requisitos que ultrapassam aqueles esperados de um aluno do sexto ano do Ensino Fundamental, ano em que o assunto é trabalhado na Educação Básica. Esta última afirmação (de que o assunto é trabalhado no sexto ano da escola) tem como suporte a análise que fizemos de livros didáticos escolares para o sexto ano, pois a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) não se refere, em nenhum momento, à decomposição de números em fatores primos. Quando lista as unidades temáticas, os objetos de

[3] Para acessar, dê um Google em Gowers's Weblog Why isn't the Fundamental Theorem of Arithmetic obvious?

conhecimento e as habilidades correspondentes à matemática para o sexto ano, a BNCC apenas faz menção a "*Classificar números naturais em primos e compostos, estabelecer relações entre números, expressas pelos termos "é múltiplo de", "é divisor de", "é fator de", e estabelecer, por meio de investigações, critérios de divisibilidade por 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 100 e 1000. Resolver e elaborar problemas que envolvam as ideias de múltiplo e de divisor*" (BNCC, p.301).

No entanto, é a unicidade da decomposição em fatores primos que dá suporte lógico a alguns dos procedimentos e resultados mais utilizados por alunos e professores de matemática, não apenas no sexto ano, mas ao longo de todo o ensino básico (Fundamental e Médio). Os exemplos são vários, mas destacamos dois:

a) como já mencionado, o próprio algoritmo para se encontrar a decomposição de um número em seus fatores primos;
b) o cálculo do m.d.c. e do m.m.c. através da fatoração em primos, selecionando os fatores comuns com os menores expoentes, no caso do m.d.c., e os fatores comuns e não comuns com os maiores expoentes, no caso do m.m.c. Tal procedimento não seria correto se um mesmo número composto pudesse ser fatorado (em primos) de maneiras distintas.

Assim, a maneira como se estrutura o currículo escolar, na prática, coloca o professor do sexto ano diante de uma escolha difícil: supor verdadeira a unicidade da decomposição em primos, sem nenhuma justificativa, ou apresentar uma justificativa praticamente impossível de ser acompanhada pelos alunos do sexto ano. Até onde pudemos perceber nos cerca de 20 livros didáticos escolares que examinamos, o que se faz usualmente é admitir a unicidade, sem apresentar nenhuma justificativa. Muitas vezes nem se fala dessa parte do Teorema Fundamental da Aritmética, apenas ensina-se como fatorar pelo algoritmo, assumindo-se implicitamente que a fatoração é única. É uma possibilidade, que poderia ser defendida pelo fato de não se ter acesso a uma justificativa adequada ao estágio de desenvolvimento do conhecimento e das habilidades do pensamento matemático de alunos do sexto ano. Mas será que essa é a abordagem mais adequada, do ponto de vista didático e pedagógico? Existe alguma alternativa escolar de argumentação para validar a unicidade da fatoração em primos no conjunto dos números naturais? Como dissemos na Introdução, nossa resposta para a segunda pergunta é *sim*, o que ajuda a justificar, juntamente com tudo que dissemos nesta seção 2, nossa resposta negativa para a primeira. A não ser que a decisão do professor de não discutir essa questão no sexto ano tenha sido tomada em decorrência de uma análise cuidadosa das circunstâncias, no pleno exercício de sua autonomia docente (ver final da próxima seção).

## 3 A UNICIDADE DA FATORAÇÃO EM PRIMOS E A FORMAÇÃO DE PROFESSORES

Apesar de ser compreensível a atitude de professores e de autores de livros didáticos escolares, que evitam discutir a unicidade da fatoração em primos, queremos comentar dois aspectos importantes em relação a essa questão.

Em primeiro lugar, nossa experiência de trabalho com professores da Educação Básica (e com alunos da Licenciatura em Matemática) nos indica que esses profissionais (e futuros profissionais), de modo geral, não têm uma percepção clara do que está sendo deixado sem justificativa e, em consequência, porque certas justificativas não estão sendo trabalhadas na escola, quando se trata do Teorema Fundamental da Aritmética. Isso nos parece um problema sério que pode afetar negativamente a prática docente escolar.

Um elemento que atua a favor da não percepção (por parte do professor) daquilo que está sendo deixado sem justificativa (e porque está sendo deixado sem justificativa), ao lidar com a decomposição em primos nas salas de aula da Educação Básica, tem seu lastro numa ideia proveniente do senso comum a respeito do ensino de matemática na escola: grosso modo, seria suficiente se ater aos procedimentos, ao "como fazer corretamente". E como tal forma de entender o ensino de matemática é extensivamente disseminada na sociedade, os alunos que entram na escola, mesmo que inicialmente tenham alguma curiosidade em relação a algo além dos procedimentos, acabam por perdê-la, incorporando, em conformidade com o que vivenciam rotineiramente, a concepção de que aprender matemática se reduz a saber realizar os procedimentos "explicados" pelo professor. Fecha-se, então, um círculo vicioso, proporcionando a muitos professores um argumento para justificar a ausência dos porquês em suas aulas de matemática: os alunos não estão em condições de acompanhar as justificativas e/ou não estão interessados. Sem querer diminuir a complexidade da questão, é possível encaixar aqui o velho dito popular: "não se sabe o que nasce primeiro, o ovo ou a galinha".

Por outro lado, o processo de formação matemática do professor nas licenciaturas brasileiras costuma priorizar a matemática acadêmica sobre outras formas de conhecimento matemático mais próximas das demandas da prática docente escolar e, por isso, mais relevantes para a atuação profissional do professor (MOREIRA; DAVID, 2016). Uma busca na internet por vídeos, livros e outras publicações referentes ao TFA mostra que a unicidade da decomposição em primos, por exemplo, nunca (até onde pudemos constatar) é discutida e analisada como parte de um conhecimento matemático que se situa na prática efetiva de ensino no sexto ano da escola, tendo em conta as condições e as demandas profissionais que se colocam ao professor nesse estágio específico da educação escolar. Isso nos levou a inferir que o mesmo deve acontecer, como norma geral, nos cursos de Licenciatura em Matemática, pois não é fácil encontrar referências para esse tipo de abordagem do tema. Nas publicações a que tivemos acesso, como já comentamos, ignora-se a condição de que o tema da fatoração em primos é objeto de trabalho docente no sexto ano do Ensino Fundamental e/ou simplesmente não se aborda a questão da unicidade de forma próxima das condições de aprendizagem nesse estágio do desenvolvimento da educação matemática escolar.

Há que se considerar, dentro dessas condições de aprendizagem referidas acima, que o aluno do sexto ano não tem, ainda, o domínio de uma linguagem simbólica que permita utilizar, com certa fluência, letras (e, algumas vezes, letras com índices numéricos) representando números naturais genéricos (e as posições desses números numa dada sequência). Sem falar na maturidade exigida para acompanhar um processo de demonstração que contém várias etapas recorrentes (por exemplo, nos moldes apresentados em 4.1.1 adiante). Outro problema das demonstrações acadêmicas da unicidade da decomposição em primos, quando as analisamos tendo em vista o processo de formação do professor para o trabalho docente na Educação Básica, refere-se à prova por absurdo. Um aluno genérico do sexto ano não desenvolveu ainda (embora espere-se que aconteça ao longo dos estágios posteriores) uma familiaridade suficiente com provas por redução ao absurdo, um dos elementos utilizados no desenvolvimento de justificativas universitárias para a unicidade da decomposição em primos (ver, para um exemplo, a seção 4.2, adiante), o que dificulta sobremaneira qualquer tentativa de adaptação desse tipo de justificativa à prática docente escolar.

Por fim, queremos destacar que o licenciado passa, de um modo geral, cerca de dois anos de sua formação matemática estudando Cálculo Diferencial e Integral, Funções de Variável Complexa, Equações Diferenciais, Análise Real, Álgebra Abstrata etc., e acaba não "sobrando" tempo para discutir, com o foco requerido pela prática docente escolar, o papel da unicidade da decomposição em primos na estruturação da matemática que irá trabalhar com seus futuros alunos do sexto ano do Ensino Fundamental. Por exemplo, como já mencionado, não se discutem os vínculos entre a unicidade da decomposição em primos e os fundamentos lógicos do algoritmo usado para fatorar na escola; entre essa unicidade e os modos de encontrar o m.d.c. e o m.m.c. de vários números, através da fatoração em primos, como trabalhado na escola; entre ela (a unicidade) e o uso da fatoração em primos para achar quantos e quais são os divisores de um número dado; os vínculos da unicidade da decomposição em primos com a "regra" que afirma que se um número é divisível por dois primos distintos será divisível pelo produto deles, entre outras questões relevantes para a prática docente escolar. Resumindo, pode-se dizer que, de modo geral, o licenciado termina o curso de formação universitária para a docência escolar em matemática sem conhecer aspectos fundamentais do Conhecimento Matemático para o Ensino (BALL; THAMES; PHELPS, 2008), relativos ao Teorema Fundamental da Aritmética.

Nesse sentido, destacamos que a questão tratada neste artigo (a unicidade da decomposição em primos) representa apenas um dos vários tópicos cujas abordagens usuais nas licenciaturas atestam o distanciamento existente entre a formação matemática que se desenvolve nesses cursos e as demandas de conhecimento matemático postas pela prática docente na Educação Básica[4].

No entanto, é importante destacar que, com esses comentários, não estamos defendendo que o professor de matemática, em todos os níveis da Educação Básica, se veja na obrigação de justificar tudo e sempre, ou seja, mostrar as razões pelas quais são válidos todos os resultados matemáticos referidos em suas aulas e discutir, necessariamente, os fundamentos de todos os procedimentos ensinados. Isso seria uma receita fácil de prescrever, mas difícil de cumprir. Temos claro que a decisão última sempre cabe ao professor, dentro da autonomia que rege o trabalho docente. Assim, no exercício da sua autonomia, o professor desenha ou escolhe as estratégias de abordagem para cada tópico, de acordo com o que considere mais adequado a cada turma e em acordo também com as diretrizes e orientações próprias de cada escola. O que defendemos firmemente, contudo, é que os cursos universitários de formação do professor de matemática têm a obrigação de oferecer aos profissionais que certificam para o exercício da profissão docente escolar as condições básicas para exercer essa autonomia. Entre tais condições básicas, destacamos o conhecimento matemático relevante para o ensino escolar, que inclui certamente, entre outros elementos, as justificativas da validade dos resultados matemáticos que são objeto desse ensino, bem como os fundamentos que sustentam a legitimidade dos procedimentos matemáticos a serem utilizados pelos alunos e professores, tudo devidamente ajustado às situações de ensino e de aprendizagem da prática docente escolar em matemática.

É evidente que o professor só pode decidir, com autonomia, se justifica ou não procedimentos e resultados matemáticos, quando conhece as justificativas possíveis de serem apresentadas e discutidas com seus alunos. Assim, o conhecimento matemático relevante para o ensino em cada ano de escolaridade constitui parte importante do exercício real da autonomia docente. Por isso, defendemos a ideia de que a formação inicial tem obrigação de prover ao licenciando as justificativas adequadas dos procedimentos e resultados matemáticos a serem trabalhados na escola ou, se for o caso, discutir a eventual inviabilidade de oferecer tais justificativas. Em suma: o profissional licenciado como professor de matemática da Educação

[4] cf. Moreira e David, 2016, cap. 3, para a discussão de outros exemplos

Básica tem o direito de conhecer justificativas escolares dos fatos e procedimentos matemáticos que ensina e de ter claras as razões pelas quais está deixando de justificar, quando for o caso.

Entretanto, na realidade da escola e da formação docente universitária, os professores de matemática do sexto ano parecem predestinados a ter que escolher, como já mencionado, entre impor a unicidade da decomposição em primos como uma verdade "divina" ou apresentar uma justificativa que não pode ser acompanhada por seus alunos, em função dos pré-requisitos exigidos. A escolha da primeira opção, reforçada pela ideia de que o importante no ensino de matemática são os procedimentos, acaba parecendo a mais razoável e segura. É claro que a autonomia aí aparece mais como falta de alternativa do que como efetivo exercício de competência docente.

O segundo aspecto que queremos destacar refere-se ao fato de que é possível contornar essa situação problemática posta ao professor do sexto ano, no que concerne ao trabalho com a fatoração em primos. A solução emerge quando submetemos a questão lógica (subjacente à construção de uma justificativa escolar para a unicidade da decomposição em primos) a uma premissa de natureza didático-pedagógica, que se refere às condições curriculares relativamente restritivas, próprias do trabalho docente no sexto ano. Tal ponto de vista nos permitiu produzir uma argumentação que garante a validade da unicidade da decomposição em primos, sem ferir os preceitos constituintes de uma justificativa escolar válida para um fato matemático. A argumentação que desenvolvemos se apoia, de modo fundamental, em um fato amplamente aceito pelos alunos da escola, desde os primeiros estudos sobre as frações, estudos esses que acontecem nos anos iniciais da escolaridade. Conhecendo essa possibilidade de argumentação, que apresentamos na seção 5 deste texto, o professor poderá decidir, com real autonomia, se apresenta ou não a seus alunos as adaptações que, no nosso entendimento, podem ser construídas, de acordo com suas concepções e sua experiência, para cada classe de sexto ano do Ensino Fundamental.

## 4 DUAS DEMONSTRAÇÕES ACADÊMICAS DA UNICIDADE DA DECOMPOSIÇÃO EM PRIMOS

### 4.1 Operações com negativos, simbologia sofisticada e procedimentos recursivos: um dos caminhos acadêmicos para provar a unicidade da fatoração em primos

Vamos apresentar, abaixo, uma primeira demonstração da unicidade da decomposição em primos, para que o leitor possa confirmar (ou, talvez, contestar) nossa visão de que uma adaptação desse tipo de argumento ao trabalho no sexto ano do Ensino Fundamental é, no mínimo, difícil de ser elaborada.

#### 4.1.1 Primeira etapa: se um primo divide o produto a.b, então divide necessariamente um dos fatores

Um raciocínio aparentemente simples para justificar a veracidade desse fato seria o seguinte: se $p$ divide $ab$ devemos ser capazes de simplificar todos os fatores primos de $p$ com alguns dos fatores do produto $ab$ até que $p$ seja reduzido ao número 1. Mas como $p$ é primo, seu único fator primo é ele mesmo. Então, para que possamos efetuar tal simplificação, o próprio $p$ deve estar entre os fatores do produto $ab$, ou seja, entre os fatores primos de $a$ ou de $b$ (ou de ambos). Concluímos, então, que $p$ é um divisor de $a$ ou de $b$ (ou de ambos).

Entretanto, essa argumentação usa o fato de que a fatoração em primos de $ab$ é dada sempre pelo produto dos fatores primos de $a$ pelos fatores primos de $b$. Tal fato é verdadeiro, no caso dos números naturais, mas é equivalente à unicidade da decomposição em primos. Assim, como essa é a primeira etapa do processo de demonstração da unicidade, estaríamos usando, já na primeira etapa, o que queremos provar na etapa final do processo. Por isso, vamos tomar outro caminho, de modo a evitar essa circularidade lógica.

Já sabemos (Lema de Euclides) que quando dividimos um número natural $D$ (dividendo) por outro natural $d$ (divisor, diferente de zero), obtemos sempre um quociente $q$ e um resto $r$, que satisfazem as seguintes relações:

a) $D = q.d + r$
b) $0 \leq r < d$

Imaginemos a seguinte sequência de divisões: comece com um número $a > 0$ dividido por um número $b > 1$ e primo com $a$ (isto é, sem divisor em comum com $a$, exceto o 1), obtendo-se um quociente $q_1$ e um resto $r_1$. Chegamos então à igualdade $a = q_1.b + r_1$ , o que também pode ser escrita na forma $r_1 = a - q_1.b$. Observe-se, de passagem, que esta última igualdade traduz o seguinte procedimento subtrativo associado à divisão de naturais: para achar quantas vezes o divisor “cabe” no dividendo, subtraímos o divisor do dividendo e obtemos o resultado $a - b$; se $a - b$ for maior ou igual a $b$, podemos subtrair mais uma vez o valor $b$ e o resultado será $a - 2b$; prosseguimos subtraindo $b$ do resultado da subtração anterior até que o (último) resultado seja menor que $b$. A quantidade de vezes que subtrairmos será o quociente, e o resultado final da última subtração será o resto. Neste sentido, a divisão pode ser vista como uma espécie de subtração iterada, analogamente ao caso da soma iterada, que traduz o significado usual da multiplicação de naturais. Tais procedimentos aditivos (e subtrativos) associados, respectivamente, à multiplicação e à divisão de naturais permitem desenvolver uma argumentação geométrica para concluir que o último resto não nulo da cadeia de divisões (que continuaremos a descrever logo abaixo) é necessariamente divisor comum de $a$ e $b$, independentemente de $a$ e $b$ serem primos entre si. De fato, pode-se mostrar que esse último resto não nulo é o m.d.c. de $a$ e $b$. Entretanto, não entraremos nos detalhes dessa argumentação geométrica e seguiremos com a descrição da sequência de divisões e a prova da proposição enunciada nesta subseção.

Como $a$ e $b$ são primos entre si, $r_1$ não é zero. Então, podemos dividir $b$ por $r_1$ e obter um quociente $q_2$ e um resto $r_2 < r_1$. Então, caso $r_2$ não seja zero, podemos prosseguir, dividindo agora $r_1$ por $r_2$, obtendo um quociente $q_3$ e um resto $r_3 < r_2$. Prosseguimos dividindo sempre o divisor da divisão anterior pelo resto dessa mesma divisão, obtendo novos quocientes e novos restos, até que cheguemos a um resto zero. Mostramos, então, que só se chega a um resto zero quando o resto da divisão anterior tiver sido 1, o que nos diz que, de fato, sempre se passa pelo resto 1 antes de chegar ao resto zero. Por que se pode garantir isso? Para responder, retomemos a sequência de divisões e as igualdades a elas associadas, supondo que a última divisão $(n)$ deixe resto zero. Temos:

(1) $a = q_1.b + r_1$
(2) $b = q_2.r_1 + r_2$
(3) $r_1 = q_3.r_2 + r_3$
....................................
...................................

$(n-3) \quad r_{n-5} = q_{n-3}.r_{n-4} + r_{n-3}$

$$(n-2) \quad r_{n-4} = q_{n-2}.r_{n-3} + r_{n-2}$$
$$(n-1) \quad r_{n-3} = q_{n-1}.r_{n-2} + r_{n-1}$$
$$(n) \quad r_{n-2} = q_n.r_{n-1}\ (r_n = 0)$$

Mostremos que $r_{n-1} = 1$ e que existem $x$ e $y$ inteiros (positivos ou negativos) tais que $ax + by = 1$. Da última igualdade $(n)$, percebemos que $r_{n-1}$ divide $r_{n-2}$. Observando a igualdade anterior $(n-1)$, concluímos que $r_{n-1}$ divide $r_{n-3}$ (pois divide a si mesmo e divide igualmente $r_{n-2}$). Observando a igualdade anterior $(n-2)$, vemos que $r_{n-1}$ divide $r_{n-4}$, pois já divide $r_{n-2}$ e $r_{n-3}$. Continuando nessa volta às igualdades anteriores, uma por uma, observamos que $r_{n-1}$ divide todos os restos anteriores e, consequentemente, divide $b$ e, portanto, $a$. Como $a$ e $b$ são primos entre si, segue que $r_{n-1}$ = 1, como queríamos.

Prosseguindo, verifiquemos que existem $x$ e $y$ inteiros tais que $ax + by = 1$. Para isso, vamos usar novamente as igualdades $(n), (n-1), (n-2) \dots (3), (2), (1)$ acima. A igualdade $(n-1)$ nos dá $r_{n-1} = r_{n-3} - q_{n-1}r_{n-2}$(*). Substituindo o valor de $r_{n-2}$, dado pela igualdade $(n-2)$, na igualdade (*), vem: $r_{n-1} = r_{n-3} - q_{n-1}(r_{n-4} - q_{n-2}r_{n-3}) = r_{n-3}(1 + q_n.q_{n-2}) + r_{n-4}.(-q_{n-1}) = Kr_{n-3} + Lr_{n-4}$, com $K$ e $L$ inteiros. Então, lembrando que $r_{n-1} = 1$, já temos $1 = Kr_{n-3} + Lr_{n-4}$, ou seja, conseguimos escrever 1 como a soma de múltiplos inteiros de $r_{n-3}$ e de $r_{n-4}$. Vamos substituir nesta última igualdade, o valor de $r_{n-3}$ dado pela igualdade $(n-3)$ e obteremos o seguinte: $1 = K(r_{n-5} - q_{n-3}.r_{n-4}) + Lr_{n-4} = Kr_{n-5} + Mr_{n-4}, com\ K\ e\ M$ inteiros. Observe, agora, que já conseguimos expressar o 1 como uma soma de múltiplos de $r_{n-5}$ e de $r_{n-4}$ . Na etapa seguinte, obteríamos 1 como soma de múltiplos inteiros de $r_{n-6}$ e de $r_{n-5}$. Fica claro então que, se prosseguirmos desse modo até a igualdade (1), obteremos $1 = ax + by$ como queríamos.

Sumarizando, temos o seguinte: dados dois números naturais $a$ e $b$, maiores que 1 e primos entre si, podemos sempre encontrar números $x$ e $y$ inteiros (positivos ou negativos) de modo a valer a seguinte igualdade: $ax + by = 1$.

Agora temos todos os elementos para justificar a afirmação de que se um primo $p$ divide o produto $a.b$, então divide necessariamente um dos fatores**.** O argumento segue assim: se $p$ divide $a$, então divide um dos fatores de $a.b$, e não há o que provar. Se $p$ não divide $a$, então $p$ e $a$ são primos entre si e maiores que 1, portanto existem $x$ e $y$ tais que $ax + py = 1$. Multiplicando ambos os membros da igualdade por $b$ vem: $abx + pby = b$. Como $p$ divide $a.b$ (portanto divide $abx$) e também divide $pby$, p tem que dividir a soma $abx + pby$, que é $b$. Logo $p$ divide $b$. Assim, ou $p$ divide $a$ ou $p$ divide $b$, como queríamos mostrar.

### 4.1.2 Segunda etapa: Generalizando para qualquer quantidade de fatores

O resultado que acabamos de provar vale também para qualquer número finito de fatores, isto é, se $p$ primo divide o produto $a_1.a_2.\dots.a_n$, então $p$ divide pelo menos um dos fatores. Basta aplicar reiteradamente o que mostramos para dois fatores, escrevendo o produto $a_1.a_2.\dots.a_n$ como $a_1.(a_2.\dots.a_n)$. Se $p$ não divide $a_1$ tem que dividir o produto dentro dos parênteses. Prosseguindo assim sucessivamente, chegamos ao seguinte: se $p$ não dividir nenhum dos fatores anteriores, então tem que dividir o produto $a_{n-1}.a_n$ e, portanto, tem que dividir um desses dois fatores.

### 4.1.3 Terceira etapa: a unicidade da fatoração em primos

Seja $p_1.p_2.\ldots.p_k$ uma fatoração em primos para o número $m$. Seja $q_1.q_2\ldots q_t$ outra possível fatoração em primos para $m$. Então $q_1$ divide $p_1.p_2.\ldots.p_k$, logo divide um dos $p$'s. Mas todos os $p$'s são primos, portanto, um deles só pode ser divisível pelo primo $q_1$ se for igual ao próprio $q_1$. Assim, $q_1$ é um dos $p$'s. Raciocinando da mesma maneira com $q_1.q_2\ldots q_t$, concluímos que cada um dos $q$'s deve ser igual a algum $p$.

Do mesmo modo, podemos argumentar para garantir que cada um dos $p$'s é algum $q$, ou seja, os fatores primos são os mesmos nas duas fatorações. Segue facilmente daí que a quantidade de vezes que um mesmo fator primo aparece nas duas fatorações também é a mesma[5].

## 4.2 Uma demonstração mais simples, mas ainda difícil de ser adaptada para uma sala de aula de sexto ano

Reproduzimos, a seguir, uma segunda prova acadêmica da unicidade, apresentada em Vieira (2012, p. 50). Ver também Avritzer *et al.* (2004) para uma demonstração semelhante.

> Para provar a unicidade, devemos garantir que um natural $n \geq 2$ não admite mais de uma fatoração em produto de fatores primos. Esta demonstração também será feita usando a segunda forma do PIM[6]. Claro que $n = 2$ possui uma única fatoração. Vamos considerar $k > 2$ e assumir que qualquer natural m tal que $2 \leq m \leq k$ tem uma fatoração única como produto de primos. Agora suponhamos que k+1 tenha duas fatorações distintas como produto de primos (os primos não são necessariamente distintos): $k + 1 = p_1 \cdots p_r = q_1 \cdots q_s$ (6.1). Reordenando os primos, se necessário, podemos supor que $p_1 \leq \cdots \leq p_r$ e $q_1 \leq \cdots \leq q_s$. Note que $p_1 \neq q_1$ pois se tivéssemos $p_1 = q_1$ então o natural $(k+1) \div p_1 \leq k$ teria duas fatorações distintas como produto de primos, contrariando a hipótese de indução. Se assumimos, sem perda de generalidade, que $p_1 < q_1$ e considerarmos o inteiro $m = (k + 1) – (p_1\, q_2 \cdots q_s)$, então $m < k + 1$ e a partir de (6.1) temos que m se escreve como $m = p_1\, p_2 \cdots p_r – p_1\, q_2 \cdots q_s$ e também como $m = q_1\, q_2 \cdots q_s – p_1\, q_2 \cdots q_s$. Deste modo, $m = p_1(p_2 \cdots p_r – q_2 \cdots q_s)$ (6.2) e $m = (q_1 – p_1)\,(q_2 \ldots q_s)$ (6.3). Por (6.2), temos $m \geq 2$, pois $p_1 \mid m$ e assim já que $2 \leq m \leq k$, por hipótese de indução, m tem fatoração única em primos. Deste modo, o primo $p_1$ deve estar presente no produto em (6.3) (pois está presente em (6.2)) e como $p_1 < q_1 \leq \cdots \leq q_s$, devemos ter $p_1$ como fator de $q_1 – p_1$, ou seja, $p_1 \mid (q – p_1)$. Portanto, existe $c \in Z$ tal que $q_1 – p_1 = cp_1$ e, com isso, $q_1 = (c + 1)p_1$, o que é absurdo, pois $p_1$ e $q_1$ são primos distintos. Com esta contradição, concluímos que k + 1 não possui duas fatorações distintas como produto de primos, o que mostra que qualquer natural $n \geq 2$ tem uma fatoração única como produto de primos, de acordo com a segunda forma do PIM.

De novo, o leitor poderá avaliar de acordo com suas concepções e experiência, mas acreditamos ser difícil a adaptação, ao trabalho no sexto ano, dessa forma de justificar a unicidade. E pensamos assim por várias razões, sendo a principal delas a presença incontornável, no argumento, do raciocínio por absurdo. Razões secundárias, talvez evitáveis através de algum subterfúgio didático, seriam: a) o uso da segunda forma do Princípio da Indução, o PIM (que, neste caso específico, pode ser facilmente trocado pelo Princípio da Boa Ordenação, possivelmente mais palatável para o sexto ano); b) o engenhoso artifício de definir o número $m = (k + 1) – (p_1\, q_2 \cdots q_s)$ para em seguida mostrar que esse número possui duas fatorações distintas em primos e chegar ao absurdo. Um artifício como esse sempre corre o risco de parecer "mágico" a um aluno que acaba

[5] O leitor pode encontrar em vários livros universitários (SANTOS, 1998; HEFEZ, sem data; MILIES; COELHO, 2001; BERTONE, 2014, entre outros) demonstrações que reproduzem, essencialmente, o modelo dessas três etapas.

[6] Princípio da Indução Matemática.

de sair dos anos iniciais, especialmente no contexto de uma prova por absurdo. Associar, simultaneamente, a matemática, logo no sexto ano, a conotações como "absurdo" e "mágico" talvez não seja muito interessante nesta etapa da escolarização; c) por fim, a notação usada também nos parece pesada para alunos que ainda não dominam completamente os recursos da linguagem algébrica padrão, como o uso de letras para representar valores numéricos genéricos.

## 5 UM ARGUMENTO ESCOLAR PARA A UNICIDADE DA FATORAÇÃO EM PRIMOS

### 5.1 O fato básico

Por todas as razões já expostas, construímos uma demonstração escolar do fato básico que dá sustentação à validade da unicidade da decomposição em primos. Como vimos na seção 4.1.1, tal fato básico é o seguinte: se $p$ é primo e divide o produto $a.b$, então divide pelo menos um dos fatores. Para mostrar isso de uma forma acessível ao aluno do sexto ano, suponha que $p$ divide $a.b$ e não divide $a$. Então existe um número natural $m$ tal que $a.b = m.p$. Isso nos permite dizer que as frações $a/p$ e $m/b$ são equivalentes. Como $a/p$ é irredutível (pois $p$ é primo e não divide $a$), temos que $m$ e $b$ são múltiplos, respectivamente, de $a$ e de $p$, ou seja, $p$ divide $b$, como queríamos.

Observamos que esse resultado pode ser facilmente estendido para mais de dois fatores. Assim, se um primo divide um produto de (um número finito de) fatores, tem que dividir um desses fatores. Podemos ainda destacar que, se um primo divide um produto de primos, deve ser igual a um desses fatores do produto. Isso poderia fazer parte de uma bateria de exercícios e atividades de sala de aula, com o objetivo de preparar o aluno para o argumento que será usado na seção 5.4, adiante.

Estamos cientes de que a simbologia usada precisaria ser adaptada ao estágio de desenvolvimento da formação matemática escolar dos alunos do sexto ano do Ensino Fundamental. Mais à frente, comentaremos essa questão da adaptação geral da linguagem simbólica e de certos argumentos ao trabalho docente no sexto ano da escola básica. No momento, queremos apenas enfatizar que a base fundamental de sustentação do argumento exposto nesta seção é um fato conhecido dos alunos da escola desde os anos iniciais e, portanto, pode ser usado de forma a tornar completamente acessível a esses alunos uma justificativa para o fato básico aqui provado. A partir daí, estamos em condições de justificar a unicidade da fatoração em primos (seção 5.4 adiante).

### 5.2 Situando a questão lógica associada ao argumento utilizado em 5.1

Embora possa parecer assim a algum leitor, não há circularidade lógica nessa forma de argumentar desenvolvida na seção 5.1, porque a demonstração de que "se uma fração é equivalente a uma irredutível, seu numerador e denominador são múltiplos do numerador e do denominador da irredutível" pode ser feita independentemente do resultado "se $p$ é primo e divide $a.b$, então $p$ divide $a$ ou $p$ divide $b$". Para isso, podemos usar apenas o Lema da Divisão de Euclides, nos moldes do que foi apresentado na seção 4.1.1.

Usamos o seguinte esquema para situar logicamente nosso argumento, em termos da estruturação e sequenciamento de certos resultados a ele relacionados. Consideremos as afirmações abaixo:

(1) Se $p$ é primo e divide $a.b$, então $p$ divide pelo menos um dos fatores.

(2) Se uma fração é equivalente a uma irredutível, então seu numerador e seu denominador são múltiplos, respectivamente, do numerador e do denominador da irredutível que lhe é equivalente.
(3) Se $a$ e $b$ são primos entre si, existem inteiros $x$ e $y$ tais que $ax + by = 1$.
(4) Lema da Divisão de Euclides.

Temos a seguinte cadeia lógica: (4) implica (3) que implica (2) que implica (1). E (4) é logicamente independente de todas as três afirmações anteriores (ou seja, na demonstração de (4) não é necessário usar nenhum dos três resultados anteriores).

Assim, do ponto de vista lógico, o que foi feito na seção 5.1 é apenas o seguinte: em lugar de provar a unicidade da decomposição em primos usando a cadeia (4) implica (3) que implica (1) que implica a unicidade (como é feito por alguns autores de livros universitários, inclusive na demonstração apresentada em 4.1), está sendo usada, a seguinte cadeia: (4) implica (3) que implica (2) que implica (1) que implica a unicidade.

Por que usar essa última cadeia e não a primeira? Porque, nela, não é necessário fazer as demonstrações dos dois primeiros passos - (4) implica (3) e (3) implica (2) - uma vez que os alunos do sexto ano já acreditam, desde os anos iniciais, que (2) é verdadeiro. Então, aquilo em que os alunos acreditam é tomado como postulado. E, convenhamos, do ponto de vista didático-pedagógico não há melhor escolha de postulado do que aquela em que se toma como verdade, sem necessidade de demonstração, um fato de cuja veracidade o aluno está inteiramente convencido desde os anos iniciais.

A esta altura, talvez possa ocorrer a algum leitor a seguinte pergunta: “se podemos escolher o postulado a partir do qual desenvolveremos a prova, por que não, no limite, tomar logo a própria unicidade como postulado?” Vamos comentar brevemente essa questão, explicitando nosso ponto de vista geral em relação a provas escolares de resultados matemáticos.

Enfatizamos aqui o aspecto didático e pedagógico, não os valores típicos de uma abordagem axiomática rígida (o mínimo de postulados, a elegância da organização lógico-dedutiva da teoria, o nível atual do rigor, sempre sob escrutínio dos pares etc.). Tais valores são considerados, por exemplo, na construção dos naturais, quando se parte dos Axiomas de Peano, o que conduz a provas acadêmicas semelhantes às que apresentamos nas seções anteriores e que nos colocaram, por isso mesmo, diante da necessidade de construir uma nova prova, adaptável ao ensino escolar, para a unicidade da decomposição em primos.

Assim, do nosso ponto de vista, o que interessa neste texto é construir uma possibilidade de convencer um aluno do sexto ano da validade da unicidade da decomposição em primos, sem ferir a lógica (i.e., sem cair numa circularidade, por exemplo) e, ao mesmo tempo, totalmente apoiado em conhecimentos prévios, já consolidados em estágios anteriores do Ensino Fundamental. Isso significa tomar, como fundamento do raciocínio, fatos que o aluno já aceite como verdadeiros, o que faz grande diferença em relação a simplesmente tomar como postulado a própria afirmação que se quer justificar. Para dar um exemplo ilustrativo, dentro de uma abordagem puramente axiomática deparamo-nos com a necessidade de provar que entre 1 e 2 não há número natural, uma vez que tal afirmação não figura entre os axiomas de base da teoria. Mas, na escola, é claro que tal fato pode ser tomado como um postulado, pois nenhum aluno tem alguma dúvida de que seja verdadeiro. Mas, daí a tomar o Teorema de Pitágoras, por exemplo, como postulado, ou seja, como uma afirmação que não precisa ser justificada, vai uma grande distância. No limite, a prevalecer esse tipo de visão do ensino, estaríamos estimulando a ideia, já bastante disseminada na cultura escolar, de que a matemática ensinada na escola é um conjunto de regras, fórmulas e procedimentos mais ou menos arbitrários e desconexos, que precisamos decorar e evocar em cada situação que se apresenta nos trabalhos e avaliações de sala de aula.

Em suma, nossa visão *não* é a de que, ao se priorizar o didático e o pedagógico nas argumentações matemáticas na escola, fica eliminada a necessidade de desenvolver um raciocínio lógico consistente para justificar a validade de um fato matemático não reconhecido como verdadeiro pelos alunos. Muito pelo contrário, gastamos um espaço razoável neste texto para defender a ideia de que a unicidade da fatoração em primos não é nada evidente e, por isso mesmo, apresentamos (na seção 5.1, anterior, e nas duas próximas) uma justificativa de sua validade que é logicamente consistente e, a nosso ver, compatível com o ensino escolar do tema no sexto ano.

### 5.3 O algoritmo escolar clássico para a fatoração em primos

Discutiremos, nesta seção, a validade do algoritmo usualmente ensinado na escola para decompor um número composto em fatores primos (sem, ainda, penetrar na questão da unicidade. Esta será discutida na seção 5.4, a seguir).

Primeiro procederemos a uma descrição rápida do conhecido processo: testamos se o número dado é divisível pelo menor primo, que é 2. Se for, fazemos a divisão e obtemos um primeiro quociente. Testamos se esse quociente é divisível por 2 de novo. Se for, fazemos a divisão e obtemos um novo quociente. Repetimos esse procedimento até achar um quociente que não seja mais divisível por 2. Testamos se esse último quociente é divisível pelo próximo primo, que é 3. Prosseguimos do mesmo jeito como fizemos com o 2, até encontrar um quociente que não seja mais divisível por 3. Assim, seguimos testando com o 5, 7, 11, 13 etc. até que obtenhamos o quociente 1. Uma fatoração do número dado inicialmente será, então, o produto dos números primos (alguns deles repetidos algumas vezes) que aparecem como divisores dos quocientes obtidos no processo descrito anteriormente.

A pergunta a que nos propomos responder é a seguinte: como se pode ter certeza de que esse produto expressa uma fatoração correta (do número dado inicialmente) em fatores primos? Vamos raciocinar através de um exemplo com um número particular, mas é importante destacar o fato de que a argumentação é válida de modo geral, não dependendo das particularidades do exemplo selecionado. Mudando-se o número dado, mudam-se os números envolvidos nas contas (e seus resultados), mas o argumento permanece o mesmo. Escolhemos trabalhar com o desenvolvimento detalhado de um exemplo numérico, visando evitar uma notação que, assim entendemos, seria inadequada para esse estágio de formação escolar em matemática (alunos do sexto ano).

Então vamos lá. Queremos encontrar uma fatoração de 15.400 em primos. De acordo com o algoritmo, testamos se esse número é divisível por 2. É. Então fazemos a divisão e obtemos um primeiro quociente igual a 7.700. Isso significa que 15.400 = 2x7.700. Como 7.700 é ainda divisível por 2, fazemos a divisão e obtemos um novo quociente (3.850). Podemos escrever que 15.400 = 2x2x3.850, já que 7.700 = 2x3.850. Isso nos diz que 15.400 é divisível por 2 “duas vezes”, ou seja, é divisível por 2x2. Como 3.850 ainda é divisível por 2, podemos efetuar a divisão e obter o quociente 1.925. Escrevemos: 15.400=2x2x2x1.925, já que 3.850 = 2x1.925. Isso significa, como já comentamos, que 15.400 é divisível por 2x2x2.

Observamos que 1.925 não é mais divisível por 2. Então temos: 15.400 = (2x2x2)x(1.925). Podemos procurar o próximo fator primo de 15.400 entre aqueles que dividem o 1.925. Testamos o primo seguinte ao 2, ou seja, 3. Como 1.925 não é divisível por 3, passamos ao primo seguinte, 5.

Fazemos a divisão e obtemos o quociente 385. Então temos 15.400 = (2x2x2) x 5 x 385, já que 1.925 = 5x385. Constatamos que 385 ainda é divisível por 5, então fazemos a divisão e obtemos o quociente 77. Obtemos então o seguinte: 15.400 = (2x2x2x5x5) x 77. E 5 não divide 77.

De novo, podemos procurar o próximo fator primo de 15.400 entre os que dividem 77. Vemos que 7 divide 77 e o quociente é 11. Então, 15.400 = (2x2x2x5x5x7) x 11. Finalmente, como 11 já é primo, está terminado o processo de fatoração de 15.400 em primos. Eis, portanto, *uma* decomposição em primos para o número 15.400: 2x2x2x5x5x7x11.

A estratégia de trabalhar com exemplos particulares para mostrar a validade geral de um processo matemático (ou de uma afirmação) precisa ser muito bem entendida pelo professor, porque se, por um lado, tem a grande vantagem de evitar o uso de uma notação carregada, que pode até impossibilitar o acompanhamento da argumentação por parte do aluno, por outro, não deve induzir o entendimento de que basta verificar que o processo funcione (ou que a afirmação seja válida) em um determinado número de casos particulares para se poder concluir que vale sempre. O aluno precisa entender que, mesmo que o teste dê certo em um milhão de casos, nada garante que dará certo sempre, a não ser que se faça uso de um argumento geral, que não dependa das particularidades dos números presentes nos exemplos testados.

### 5.4 A unicidade da fatoração em primos

A questão agora é: será que a decomposição em primos, obtida através do algoritmo escolar, é a única que existe, para um dado número composto? Ou seja: será que um aluno poderia encontrar, por algum outro processo, uma decomposição do número 15.400 em fatores primos, de tal modo que, nessa nova fatoração, figurasse algum fator diferente do 2, do 5, do 7 ou do 11? Afirmamos que isso não é possível nem para 15.400 nem para qualquer outro número natural maior que 1 e vamos justificar, referenciando-nos no mesmo exemplo numérico (15.400), mas observando que o argumento usado é geral.

Suponhamos que alguém alegasse ser possível encontrar uma fatoração em primos de 15.400, na qual figurasse, por exemplo, o fator primo 3. Ora, neste caso sabemos que 3 seria um divisor (primo) de 15.400 = 2x7.700. Então, pelo que mostramos em 5.1, 3 deveria dividir 7.700 (já que não pode dividir o 2, por ser maior que 2). No entanto, como 7.700 = 2x3.850, o 3 deveria, pelas mesmas razões, dividir 3.850. Prosseguindo do mesmo modo, podemos concluir que 3 teria que dividir 1.925, o que não acontece, uma vez que para chegar à fatoração de 15.400 na seção anterior, testamos a divisibilidade de 1.925 por 3 antes de passarmos ao fator 5. Então podemos concluir que 3 não pode aparecer em nenhuma fatoração de 15.400.

Mas, e algum outro fator, o 19, por exemplo? Poderia aparecer em alguma fatoração de 15.400? Também não, pois se aparecesse seria um divisor de 15.400, que é igual a 2x7.700. Logo 19 teria que dividir 7.700, que é igual a 2x3.850. Daí, 19 teria que dividir 3.850, que é igual a 2x1.925. Logo, teria que dividir 1.925, que é igual a 5x385. Então, como 19 não divide 5, teria que dividir 385, que é igual a 5x77. Pelas mesmas razões, teria que dividir 77, que é igual a 7x11, o que é impossível, porque tanto o 7 como o 11 são primos (e menores que 19). Podemos concluir, então, que nenhum fator diferente de 2, 5, 7 e 11 pode aparecer na fatoração em primos de 15.400, pois eliminaríamos tal possibilidade raciocinando do mesmo modo que fizemos para o 3 e para o 19.

Resta considerar a possibilidade de que exista uma fatoração de 15.400 em primos que não contenha 2 ou 5 ou 7 ou 11. Tomemos o 11, por exemplo. Como 11 divide 15.400 tem que dividir um dos fatores da outra fatoração, ou seja, tem que coincidir com esse fator (já que ambos são primos). Assim, tal fatoração diferente não existe.

Por fim, fica ainda a possibilidade de um dos fatores primos aparecer na fatoração de 15.400 com expoente diferente daquele em que esse mesmo primo aparece nesta nossa fatoração, obtida pelo algoritmo. Deixamos como um exercício para o leitor mostrar que isso também não pode acontecer.

Vemos, assim, que o algoritmo para encontrar *uma* decomposição em primos não pode, *a priori,* garantir a unicidade desta decomposição. Desse algoritmo resultam decomposições idênticas de um mesmo número, porque vale o fato básico mostrado na seção 5.1, não porque o algoritmo, por si, garanta a unicidade, como observamos na seção 2. No entanto, tal discussão parece ser ignorada nos processos de formação de professores de matemática e não é desenvolvida em nenhum dos vários livros universitários que examinamos. Acreditamos que isso acontece em função dos conflitos existentes entre os valores vigentes na prática universitária de ensino da matemática acadêmica e aqueles subjacentes às demandas de conhecimento matemático postas à prática docente na escola básica (MOREIRA; DAVID, 2008)

## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este texto foi pensado e escrito com o objetivo de contribuir para a reflexão sobre a formação de professores de matemática da Educação Básica e não necessariamente para uso como texto didático em salas de aula do sexto ano. Nesse sentido, contrastamos duas possibilidades de abordagem do tema, uma acadêmica e outra escolar, tendo como referência de fundo o processo de formação do professor e as demandas da prática docente efetiva na escola básica.

A ausência, na formação matemática do professor, de uma discussão do tema, com o foco na prática docente escolar, nos parece um fato no mínimo estranho, já que fica ignorada uma forma de conhecimento matemático diretamente vinculado a demandas claras da profissão, para o exercício da qual é concebido e se desenvolve o referido processo de formação.

Na verdade, acreditamos que os cursos de formação inicial deveriam ir além dessa discussão aqui apresentada, pois o professor que se interesse em trabalhar a unicidade da fatoração em primos com seus alunos do sexto ano, seguramente terá que desenvolver adaptações e rearranjos na forma de argumentação aqui exposta, de modo a tornar os argumentos utilizados nas seções 5.1, 5.3 e 5.4 acessíveis a cada uma de suas turmas. Diferentes alternativas e orientações gerais para a concepção de tais adaptações poderiam ser discutidas, por exemplo, ao longo da elaboração de um conjunto adequado de atividades de sala de aula, visando antecipar algumas das reflexões pertinentes a respeito das ideias essenciais contidas nos argumentos a serem trabalhados. Embora a elaboração dessas atividades, neste caso específico, possa não ser uma tarefa difícil para um profissional experiente, talvez o seja para o professor iniciante, caso não se desenvolva uma discussão adequada no processo de formação inicial. Enfim, em termos gerais, é preciso ter claro que tais adaptações demandam a identificação e mobilização de um conjunto relativamente amplo de conhecimentos matemáticos específicos para o ensino do tópico no sexto ano da Educação Básica e que tais conhecimentos não brotam espontaneamente (e necessariamente) do simples exercício da prática.

## REFERÊNCIAS


AVRITZER, D.; BUENO, H. P.; FARIA, M. C.; FERNANDES, A. M. V.; FERREIRA, M. C. C.; SOARES, E. F. **Fundamentos de Álgebra**. Belo Horizonte: Editora UFMG, 2004.

BALL, D. L.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. Content knowledge for teaching: what makes it special? **Journal of Teacher Education**, v.59, n.5, p.389-407, 2008.

BERTONE, A. M. A. **Introdução à Teoria dos Números**. Uberlândia: UFU, 2014.

HEFEZ, A. **Elementos de Aritmética**. Rio de Janeiro: SBM, sem data. Disponível em:

https://kupdf.net/download/elementos-de-aritm-eacute-tica-abramo-hefez_58fa44dfdc0d608c50959eea_pdf

MILIES, F. C. P.; COELHO, S. P. **Números**: uma introdução à matemática (3ª ed.) São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2003.

MOREIRA, P. C.; DAVID, M. M. M. S. **A Formação Matemática do Professor**: licenciatura e prática docente escolar. Belo Horizonte: Autêntica, 2016 (2ª edição).

MOREIRA, P. C.; DAVID, M. M. M. S. Academic mathematics and mathematical knowledge needed in the school teaching practice: some conflicting elements. **Journal of Mathematics Teacher Education**, v.11, n.1, p.23–40, 2008. DOI 10.1007/s10857-007-9057-5.

VIEIRA, A. C. **Fundamentos de Álgebra I**. Belo Horizonte: Editora UFMG, 2012.

SANTOS, J. P.O. **Introdução à Teoria dos Números**. Rio de Janeiro: SBM, 1998.



**Submetido em julho de 2020.**
**Aprovado em agosto de 2020.**

# REFLEXÕES SOBRE O ENSINO DE TABELAS DE DUPLA ENTRADA A PARTIR DO RACIOCÍNIO INFERENCIAL INFORMAL

## REFLECTIONS ABOUT THE TEACHING OF CONTINGENCY TABLES FROM INFORMAL INFERENTIAL REASONING

Irene Maurício Cazorla[1]

Miriam Cardoso Utsumi[2]

Thiago Campos de Oliveira[3]

### RESUMO

A inserção dos conteúdos de Estatística, na disciplina de Matemática, na Educação Básica no Brasil se iniciou em 1997, tendo sido ratificada em 2018 pela Base Nacional Comum Curricular. Entre seus conteúdos tem-se a tabela de dupla entrada, que deve ser ensinada desde o segundo ano do Ensino Fundamental. Esse tipo de tabela traz no seu bojo o teste de hipóteses, de forma informal, sobre possíveis relações entre variáveis categóricas, a partir do exame e escolha da frequência relativa mais adequada, seja por linha, coluna ou total, a depender de qual é a variável dependente ou independente. Explicitar esses elementos permite desenvolver o raciocínio estatístico e elaborar perguntas críticas, na argumentação e apropriação da conjectura em investigação. Visando contribuir com a formação de leitores letrados estatisticamente, este artigo analisa as respostas de 79 estudantes de um curso de licenciatura em Matemática de duas universidades públicas e 17 professores que ensinam Matemática na Educação Básica, na resolução de um teste de hipótese informal a partir de uma tabela de dupla entrada. Como referencial teórico utilizamos o raciocínio inferencial informal proposto por Makar e Rubin. Os resultados indicam que a maioria dos participantes não consegue determinar a frequência relativa mais adequada à tarefa, o que possivelmente inviabilizará uma argumentação consistente baseada nos dados, indicando a necessidade de maior atenção ao raciocínio estatístico subjacente na leitura e construção desse tipo de tabela. Dessa forma, propomos um checklist de perguntas que pode subsidiar o ensino de tabelas de dupla entrada a partir do raciocínio inferencial informal.

**Palavras-chave:** Tabela de dupla entrada. Pensamento estatístico. Raciocínio estatístico. Letramento estatístico. Raciocínio inferencial informal.

### ABSTRACT

The insertion of contents of Statistics in the subject of Mathematics, in Brazilian Basic Education in began in 1997, having been ratified in 2018 by the National Common Curricular Base. Among its contentes there is the contingency table, which must be taught since the 2nd year of elementary school. This type of table brings the hypothesis test, informally, about possible relations between categorical variables, based on the examination and choice of the most appropriate relative frequency, either by line, column or total, depending on which is the dependent or independent variable. Explaining these elements allows the development of statistical reasoning and the elaboration of critical questioning, in the argumentation and appropriation of the conjecture under investigation. In order to contribute for the formation of statistically literate readers, this article analyzes the responses of 79 students from a mathematics degree course at two public universities and 17 teachers who teach mathematics in basic education, in solving an informal hypothesis test based on a contingency

[1] Doutora em Educação pela Universidade Estadual de Campinas (Unicamp). Docente do Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Estadual de Santa Cruz (UESC), Ilhéus, BA, Brasil. Endereço eletrônico: icazorla@uesc.br.

[2] Doutora em Educação pela Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP). Docente do Programa de Pós-graduação Multiunidades em Ensino de Ciências e Matemática – PECIM e do Programa de Pós-graduação em Educação Escolar, da Universidade Estadual de Campinas (Unicamp), Campinas, SP, Brasil. Líder do Grupo de Pesquisa PSIEM-GEPEMAI. Endereço eletrônico: mutsumi@unicamp.br.

[3] Mestre em Educação em Ciências e Matemática pela Universidade Estadual de Santa Cruz (UESC). Endereço eletrônico: campos999@gmail.com.

table. As a theoretical framework we used the informal inferential reasoning proposed by Makar and Rubin. The results indicate that the majority of participants are unable to determine the most appropriate relative frequency for the task, which possibly will make a consistent argument based on the data unfeasible, indicating the need for greater attention to the underlying statistical reasoning in reading and building this type of table. Thus, we propose a checklist of questions that can support the teaching of contingency tables based on informal inferential reasoning.

**Keywords:** Contingency table. Statistical thinking. Statistical reasoning. Statistical literacy. Informal inferencial reasoning.

## 1 INTRODUÇÃO

No Brasil, os conteúdos de Estatística na Educação Básica foram inseridos na disciplina de Matemática, com a publicação dos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997, 1998, 2002), ratificados e normatizados pela Diretriz Curricular vigente, a Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2018).

Segundo Makar e Rubin (2009) a incorporação da Estatística no currículo da Educação Básica foi resultante da necessidade das escolas prepararem estudantes com pensamento flexível, com capacidade para aprender ao longo da vida e de gerenciar complexidades de um mundo incerto, decorrente do aumento de acesso à informação e da disponibilidade de ferramentas tecnológicas para o seu tratamento. Todavia, muitas das recomendações para o ensino de Estatística na escola foram traduzidas em lições e avaliações que se limitam ao cálculo de médias e interpretação básica de gráficos, quando deveriam estar focadas em abordagens mais holísticas e orientadas para o processo de aprender Estatística.

Um dos conteúdos de Estatística a ser ensinado é a tabela de dupla entrada, que deve ser iniciada já no segundo ano do Ensino Fundamental. Esse tipo de tabela traz no seu bojo o teste de hipóteses estatístico, de forma informal, sobre possíveis relações entre as variáveis categóricas[4] em estudo, a partir do exame e escolha da frequência relativa mais adequada, seja por linha, por coluna ou pelo total, a depender, entre outros fatores, de qual é a variável dependente ou independente, sua disposição nas linhas ou colunas e o tipo de relação que se estabelece entre elas. Explicitar esses elementos permite ao estudante desenvolver o raciocínio estatístico e elaborar perguntas críticas, na argumentação e apropriação da conjectura em investigação, o que alguns autores têm denominado de raciocínio inferencial informal (MAKAR, RUBIN, 2009; BIEHLER, 2014).

Observa-se que a capacidade de interpretar e comunicar informações estatísticas requer a mobilização de habilidades e características específicas. Portanto a tarefa de ensinar tais conteúdos na Educação Básica não é simples.

Essa situação se agrava quando constatamos que os cursos de Pedagogia, que formam os professores que ensinam Matemática nos anos iniciais, têm uma ou duas disciplinas de Metodologia do Ensino de Matemática, com pouco tempo para trabalhar os conteúdos e a didática da Estatística, provocando insegurança nesses futuros professores (GONÇALVES, 2003, 2005; GUIMARÃES, GITIRANA, MARQUES, CAVALCANTI, 2009; MANFREDO, GONÇALVES, LEVY, 2011; BUEHRING, GRANDO, 2019).

De igual forma, os professores formados nos cursos de Licenciatura em Matemática que lecionam nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio, em geral, também não tiveram conteúdos de didática da Estatística, ainda que tenham tido uma disciplina de conteúdos específicos

[4] A BNCC denomina as variáveis qualitativas de categóricas e as quantitativas de numéricas, por essa razão neste trabalho utilizaremos essa nomenclatura.

de Estatística (VIALI, 2010; VIALI, CURY, 2011; SILVA, 2011; RODRIGUES, SILVA, 2019). Resultados similares foram relatados por Estevam e Cyrino (2014) que traçaram um cenário das pesquisas brasileiras sobre Educação Estatística e a formação de professores de Matemática a partir da análise de 23 teses e dissertações, de 1998 a 2011.

Além disso, observa-se que os materiais de apoio ao professor que ensina Matemática na Educação Básica dão mais ênfase ao cálculo das medidas estatísticas e menos à interpretação analítica das ferramentas estatísticas (SANTOS, 2016; SANCHES, ABRANCHES, 2019).

Teixeira (2016) também destaca a importância de que cada estudante saiba utilizar dados de pesquisas, manusear ferramentas matemáticas, fomentar diálogos, tirar conclusões e tomar decisões pessoais ou coletivas. O pesquisador assevera que os conteúdos de Estatística e Probabilidade por estarem no cotidiano dos estudantes e permitirem o tratamento interdisciplinar são potentes para desenvolver a compreensão e a apropriação de conceitos próprios da cidadania, tais como a inserção e a participação social e política dos estudantes, enquanto lhes dá a oportunidade de se posicionarem de maneira crítica, responsável e propositiva a respeito de diferentes questões que os afetam.

Scheeren e Junqueira (2020) relataram que esse tipo de trabalho, com caráter mais interdisciplinar é mais recorrente para a formação humana e que a área de ciências exatas ainda segue metodologias específicas que não favorecem o desenvolvimento de trabalhos desse tipo.

Nesse sentido, acreditamos que é preciso resgatar o real significado dos conceitos estatísticos a serem ensinados na Educação Básica e, neste trabalho, nos debruçamos sobre as tabelas de dupla entrada. O que temos em mente quando coletamos e cruzamos duas variáveis categóricas? No fundo estamos conjecturando hipóteses, como por exemplo: “a autodeclaração de raça se modifica após um processo de intervenção de ensino que valoriza os grupos segregados” ou “a classe social interfere no acesso ao Ensino Superior”, ou ainda “o acesso ao Ensino Superior independe da classe social”, dentre outras.

Todavia, para responder a essas perguntas, não basta coletar dados e construir tabelas, é preciso planejar o levantamento de dados a fim de que as variáveis e as hipóteses estejam postas a priori ou, caso os dados já tenham sido levantados, é preciso realizar uma série de perguntas, para analisar suas possíveis relações e as hipóteses subjacentes.

Para Arteaga, Batanero, Cañadas e Contreras (2011, p. 57) as tabelas de dupla entrada, conhecidas também como tabelas de contingência, são importantes para a ciência, pois são utilizadas como representações “semióticas externas para construir e comunicar conceitos abstratos”. Desse modo, essas representações são utilizadas como “ponte entre os dados experimentais e as formalizações científicas” e auxiliam na determinação das relações que se estabelecem entre as variáveis, modelando e explicando os fenômenos.

Segundo Konold, Pollatsek, Well e Gagnon (1996) há uma extensa literatura documentando as dificuldades das pessoas em interpretar tabelas de dupla entrada, o que foi corroborado em seu estudo. Eles observaram que a maior parte da pesquisa sobre a interpretação de tabelas de dupla entrada explora a capacidade das pessoas de julgar a associação (ou independência estatística), perguntando se os dados sugerem uma relação entre as duas variáveis ou se uma variável depende da outra. Os autores chamam atenção que embora o julgamento de diferenças de proporções entre grupos (teste de homogeneidade) seja formalmente comparável ao julgamento de associação (teste de independência), esses dois tipos de julgamento provavelmente descrevem diferentes tarefas cognitivas.

Segundo Batanero, Estepa, Godino e Green (1996), o conceito de associação ou dependência estatística tem grande relevância para a Educação Matemática, pois amplia o conceito de dependência funcional, fundamental para outros métodos estatísticos, permite modelar inúmeros fenômenos em diferentes ciências, tendo conexões significativas com pesquisas sobre pensamento funcional, probabilidade e raciocínio proporcional. Os autores conduziram um estudo experimental envolvendo 213 estudantes pré-universitários no julgamento de associações em tabelas de dupla entrada, identificando duas estratégias corretas: a) comparação da distribuição de frequência relativa condicional de uma variável, condicionada pelas categorias da outra variável (porcentagem de linha ou coluna) ou comparação entre essas distribuições condicionais e a distribuição de frequência relativa marginal (comparação da porcentagem de linha/coluna de cada categoria com a porcentagem de linha/coluna total); e b) comparação das frequências de casos a favor e contra de cada categoria da variável dependente ou comparação da razão dessas frequências em cada valor da variável independente.

Realizando uma busca de estudos envolvendo tabelas de dupla entrada no cenário brasileiro, não encontramos trabalhos específicos envolvendo as tabelas de dupla entrada. A maioria dos trabalhos as utiliza no contexto diagnóstico, de forma tangencial, o que nos dá algumas pistas de como são abordados os conceitos subjacentes a ela. Por exemplo, Fernandes, Santos-Junior e Pereira (2017) desenvolveram uma sequência de ensino com 35 estudantes do 5º ano, com idades entre 9 e 11 anos, envolvendo a coleta de dados e sua sistematização em tabelas e gráficos com o uso de planilhas eletrônicas. Os autores aplicaram um instrumento diagnóstico contendo quatro questões, sendo uma de tabela de dupla entrada, todavia o foco se centrou apenas na leitura literal dos dados e na conversão dos dados da tabela para o gráfico.

Vasconcelos (2007), na sua dissertação de mestrado, realizou uma pesquisa diagnóstica para investigar as concepções e competências sobre conceitos básicos de Estatística de 20 professores especialistas (Matemática) e 20 professores não especialistas (Pedagogos) que atuavam no Ensino Fundamental. O pesquisador utilizou um instrumento com cinco questões, das quais uma era uma tabela de dupla entrada 4x6 envolvendo a variável idade, na linha, com quatro categorias (crianças, adolescentes, adultos e idosos) e a variável esporte preferido, na coluna, com seis categorias (futebol, vôlei, basquete, atletismo, tênis e natação). A terceira tarefa solicitava a comparação das tendências e análise das relações implícitas na tabela “Existe algum esporte onde a preferência diminui, conforme o grupo vai ficando mais velho?” (p. 98). Os participantes se saíram relativamente bem, pois 60% dos professores não especialistas e 70% dos especialistas acertaram a questão.

Esses resultados mostram a necessidade de investir esforços no ensino da tabela de dupla entrada, explicitando as possíveis relações que se estabelecem entre as variáveis, as hipóteses subjacentes, isto é, de uma perspectiva inferencial, de generalização, mesmo que informalmente.

De acordo com Makar e Rubin (2009) existe um movimento para pensar e raciocinar inferencialmente a partir dos dados, o que implica em desenvolver tanto o pensamento estatístico – que questiona a origem dos dados e como eles vão sendo transformados até responder os questionamentos levantados, quanto ao raciocínio estatístico – que foca nos procedimentos estatísticos mais específicos, bem como no letramento estatístico, a fim de dar significado ao contexto de onde os dados foram extraídos, de modo a conferir elementos de arguição estatística e robustez à análise realizada.

Destarte as considerações anteriores e visando contribuir com a formação de leitores letrados estatisticamente, este artigo tem como objetivo analisar o desempenho de 79 estudantes, de duas universidades públicas, que estavam cursando a Licenciatura em Matemática e de 17 professores que ensinam Matemática na Educação Básica, na resolução de um teste de hipótese informal, a partir de uma tabela de dupla entrada. Como referencial teórico, utilizamos o raciocínio inferencial informal postulado por Makar e Rubin (2009) que envolve o raciocínio, pensamento e letramento estatísticos.

Este artigo é composto por sete seções. Na primeira seção apresentamos a introdução; na segunda, abordamos as competências que devem ser desenvolvidas ao longo da Educação Básica, preconizadas pela BNCC, dando ênfase às tabelas de dupla entrada e ao raciocínio inferencial informal subjacente neste documento; na terceira seção apresentamos o que entendemos por raciocínio inferencial informal, explicitando os conceitos de raciocínio estatístico, pensamento estatístico e os componentes do letramento estatístico; na quarta seção apresentamos as tabelas de dupla entrada e os elementos do teste de hipótese informal subjacente a essas tabelas; na quinta seção apresentamos o percurso metodológico; na sexta seção apresentamos os resultados e, por fim, na sétima seção tecemos as considerações finais.

## 2 O ENSINO DE ESTATÍSTICA SEGUNDO A BNCC

Antes de iniciarmos a análise das competências específicas de Matemática preconizadas pela BNCC (BRASIL, 2018), é preciso sinalizar que os conteúdos de Estatística na Educação Básica, no Brasil, estão inseridos na disciplina de Matemática, tendência seguida pela maioria dos países (BATANERO, 2001). Tal fato, a nosso ver, deve-se às ferramentas matemáticas utilizadas na operacionalização dos conceitos e procedimentos estatísticos. Todavia a Estatística não se restringe à Matemática, ao contrário, a grande utilidade da Estatística está associada à compreensão dos fenômenos das ciências da natureza e das ciências humanas e sociais aplicadas, os quais geram dados que a Estatística transforma em informações. Estas que permitem a compreensão desses fenômenos e a consequente tomada de decisões. Por essa razão, o método estatístico faz parte do método científico.

Verificamos que a BNCC (BRASIL, 2018, p. 9) enfatiza que devemos desenvolver nos estudantes durante a Educação Básica, dez competências gerais, das quais destacamos a segunda e a sétima, descritas a seguir:

> 2. Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para *investigar causas, elaborar e testar hipóteses*, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas. [...]
>
> 7. *Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias*, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta. (destaque dos autores).

Essas duas competências gerais da BNCC frisam a importância da postura investigativa e ativa do estudante na compreensão dos fenômenos que permeiam o mundo no qual estão inseridos. Palavras-chave como “elaborar e testar hipóteses”, “argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis” estão de forma explícita nas dez competências a serem desenvolvidas na Educação Básica.

Essa normativa é mais acentuada quando analisamos as orientações da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, referente aos processos e práticas de investigação no Ensino Médio, de forma a aproximar os estudantes dos procedimentos e instrumentos de investigação, tais como:

> identificar problemas, formular questões, identificar informações ou variáveis relevantes, *propor e testar hipóteses, elaborar argumentos e explicações*, escolher e utilizar instrumentos de medida, planejar e realizar atividades experimentais e pesquisas de campo, relatar, *avaliar e comunicar conclusões* e desenvolver ações de intervenção, a partir da análise de dados e informações sobre as temáticas da área (BRASIL, 2018, p. 550). (destaque dos autores).

Com relação à organização do componente curricular de Matemática, no Ensino Fundamental, que está organizado em cinco unidades temáticas, a saber: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas e Probabilidade e Estatística, podemos verificar que:

> Com relação à estatística, os primeiros passos envolvem o trabalho com a coleta e a organização de dados de uma pesquisa de interesse dos alunos. O planejamento de como fazer a pesquisa ajuda a compreender o papel da estatística no cotidiano dos alunos. Assim, a leitura, a interpretação e a construção de tabelas e gráficos têm papel fundamental, bem como a forma de produção de texto escrito para a comunicação de dados, pois é preciso compreender que o texto deve sintetizar ou justificar as conclusões. No Ensino Fundamental – Anos Finais, a expectativa é que os alunos saibam planejar e construir relatórios de pesquisas estatísticas descritivas, incluindo medidas de tendência central e construção de tabelas e diversos tipos de gráfico. Esse planejamento inclui a definição de questões relevantes e da população a ser pesquisada, a decisão sobre a necessidade ou não de usar amostra e, quando for o caso, a seleção de seus elementos por meio de uma adequada técnica de amostragem. (BRASIL, 2018, p. 275).

Observamos que para desenvolver essas competências será preciso que o professor que ensina Matemática estabeleça um diálogo entre a Matemática e as outras áreas do conhecimento, pois em geral o objeto de investigação não diz respeito ao contexto da Matemática e sim aos fenômenos da natureza ou fatos sociais, que permeiam o mundo. Parafraseando Scheeren e Junqueira (2020), essa proposta de ensino valoriza a identidade dos estudantes e reconhece o contexto social, político e cultural em que eles estão inseridos, tornando-o tomando-o orientador dos conhecimentos a serem estudados.

No Quadro 1 apresentamos o objeto de conhecimento e as habilidades que devem ser desenvolvidas, nos anos iniciais do Ensino Fundamental e no Quadro 2, nos anos finais, no que concerne à relação entre variáveis categóricas. Podemos verificar que as tabelas de dupla entrada estão explicitamente a partir do 2º ano até o 5º ano (Quadro 1); já nos anos finais do Ensino Fundamental (Quadro 2), elas passam a um segundo plano, pois entram em cena as variáveis numéricas e com elas as medidas de tendência central e de dispersão, bem como os gráficos apropriados para esse tipo de variável.

Um fato que chamou nossa atenção nos objetos de conhecimento explicitados na BNCC, foi a forma como é apresentado o conceito de frequência, própria das tabelas simples e de dupla entrada. No 3º ano, na competência EF03MAT27 aparece "utilizando termos como maior e menor frequência" (BRASIL, 2018, p. 289), isto é, a frequência absoluta e, no 6º ano aparece na competência "EF06MA31 – Identificar as variáveis e suas frequências" (BRASIL, 2018, p. 305), na qual se entende que estão incluídas a frequência absoluta e a relativa. Isto pode ser explicado, em parte, pela necessidade instrumental do conhecimento de frações, razões e proporções, trabalhados a partir do

5º ano. Todavia, chamamos atenção para a relevância da frequência relativa, em especial as das tabelas de dupla entrada, a saber: a de linhas, a de colunas e a do total, pois é essa que norteará a análise da possível relação entre as variáveis categóricas envolvidas.

**Quadro 1**: Objeto de conhecimento e habilidades a serem desenvolvidas nos anos iniciais do Ensino Fundamental, relativas à análise de variáveis categóricas

| Ano | Objeto de conhecimento | Habilidades |
|---|---|---|
| 2º | Coleta, classificação e representação de dados em tabelas simples. | EF02MA22: Comparar informações de pesquisas apresentadas por meio de tabelas de dupla entrada (...) para melhor compreender aspectos da realidade próxima.<br>(EF02MA23) Realizar pesquisa em universo de até 30 elementos, escolhendo até três variáveis categóricas de seu interesse, organizando os dados coletados em listas, tabelas (...). (p. 285). |
| 3º | Leitura, interpretação e representação de dados em tabelas de dupla entrada.<br>Coleta, classificação e representação de dados referentes a variáveis categóricas, por meio de tabelas. | (EF03MA26) Resolver problemas cujos dados estão apresentados em tabelas de dupla entrada (...).<br>(EF03MA27) Ler, interpretar e comparar dados apresentados em tabelas de dupla entrada (...), envolvendo resultados de pesquisas significativas, utilizando termos como maior e menor frequência, apropriando-se desse tipo de linguagem para compreender aspectos da realidade sociocultural significativos.<br>(EF03MA28) Realizar pesquisa envolvendo variáveis categóricas em um universo de até 50 elementos, organizar os dados coletados utilizando listas, tabelas simples ou de dupla entrada (...). (p. 289). |
| 4º | Leitura, interpretação e representação de dados em tabelas de dupla entrada (...) com variáveis categóricas e variáveis numéricas.<br>Coleta, classificação e representação de dados de pesquisa realizada. | (EF04MA27) Analisar dados apresentados em tabelas simples ou de dupla entrada (...) com base em informações das diferentes áreas do conhecimento, e produzir texto com a síntese de sua análise.<br>(EF04MA28) Realizar pesquisa envolvendo variáveis categóricas e numéricas e organizar dados coletados por meio de tabelas (...). (p. 293). |
| 5º | Leitura, coleta, classificação interpretação e representação de dados em tabelas de dupla entrada (...) | (EF05MA24) Interpretar dados estatísticos apresentados em textos, tabelas (...) referentes a outras áreas do conhecimento ou a outros contextos, como saúde e trânsito, e produzir textos com o objetivo de sintetizar conclusões.<br>(EF05MA25) Realizar pesquisa envolvendo variáveis categóricas e numéricas, organizar dados coletados por meio de tabelas (...) e apresentar texto escrito sobre a finalidade da pesquisa e a síntese dos resultados. (p. 287) |

Fonte: construído a partir da BNCC (BRASIL, 2018).

**Quadro 2:** Objeto de conhecimento e habilidades a serem desenvolvidas nos anos finais do Ensino Fundamental, relativas à análise de variáveis categóricas

| Ano | Objeto de conhecimento | Habilidades |
|---|---|---|
| 6º | Leitura e interpretação de tabelas (...) referentes a variáveis categóricas e variáveis numéricas.<br>Coleta de dados, organização e registro. | (EF06MA31) Identificar as variáveis e suas frequências (...).<br>(EF06MA32) Interpretar e resolver situações que envolvam dados de pesquisas sobre contextos ambientais, sustentabilidade, trânsito, consumo responsável, entre outros, apresentadas pela mídia em tabelas (...) e redigir textos escritos com o objetivo de sintetizar conclusões.<br>(EF06MA33) Planejar e coletar dados de pesquisa referente a práticas sociais escolhidas pelos alunos e fazer uso de planilhas eletrônicas para registro, representação e interpretação das informações, em tabelas (...). |
| 7º | Planejamento de pesquisa, coleta e organização dos dados, construção de tabelas e interpretação das informações. | (EF07MA36) Planejar e realizar pesquisa envolvendo tema da realidade social, identificando a necessidade de ser censitária ou de usar amostra, e interpretar os dados para comunicá-los por meio de relatório escrito, tabelas com o apoio de planilhas eletrônicas. |
| 8º | Organização dos dados de uma variável contínua em classes.<br>Planejamento e execução de pesquisa amostral. | (EF08MA24) Classificar as frequências de uma variável contínua de uma pesquisa em classes, de modo que resumam os dados de maneira adequada para a tomada de decisões.<br>(EF08MA26) Selecionar razões, de diferentes naturezas (física, ética ou econômica), que justificam a realização de pesquisas amostrais e não censitárias, e reconhecer que a seleção da amostra pode ser feita de diferentes maneiras (amostra casual simples, sistemática e estratificada).<br>(EF08MA27) Planejar e executar pesquisa amostral, selecionando uma técnica de amostragem adequada, e escrever relatório que contenha representações apropriadas para os conjuntos de dados... |
| 9º | Leitura, interpretação e representação de dados de pesquisa expressos em tabelas de dupla entrada.<br>Planejamento e execução de pesquisa amostral e apresentação de relatório | (EF09MA23) Planejar e executar pesquisa amostral envolvendo tema da realidade social e comunicar os resultados por meio de relatório contendo avaliação de tabelas adequadas (...) |

Fonte: construído a partir da BNCC (BRASIL, 2018).

No Ensino Médio, a descrição da Competência 3, na BNCC (BRASIL, 2018), salienta a importância de o uso de tecnologias possibilitar aos estudantes alternativas de experiências variadas e facilitadoras de aprendizagens que reforçam a capacidade de raciocinar logicamente, formular e testar conjecturas, avaliar a validade de raciocínios e construir argumentações. Da mesma forma, na descrição da Competência 5 envolve:

> [...] um conjunto de habilidades voltadas às *capacidades de investigação e de formulação de explicações e argumentos*, que podem emergir de experiências empíricas – *induções decorrentes de investigações e experimentações* com materiais concretos, apoios visuais e a utilização de tecnologias digitais, por exemplo. *Ao formular conjecturas* com base em suas investigações, os estudantes *devem buscar contraexemplos para refutá-las e, quando necessário, procurar argumentos para validá-las. Essa validação não pode ser feita apenas com argumentos empíricos*, mas deve trazer também argumentos mais "formais", incluindo a demonstração de algumas proposições (BRASIL, 2018, p. 540).

A BNCC enfatiza que "Com relação à competência de argumentar, seu desenvolvimento pressupõe também a formulação e a testagem de conjecturas, com a apresentação de justificativas, além dos aspectos já citados anteriormente em relação às competências de raciocinar e representar." (p. 530).

Sintetizando as competências e habilidades normatizadas pela BNCC, aqui detalhadas, a serem desenvolvidas ao longo da Educação Básica, podemos afirmar que existem todos os elementos necessários para desenvolver o raciocínio inferencial informal com os estudantes. Enfatizamos que não basta coletar dados, calcular medidas estatísticas, construir tabelas e gráficos, é preciso lembrar a razão do levantamento de dados, isto é, a compreensão do fenômeno/fato ou problema a ser investigado/solucionado, o que implica necessariamente na conjectura e teste de hipóteses, mesmo que de forma informal.

Por essa razão, neste trabalho advogamos que ao ensinarmos Estatística na Educação Básica o façamos na perspectiva do desenvolvimento do raciocínio inferencial informal, como detalhamos a seguir.

## 3 A BASE DO RACIOCINIO INFERENCIAL INFORMAL

Segundo Makar e Rubin (2009), podemos definir o raciocínio inferencial informal como o processo de generalizações probabilísticas a partir das evidências dos dados que se estendem para além daqueles coletados. O raciocínio inferencial assumirá diferentes níveis de profundidade e detalhes técnicos em diferentes níveis de escolaridade e experiência. Os autores propõem um arcabouço teórico para o aprendizado de Estatística, usando o raciocínio inferencial informal como um processo de criação de significado e construção de evidências.

Nessa definição três conceitos estão imbricados, a saber: raciocínio estatístico, pensamento estatístico e letramento estatístico que apresentamos de forma sucinta para, assim, podermos detalhar nosso entendimento sobre o raciocínio inferencial informal e distingui-lo da inferência estatística informal.

### 3.1 Letramento, pensamento e raciocínio estatístico

De acordo com Wallman (1993, p. 1), letramento estatístico é a "a habilidade para compreender e avaliar criticamente resultados estatísticos que permeiam nossas vidas diárias junto à habilidade para reconhecer a contribuição que o pensamento estatístico pode trazer para as decisões públicas e privadas, profissionais e pessoais”.

O modelo de letramento estatístico proposto por Gal (2002) envolve dois elementos, como podemos observar na Figura 1.

**Figura 1**: Modelo de Gal para o conceito de letramento estatístico

| **Elementos de conhecimento** | **Elementos de disposição** |
|---|---|
| Letramento<br>Conhecimento estatístico<br>Conhecimento matemático<br>Conhecimento de contexto<br>Questões críticas | Crenças e atitudes<br>Postura crítica |
| Letramento estatístico | |

Fonte: Gal (2004), p. 51.

Os elementos de conhecimento envolvem o letramento (habilidade para ler, compreender e interpretar textos), o conhecimento matemático (conhecimento de como realizar cálculos ou procedimentos matemáticos que dão suporte às estatísticas), o conhecimento estatístico (conhecimento para comparar, analisar, representar em diferentes registros, questionar e ir além dos dados), o conhecimento de contexto (conhecimento que possibilita identificar o fenômeno ou fato social de onde emergem os dados) e a competência para elaborar questões (habilidade para qualificar as conclusões, fazer novos questionamentos a partir da análise dos dados, da amostra, da distribuição e representação mais adequada). Já os elementos de disposição envolvem as crenças e atitudes (variáveis afetivas que influenciam o posicionamento do indivíduo) e a postura crítica (habilidade de refletir e ponderar sobre os dados obtidos).

Observa-se que nessa perspectiva o letramento estatístico vai além do domínio da leitura das informações estatísticas e da realização dos procedimentos estatísticos.

Ben-Zvi e Garfield (2004) afirmam que a partir da 5ª Conferência Internacional de Ensino de Estatística, realizada em 1998 na cidade de Singapura ficou visível que pensamento e raciocínio estatísticos são usados pelos pesquisadores para definir as mesmas capacidades.

Para Del Mas (2004), o pensamento estatístico e o raciocínio estatístico são dois tipos de atividades mentais que não podem ser, necessariamente, distinguidas pelo conteúdo de um problema, mas podem ser identificadas pela natureza da tarefa: quando um indivíduo sabe como e quando aplicar conhecimentos e procedimentos estatísticos, demonstra pensamento estatístico. Quando ele pode explicar porque os resultados foram produzidos ou justificar uma conclusão ou fazer uma inferência, ele demonstra raciocínio estatístico.

Pfannkuch e Wild (2004) definem pensamento estatístico como um processo mental complexo e sofisticado que possui várias dimensões, envolvendo a compreensão: de como e porque as investigações estatísticas são conduzidas, das grandes ideias subjacentes às investigações, da natureza da amostragem, de como fazemos inferências a partir de amostras da população, de por que são necessários experimentos planejados para estabelecer relações de causa e efeito, de como modelos são usados para simular fenômenos aleatórios, de como os dados são usados para estimar probabilidades, de como, quando e por que ferramentas inferenciais podem ser usadas para apoiar um processo investigativo, de como utilizar o contexto de um problema nas investigações para tirar conclusões e reconhecer todo o processo, desde a questão formulada até a comunicação da resposta.

Os pesquisadores citam como desafios para o desenvolvimento do pensamento estatístico dos estudantes: conscientizar os professores sobre as caraterísticas de tal pensamento, estabelecer um consenso sobre sua compreensão e desenvolver uma linguagem comum para descrevê-lo; reconhecê-lo em uma variedade de contextos e situações e ser capaz de explicar porque elas constituem pensamento estatístico; elaborar estratégias de ensino e avaliação que o promovam, o desenvolvam e o melhorem.

Acreditamos que o uso desenvolvimento de sequências de ensino que utilizem o ciclo investigativo de Wild e Pfannkuch (1999) contribui para o aprimoramento do pensamento estatístico dos estudantes, pois ele envolve vários desses desafios e possibilita o desenvolvimento das habilidades listadas por Veaux e Velleman (2008) – pensar criticamente, ser cético, pensar mais sobre a variação do que sobre o centro, focar no que não se conhece sobre o parâmetro (intervalo de confiança), aperfeiçoar o processo, pensar sobre probabilidades condicionais e eventos raros, reforçar conceitos como simetria, centro, valor discrepante, entre outros conceitos considerados vagos em Estatística – denominadas por eles de atos do pensamento estatístico.

Além disso, acreditamos que a vivência do ciclo investigativo estimula a formação de indivíduos questionadores, capazes de compreender o mundo que os cerca e com condições de participarem ativamente da sociedade, com consciência.

Jones et al (2004) realizaram uma ampla revisão de pesquisas que propuseram ou utilizaram modelos de desenvolvimento cognitivo que caracterizam o raciocínio estatístico dos estudantes e sugerem que esse passa por vários níveis hierárquicos e ciclos.

Del Mas (2004) afirma que para promover o raciocínio estatístico, os estudantes devem experimentar em primeira mão o processo de coleta de dados e explorar o comportamento dos mesmos, fazendo perguntas sobre por que e como os dados são produzidos, por que e como as estatísticas se comportam e por que e como as conclusões podem ser tiradas e apoiadas, a fim de desenvolverem uma disposição para "serem lógicos".

Segundo Ben-Zvi e Garfield (2004), é importante que os professores entendam as semelhanças e diferenças entre esses processos, para que consigam considerá-las quando da formulação de metas de aprendizagem para os estudantes, elaboração de atividades de ensino e avaliação da aprendizagem usando instrumentos apropriados.

Analogamente Del Mas (2002) apresentou uma lista de tarefas para auxiliar os professores na elaboração de suas avaliações de acordo com o que pretendem desenvolver nos estudantes, o letramento básico, o raciocínio estatístico ou o pensamento estatístico, conforme Figura 2.

Sendo assim, se o professor pretende avaliar o pensamento ou o raciocínio estatístico dos seus estudantes não deve propor questões que exijam deles que identifiquem exemplos de um conceito, descrevam um gráfico, reescrevam um resultado estatístico ou interpretem os resultados de um procedimento estatístico. Ao invés disso, o professor deve propor questões que exijam que eles expliquem por que ou como um resultado foi produzido ou que justifiquem uma conclusão no caso de avaliar o raciocínio estatístico, ou que eles apliquem conhecimentos e procedimentos estatísticos em problemas do mundo real, que eles critiquem e avaliem o planejamento e as conclusões de estudos ou ainda generalizem o conhecimento obtido a partir dos exemplos dados em aula para outras situações.

Como podemos observar, as orientações da BNCC para o ensino de Estatística na Educação Básica levam em consideração os princípios subjacentes ao raciocínio, pensamento e letramento estatístico, que fazem parte do raciocínio inferencial informal que apresentamos a seguir.

**Figura 2**: Tarefas que podem distinguir os três domínios instrucionais

| Letramento básico | Raciocínio estatístico | Pensamento estatístico |
|---|---|---|
| Identificar<br>Descrever<br>Reformular<br>Traduzir<br>Interpretar<br>ler | Por quê?<br>Como?<br>Explicar (o processo) | Aplicar<br>Criticar<br>Avaliar<br>Generalizar |

Fonte: Del Mas (2002), p. 6.

### 3.2 Inferência estatística informal e raciocínio inferencial informal

Segundo Makar e Rubin (2009) é crucial que o foco no uso de ferramentas estatísticas seja incorporado à razão pela qual realizamos o levantamento de dados, pois o que queremos é entender as relações que se estabelecem entre os fatores (variáveis) subjacentes aos fenômenos em estudo. Isto implica em uma mudança de perspectiva sobre a ênfase nos procedimentos para o foco nos processos estatísticos.

O enfoque na investigação de fenômenos implica a compreensão do ciclo de investigação estatística como um processo de fazer inferências, isto é, o foco não deve ser nos dados em si, mas nas características e nos processos mais gerais que os criaram. Esse processo é de fato inferencial.

Para Makar e Rubin (2009), no que concerne ao ensino em cursos de graduação e pós-graduação, a inferência estatística é resultado de um processo fundamentado de criação ou teste de generalizações probabilísticas a partir dos dados:

> Por inferência estatística formal, nos referimos às declarações de inferência usadas para fazer estimativas pontuais ou intervalares dos parâmetros populacionais ou testar formalmente hipóteses (generalizações), usando um método aceito pela comunidade estatística e científica. (p. 85).

Em contrapartida, a inferência estatística informal, para esses autores, é um processo fundamentado, mas informal, de criar ou testar generalizações a partir dos dados, ou seja, não necessariamente por meio de procedimentos estatísticos padrão.

Para Biehler (2014), o raciocínio inferencial informal tornou-se um aspecto a ser enfatizado no ensino de Estatística, pautado em fundamentos intuitivos que visam moldar o raciocínio dos estudantes mais jovens, preparando-os para a inferência estatística formal.

Para Makar e Rubin (2009), a inferência estatística informal contribui para aprofundar a compreensão dos estudantes sobre o objetivo e a utilidade dos dados de maneira mais geral, com aplicabilidade direta na compreensão do mundo. A inferência informal é um processo criativo e indutivo, no qual um aluno gera uma hipótese experimentalmente, observando padrões nos dados. O uso da palavra informal enfatiza a ampla aplicação do raciocínio inferencial e abre a possibilidade de considerar a inferência estatística fora dos procedimentos formais. Embora o ensino de inferência informal apoie a compreensão conceitual de processos inferenciais estatísticos formais posteriores, o objetivo não é necessariamente preparar os alunos para fazer inferência estatística formal.

Isso posto, os autores denominam esse processo de generalização de raciocínio inferencial informal ao invés de usar o termo de inferência estatística informal, pois o foco está no raciocínio. Nesse sentido, concordamos com esses autores, que na Educação Básica, podemos ensinar Estatística privilegiando o raciocínio inferencial (estatístico) informal.

Com esse quadro teórico analisamos a respostas dos participantes diante de um teste de hipótese informal sobre a relação entre duas variáveis categóricas apresentadas em uma tabela de dupla entrada, assim na próxima seção definimos tabela de dupla entrada.

## 4 TABELA DE DUPLA ENTRADA

Nesta seção apresentamos a tabela de dupla entrada, conhecida também como tabela de contingência, abordamos o teste de hipótese informal e detalhamos como podemos ensinar na perspectiva do raciocínio inferencial informal.

### 4.1 Variáveis estatísticas: variável categórica

Em Estatística, variável é definida como uma característica da população em estudo e o reconhecimento de suas características é crucial, pois o seu tratamento depende de sua natureza. As variáveis estatísticas podem ser classificadas, de acordo a sua natureza, em categóricas, quando as respostas são categorias, classes ou grupos, e em numéricas quando os resultados são números. Observamos que muitas variáveis numéricas podem ser transformadas em categóricas, como por exemplo, a idade que pode ser agrupada em categorias: “Criança” (0 – 12 anos), “Adolescente” (> 12 – 18 anos) e “Adulto” (>18 anos).

No caso de duas variáveis categóricas, distinguimos dois casos, as provenientes de amostras emparelhadas, como, por exemplo, a auto declaração de raça, antes e depois de uma intervenção de ensino que esclarece e valoriza a importância dos diversos grupos étnicos. Nesse exemplo, a variável independente é auto declaração de raça antes e a variável dependente é a auto declaração depois da intervenção, o sentido inverso não teria sentido algum. Observamos que os dados são obtidos da mesma pessoa, que manifesta sua opinião antes e depois da intervenção. Nesse mesmo exemplo, podemos examinar se o gênero influencia a autodeclaração de raça antes da intervenção, nesse caso estaríamos diante de amostras independentes.

Agora vejamos um exemplo com “amostras independentes”, como classe social e acesso ao Ensino Superior. Nesse caso, a variável independente é a classe social e a dependente é o acesso ao Ensino Superior. Observamos que o dado de uma pessoa “independe” do dado de outra pessoa. No Quadro 3 apresentamos alguns exemplos de relação entre variáveis e o sentido que se estabelece entre elas.

Observamos que a denominação de variável “dependente” e “independente” é uma convenção e não implica necessariamente em uma relação causa-efeito, elas podem apenas estarem associadas (relacionadas). Por isso, precisamos distinguir “associação” de “causalidade”, uma vez que variáveis associadas ou correlacionadas não necessariamente implicam em uma relação de causalidade. Segundo Batanero (2001), causalidade implica em uma variável determinar a outra, como por exemplo, o comprimento do raio determina o perímetro da circunferência; isso não acontece com as relações entre variáveis estatísticas, pois os fenômenos são resultantes da interação de múltiplos fatores (variáveis). Para a autora, "duas variáveis estão associadas na medida em que uma delas é preditora da outra" (p. 30) e quando as duas variáveis são quantitativas o termo utilizado é *correlação*, já a palavra *associação* (estatística) é utilizada tanto para variáveis categóricas como numéricas.

**Quadro 3**: Exemplos do sentido da relação que se estabelecem entre variáveis estatísticas

| |
|---|
| Exemplos de relação de sentido único:<br>Classe social ➔ acesso ao Ensino Superior (o inverso não é verdadeiro).<br>Altura da pessoa adulta ➔ massa corpórea (o inverso não é verdadeiro).<br>Gênero ➔ preferência pelo sabor da pizza (o inverso não é verdadeiro).<br>Faixa etária ➔ percepção de gravidade da Covid-19 (o inverso não é verdadeiro).<br>Fumar ➔ câncer de pulmão (o inverso não é verdadeiro). |
| Exemplos de relação de dois sentidos:<br>Altura de um homem adulto ⇷➔ envergadura dos braços (não há uma direção clara).<br>Atitudes em relação à Matemática ⇷➔ desempenho em Matemática (não há uma direção clara). |

Fonte: construção dos autores.

No caso da representação tabular das variáveis categóricas não há especificações se a variável dependente deveria ficar na linha e a variável independente na coluna. Isto será determinante na formulação da hipótese, bem como no cálculo da frequência relativa (por linha, por coluna ou pelo total) para examinar a plausibilidade da hipótese, ou seja, realizar o raciocínio inferencial informal.

## 4.2 Tabela de dupla entrada: teste de hipóteses informal

As tabelas de dupla entrada ou tabelas de contingência são formadas pelo cruzamento de duas variáveis categóricas, portanto, é uma matriz de tamanho "l x c" formada por "l" linhas contendo as categorias de uma variável na linha e "c" colunas contendo as categorias de outra variável na coluna.

A seguir utilizamos um exemplo de Arteaga et al (2011, p. 57) sobre os raciocínios envolvidos em uma tabela 2x2, formada pelos dados do peso de 2.000 recém nascidos, categorizados em dois grupos (Baixo peso e Peso normal) e a condição de fumante das mães com duas categorias (Fumante e Não fumante). A tabela é chamada 2x2, pois leva em consideração apenas o número de categorias, a linha do total e a coluna do total não estão incluídas nessa nomenclatura.

Observamos que além da frequência absoluta temos a possibilidade de calcular três frequências relativas que nos trazem informações diferentes e, nesse ponto, a pergunta é: que frequência utilizar, a absoluta ou a relativa? Se for a relativa, qual delas: a da coluna, a da linha ou a calculada com relação ao total geral? No Quadro 4 apresentamos as quatro possibilidades.

Não podemos utilizar a frequência absoluta (Quadro 4a), pois o tamanho das duas amostras (mães fumantes e não fumantes) é bastante diferente, portanto, devemos calcular a frequência relativa, porém a pergunta é: qual delas?

Para responder essa pergunta devemos primeiro conjecturar a hipótese a ser testada. Para isso verificamos se estamos diante de amostra independente ou emparelhada. Nesse caso estamos diante de uma amostra independente. A seguir devemos verificar se se trata de um teste de independência ou de homogeneidade.

**Quadro 4**: Frequências absoluta e relativa em uma tabela de dupla entrada.

(a) Frequência absoluta

| Mãe | Peso do recém nascido | | |
|---|---|---|---|
| | Baixo | Normal | Total |
| Fumante | 43 | 207 | 250 |
| Não fumante | 105 | 1645 | 1750 |
| Total | 158 | 1852 | 2000 |

(b) Frequência relativa por coluna

| Mãe | Peso do recém nascido | | |
|---|---|---|---|
| | Baixo | Normal | Total |
| Fumante | 29,1 | 11,2 | 12,5 |
| Não fumante | 70,9 | 88,8 | 87,5 |
| Total | 100,0 | 100,0 | 100,0 |

(c) Frequência relativa por linha

| Mãe | Peso do recém nascido | | |
|---|---|---|---|
| | Baixo | Normal | Total |
| Fumante | 17,2 | 82,8 | 100,0 |
| Não fumante | 6,0 | 94,0 | 100,0 |
| Total | 7,4 | 92,6 | 100,0 |

(d) Frequência relativa pelo total

| Mãe | Peso do recém nascido | | |
|---|---|---|---|
| | Baixo | Normal | Total |
| Fumante | 2,2 | 10,4 | 12,5 |
| Não fumante | 5,3 | 82,3 | 87,5 |
| Total | 7,4 | 92,6 | 100,0 |

Fonte: adaptado da Tabela 1 de Arteaga et al (2011, p. 57).

Para isso devemos examinar como foi realizada a amostra. No caso do teste de independência, a hipótese é “o peso do recém-nascido independe da condição de fumante da mãe” e se selecionaria aleatoriamente uma amostra de mães (amostra aleatória simples); já no caso do teste de homogeneidade, a hipótese é “a proporção de recém-nascidos com baixo peso de mães fumante é igual a proporção de recém-nascidos com baixo peso de mães não fumantes” e se selecionaria aleatoriamente dentro do grupo de mães fumantes e dentro do grupo de mães não fumantes (amostra aleatória estratificada).

Observamos que o procedimento estatístico para ambos os testes (independência e homogeneidade) é o mesmo, é o teste Qui-quadrado, embora a lógica do teste de independência esteja assentada na propriedade de eventos independentes e o teste de homogeneidade na igualdade de proporções.

Examinando a tabela 2x2 vemos que a amostra é composta por 2.000 recém-nascidos. Nessa amostra não foi levado em consideração se as mães eram a priori fumantes ou não fumantes, então estamos diante de um teste de independência. A seguir examinamos qual delas é a variável independente e a dependente, para isso propomos realizar um checklist (Quadro 5), com as ideias subjacentes para dar início a este tipo de análise.

Nesse exemplo podemos verificar que se trata de uma associação entre variáveis (não há uma relação de causalidade), a variável dependente é o peso do recém-nascido (na coluna) e a variável independente é a condição de fumante da mãe (na linha), a relação tem um único sentido e a hipótese subjacente é: “o peso do recém-nascido independe da condição de fumante da mãe”.

Examinemos o significado da frequência relativa por coluna (Quadro 4b). Nesse caso, estamos analisando dentro de cada grupo dos recém-nascidos (variável dependente), e podemos verificar que 29,1% dos recém-nascidos com baixo peso tinham suas mães fumantes; enquanto apenas 11,2% dos recém-nascidos com peso normal tinham suas mães fumantes.

**Quadro 5**: Checklist de perguntas a serem respondidas antes de proceder ao teste de hipótese informal em uma tabela de dupla entrada, envolvendo amostras independentes

| Perguntas | Possibilidades | Respostas |
|---|---|---|
| 1. Quais são as variáveis envolvidas? | | "Peso do recém-nascido" e "Condição de fumante da mãe" |
| 2. Qual é a variável dependente? | | Peso do recém-nascido |
| 3. Qual é a variável independente? | | Condição de fumante da mãe |
| 4. Qual é o sentido da relação? | Sentido único ou<br>Dois sentidos | Sentido único |
| 5. Qual é a hipótese a ser testada? | Independência ou homogeneidade | Independência: o peso do recém-nascido independe da condição de fumante da mãe |
| 6. Qual frequência analisar? | Absoluta ou relativa? | Relativa |
| 7. Qual a frequência relativa (%) utilizar? | Linha, coluna ou total | Porcentagem da linha (porque a variável independente está na linha) |

Fonte: construção dos autores.

Agora examinemos a porcentagem pela linha (Quadro 4c), nesse caso estamos analisando dentro de cada grupo de mães (variável independente) e verificamos que 17,2% das mães fumantes tiveram seus filhos com baixo peso, enquanto 6,0% das mães não fumantes tiveram seus filhos com baixo peso. Dito de outro modo, sabendo que a mãe é fumante, a probabilidade de o recém-nascido ter baixo peso é de 0,172; já se a mãe não é fumante essa probabilidade cai para 0,060. Esse tipo de probabilidade condicional, nos chama atenção para o fato de estarmos examinando o risco de baixo peso pelo hábito de fumar: ele quase triplica! Isto é, levando em consideração o hábito de fumar (variável independente) e como ele interfere no peso do RN (variável dependente).

No Quadro 4d temos a porcentagem do total e verificamos que dos recém-nascidos com baixo peso, 2,2% tem mãe fumante e 5,3% tem suas mães não fumantes. Se utilizarmos essa porcentagem vamos chegar a uma conclusão errada, de que não fumar aumentaria o risco de baixo peso e isso não é verdade. Tal conclusão é fruto da distorção do tamanho da amostra de cada grupo, pois 87,5% das mães eram não fumantes. Nesse caso, se as variáveis estão dispostas como no Quadro 4a, a porcentagem adequada para análise é de linhas, onde se encontra a variável independente.

Ao analisarmos todas essas possibilidades contidas nas tabelas de dupla entrada, podemos ficar apreensivos, pois aparentemente são muitos conceitos que são estudados apenas no Ensino Superior. Todavia, existem elementos no currículo da Educação Básica que nos permitem alinhavar os conceitos para permitir o teste de hipótese informal, e desenvolver o raciocínio inferencial informal. Por exemplo, o conceito de variável dependente e independente, plano cartesiano, pares ordenados, relação funcional estão presentes no conceito de função. O raciocínio proporcional e funcional já aparece com a pré-álgebra (early álgebra) a partir do 5º ano. Outro conceito crucial é o de probabilidade conjunta e marginal que deve ser estudado a partir do 9º ano, como podemos ver no objeto de conhecimento "Análise de probabilidade de eventos aleatórios: eventos dependentes e independentes" (BRASIL, 2018, p. 318), e na habilidade EF09MA20 "Reconhecer, em experimentos aleatórios, eventos independentes e dependentes e calcular a probabilidade de sua ocorrência, nos dois casos." (BRASIL, 2018, p. 319).

Com estes pressupostos em mente trazemos para discussão um teste de hipótese informal contido em uma tabela de dupla entrada, a partir do exame da frequência relativa (por linha, coluna ou total), como veremos a seguir.

## 5 PERCURSO METODOLÓGICO

Participaram da investigação 79 estudantes que estavam cursando Licenciatura em Matemática, em duas universidades públicas, sendo 35 do interior da Bahia, dos quais 20 eram ingressantes e 15 veteranos; os 44 estudantes restantes eram do interior de São Paulo. Participaram também, 17 professores da Educação Básica atuando em escolas públicas no interior de São Paulo, sendo 11 dos anos iniciais do Ensino Fundamental e seis do Ensino Médio.

Os participantes resolveram várias situações-problema e neste trabalho analisamos a questão relativa à tabela de dupla entrada. No instrumento de São Paulo, a variável independente "Classe social" estava disposta na Coluna e a variável dependente "Acesso ao Ensino Superior" estava disposta na Linha (Quadro 6), já no instrumento da Bahia, a variável independente (Classe social) estava disposta na Linha e a variável dependente (Acesso ao ensino superior - ES) estava disposta na coluna (Quadro 7).

## 6 ANÁLISE DE RESULTADOS

Antes de apresentar os resultados, detalhamos as perguntas que devem ser realizadas, conforme o checklist proposto no Quadro 8. Primeiro verificamos que se trata de uma tabela 2x3 (no caso de São Paulo, Quadro 6) ou de uma tabela 3x2 (no caso da Bahia, Quadro 7). Assumimos estar diante de um teste de independência pois não há indicação alguma de que a amostragem foi realizada de forma estratificada.

Analisando as possibilidades, verificamos que não podemos utilizar a frequência absoluta, pois os grupos por classe social têm tamanhos diferentes e isso embaralharia nossa visão. Portanto devemos analisar as frequências relativas. Mas qual delas: a da coluna, a da linha ou a do total?

No Quadro 9 apresentamos as três frequências relativas, partindo da organização da tabela conforme Quadro 6, isto é a variável dependente (acesso ao Ensino Superior) na linha e a variável independente (classe social), na coluna. O raciocínio seria diferente se partíssemos dos dados organizados segundo o Quadro 7.

Analisando o significado da frequência relativa por coluna, verificamos que 33,3% das pessoas da classe baixa ingressaram no Ensino Superior, 50% da classe média e 80% da classe alta também. Essa estrutura percentual nos permite comparar a chance de ingresso no Ensino Superior por classe social. Agora analisemos o significado da frequência relativa por linha, verificamos que do total de pessoas que tiveram acesso ao Ensino Superior, 46,5% pertencem a classe baixa, 34,9% à classe média e apenas 18,6% pertence à classe alta. Essa estrutura percentual nos mostra a composição por classe social dos que tiveram acesso ao Ensino Superior.

Finalmente, analisemos o significado da frequência relativa calculada a partir do total da amostra e verificamos que 20% dos entrevistados tiveram acesso ao Ensino Superior e pertencem a classe social baixa; 15% dos entrevistados tiveram acesso ao Ensino Superior e pertencem à classe média e 8% dos entrevistados tiveram acesso ao Ensino Superior e pertencem à classe alta.

**Quadro 6**: Estrutura da Questão resolvida pelos participantes do interior de São Paulo

1. Em uma pesquisa sobre a classe social e o acesso ao Ensino Superior (ES) foram entrevistadas mil pessoas. Os dados dessa amostra estão na Tabela 1.

a) Preencha a Tabela 2 com a porcentagem calculada da forma que lhe pareça mais conveniente (linha, coluna ou total) para argumentar a existência ou não de relação entre a classe social e o acesso ao Ensino Superior.

Tabela 1: Número de pessoas segundo o acesso ao Ensino Superior e a classe social

| Acesso ao ES | Classe Social | | | Total |
|---|---|---|---|---|
| | Baixa | Média | Alta | |
| Sim | 100 | 150 | 100 | 350 |
| Não | 400 | 200 | 50 | 650 |
| Total | 500 | 350 | 150 | 1000 |

Tabela 2: Porcentagem de pessoas segundo o acesso ao Ensino Superior e a classe social

| Acesso ao ES | Classe Social | | | Total |
|---|---|---|---|---|
| | Baixa | Média | Alta | |
| Sim | | | | |
| Não | | | | |
| Total | | | | |

Fonte: elaborado pelos autores.

b) Construa um gráfico que lhe pareça mais apropriado, para apresentar seu argumento.

c) O que você pode concluir acerca da relação entre a classe social e o acesso ao Ensino Superior?

Fonte: construção dos autores.

**Quadro 7**: Estrutura da Questão resolvida pelos participantes da Bahia

Na tabela da esquerda apresentamos a distribuição de uma amostra da população brasileira adulta, por classe social e acesso ao Ensino Superior (ES).

a) Calcule a porcentagem que lhe pareça mais adequada (de linha, de coluna ou total) para analisar se existe relação entre a classe social e o acesso ao Ensino Superior. Após isso, preencha a tabela da direita:

| Valores absoluto | | | |
|---|---|---|---|
| Classe social | Acesso ao ES | | |
| | Sim | Não | Total |
| Baixa | 200 | 400 | 600 |
| Média | 180 | 120 | 300 |
| Alta | 80 | 20 | 100 |
| Total | 460 | 540 | 1000 |

| Valores percentuais | | | |
|---|---|---|---|
| Classe social | Acesso ao ES | | |
| | Sim | Não | Total |
| Baixa | | | |
| Média | | | |
| Alta | | | |
| Total | | | |

Fonte: construção dos autores.

b) Se uma pessoa argumentar que é falsa a necessidade de cotas para a classe baixa, visto que tem mais pessoas dessa classe. Com base nos dados, essa pessoa tem razão? ( )Sim ( )Não, por quê?

Fonte: construção dos autores.

Podemos verificar que essas três frequências relativas (estruturas percentuais) informam significados diferentes e, nesse caso, a mais apropriada é a frequência por coluna, uma vez que a variável dependente (acesso ao Ensino Superior) está na linha e a variável independente (classe social) está na coluna. Se os dados estivessem dispostos em uma tabela como a do Quadro 7, a frequência relativa seria por linha.

**Quadro 8**: Checklist de perguntas a serem respondidas antes de proceder ao teste de hipótese informal em uma tabela de dupla entrada, envolvendo amostras independentes

| Checklist | Possibilidades | Respostas |
|---|---|---|
| 1. Quais são as variáveis envolvidas? | | Classe social e Acesso ao ES |
| 2. Qual é a variável dependente? | | Acesso ao ES |
| 3. Qual é a variável independente? | | Classe social |
| 4. Qual é o sentido da relação? | Sentido único ou<br>Dois sentidos | Sentido único |
| 5. Qual é a hipótese a ser testada? | Independência ou homogeneidade | Independência: o acesso ao ES independe da classe social |
| 7. Qual frequência analisar? | Absoluta ou relativa? | Relativa |
| 7. Qual frequência relativa (%) utilizar? | Linha, coluna ou total | (SP) Porcentagem de coluna<br>(BA) Porcentagem de linha |

Fonte: construção dos autores.

**Quadro 9**: Possibilidades de frequência relativa em porcentagem

(a) Frequência relativa: porcentagem da coluna

| Acesso ao ES | Classe social | | | |
|---|---|---|---|---|
| | Baixa | Média | Alta | Total |
| Sim | 33,3 | 50,0 | 80,0 | 43,0 |
| Não | 66,7 | 50,0 | 20,0 | 57,0 |
| Total | 100,0 | 100,0 | 100,0 | 100,0 |

(b) Frequência relativa: porcentagem da linha

| Acesso ao ES | Classe social | | | |
|---|---|---|---|---|
| | Baixa | Média | Alta | Total |
| Sim | 46,5 | 34,9 | 18,6 | 100,0 |
| Não | 70,2 | 26,3 | 3,5 | 100,0 |
| Total | 60,0 | 30,0 | 10,0 | 100,0 |

(c) Frequência relativa: porcentagem do total

| Acesso ao ES | Classe social | | | |
|---|---|---|---|---|
| | Baixa | Média | Alta | Total |
| Sim | 20,0 | 15,0 | 8,0 | 43,0 |
| Não | 40,0 | 15,0 | 2,0 | 57,0 |
| Total | 60,0 | 30,0 | 10,0 | 100,0 |

Fonte: construção dos autores.

Nesse exemplo hipotético o que estamos testando é se o acesso ao Ensino Superior (variável dependente) independe da classe social (variável independente), portanto o 100% deve estar formado dentro de cada categoria da classe social (variável independente), não importa se ela está na linha ou na coluna.

Na Tabela 1 apresentamos os resultados da escolha da frequência relativa dos participantes de São Paulo, onde a escolha adequada era a porcentagem da coluna. Podemos observar que a maioria dos participantes escolheu a porcentagem pelo total (59,0%) e 36,1% escolheu a porcentagem por coluna, sendo que os estudantes de licenciatura apresentaram um desempenho ligeiramente superior aos dos outros grupos.

**Tabela 1**: Respostas dos participantes de São Paulo com relação à escolha da frequência relativa

| Escolha da frequência relativa para análise | Professor das séries iniciais | | Estudante da licenciatura | | Professor do Ensino Médio | | Total | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Nº | % | Nº | % | Nº | % | Nº | % |
| Porcentagem por coluna | 3 | 27,3 | 17 | 38,6 | 2 | 33,3 | 22 | 36,1 |
| Porcentagem por linha | 0 | 0,0 | 2 | 4,5 | 0 | 0,0 | 2 | 3,3 |
| Porcentagem pelo total | 8 | 72,7 | 24 | 54,5 | 4 | 66,7 | 36 | 59,0 |
| Não lembro | 0 | 0,0 | 1 | 2,3 | 0 | 0,0 | 1 | 1,6 |
| Total | 11 | 100,0 | 44 | 100,0 | 6 | 100,0 | 61 | 100,0 |

Fonte: construção dos autores.

Na Tabela 2 apresentamos os resultados da escolha da frequência relativa dos participantes da Bahia, onde a resposta adequada era a porcentagem pela linha. Nessa tabela verificamos que 25,7% optou por essa porcentagem, a tendência como em São Paulo, foi escolher a porcentagem pelo total.

**Tabela 2**: Escolha dos participantes da Bahia com relação à escolha da frequência relativa

| Qual porcentagem? | Ingressante | | Veterano | | Total | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Nº | % | Nº | % | Nº | % |
| Em branco, não respondeu | 5 | 25,0 | 4 | 26,7 | 9 | 25,7 |
| Porcentagem por coluna | 0 | 0,0 | 0 | 0,0 | 0 | 0,0 |
| Porcentagem por linha | 4 | 20,0 | 5 | 33,3 | 9 | 25,7 |
| Porcentagem pelo total | 11 | 55,0 | 6 | 40,0 | 17 | 48,6 |
| Total | 20 | 100,0 | 15 | 100,0 | 35 | 1 |

Fonte: construção dos autores.

Esses resultados nos mostram uma tendência de forma mais global, a maioria dos participantes escolheu a frequência relativa pelo total, entre um quarto e um terço dos participantes realizaram a escolha adequada.

Na Tabela 3 apresentamos as justificativas dos participantes da Bahia diante da situação "Se uma pessoa argumentar que é falsa a necessidade de cotas para a classe baixa, visto que tem mais pessoas dessa classe, com base nos dados, essa pessoa tem razão? Por quê?".

**Tabela 3**: Justificativa dos participantes da Bahia

| Respostas | Ingressante | | Veterano | | Total | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Nº | % | Nº | % | Nº | % |
| Em branco (*) | 2 | 10,0 | 4 | 26,7 | 6 | 17,1 |
| Baseado nas suas crenças | 3 | 15,0 | 3 | 20,0 | 6 | 17,1 |
| Baseado nos dados | 11 | 55,0 | 8 | 53,3 | 19 | 54,3 |
| Baseado nos dados e no contexto | 4 | 20,0 | 0 | 0,0 | 4 | 11,4 |
| Total | 20 | 100,0 | 15 | 100,0 | 35 | 100,0 |

(*) Três ingressantes que deixaram em branco a questão anterior se posicionaram diante da afirmação.

Fonte: construção dos autores.

Analisando as respostas verificamos que alguns estudantes ignoraram os dados e responderam de acordo com suas crenças, como por exemplo: "Não. Porque uma pessoa de classe baixa possui extrema dificuldade de ter acesso a transporte, ensino de qualidade e até mesmo devido à grande parte morar em lugares perigosos o prejuízo é enorme para os moradores.". Também verificamos que quatro estudantes, além de utilizar os resultados utilizaram seu conhecimento de contexto, como por exemplo: "Não. Talvez, não pelo fato de serem uma população maior, mas pela qualidade de educação que a maioria recebe.", ou "Sim e Não. Com base nesses dados sim. Mas acredito que o fornecimento de cotas é um curativo para o grande problema na Educação Básica, que o governo achou para justificar seu erro de não conseguir solucionar a ferida. Ou seja, se o problema, que é a falta de competitividade nas escolas públicas fosse solucionado não precisaria de cotas."

Todavia, um resultado aparentemente contraditório chamou nossa atenção, a maioria dos estudantes que se posicionou utilizando argumentos baseados nos dados, que calcularam a porcentagem do total, na argumentação utilizaram a porcentagem da linha, utilizando um raciocínio correto, como por exemplo: "Não. Porque aproximadamente da (classe) baixa 66% não tem ES" ou "Pois, em um total de 600 pessoas 33,33% tem acesso ao nível superior" ou "Não, porque das pessoas de classe baixa, apenas 1/3 tem acesso ao ES".

Essas justificativas mostram que os estudantes utilizam na argumentação a porcentagem da linha, de forma correta, mas quando preencheram a tabela utilizaram a porcentagem do total. Esse resultado indica que para esses estudantes não ficou explícito os tipos de frequência (linha, coluna, total) e o significado delas, o que deve servir para orientar o ensino de tabelas de dupla entrada.

Segundo Batanero et al (1996), a pesquisa psicológica mostrou que julgar associação não é uma habilidade intuitiva, pois os adultos às vezes baseiam seu julgamento em suas crenças anteriores sobre o tipo de associação que deve existir entre as variáveis estudadas, e não nas evidências empíricas apresentadas nos dados. A existência desses preconceitos sobre a natureza da relação empírica em situações problemáticas apresenta outra dificuldade para o ensino da associação estatística. Esses autores indicam a importância para realizar estudos que aprofundem o entendimento desse raciocínio, a fim de que possamos ensiná-lo na escola.

Observamos que, em tese, os cursos de licenciatura em Matemática, ofertam pelo menos uma disciplina de Estatística, na qual devem ser trabalhados além dos conceitos básicos de Estatística, próprios da Educação Básica, o teste de hipótese formal, nesse caso o teste Qui-quadrado, em que se apresenta formalmente o teste de homogeneidade e de independência, mas os resultados aqui encontrados parecem indicar que esse tipo de raciocínio não foi trabalhado na Educação Básica, nem nos cursos de licenciatura.

## 7 CONSIDERAÇÕES FINAIS:

Os resultados encontrados neste trabalho são similares aos encontrados por Konold et al (1996), Batanero et al (1996) e nos chama atenção para a necessidade de repensar o ensino de tabelas de dupla entrada, explorando o raciocínio inferencial informal. Mesmo em situações bastante intuitivas e ainda com crianças pequenas.

Por exemplo, quando o professor vai iniciar o ensino de tabelas de dupla entrada, envolvendo preferência por mascote e gênero, antes de realizar a coleta de dados, ele deve lançar perguntas às crianças, do tipo: será que as meninas preferem mais gato e os meninos cachorro? Deixar que as crianças elaborem conjecturas, façam suas previsões, e depois dos dados coletados, analisar a frequência absoluta, por linha, por coluna, pelo total. Caso haja um número muito diferente de meninos e meninas, questionar se essa comparação é razoável, ou se é preciso relativizar, acionando o raciocínio proporcional.

Se os estudantes já dominam o conceitos de porcentagem, o professor antes de proceder ao cálculo, pode instigá-los a racionarem sobre o significado de cada uma das frequências (linha, coluna, total), se o professor estiver em uma turma do 9º ano, em que já aparece o ensino de funções, variável dependente e independente, ele pode instigar a discussão sobre o tipo de relação que se estabelece entre essas duas variáveis. E ainda se já estiver ensinando probabilidade, independência de eventos, probabilidade conjunta, probabilidade marginal[5] e probabilidade total, o professor pode trabalhar esses conceitos a partir da tabela de dupla entrada.

Nesse ponto, o professor do Ensino Médio, pode levantar questões adicionais, como por exemplo, qual deve ser o tamanho da diferença entre essas proporções para que essa hipótese seja considerada plausível? Ou seja, qual deve ser a diferença entre as frequências para que essa não seja ao acaso, mas que indique a existência de possível relação entre essas variáveis. Nesse caso, o professor estará promovendo o raciocínio inferencial, acionando a generalização a partir da probabilidade observada e a noção de amostra.

O professor pode, ainda, perguntar: "E se pegarmos outra amostra, os resultados seriam os mesmos?" Nesse ponto, o professor pode lançar mão dos resultados das pesquisas eleitorais que permeiam nosso cotidiano, em que muitos institutos realizam levantamentos com resultados diferentes, mas o que se espera é que haja uma certa convergência entre esses resultados; aqui o professor pode solicitar aos estudantes que examinem o tamanho da amostra, onde foi realizada a

[5] No Brasil, tanto no PCN, quanto na BNCC não há referências à nomenclatura de probabilidades conjuntas e marginais. A probabilidade conjunta de dois eventos A e B se refere à probabilidade dos dois ocorrerem simultaneamente; já a probabilidade marginal de A, é a ocorrência de A, independente (à margem) de B. Essas probabilidades são adequadas para a análise de tabelas de dupla entrada.

pesquisa, a margem de erro, o nível de confiança, que já fazem parte do jargão da população em geral.

O professor pode mencionar ainda que no Brasil, existe uma Lei Eleitoral que obriga os institutos de pesquisa a informarem os dados técnicos da pesquisa, mas que todavia nem sempre sua divulgação respeita o uso ético das informações estatísticas, que, muitas vezes, tem como finalidade induzir as pessoas a tomadas de decisões de acordo com os seus interesses como mostra o trabalho de Cazorla e Castro (2008), reforçando a necessidade de ensinar Estatística na Educação Básica desde a perspectiva do raciocínio inferencial informal.

Reconhecemos os limites da proposta, pois é uma perspectiva desafiadora, mas acreditamos que precisamos enveredar nesse tipo de raciocínio, pois a sociedade exige pessoas mais questionadoras que sejam capazes de compreender o seu entorno e se posicionem de forma mais consciente, como defendido pelas pesquisas e estudos já citados.

Reconhecemos também os limites da pesquisa, pois o exame das hipóteses contidas em tabelas de dupla entrada exigiria estudos mais abrangentes e completos, envolvendo amostras emparelhadas, probabilidade condicional, dentre outros conceitos subjacentes, mas acreditamos que é preciso iniciar esse tipo de investigação a fim de promover um novo patamar para o ensino de Estatística na Educação Básica e, assim potencializar o uso dessa poderosa ferramenta na compreensão do mundo que nos rodeia.

## REFERÊNCIAS


ARTEAGA, P., BATANERO, C., CAÑADAS G., CONTRERAS, J. M. Las tablas y gráficos estadísticos como objetos culturales. **Números**, Islas Canárias, 76, p. 55–67, 2011.

BATANERO, C. **Didáctica de la Estadística**. Espanha: Universidade de Granada, 2001.

BATANERO, C., ESPEPA, A. GODINO, J., GREEN, D. Intuitive strategies and preconceptions about association in contingency tables. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 27, n. 2, p. 151-169, 1996.

BEN-ZVI, D.; GARFIELD, J. Statistical Literacy, Reasoning, and Thinking: Goals, Definitions, and Challenges. BEN-ZVI, D.; GARFIELD, J. (Ed.) **The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning and Thinking**... Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 2004. p. 3-15.

BIEHLER, R. On the delicate relation between informal statistical inference and formal statistical inference. In K. Makar (Ed.) **Proceedings of the Ninth International Conference on Teaching Statistics**. The Hague: ISI, 2014.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: matemática. Brasília: Ministério da Educação e Desporto/ Secretaria de Ensino Fundamental, 1997.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: matemática. Brasília: Ministério da Educação e Desporto/ Secretaria de Ensino Fundamental, 1998.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: matemática. Brasília: Ministério da Educação/ Secretaria de Educação Básica, 2002.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: Ministério da Educação, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 20/08/2020.

BUEHRING, R. S.; GRANDO, R. C. Pesquisas brasileiras em Educação Estatística Na infância: suas contribuições para o campo de investigação e para a prática. **Revemat**, Florianópolis, v.14, Edição Especial Educação Estatística, p.1-15, 2019.

CAZORLA, I. M.; CASTRO, F. C. Papel da Estatística na leitura do mundo: o letramento estatístico. **Publicatio UEPG:** Ciências Humanas, Ciências Sociais Aplicadas, Linguística, Letras e Artes, v. 16, n. 1, p. 45-53, 2008.

DEL MAS, R. C. Statistical Literacy, Reasoning, and Learning: A Commentary. **Journal of Statistics Education**, v. 10, n. 3, 2002, p. 1-10. Disponível em: http://jse.amstat.org/v10n3/delmas_discussion.html. Acesso em: 31/07/2010.

DEL MAS, R. C. A Comparison of Mathematical and Statistical Reasoning. In: BEN-ZVI, D.; GARFIELD, J. (Ed.) **The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning and Thinking**... Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 2004. p. 79–95.

ESTEVAM, E. J. G.; CYRINO, M. C. da C. T. Educação estatística e a formação de professores de matemática: cenário de pesquisas brasileiras. **Zetetiké,** Campinas, v. 22, n. 42, p. 123-149, jun/dez. 2014.

FERREIRA, V. L.; PASSOS L. F. A disciplina estatística no curso de pedagogia da USP: uma abordagem histórica. **Educ. Pesqui.**, São Paulo, v. 41, n. 2, p. 461-476, abr/jun. 2015.

GAL, I. Adults Statistical Literacy: meanings, components, responsibilities. **International Statistical Review,** v. 70, n. 1, p. 1-25, 2002.

GONÇALVES, H. J. L. Educação Estatística: Apontamentos sobre a Estatística nos cursos de Pedagogia - Magistério para séries iniciais do ensino fundamental. **Anais do IX Seminário IASI de Estatística Aplicada.** Rio de Janeiro: IMPA, 2003.

GONÇALVES, H. J. L. **A Educação Estatística no Ensino Fundamental: Discussões sobre a Práxis de Professoras que Ensinam Matemática no Interior de Goiás.** Dissertação de Mestrado. Faculdade de Educação, Universidade de Brasília, 2005.

GUIMARÃES, G.; GITIRANA, V. MARQUES, M.; CAVALCANTI, M. A Educação Estatística na educação infantil e nos anos iniciais. **Zetetiké,** Campinas, v. 17, n. 32, p. 11-28, jul/dez. 2009.

JONES, G. A.; LANGRALL, C. W.; MOONEY, E. S.; THORNTON, C. A. Models of development in statistical reasoning. In: BEN-ZVI, D.; GARFIELD, J. (Ed.) **The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning and Thinking**... Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 2004. p. 97-117.

KONOLD, C.; POLLATSEK, A.; WELL, A.; GAGNON, A. Students Analyzing Data: Research of Critical Barriers. IN: GARFIELD, J.; BURRILL, G. Research on the Role of Technology in Teaching and Learning Statistics. **Proceedings of the 1996 IASE Round Table Conference**, University of Granada, Spain, 23-27 July, 1996.

MAKAR. K.; RUBIN, A. A framework for thinking about informal Statistical inference. **Statistics Education Research Journal**, v. 8, n. 1, p. 82-105, 2009. Disponível em: http://www.stat.auckland.ac.nz/serj. Acesso em: 30/07/2020.

MANFREDO, E.; GONÇALVES, T.; LEVY, L. Formação estatística de professores que ensinam matemática nos anos iniciais da Educação Básica. **Anais da XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática**, Recife, Brasil, 2011.

PFANNKUCH, M.; WILD, C. Towards an Understanding of Statistical Thinking. BEN-ZVI, D.; GARFIELD, J. (Ed.) **The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning and Thinking**. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 2004. p. 17–46.

RODRIGUES, M. U.; SILVA, L. D. Disciplina de Estatística na matriz curricular dos cursos de Licenciatura em Matemática no Brasil. **Revemat**, Florianópolis, v.14, Edição Especial Educação Estatística, p.1-21, 2019.

SCHEEREN, V.; JUNQUEIRA, S. M. S. Educação Matemática Crítica e espaços democráticos de formação: aproximações e desafios em um contexto de escola do campo. **Hipátia: Revista Brasileira de História, Educação e Matemática**, v. 5, n. 1, p. 106-119, jun.2020. Disponível em: https://ojs.ifsp.edu.br/index.php/hipatia/article/view/1450/987. Acesso em 30/07/2020.

SILVA, M. A. A Presença da Estatística e da Probabilidade no Currículo Prescrito de Cursos de Licenciatura em Matemática: uma análise do possível descompasso entre as orientações curriculares para a Educação Básica e a formação inicial do professor de Matemática. **Bolema**, Rio Claro, v. 24, n. 40, p. 747-764, 2011.

SANTOS, D. M. N. **Análise de livros didáticos conforme as considerações do Programa Nacional do Livro Didático**:

estatística e probabilidade. 2016. 145 f. Dissertação (Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão, 2016. Disponível em: https://ri.ufs.br/handle/riufs/5217. Acesso em: 20/07/2020.

SANTOS, R. M.; BRANCHES, M. V. Problemas identificados em gráficos estatísticos publicados nos meios de comunicação. **Amazônia: Revista de Educação em Ciências e Matemáticas**, [S.l.], v. 15, n. 33, p. 201-218, jun. 2019. Disponível em: https://www.periodicos.ufpa.br/index.php/revistaamazonia/article/view/6257. Acesso em: 29/07/2020.

TEIXEIRA, P. J. M. Os PCN e o bloco Tratamento da Informação: algumas possibilidades teórico-metodológicas para a sala de aula da Educação Básica. **Remat**, Caxias do Sul, v. 2, n. 2, p. 72-91, 2016. Disponível em: https://periodicos.ifrs.edu.br/index.php/REMAT/article/view/1533/1310. Acesso em: 29/07/2020.

VIALI, L. The teaching of statistics and probability in mathematics undergraduate courses. In C. Reading (Ed.) **Proceedings of the Eighth International Conference on Teaching Statistics** *(ICOTS-8)*, Ljubljana, Slovenia. Voorburg. The Netherlands: International Statistical Institute, 2010.

VIALI, L.; CURY, H. N. Professores de matemática em formação continuada: uma análise de erros em conteúdos de Probabilidade. **EM TEIA** - Revista de Educação Matemática e Tecnológica Ibero-americana*,* v.1, n. 1, p. 1-23, 2011.

VEAUX, R. D.; COLLEMAN, W.; VELLEMAN, P. F. **Math is Music; Statistics is Literature** – or Why are there no six year old Novelists, 2008. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/280114347_Math_is_Music_Statistics_is_Literature. Acesso em: 30/08/2020.

WALLMAN, K. K. Enhancing statistical literacy: enriching our society. **Journal of the American Statistical Association,** v. 88, n. 421, p. 1-8, mar.1993.

WILD, C. J.; PFANNKUCH, M. Statistical thinking in empirical enquiry. **International Statistical Review**, v. 67, p. 223-265, 1999.

**Submetido em setembro de 2020.**
**Aprovado em novembro de 2020.**

# CONHECIMENTOS MOBILIZADOS POR ALUNOS AO DESENVOLVER UMA ATIVIDADE DE MODELAGEM MATEMÁTICA SOBRE CONSTRUÇÃO DE TELHADOS

## KNOWLEDGE MOBILIZED BY STUDENTS WHEN DEVELOPING A MATHEMATICAL MODELING ACTIVITY ON ROOF CONSTRUCTION

SILVA, Karina Alessandra Pessoa da[1]

BORSSOI, Adriana Helena[2]

SILVA, Rodrigo Tavares da[3]

**RESUMO**

Neste artigo apresentamos resultados de uma pesquisa cujo objetivo foi evidenciar conhecimentos mobilizados por alunos ao desenvolver atividades de modelagem matemática. Para isso, fundamentamo-nos no aporte teórico da modelagem matemática entendida como alternativa pedagógica em que conhecimentos matemáticos podem ser evidenciados. Analisamos uma atividade desenvolvida por três grupos de alunos de um curso técnico em Informática em nível médio. Por meio de análise qualitativa de cunho interpretativo das produções em três momentos do desenvolvimento das atividades de modelagem, além de conhecimentos matemáticos, evidenciamos que foram mobilizados conhecimentos de recursos tecnológicos e conhecimentos da área de construção civil. Essa mobilização está associada à situação-problema, ao interesse dos alunos e ao planejamento do professor com a atividade de modelagem matemática.

**Palavras-chave:** Educação Matemática. Modelagem Matemática. Mobilização de Conhecimentos. Trigonometria.

**ABSTRACT**

In this paper we present results of a survey with the objective to emphasize the knowledge mobilization of students' in mathematical modeling activities. For this, we base ourselves on the theoretical contribution of mathematical modeling understood as a pedagogical alternative in which mathematical knowledge can be identified. We analyzed an activity developed by three groups of students from a technical high school course in Computer Science. Through a qualitative analysis of the interpretative nature of the productions in three moments of the development of the modeling activities, in addition to mathematical knowledge, we show that knowledge of technological resources and knowledge of the civil construction area were mobilized. This mobilization is associated with the problem situation, the interest of the students and the planning of the teacher with the mathematical modeling activity.

**Keywords:** Mathematic Education. Mathematical Modeling. Knowledge Mobilization. Trigonometry.

## 1 INTRODUÇÃO

As reflexões para as quais lançamos olhar neste artigo são decorrentes de investigação realizada no âmbito do Grupo de Estudos e Pesquisa em Modelagem Matemática, Investigação Matemática

[1] Doutora em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL). Docente da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), Londrina, Paraná, Brasil. Endereço eletrônico: karinasilva@utfpr.edu.br.

[2] Doutora Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL). Docente da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), Londrina, Paraná, Brasil. Endereço eletrônico: adrianaborssoi@utfpr.edu.br.

[3] Mestre em Ensino de Matemática pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Endereço eletrônico: rodrigo.tavares.matematica@gmail.com.

e Tecnologia (GEPMIT[4]), vinculado ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Tal investigação está inserida em um contexto de estudo e pesquisa de um dos autores, docente em formação continuada em um mestrado profissional, que experienciou, na sala de aula em que atuava, a Modelagem Matemática como alternativa pedagógica (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012).

Segundo Almeida e Ferruzzi (2011, p. 3), "uma atividade de Modelagem Matemática abarca a atividade propriamente dita, um conjunto de ações e um conjunto de operações", com vistas à solução de um problema.

O contexto sobre o qual emergem nossas considerações, neste artigo, é caracterizado pelo trabalho em grupos, em torno de uma atividade encaminhada pelo professor. O intuito era que os alunos se colocassem em ação para o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática a partir de uma situação-problema envolvendo a construção de telhados. Abordagens relativas à construção civil no que concernem construções de telhados e maquetes de casas têm sido empreendidas em relatos de Biembengut e Hein (2003) e Biembengut (2004). Biembengut (2004), ao desenvolver seu projeto com alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental, afirmou que "poucas vezes os alunos fizeram anotações em seus cadernos", isso porque a "qualidade dos trabalhos que os alunos realizavam, os questionamentos e o interesse foram suficientes para que os aprovassem, sem qualquer restrição" (BIEMBENGUT, 2004, p. 46).

Neste sentido, a intenção era que conhecimentos matemáticos que os alunos possuíam pudessem ser identificados para resolver o problema, ou mesmo que conceitos e procedimentos matemáticos novos pudessem ser aprendidos (BORSSOI; ALMEIDA, 2004). Assim, neste artigo consideramos como objetivo *evidenciar conhecimentos mobilizados por alunos ao desenvolverem uma atividade de modelagem matemática que envolve a construção de telhados*.

Tal objetivo se apresentou em decorrência dos encaminhamentos dos alunos e das reflexões do docente que foi estimulado, no âmbito do grupo de pesquisa, a experienciar a modelagem como alternativa pedagógica. Esta iniciativa está alinhada com Blum e Borromeo Ferri (2016), para os quais a modelagem deve ter um papel importante na formação de professores tanto em nível de formação inicial quanto da formação em serviço. Segundo os autores, é crucial ter professores com conhecimento sobre o fazer modelagem para que esta seja acessível aos estudantes nos diferentes níveis de ensino. No mesmo sentido, Gould (2016, p. 185) afirma que, "para que os alunos modelem com eficácia, seus professores precisam entender a modelagem matemática". A Modelagem Matemática, uma tendência da Educação Matemática, de acordo com Cirillo *et al.* (2016, p. 5), "[...] vincula a matemática e questões autênticas do mundo real". Neste contexto, "[...] a tarefa principal é traduzir um problema em uma forma matemática" (CIRILLO *et al.*, 2016, p. 5).

Estes e outros autores indicam que esta tradução é a essência da Modelagem Matemática e consiste em esclarecer o problema, identificar variáveis, formular hipóteses, fazer aproximações, obter um modelo matemático e relatar as conclusões sobre o problema, baseadas nesse modelo.

Nesse sentido, entendemos que "Um modelo matemático é uma representação de um sistema ou cenário que é usado para ganhar compreensão qualitativa e/ou quantitativa de algum problema do mundo real" (BLISS; FOWLER; GALLUZO, 2014 *apud* CIRILLO *et al.*, 2016, p. 9). Tal representação pode "incluir desde símbolos, diagramas e gráficos, até expressões algébricas ou geométricas" (ALMEIDA; SILVA, 2017, p. 209) cuja finalidade possibilita descrever, explicar, interpretar ou prever o comportamento do fenômeno abordado no problema.

[4] https://sites.google.com/view/gepmit.

Considerando os empreendimentos que a obtenção do modelo matemático possibilita, o uso da Modelagem Matemática em sala de aula pode ser encaminhado seguindo diferentes configurações. Isso está atrelado à adequação do encaminhamento com as necessidades de aprendizagem e com o perfil dos envolvidos (professor e alunos).

Quando pessoas diferentes olham para a mesma atividade de modelagem, elas podem ter diferentes perspectivas para a resolução e, com isso, podem surgir várias soluções alternativas e válidas, por isso devem ser descritas como "uma solução" em vez de "a solução" (CIRILLO *et al.*, 2016).

Santos e Bisognin (2007) argumentam que fazer uso da Modelagem Matemática em sala de aula com maior frequência possa promover o interesse, a vontade de aprender, ou seja, a promoção do elo entre o ensino e a aprendizagem, percebendo a aplicabilidade e explorações que podem ser feitas. Existem pesquisas que versam sobre o uso da modelagem em aulas de Matemática em diferentes níveis de ensino, tanto em aulas regulares (ALMEIDA; SILVA, 2010, ALMEIDA; TORTOLA, 2014, ALMEIDA; SILVA, 2017, BORSSOI, ALMEIDA, 2004, CIRILLO *et at.*, 2016, SILVA, 2017), quanto em momentos extraclasse (ARAÚJO; CAMPOS, 2015, BLUM; BORROMEO FERRI, 2016; GEIGER; ÄRLEBÄCK; FREJD, 2016, SCHROETTER *et al.*, 2016).

No entanto, os professores têm que tomar cuidado para que os alunos estejam ativamente envolvidos com a atividade, que estejam em ação, pois, segundo Blum e Borromeo Ferri (2016, p. 71) "[...] a modelagem não é um esporte de espectador e só pode ser aprendida envolvendo-se em atividades de modelagem". Para os autores, deve haver um equilíbrio permanente entre a orientação do professor e a independência dos alunos e "para poder reagir de forma adaptativa, o professor deve planejar a atividade detalhadamente, incluindo uma antecipação das possíveis reações iniciais, dificuldades e respostas dos alunos" (BLUM; BORROMEO FERRI, 2016, p. 71).

Neste sentido, o professor (um dos autores deste artigo) planejou a atividade a ser desenvolvida com os alunos de um curso técnico integrado em Informática em nível médio, desencadeando atividades de modelagem matemática pelos diferentes grupos.

Para apresentar reflexões quanto ao objetivo da pesquisa, na seção a seguir destacamos os aspectos metodológicos e descrição dos encaminhamentos dos grupos analisados. Em seguida, considerando que os encaminhamentos dos grupos se configuram como atividade de modelagem matemática, o quadro teórico sobre mobilização de conhecimento é apresentado à medida que realizamos a análise da produção dos alunos. Finalizamos com algumas considerações sobre a pesquisa e as referências citadas.

## 2 ASPECTOS METODOLÓGICOS E A ATIVIDADE DE MODELAGEM MATEMÁTICA

As informações que subsidiam nossas análises e considerações são decorrentes de registros da produção de 36 alunos, reunidos em seis grupos, cuja constituição foi prerrogativa deles, que cursavam o 2º ano do curso de Educação Profissional Técnico em Informática em nível médio de uma instituição Federal de ensino, ao desenvolverem uma atividade de modelagem matemática na disciplina de Matemática, durante o primeiro semestre de 2017.

No decorrer dos quatro anos do curso, além das disciplinas básicas para o nível médio, são oferecidas disciplinas com viés tecnológico, também nominadas como "técnicas", que atendem a área da informática.

Os estudantes do 2º ano são oriundos do próprio município proponente do curso Técnico em Informática e de outras cidades da região. O intuito do curso é contribuir, por meio da Educação, para o desenvolvimento socioeconômico da região, cuja economia gira em torno da agricultura, que é gerenciada por cooperativas e empresas. Segundo documento institucional, para atender esse objetivo e compromisso, o curso busca formar profissionais capazes de desenvolver atividades de caráter técnico e profissional na área da informática, bem como, proporcionar um pensamento sintético, crítico e reflexivo, capaz de interagir com o mundo de trabalho.

A ementa da disciplina de Matemática do referido curso contempla ensino de trigonometria, estudo de relações em triângulos quaisquer, matrizes, determinantes, sistemas lineares e matemática financeira, com carga horária de 111 horas/aula ao ano, distribuída em 3 horas/aula semanais.

Os registros produzidos pelos grupos de alunos compreendem manuscritos, arquivos eletrônicos, arquivo de apresentação do trabalho e uma maquete, além disso foram realizadas gravações de áudios das aulas. Os alunos foram esclarecidos quanto à investigação realizada e assinaram um termo de consentimento. A análise empreendida é de cunho qualitativo e interpretativo pautada nas considerações sobre Modelagem Matemática e mobilização de conhecimentos.

Ao nos referirmos aos grupos de alunos e seus registros, usamos a denominação Grupo n (entre 1 e 6). Quanto aos alunos, são referenciados no corpo do texto com a denominação Aluno(a) m (com m entre 1 e 36). O docente será referenciado como Professor.

A atividade desenvolvida pelos alunos em sala de aula, na segunda quinzena do mês de junho, se deu em três momentos: (i) familiarização com a situação-problema (14/06/2017); (ii) desenvolvimento e questionamentos (19/06/2017); (iii) apresentação dos resultados (21/06/2017). Parte das atividades foi desenvolvida em horário extraclasse, utilizando as dependências da instituição – laboratórios de informática com acesso à internet e biblioteca, que conta com salas de estudo. Além disso, o professor orientou o encaminhamento das atividades em horários de permanência ou quando solicitado pelos grupos.

No primeiro momento houve uma discussão inicial com duração de uma hora/aula, realizada após a conclusão dos estudos sobre trigonometria (semelhanças de triângulos, funções, equações, inequações, tabela trigonométrica, relações fundamentais e gráficos das funções seno, cosseno, tangente, secante, cossecante e cotangente).

Com intuito de investigar a percepção acerca da importância da trigonometria, os alunos foram questionados pelo professor sobre aplicações desses estudos, conforme excertos de diálogos, transcritos a seguir:

> Aluno 1: Para medir a altura de um prédio.
>
> Aluno 2: Para medir a altura de uma árvore.
>
> Aluna 3: Eu sei que tem como medir a altura de um prédio com um prato de água... mas agora não lembro como... acabei lendo uma vez.
>
> [...]
>
> Aluna 4: Para construção de casa...
>
> Professor: Onde você identifica a trigonometria na construção de casa?
>
> Aluna 4: Quando faz a escada... ou então no telhado...

Nesse momento, conforme os objetivos do professor, foram realizadas intervenções sobre uso da trigonometria no telhado, visto que a aluna mencionou elementos importantes que estavam relacionados com a atividade que o professor pretendia desenvolver. Assim dando continuidade à discussão:

> Professor: Sobre o telhado, o que você pode identificar de Trigonometria?
>
> Aluna 4: Ah professor, eu sei que os telhados têm alguns que são mais altos e outros mais baixos ...
>
> Professor: Mas por que essa diferença?
>
> Aluna 4: É que na neve é preciso ser mais alto para a neve escorregar... aqui (no Brasil) não é preciso...
>
> Professor: Mas eu poderia construir um telhado mais alto aqui no Brasil?
>
> Aluna 5: Acho que pode.

Nessa mesma aula (do primeiro momento), os alunos receberam a situação a ser investigada, como na Figura 1, para se inteirar da mesma, bem como o problema a ser investigado. Para isso, foi sugerido um modelo de telhado que poderia ser utilizado pelos grupos, assim como, informações sobre a relação de inclinação para um único tipo de telha e a quantidade por metro quadrado, fornecido por diferentes fabricantes.

Os dados apresentados na Figura 1 poderiam subsidiar os alunos para o desenvolvimento da atividade, o que não impedia que os grupos buscassem outros modelos de telhados e escolhessem outro tipo de telha para apresentar uma solução para o problema: *Qual o custo para realizar a construção do telhado de uma casa?*

Mesmo que a situação-problema e o problema tenham sido definidos pelo professor, as discussões que anteciparam o desenvolvimento da atividade, de certa forma, envolveram os alunos de tal maneira que esses passaram “a exercer um papel ativo e a lidar com um tema de seu próprio interesse” (HERMINIO; BORBA, 2010, p. 113).

No segundo momento, que teve duração de duas horas/aula, os seis grupos levaram para a sala de aula informações para o tipo de telhado que estavam considerando: a telha escolhida e um esboço dos cálculos já realizados. O Quadro 1 traz as diferentes opções de telhados, bem como resultados iniciais do desenvolvimento das atividades de modelagem.

Esse momento foi destinado aos alunos apresentarem os encaminhamentos para desenvolver as atividades de modelagem, bem como às intervenções do professor. Conhecer os encaminhamentos possibilita que intervenções adaptativas sejam feitas no sentido de “ajudar o aluno a superar uma dificuldade e continuar seu trabalho de forma independente caso outro tipo de suporte não tenha ajudado” (BLUM; BORROMEO FERRI, 2016, p. 71). Segundo os autores, para “poder reagir de forma adaptativa, o professor deve planejar a aula detalhadamente, incluindo uma antecipação das possíveis reações iniciais, dificuldades e respostas dos alunos” (BLUM; BORROMEO FERRI, 2016, p. 71). Como já conhecia a situação-problema, as intervenções adaptativas foram antecipadas pelo professor com o intuito de “validar” os encaminhamentos dos alunos.

O terceiro momento, com duração de duas horas/aula, foi dedicado à apresentação das atividades de modelagem pelos grupos, com a comunicação da solução dada ao problema: *Qual o custo para realizar a construção do telhado de uma casa?* A comunicação “implica, essencialmente, em desenvolver uma argumentação que possa convencer aos próprios modeladores e àqueles cujos resultados são acessíveis que a solução apresentada é razoável e consistente” (ALMEIDA; VERTUAN, 2014, p. 7-8).

Considerando nosso objetivo de investigação – *evidenciar conhecimentos mobilizados por alunos ao desenvolverem uma atividade de modelagem matemática* –, bem como os alcances e propósitos desta pesquisa, descrevemos e analisamos três atividades, correspondentes ao Grupo

3, ao Grupo 5 e ao Grupo 6. Esses três grupos foram escolhidos devido às diferentes estratégias de representação usadas pelos mesmos para desenvolver a atividade e apresentar uma solução para o problema que se propuseram a investigar.

**Figura 1:** Informações apresentadas aos alunos

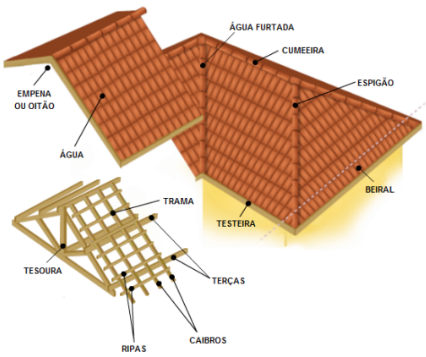
**CONSTRUÇÃO DE TELHADOS**

Quando o assunto é construção civil, edificação de casas residenciais ou até mesmo de prédios, um dos componentes mais importantes e que mais precisam de atenção é o telhado.

O telhado tem a finalidade de proteger tanto das chuvas, como dos raios de sol e adversidades do clima. Certamente, quando o assunto é o tal telhado ainda existem várias dúvidas e inseguranças que circundam até mesmo com as pessoas mais experientes na área. Sabemos que o telhado é uma parte indispensável para qualquer abrigo, por isso, a escolha do telhado mais apropriado para cada situação, o tipo de telha, seu formato e preço devem ser levados em consideração. O objetivo é que seja evitado todo tipo de patologias em sua casa, como, por exemplo, goteiras, umidade, vento, entrada de ar e frio.

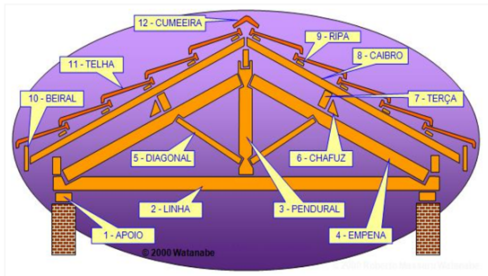
Em um telhado, deve-se realizar algumas opções para que seja feito um esboço (projeto) do que será construído. A quantidade de águas (caimentos), tipo de madeiramento necessário, se entre o telhado vai abrigar a caixa de água, e ainda o tipo de telha.

Esquema de montagem e das peças de um telhado colonial.




Fonte: Disponível em: http://engenhariae.com.br/editorial/colunas/conheca-as-partes-que-formam-um-telhado/

Esquema das peças de um telhado.




Fonte: Disponível em: http://www.ebanataw.com.br/roberto/telhado/index.php

**Quadro:** Caimento mínimo por diferentes fabricantes para a telha francesa

| Fabricante | Quantidade de telhas por metro quadrado | Peso de uma telha (seca) | Dimensões | Caimento mínimo do telhado |
|---|---|---|---|---|
| Fabricante 1 | 18 | 2550 | 38 X 22 | 30% |
| Fabricante 2 | 16 | 2700 | 40 X 24 | 30% |
| Fabricante 3 | 16 | 2600 | 40 X 25 | 30% |
| Fabricante 4 | 16 | 2800 | 38 X 24 | 45% |
| Fabricante 5 | 17 | 2400 | 40 X 22 | 36% |
| Fabricante 6 | 17 | 2500 | 40 X 22 | 50% |

**PROBLEMA:** Qual o custo para realizar a construção do telhado de uma casa?

Fonte: Arquivo do professor.

**Quadro 1:** Diferentes telhados escolhidos pelos grupos e encaminhamentos iniciais

| Grupo | Tipo de telhado | Resultados iniciais |
|---|---|---|
| 1 | Chalé (duas águas) | Realizaram os cálculos, planta baixa e apresentação em *slides*. |
| 2 | Telhado com duas águas | Registros escritos dos cálculos e uma casa de boneca, feita de madeira. |
| 3 | | Trouxeram os cálculos e custos já anotados, e ainda, projeto da casa no aplicativo *Minecraft* e apresentação em *slides* dos resultados. |
| 4 | | Trouxeram os cálculos e o esboço de todo madeiramento do telhado representado por uma imagem no papel. |
| 5 | | Desenvolveram cálculos e apresentaram um esboço do madeiramento em papel. |
| 6 | Telhado em L | Trouxeram os cálculos feitos no papel, o projeto do telhado feito no aplicativo Cinema 4D e uma maquete. |

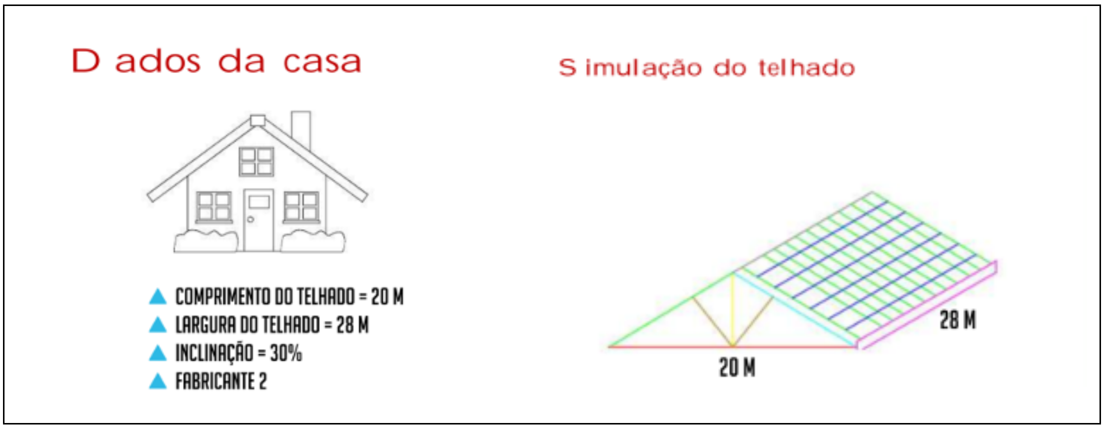
Fonte: os autores.

### 2.1 Atividade de modelagem do grupo 3

O Grupo 3, constituído por sete alunos – Aluno 2, Aluna 3, Aluna 4, Aluno 6, Aluno 7, Aluno 8, Aluno 10 –, optou pelo telhado de duas águas, que é convencional em grande parte das casas. As dimensões consideradas para o desenvolvimento da atividade de modelagem foram de uma casa com 20 metros (de frente) por 28 metros (de profundidade). A escolha do tipo de telhado e as dimensões consideradas pelo grupo correspondem às hipóteses formuladas para encaminhar a resolução do problema.

As medidas não são comuns para uma casa, mas o grupo argumentou que pensaram numa casa com mais espaço e cômodos. Na Figura 2, que corresponde aos *slides* elaborados pelos alunos por meio do *software Power Point*, são apresentadas as dimensões, a inclinação adotada e a telha escolhida (fabricante 2), bem como uma simulação do telhado feita pelos alunos.

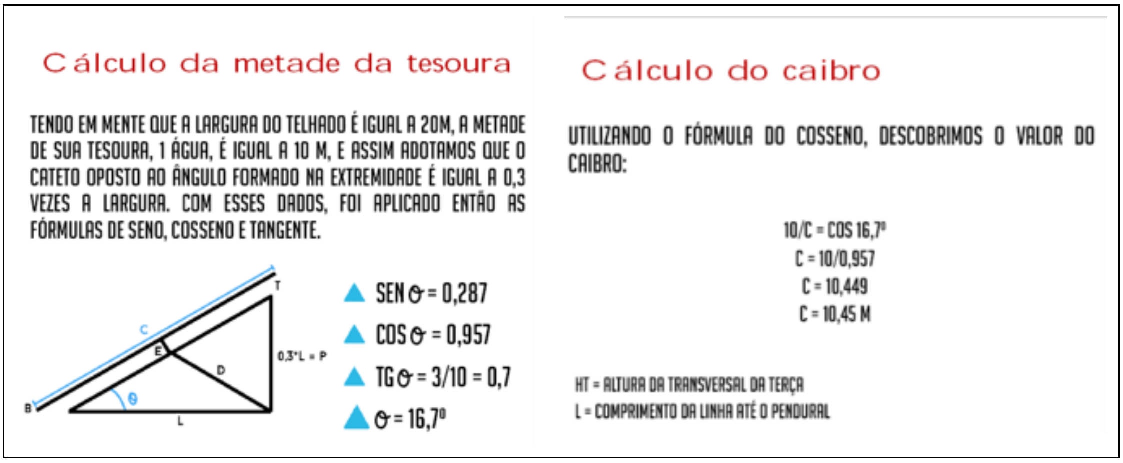
**Figura 2:** Informações sobre o telhado do Grupo 3




Fonte: *Slides* formulados pelo Grupo 3.

Diante das informações consideradas para o cálculo do custo do telhado, os alunos determinaram o ângulo de inclinação da tesoura (16,7º) – que compreende o madeiramento que sustenta o peso das telhas – e, utilizando relações trigonométricas, conforme mostra a Figura 3, determinaram a medida de cada caibro (10,45m) que sustentaria as telhas do referido telhado.

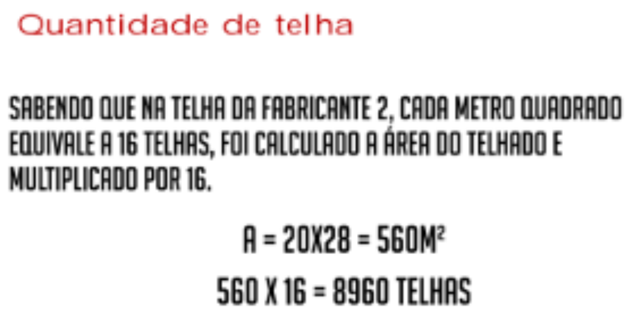
**Figura 3:** Informações sobre os cálculos para a obtenção da medida do caibro do Grupo 3




Fonte: *Slides* formulados pelo Grupo 3.

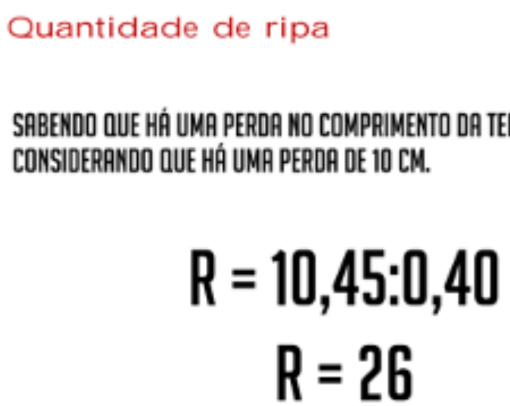
O número de telhas foi determinado considerando a área ocupada pelo telhado (560 m²) e o número indicado pelo fabricante 2 (16 telhas por metro quadrado), obtendo o total de 8960 telhas, conforme mostra a Figura 4. Para determinar a quantidade de ripas utilizadas na construção do telhado, o grupo considerou que o espaçamento entre as mesmas ao longo do caibro seria de 40 cm e obteve 26 ripas (Figura 5).

**Figura 4:** Cálculo do número de telhas




Fonte: *Slide* apresentado pelo Grupo 3.

**Figura 5:** Cálculo da quant. de ripas

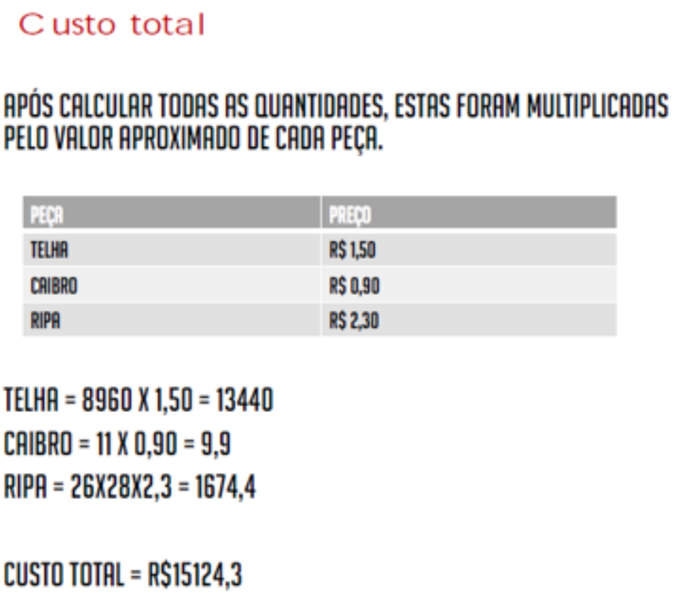



Fonte: *Slide* apresentado pelo Grupo 3

O material considerado pelo grupo na construção do telhado – telhas, caibros e ripas – foi organizado num quadro (Figura 6), assim como os custos unitários, obtidos pelos alunos em lojas da cidade. A solução do problema foi que o custo para a construção do telhado seria de R$15124,30.

Com o intuito de visualizar o protótipo da casa com as dimensões escolhidas, o grupo lançou mão do recurso digital *Minecraft* (https://minecraft.net/pt-br/) para a representação em 3D (Figura 7). O *Minecraft* é um jogo que permite construir edificações ou mesmo cidades.

**Figura 6:** Valores calculados pelo Grupo 3




Fonte: *Slides* formulados pelo Grupo 3.

Com o intuito de visualizar o protótipo da casa com as dimensões escolhidas, o grupo lançou mão do recurso digital *Minecraft* (https://minecraft.net/pt-br/) para a representação em 3D (Figura 7). O *Minecraft* é um jogo que permite construir edificações ou mesmo cidades.

**Figura 7:** Simulação realizada a partir do aplicativo *Minecraft*

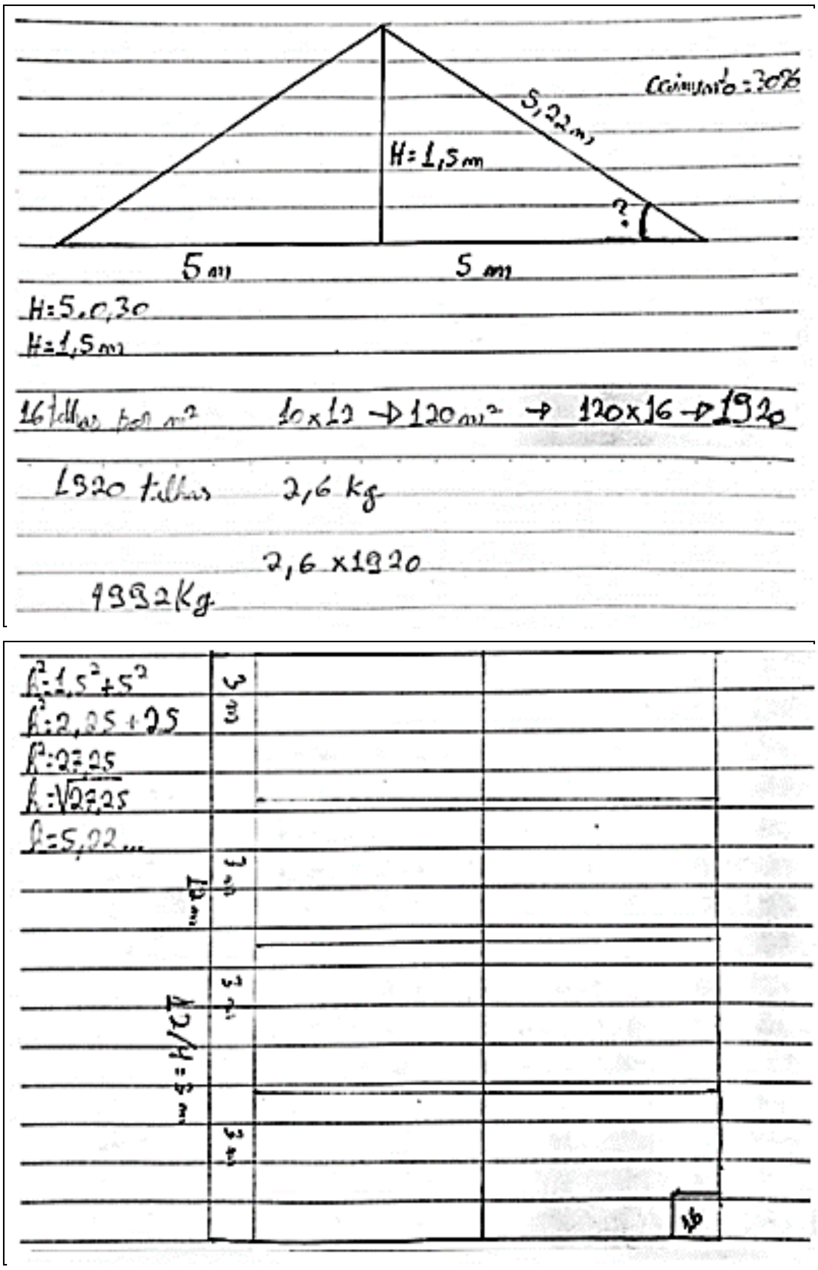

Fonte: *Slides* formulados pelo grupo 3.

## 2.2 Atividade de modelagem do grupo 5

Para iniciar o desenvolvimento da atividade, um dos três integrantes do Grupo 5[5] – Aluna 5, Aluno 13, Aluno 14 – fez contato com um profissional da área de Engenharia Civil. Levando em conta as informações obtidas com o profissional, o grupo decidiu, por hipótese, pelo telhado de duas águas, com um caimento de telhado de 30%, considerando as dimensões de 10 metros por 12 metros.

Com essas informações, fizeram um esboço da tesoura e realizaram os cálculos do madeiramento, utilizando relações trigonométricas no triângulo retângulo. A Figura 8 mostra um primeiro esboço feito pelo grupo.

**Figura 8:** Esboço do Grupo 5 para o telhado



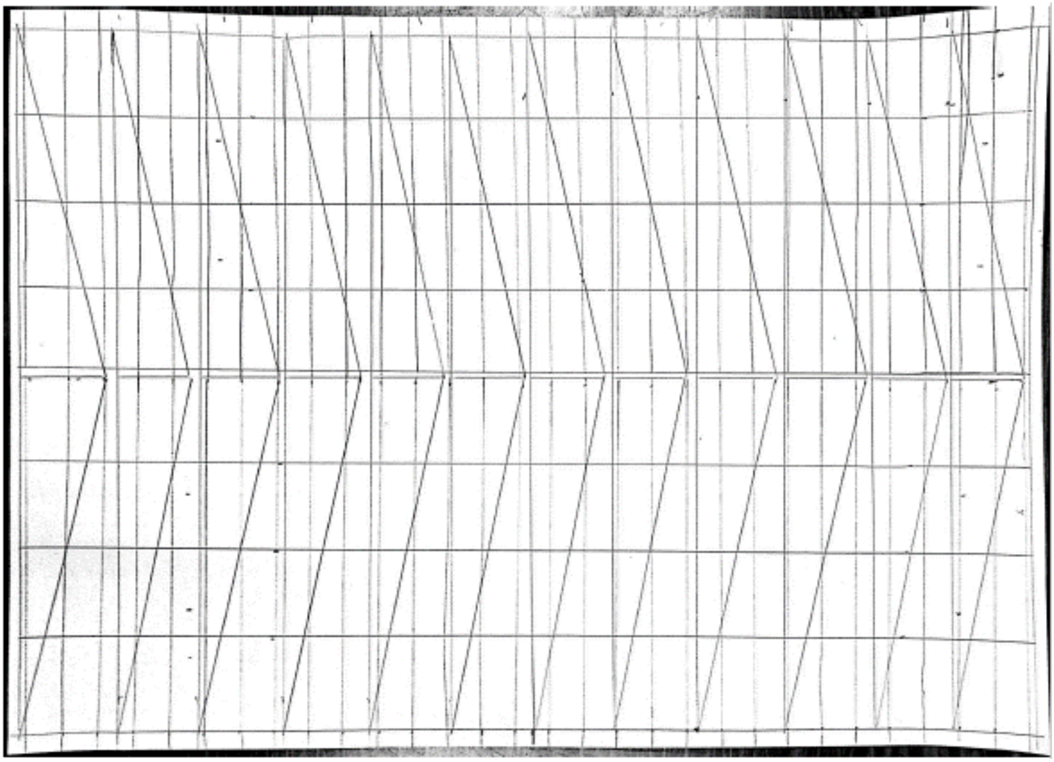

Fonte: Recortes de registros dos alunos.

[5] No início, o Grupo 5 era constituído por cinco integrantes, no entanto, no decorrer do período de desenvolvimento da atividade, duas alunas pediram transferência e deixaram de cursar as aulas.

Os resultados indicaram que seriam necessárias 1920 telhas. E como cada telha tem 2,6 kg o telhado teria 4992 kg. Porém, esse resultado não considerou a área a ser coberta pelas telhas, a qual deveria ser obtida levando em conta a inclinação que foi sugerida pelo fabricante, ou seja, não seria a mesma dimensão de 10 por 12 metros para a casa.

Desse modo, após questionamentos do professor, quanto às informações consideradas, o grupo sentiu necessidade de revisar seus procedimentos e optaram por fazer um novo traçado com todo o madeiramento necessário para o telhado escolhido (como mostra a Figura 9). Com isso, perceberam os espaçamentos, assim como, a posição das tesouras, das terças e das vigas.

**Figura 9:** Esboço do madeiramento do telhado escolhido pelo Grupo 5



Fonte: Registros dos alunos.

O cálculo da quantidade de telhas levou em conta que, para cada metro quadrado, são necessárias 16 telhas (fabricante 3), cada telha tem uma massa aproximada de 2,6 kg, com um caimento sugerido de 30% para o telhado.

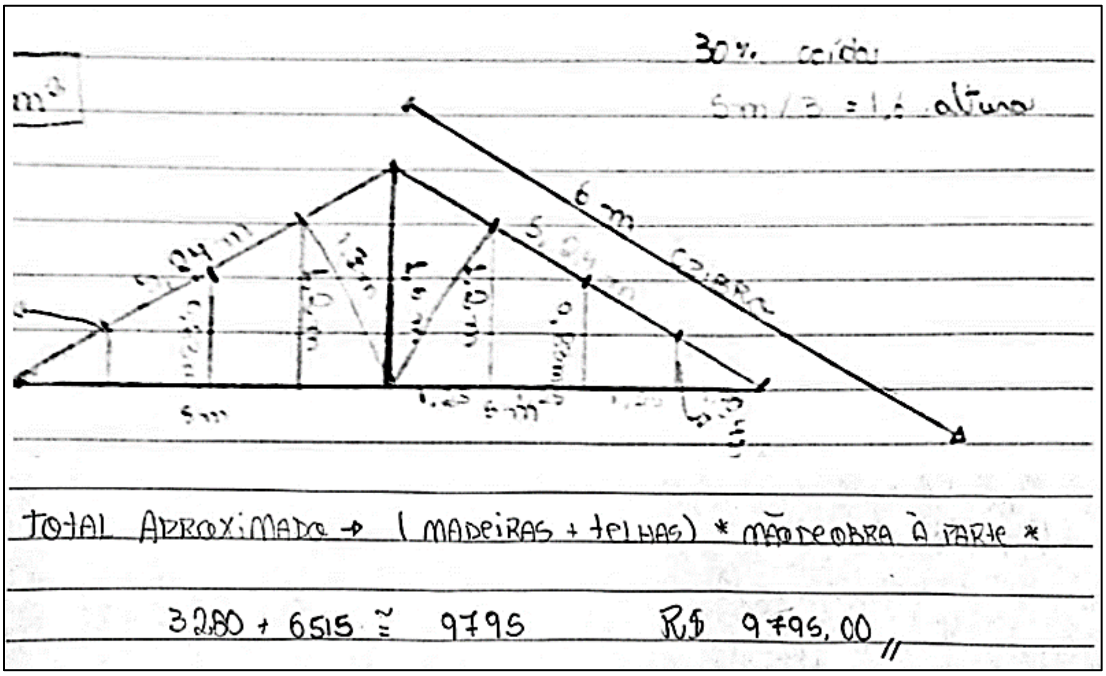
Outra informação que o grupo considerou foi o percentual de telhas que podem vir quebradas durante o transporte (consideraram em média 3%, a partir de informações obtidas com o profissional). Nesse sentido, foi feito esse acréscimo ao total calculado, além disso, o grupo considerou a cumeeira como parte integrante do telhado. A Figura 10 traz recortes dos registros dos alunos em que constam valores obtidos por meio do cálculo da quantidade de madeira e de telhas.

A quantidade necessária de madeira para o telhado foi registrada pelo grupo como na Figura 10, mas, para facilitar a visualização organizamos essas informações no Quadro 2.

O modelo de telha considerado tem um custo unitário de R$ 2,50. A demanda é 2605 unidades para cobrir todo telhado, com custo de aproximadamente R$ 6515,00.

Como mostra a Figura 10, o custo total de R$ 9795,00 foi estimado pelo grupo como um valor aproximado, visto que era possível ocorrer perdas e desperdício de material durante a obra e, além disso, o valor calculado não incluía mão de obra.

**Figura 10:** Custos dos componentes do telhado escolhido pelo Grupo 5




Fonte: Recortes de registros dos alunos.

**Quadro 2:** Resultados sobre os custos obtidos pelo Grupo 5

| Madeira | Preço por metro | Quantidade necessária (metros) | Custo (R$) |
|---|---|---|---|
| Vigas | R$ 5,00 | 336 | R$ 1680,00 |
| Caibros | R$ 2,40 | 324 | R$ 777,60 |
| Ripa | R$ 1,30 | 520 | R$ 676,00 |
| Meia tábua | R$ 3,00 | 48 | R$144,00 |
| **TOTAL** | | | **R$ 3280,00** |

Fonte: Organizado pelos autores a partir dos registros dos alunos

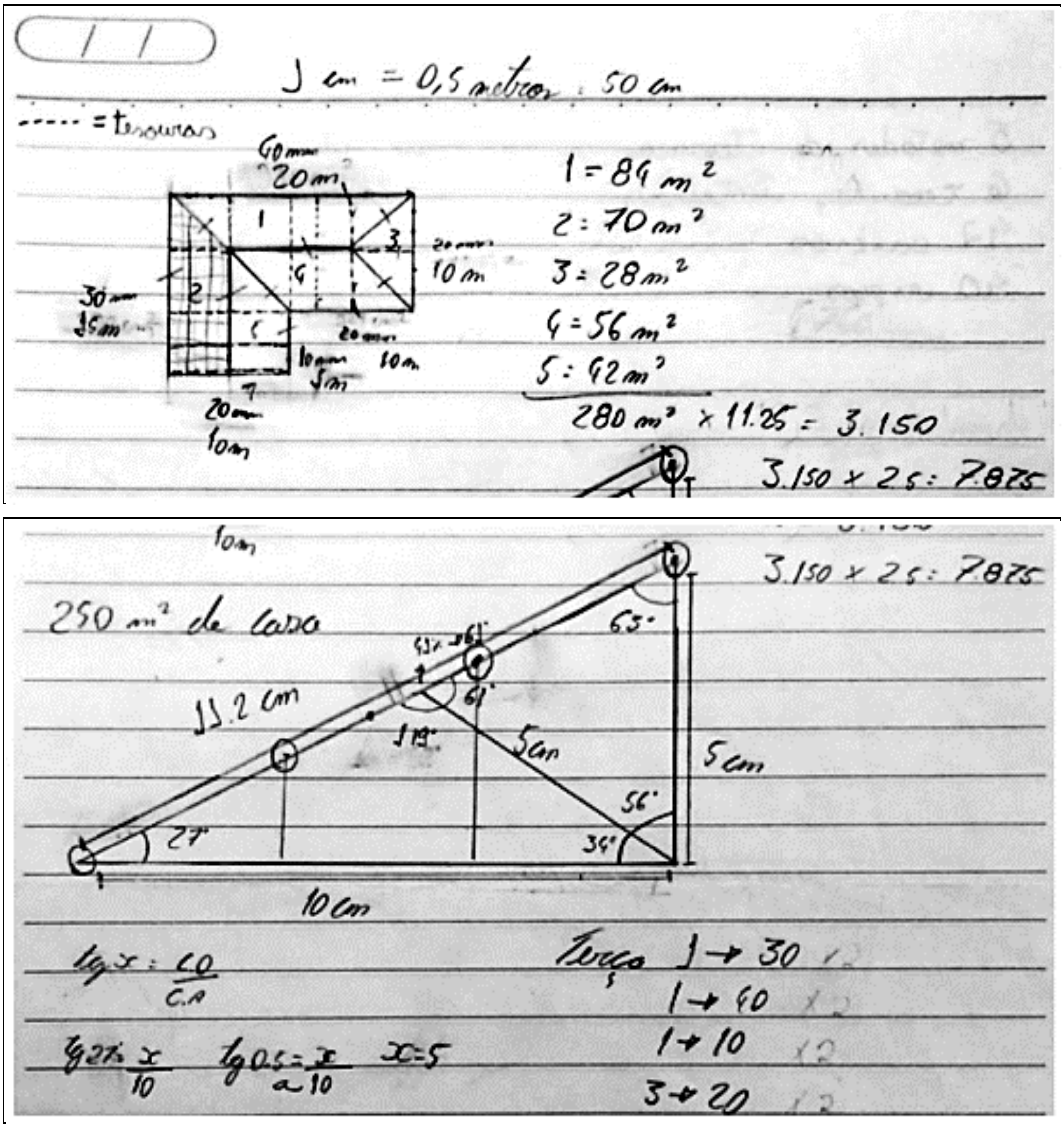
## 2.3 Atividade de modelagem do grupo 6

No segundo momento da atividade, os quatro integrantes do Grupo 6 – Aluno 1, Aluno 9, Aluno 11, Aluno 12 – trouxeram anotações com cálculos sobre a tesoura necessária para sustentar as telhas, considerando como hipótese os dados fornecidos pelo fabricante 6 e um modelo de telhado em formato de “L”.

No cálculo do número de telhas, o grupo dividiu o telhado em regiões, que totalizou 3150 m². Considerando o caimento adotado, alguns conceitos de trigonometria foram necessários: relações trigonométricas do triângulo retângulo para o cálculo do caibro; relações para triângulos quaisquer para obter a empena (Figura 11).

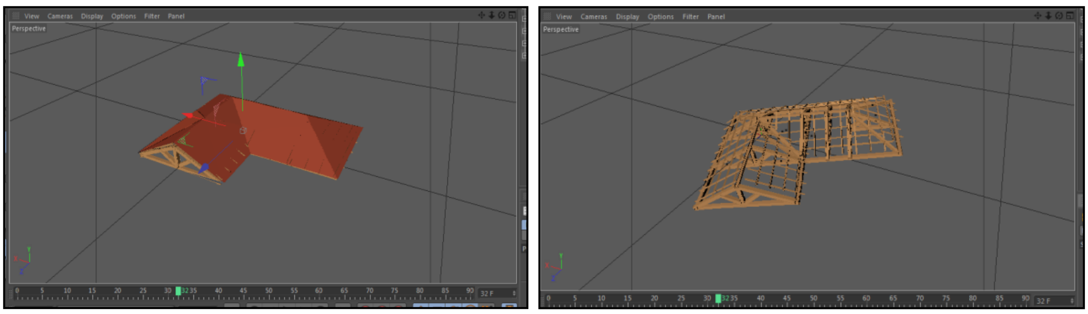
Para visualizar como estariam dispostos os elementos do telhado (trama, cumeeira, fundo e o telhado escolhido) o Grupo 6 fez uma simulação utilizando o aplicativo *Cinema 4D* – programa computacional multiplataforma desenvolvido para modelagem 3D –. Com a simulação foi possível visualizar cada elemento do telhado, esconder os demais e rotacionar o telhado (Figura 12).

**Figura 11:** Cálculos iniciais do telhado e madeiramento do Grupo 6




Fonte: Recortes de registros dos alunos

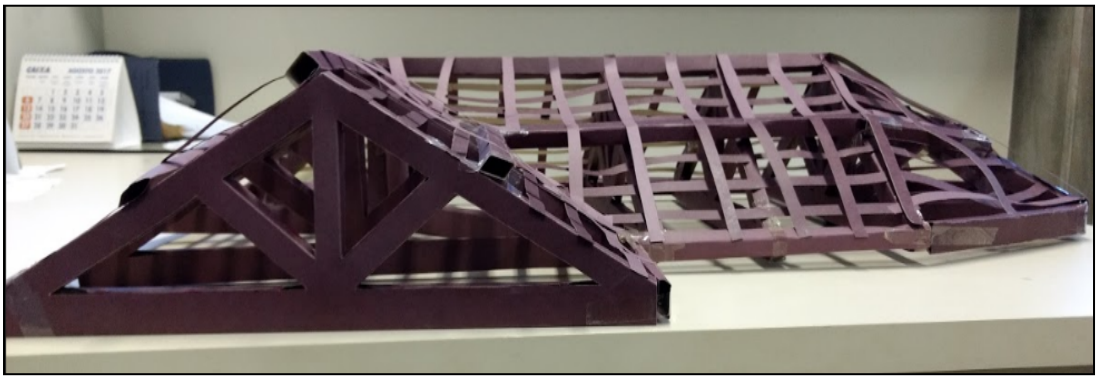
**Figura 12:** Projeção em 3D, feita no aplicativo Cinema 4D, à esquerda a representação do telhado, e à direita, a representação da trama.



Fonte: Relatório do Grupo 6

Complementarmente, o grupo representou o telhado por meio de uma maquete na escala de 2 cm para 1 m, que foi finalizada na aula (segundo momento). Nessa representação (Figura 13) foi possível ter uma noção apenas do madeiramento do telhado.

**Figura 13:** Representação da trama por meio de maquete



Fonte: Arquivo do professor.

Na obtenção do modelo matemático, considerando os dados fornecidos pelo fabricante (6), para a área calculada de 3150 m$^2$, seriam necessárias 4760 telhas, com custo unitário de R$ 1,10. A Figura 14 mostra considerações feitas pelo grupo para a dedução do modelo matemático.

**Figura 14:** Dedução do modelo matemático

**Dedução do modelo matemático:**

Para elaborarmos as tesouras foi usado trigonometria em geral. Para calcular as dimensões tanto da diagonal, pendural e da linha, usou se a lei dos senos, assim como para calcular o ângulo de abertura da diagonal. Como foi usado fabricante 6 das telhas, e considerando um caimento de 50% considerando que a cada 20% das terças terá uma tesoura.

Fonte: Relatório entregue pelo Grupo 6

Um dos integrantes desse grupo – Aluno 11 – tinha acesso a um depósito de material de construção, onde obteve outras informações sobre valores unitários dos componentes do telhado, que permitiram precisar outros custos: para a cumeeira, com preço de R$ 1,10 por quilograma, seriam necessários 208 kg; para os caibros e vigas, custando R$ 600,00 por metro cúbico de madeira de *pinus*, seriam necessários 1,3 m$^3$ para o telhado.

Considerar que a cada 20% das terças teria uma tesoura, foi uma das informações que o grupo obteve com um profissional da área de Engenharia Civil, segundo o qual são orientações usuais para quem executa obras. Os resultados obtidos pelo grupo são apresentados na Figura 15.

**Figura 15:** Custo detalhado do telhado

Para a construção desse telhado utilizamos a telha do fabricante 6, o nosso custo calculado foi:

Madeiramento: cerca de R$ 800,00 em pinus.

Telhas: cerca de R$ 5.236,00, com o preço unitário de R$ 1,10.

Cumeiras: cerca de R$ 228,80, com o preço unitário de R$ 1,10.

Fonte: Relatório entregue pelo Grupo 6

O grupo utilizou a expressão *cerca de* em sua conjectura, justificando que na construção civil há perdas e desperdício de material, porém como não seriam considerados nem a mão de obra nem o custo de outros materiais, optaram por calcular apenas o material necessário sem haver sobras. Considerando os valores apresentados na Figura 15 para madeiramento, telhas e cumeeiras, o grupo chegou ao total de R$ 6264,00 para o tipo de telha, madeira e formato do telhado escolhido.

## 3 CONHECIMENTOS MOBILIZADOS NA ATIVIDADE SOBRE CONSTRUÇÃO DE TELHADOS

Diante de um problema a ser resolvido – *Qual o custo para realizar a construção do telhado de uma casa?* –, os alunos, em grupos, realizaram ações diversas que complementaram e deram encaminhamentos à atividade. Tais ações, de certa forma, colocaram em movimento, preparando para o serviço ou para a ação (NAIDORF, 2014), diferentes conhecimentos. Nesse sentido, houve mobilização de conhecimentos de forma que estes tornaram-se úteis "aumentando seu valor em relação à sua utilidade" (NAIDORF, 2014, p. 14) para se chegar a uma solução para o problema.

Dependendo do contexto em que os conhecimentos são mobilizados, diferentes ações podem ser empreendidas. Essas diferentes ações podem ser efetivadas dentro de uma mesma atividade. Ao propor e desenvolver atividades no contexto de formação continuada com professores de matemática com o intuito de integrar o *software* GeoGebra nas aulas, Cyrino e Baldini (2017, p. 38) evidenciaram que "comparar os diferentes modos de 'pensar' e resolver a mesma tarefa possibilitou a mobilização de conhecimento pedagógico do conteúdo". Todavia, no âmbito de atividades de modelagem matemática em sala, com os alunos,

> [...] uma mesma situação-problema pode desencadear diferentes problemas e diferentes resoluções. Isso denota o caráter subjetivo da atividade de modelagem matemática, no sentido de que o modelo matemático é, de certo modo, um retrato da realidade sob a ótica daquele que a desenvolve (ALMEIDA; VERTUAN, 2014, p. 11).

Esse retrato da realidade foi evidenciado nas diferentes formas de resolução apresentadas pelos grupos cujas atividades foram descritas na seção 2. Para Almeida e Silva (2017, p. 216), os encaminhamentos realizados pelos alunos no desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática são "amparados nos conhecimentos acerca da situação e dos objetos matemáticos utilizados para encontrar uma solução para o problema definido". Para além dos conhecimentos matemáticos que emergiram da situação e que são estudados na escola, foram mobilizados conhecimentos a partir de pessoas especializadas na área de construção civil e conhecimentos sobre recursos tecnológicos.

Os conhecimentos matemáticos relativos àqueles abordados no estudo de Trigonometria, tais como relações trigonométricas no triângulo retângulo, semelhanças de triângulos e trigonometria em triângulos quaisquer, se fizeram presentes e serviram como suporte para solucionar o problema estudado pelos três grupos analisados, após definirem o tipo de telhado. Corroboramos com Silva e Trivelato (2017, p. 140), que "a ciência que é ensinada na escola precisa contribuir para que os indivíduos possam, em sua vida cotidiana, articular conhecimentos para a tomada de decisões". Os conhecimentos matemáticos mobilizados auxiliaram os alunos a tomarem decisões relativas ao custo do telhado que estavam investigando, com o objetivo de apresentar uma solução para o problema matemático oriundo da atividade planejada pelo professor.

Embora o Grupo 3 tenha simulado o telhado de uma casa com medidas não usuais (20m x 28m), denotando o retrato da realidade que pretendiam investigar no sentido de atribuir mais espaços e cômodos para a casa, fez uso dos conhecimentos matemáticos relativos às relações trigonométricas no triângulo retângulo para determinar a inclinação da tesoura, bem como o tamanho do caibro.

Com vistas a vislumbrar um encaminhamento para o desenvolvimento da atividade, o Grupo 5 empreendeu esforços com o intuito de conhecer conceitos da área de Engenharia Civil com relação à construção dos telhados e, para tanto, estabeleceram contato com um profissional da área. Com isso, diferentemente do Grupo 3, o Grupo 5 estabeleceu medidas para uma casa convencional (10m x 12m).

O que podemos evidenciar é que a atividade de modelagem possibilitou a mobilização de conhecimento para além da comunidade escolar. Isso vai ao encontro da afirmação de que a mobilização do conhecimento, considerando sua utilidade, “envolve uma parceria entre pesquisadores e pesquisa, e conecta o campus e a comunidade” (NAIDORF, 2014, p. 8). A comunidade que comercializa os materiais de construção também foi consultada com o intuito de determinar um custo para o telhado.

Os três grupos analisados não consideraram todos os materiais utilizados nem o custo de mão de obra, estabelecendo simplificações para o desenvolvimento da atividade de modelagem matemática. Borromeo Ferri (2006) afirma que as simplificações auxiliam no estudo do problema em atividades de modelagem matemática. De fato, as simplificações quanto a estes aspectos não remetiam a elementos do telhado que careciam de conhecimentos de trigonometria, de modo que o professor não fez intervenções adaptativas no sentido de sugerir que tais aspectos fossem levados em conta.

De certa forma, o contato com o profissional, estabelecido pelo Grupo 5, auxiliou os alunos a refutarem uma possível solução para o problema, quando concluíram que a solução *1920 telhas com massa de 4992 kg* não seria suficiente para cobrir o telhado com a inclinação determinada pelo fabricante e que foi escolhida a partir das informações apresentadas na Figura 1. Em estudo relatado por Rosa e Orey (2017, p. 159), “diferentes atividades de sala de aula foram planejadas para incentivar os alunos a pesquisar, explorar e interpretar o conhecimento trigonométrico entrevistando profissionais que atuam na construção civil”. Os autores apontam que os estudantes de um grupo que decidiu trabalhar com relações trigonométricas envolvidas na construção da empena do telhado, levando em conta os conhecimentos dos operários com quem conversaram, mostraram que foram capazes de compreender a conexão entre o conhecimento local (aquele praticado pelos profissionais da área) e o conhecimento acadêmico. Neste sentido, podemos evidenciar que conhecimentos de profissionais foram mobilizados pelos membros do Grupo 5 no desenvolvimento da atividade de modelagem analisada.

Conhecimentos relativos a diferentes recursos tecnológicos como o jogo *Minecraft*, o aplicativo *Cinema 4D*, a construção de maquetes, bem como o uso do *Power Point* para realizar a comunicação dos resultados, auxiliaram na visualização dos telhados a serem construídos considerando informações especificadas por cada um dos três grupos.

Uma das integrantes do Grupo 3 – Aluna 4 – tem conhecimento das regras e dinâmicas do uso do jogo *Minecraft* para realizar representações por meio de blocos em 3D. Aproveitando desses conhecimentos, fez a representação da casa com medidas fictícias para auxiliar na visualização dessa construção. Embora o *Minecraft* não seja um aplicativo para fins educacionais, permitiu aos alunos utilizar a tecnologia criando modelos e estratégias (SILVA *et al.*, 2016) com o intuito de auxiliar na visualização espacial.

A mobilização de conhecimentos de uma disciplina do curso Técnico em Informática ocorreu por um dos integrantes do Grupo 6 – Aluno 9 – ao representar, em diferentes janelas do aplicativo *Cinema 4D,* o telhado em forma de "L" que o grupo se propôs a estudar. De posse desses conhecimentos mobilizados, o Grupo 6 se valeu da visualização gráfica da trama, da cumeeira, da estrutura do telhado. Com isso, estabeleceram representações de forma que se aproximassem da realidade os cálculos desenvolvidos. Ao tratar de representações em Modelagem Matemática, D'Ambrosio (2015, p. 43), afirma que "a realidade é restrita a fatos e fenômenos selecionados e o resultado é um tipo de 'realidade isolada e individualizada'".

Todavia, mesmo fazendo uso do aplicativo, o grupo ainda optou por fazer a construção de uma maquete para tornar a visualização dinâmica. Segundo Lehnen e Madruga (2013, p. 8), o "fato de utilizar materiais concretos e a modelagem em sala de aula torna a aprendizagem mais dinâmica e atraente aos olhos de docentes e discentes". Com essa decisão, os alunos mobilizaram outros conhecimentos matemáticos, tais como proporcionalidade e escala.

Organizar a apresentação dos resultados por meio do *Power Point* retrata que os alunos têm conhecimentos sobre esse recurso tecnológico que pode ser considerado como uma "verdadeira suíte multimídia" (SANCHES, 2016, p. 6). Segundo Sanches (2016), explorado como ferramenta educacional, o *Power Point* possibilita uma "multimídia, desenvolvendo habilidades como a autoria e o trabalho em equipe" (p. 7).

Para além dos conhecimentos mobilizados pelos alunos no desenvolvimento da atividade, o professor se aventura a lidar com uma área que possivelmente não tenha conhecimento, aprendendo com seus alunos. Lançar mão de possibilidades em que se faça necessária a mobilização de conhecimentos diversos, "cria uma nova posição que pode melhorar a relação entre produtores e usuários de conhecimento" (NAIDORF, 2014, p. 16).

## 4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A experiência relatada pelo docente junto ao grupo de estudos e a análise da produção dos alunos mostram que os diferentes encaminhamentos colaboraram para promover discussões acerca de conhecimentos provenientes na disciplina, numa abordagem contextualizada, colocando os alunos como sujeitos corresponsáveis pela sua aprendizagem. Além disso, diante das diferentes estratégias no desenvolvimento das atividades de modelagem de cada grupo evidenciou-se conhecimentos diversos, seja sobre a situação-problema, seja sobre os objetos matemáticos a elas associados.

No desenvolvimento de uma atividade planejada pelo professor, a mobilização de conhecimentos ocorre na medida em que os alunos se envolvem com a situação-problema e com o problema cujo objetivo é buscar uma solução.

Os conhecimentos dos alunos determinaram cada comportamento do grupo seja para a escolha do tipo de telhado (telhado de duas águas ou em formato de L), seja para simular sua visualização espacial (uso do *Power Point, Minecraft, Cinema 4D* ou maquete). De certo modo, isso está atrelado às representações que foram feitas no desenvolvimento de cada atividade. As representações correspondem à "realidade individualizada" (D'AMBROSIO, 2015, p. 43). Em outra pesquisa, D'Ambrosio (2009, p. 89) caracteriza a realidade individualizada como um "complexo de experiências e explicações acumuladas por um indivíduo, ao longo de sua vida, como uma resposta individual às suas necessidades e vontade" Isso de certa forma determina seu comportamento.

O modo como se dá a mobilização dos conhecimentos também está atrelada aos interesses dos alunos para com a situação-problema. Procurar profissionais da área, associar conhecimentos de jogos ou mesmo se aventurar a construir uma maquete, de certa forma, são ações que configuram interesses dos alunos. Os mesmos poderiam apresentar uma solução para o problema a partir de conceitos matemáticos sobre trigonometria estudados em sala de aula, a partir dos dados apresentados na Figura 1. Todavia, não se limitaram aos conhecimentos matemáticos de âmbito escolar. Evidenciamos que houve uma busca de utilidade para os conhecimentos que possuíam com o intuito de acioná-los e empreendê-los na atividade matemática. Isso corrobora com o fato de que "[...] a modelagem não é um esporte de espectador" (BLUM; BORROMEO FERRI, 2016, p. 71).

Há de se considerar o planejamento da atividade pelo professor, que possibilitou aos alunos "exercer um papel ativo e a lidar com um tema de seu próprio interesse" (HERMINIO; BORBA, 2010, p. 113), visto que a temática foi escolhida na interação do professor com os alunos.

Com isso, evidenciamos que a mobilização de conhecimentos está associada à situação-problema, ao interesse dos alunos e ao planejamento do professor com a atividade de modelagem matemática. Isso porque, cada situação vai solicitar conhecimentos diferentes, de acordo com indivíduos diferentes e contextos diferentes. O planejamento do professor é indutor de mobilização. Um trabalho de modelagem envolvendo telhado (escolhido pelo professor), requer conhecimentos concernentes a esse tema.

Como coloca Cirillo *et al.* (2016), pessoas diferentes podem olhar para uma atividade de modelagem e terem diversas perspectivas para a resolução e, além de surgirem soluções alternativas e válidas notamos que estas podem ser determinadas pelos distintos conhecimentos que os alunos mobilizam.

Quanto à investigação que retratamos neste artigo, deve-se considerar que os dados que subsidiaram nossas análises correspondem às produções relatadas pelos alunos nos três diferentes momentos de aulas (em dias distintos) por meio de relatórios entregues e dos quais não foi feito um acompanhamento *in loco*. Investigar conhecimentos mobilizados pelos alunos em uma atividade totalmente desenvolvida em sala de aula, em que os mesmos lançam mãos daqueles constituídos em fontes diversas e que estão acessíveis, pode configurar a emergência de outras ações e de outros comportamentos, constituindo-se, assim, em possibilidades de pesquisas futuras.

## REFERÊNCIAS

ALMEIDA, L. M. W.; FERRUZZI, E. C. A comunicação em atividades de Modelagem Matemática: uma relação com a teoria da atividade. In: ANAIS DA CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13ª, 2011. Recife-PE, 2011. v. 1, p. 1-11.

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, A. Por uma Educação Matemática Crítica: a Modelagem Matemática como alternativa. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 12, n. 2, p. 221-241, 2010.

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. A. P. A Ação dos Signos e o Conhecimento dos Alunos em Atividades de Modelagem Matemática. **Bolema**, v. 31, n. 57, p. 202-219, 2017.

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. A. P.; VERTUAN, R. E. **Modelagem Matemática na Educação Básica**. São Paulo: Contexto, 2012.

ALMEIDA, L. M. W.; TORTOLA, E. Modelagem Matemática no ensino fundamental: a linguagem dos alunos como foco de análise. **Jornal Internacional de**

**Estudos em Educação Matemática**, 2014, v. 7 n. 1, p. 111-142, 2014.

ALMEIDA, L. M. W.; VERTUAN, R. E. Modelagem Matemática na Educação Básica. In: ALMEIDA, L. W.; SILVA, K. A. P. (Orgs.). **Modelagem Matemática em Foco**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2014. p. 1-21.

ARAÚJO, J. L.; CAMPOS, I. S. Negotiating the use of Mathematics in a Mathematical Modelling Project. In: STILLMAN, G. A.; BLUM, W.; BIEMBENGUT, M. S. (Eds.). **Mathematical Modelling in Education Research and Practice: cultural, social and cognitive influences. ICTMA 16**. New York: Springer, 2015. p. 283-292.

BIEMBENGUT, M. S. **Modelagem Matemática & implicações no ensino e na aprendizagem**. Blumenau: Edfurb, 2004.

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. **Modelagem Matemática no ensino**. São Paulo: Contexto, 2003.

BLUM, W.; BORROMEO FERRI, R. Advancing the Teaching of Mathematical Modeling: research-based concepts and examples. In: NCTM. **Mathematical Modeling and Modeling Mathematics**. USA: APME. 2016, p. 65-76.

BORROMEO FERRI, R. Theoretical and empirical differentiations of phases in the modeling process. **Zentralblatt für Didaktik der Mathematik**, v. 38 n. 2, p. 86-95, 2006.

BORSSOI, A. H.; ALMEIDA, L. M. W. Modelagem matemática e aprendizagem significativa: uma proposta para o estudo de equações diferencias ordinárias. **Educação Matemática Pesquisa**. São Paulo, v. 6, n. 2, p. 91-121, 2004.

CIRILLO M.; PELESKO, J. A.; FELTON-KOESTLER, M. D.; RUBEL, L. Perspectives on modeling in school mathematics. In: NCTM. **Mathematical Modeling and Modeling Mathematics**. USA: APME, 2014, p. 3-16.

CYRINO, M. C. C. T.; BALDINI, L. A. F. Ações da formadora e a dinâmica de uma comunidade de prática na constituição/mobilização de TPACK. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 19, n. 1, 25-48, 2017.

D'AMBROSIO, U. Mathematical Modeling: cognitive, pedagogical, historical and political dimensions. **Journal of Mathematical Modelling and Application**. Blumenau, v. 1, n. 1, 89-98, 2009.

D'AMBROSIO, U. Mathematical Modelling as a strategy for building-up systems of knowledge in different cultural environments. In: STILLMAN, G. A.; BLUM, W.; BIEMBENGUT, M. S. (Eds.). **Mathematical Modelling in Education Research and Practice: cultural, social and cognitive influences. ICTMA 16**. New York: Springer, 2015, p.35-44.

GEIGER, V.; ÄRLEBÄCK, J. B.; FREJD, P. Interpreting Curricula to find: opportunities for modeling: case studies from Australia and Sweden. In: NCTM. **Mathematical Modeling and Modeling Mathematics**. USA: APME, 2016, p. 207-216.

GOULD, H. What a modeling task looks like. In NCTM. **Mathematical Modeling and Modeling Mathematics**. USA: APME, 2016, p. 179-186.

HERMINIO, M. H. G. B.; BORBA, M. C. A Noção de Interesse em Projetos de Modelagem Matemática. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 12, n. 1, 111-127, 2010.

LEHNEN, C. A.; MADRUGA, Z. E. F. Modelagem matemática e construção de maquetes: relato de uma prática do curso de licenciatura. In: ANAIS DO CONGRESSO INTERNACIONAL DE ENSINO DA MATEMÁTICA, 6º, 2013. Canoas-RS: ULBRA, 2013. v. 1, p. 1-19.

NAIDORF, J. C. Knowledge utility: From social relevance to knowledge mobilization. **Education Policy Analysis Archives**, Arizona, v. 22, n. 89, p. 1-31, 2014.

ROSA, M.; OREY, D. C. Ethnomodelling as the Mathematization of Cultural Practices. In: STILLMAN, G. A. BLUM, W.; KAISER, G. (Orgs.). **Mathematical Modelling and Applications: Crossing and Researching Boundaries in Mathematics**

**Education**. Switzerland: Springer, 2017.

SANCHES, C. E. *PowerPoint* como ferramenta educacional e sua contextualização nas TICs. **Revista Tecnologias na Educação**, v. 8, n. 15, p.1-9, 2016.

SANTOS, L. M. M.; BISOGNIN, V. Experiências de ensino por meio da modelagem matemática na educação fundamental. In: BARBOSA, J. C.; CALDEIRA, A. D.; ARAÚJO, J. L. (Orgs). **Modelagem Matemática na Educação Matemática Brasileira: pesquisas e práticas educacionais**. Recife: SBEM, 2007.

SCHROETTER, S. M.; STAHL, N. S.; CHRYSOSTOMO, C. S.; DUNCAN, C. R. A escrita e o pensamento matemático no ambiente virtual utilizando a modelagem matemática: experiência de uma turma de 9ºano. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 18, n. 1, p. 373-396, 2016.

SILVA, A. L.; CAVALCANTE, M. T. M.; VIANA, L. H.; MOITA, F. M. G. S. C. Utilização do *Minecraft* na construção de conceitos geométricos como forma de estímulo a Aprendizagem da Matemática. In: ANAIS DO CONGRESSO NACIONAL DE EDUCAÇÃO (CONEDU), 3º, 2016. Natal-RN. 2016. v. 4, p. 1-12.

SILVA, K. A. P. Tarefas que Emergem em Atividades de Modelagem Matemática em um Ambiente Educacional de Cálculo Diferencial e Integral. **JIEEM**, v.10, n. 1, p. 23-40, 2017.

SILVA, M. B.; TRIVELATO, S. L. F. A mobilização do conhecimento teórico e empírico na produção de explicações e argumentos numa atividade investigativa de Biologia. **Investigações em Ensino de Ciências**, v. 22, n. 2, p. 139-153, 2017.

**Submetido em abril de 2020.**
**Aprovado em agosto de 2020.**

# UMA REFLEXÃO DA PRÁTICA DOCENTE A PARTIR DA UTILIZAÇÃO DE TAREFAS EXPLORATÓRIAS

## UNA REFLEXIÓN DE LA PRÁCTICA DOCENTE A PARTIR DE LA UTILIZACIÓN DE TAREAS EXPLORATORIAS

SANTOS, Ricardo Almeida[1]
ROCHA, Zenaide de Fátima Dante Correia[2]
CARGNIN, Claudete[3]

**RESUMO**

O artigo tem como objetivo apresentar e discutir algumas reflexões de um professor que investiga a própria prática. Para dar subsídios à reflexão do professor, foi aplicada uma tarefa aberta, no ano de 2018, em uma turma do segundo ano do Ensino Médio. A tarefa foi um convite aos alunos para pensar matematicamente, produzir estratégias e generalizações. A pesquisa é de natureza aplicada e do tipo qualitativa; para sua realização foram produzidos materiais escritos e áudios-gravados que forneceram subsídios ao professor-pesquisador para realizar a pesquisa da própria prática. As reflexões produzidas a partir das análises dos áudios e produções discentes permitiram ao professor-pesquisador verificar se os objetivos delimitados no planejamento foram alcançados, indicar contribuições para os conhecimentos do professor e analisar sua própria postura em sala de aula.

**Palavras-chave:** Discussão em sala de aula. Formação de Professores. Saberes docentes.

**RESUMEN**

El artículo tiene como objetivo presentar y discutir algunas reflexiones de un maestro que investiga su propia práctica. Para apoyar el reflejo del maestro, se aplicó una tarea abierta, en el año 2018, en una classe del segundo año de la escuela secundaria. La tarea fue una invitación a los estudiantes a pensar matemáticamente, producir estrategias y generalizaciones. La investigación es de naturaleza aplicada y de tipo cualitativo; para su realización, se produjeron materiales grabados en audio que proporcionaron subsidios al profesor investigador para llevar a cabo la investigación de su propia práctica. Las reflexiones producidas a partir del análisis de los audios y las producciones de los estudiantes permitieron al profesor-investigador verificar si se lograron los objetivos definidos em la planificación, indicar contribuciones al conocimiento del profesor y analizar su propia postura em el aula.

**Palabras clave:** Discusión en el aula. Formación de profesores. Conocimiento del professor.

## 1 INTRODUÇÃO

O presente artigo foi produzido no contexto da disciplina "Saberes Docentes" do curso de Mestrado em Ensino de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná- Campus Londrina (PPGMAT/UTFPR). Nesta disciplina, foram estudados alguns autores que apresentaram

[1] Especialista em Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL). Mestrando do Programa de Pós Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UFTPR), Londrina, PR, Brasil. Endereço eletrônico: rick_mat10@yahoo.com.br

[2] Doutora em Educação pela Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP). Docente do Departamento de Ciências Humanas da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), Londrina, PR, Brasil. Endereço eletrônico: zenaiderocha@utfpr.edu.br

[3] Doutora em Educação para a Ciência e a Matemática pela Universidade Estadual de Maringá (UEM). Docente do Departamento de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), Campo Mourão, PR, Brasil. Endereço eletrônico cargnin@utfpr.edu.br.

a pesquisa da própria prática como objeto de estudo (PONTE, 2003; ZEICHNER; DINIZ-PEREIRA, 2005; COCHRAN-SMITH; LYTLE; 1999). O referido tema tem auxiliado professores no processo de construção da identidade profissional e diminuição da tensão vivida em sala de aula, haja vista que ao olhar para seu trabalho, o professor tem a oportunidade de refletir sobre sua prática, se ver como protagonista no processo de desenvolvimento profissional mediante uma atividade docente reflexiva.

Neste viés, foram planejadas algumas tarefas matemáticas com a intenção de aplicá-las em sala de aula mediante coleta de dados em áudio-gravador, a fim de que se pudesse utilizar para a análise e interpretação da condução docente e do material produzido pelos alunos, prática essa realizada pelo professor e pesquisador veiculado nesse trabalho. Partiu-se do pressuposto de que o professor-pesquisador pode realizar a reflexão da própria prática. Para o desenvolvimento da proposta, o professor-pesquisador, evidenciado neste estudo, trabalhou com uma turma do segundo ano do Ensino Médio, de uma escola da rede estadual de Londrina/PR em que atua, uma tarefa que tem características exploratório-investigativas[4]. Para Ponte (2005), o ensino a partir de tarefas exploratório-investigativas é caracterizado pelo fato de o professor não revelar as respostas, deixando uma parte importante do trabalho de construção do conhecimento e da descoberta por conta do aluno.

Nessa conjectura, de acordo com Ponte (2005, p. 15), "parte-se de atividades em que os alunos são chamados a um forte envolvimento, para se fazer em um segundo momento uma discussão, balanço, clarificação relativamente ao que se aprendeu". Para Ponte (2003), as tarefas exploratórias não se reduzem a listas de exercícios, há um raciocínio que pode ser feito na busca de padrões e regularidades.

O objetivo deste artigo é apresentar e discutir algumas reflexões de um professor que investiga a própria prática. Assim, foi possível analisar como se deu a pesquisa da prática docente desse professor-pesquisador, buscando responder duas questões: Como a pesquisa sobre a própria prática pode fornecer subsídios ao professor para a reflexão sobre o planejamento e a ação docente? Quais os efeitos dessa prática reflexiva para o professor que pesquisa a própria prática?

## 2 DA DISCUSSÃO À INVESTIGAÇÃO DA PRÓPRIA PRÁTICA

Ao longo dos anos, o professor constrói saberes sobre, na e da realidade escolar, conhece suas fragilidades e necessidades. Esse processo colabora para a formação de sua identidade docente, que é baseada nos saberes profissionais, nas relações de conhecimento e nas suas concepções enquanto cidadão. Por todo esse conjunto de situações, conclui-se que a escola não é apenas um local de reprodução de saberes, pois é nela que o professor se firma como profissional e desenvolve sua prática docente, se aprimora constantemente e produz novos conhecimentos e novas práticas pedagógicas, o que vai ao encontro do que dizem Cararo, Loureiro e Klüber (2020), quando expõem que é preciso que o professor que busca ensinar:

> Se sinta envolvido por concepções de ensino mais críticas e mais dinâmicas [...] buscando novas informações, novas metodologias, novos instrumentos de ensino,

[4] Em Ponte (2003), uma tarefa com essas características constitui-se de uma questão geral, com informações pouco precisas a partir das quais se procura formular uma questão mais precisa e sobre ela produzir e testar várias conjecturas, sendo esta uma tarefa aberta que permite aos estudantes irem além do que sugere o enunciado, produzirem questionamentos e generalizações. Nessa pesquisa, vamos utilizar os termos tarefas exploratórias e tarefas exploratório-investigativas como sinônimos, respaldado na definição do referido autor.

> resultados de pesquisas e outros que colaborem para um olhar crítico e reflexivo do professor sobre sua prática pedagógica, (CARARO; LOUREIRO; KLÜBER, 2020, p. 148).

Para Pozo (1996), cada sociedade gera suas próprias culturas de aprendizagem e estas variam de acordo com os contextos sociais em que estão inseridas. Desta forma, as práticas pedagógicas produzidas por um determinado grupo podem não satisfazer as necessidades de outro grupo, evidenciando assim a importância do professor pesquisador. Parafraseando Charlot (2005), o professor é um agente social que busca a transformação, ele tem o desafio de ensinar de maneira diferente a que foi ensinado, pois agora se apresenta a ele um novo aluno, o aluno da era do conhecimento em uma sociedade globalizada, mais dinâmica e interativa do que aquela em que foi formado.

Para Forquin (1992), a escola não é apenas o local por onde circulam fluxos humanos, onde se investem e se geram riquezas materiais, onde se travam interações sociais e relações de poder, ela é também um local de gestão e transmissão de saberes e de símbolos. É nela que o professor atua, é onde ele tem a oportunidade de observar a sua prática, se mobilizar e produzir saberes. Gauthier(1998) classifica esses saberes em: disciplinar, que se refere ao conhecimento do conteúdo a ser ensinado; curricular, que se refere à transformação da disciplina em programa de ensino; saberes das Ciências da Educação, que se relaciona ao saber profissional específico; tradição pedagógica, que diz respeito ao saber dar aulas e será adaptado e modificado pelo saber da experiência particular; experiência que é referente aos julgamentos responsáveis pela elaboração de uma jurisprudência, e os saberes da ação pedagógica, que são os saberes experienciais dos professores que dizem respeito à prática de ensino relativo aos conhecimentos que são tornados públicos, validados, testados.

De acordo com Ponte, Mata-Pereira e Quaresma (2013), Sherin (2002), Stein *et al* (2008), a discussão em sala aula é uma das práticas que podem colaborar para formar um aluno reflexivo. Nessa perspectiva, para desenvolver a discussão, o professor-pesquisador da própria prática pode utilizar o modelo de Stein *et al* (2008) que é composto por cinco etapas: antecipar, monitorar, selecionar, sequenciar e estabelecer conexões.

Ao antecipar, o professor-pesquisador coloca as possíveis resoluções e dúvidas que podem ser apresentadas pelos alunos em seu planejamento de ensino e quais as intervenções que ele poderá realizar. Ao monitorar, o professor pode verificar se as tarefas estão sendo realizadas de acordo com o planejado, bem como quais intervenções são necessárias. Neste momento, o professor observa, ainda, as interações entre os alunos para conhecer como estão trabalhando. Ao selecionar, dividem-se as resoluções em grupos que apresentam características comuns, o que facilita e torna mais profícua a discussão, pois permite que os alunos avancem para além do que foi discutido no grupo, bem como possibilita ao professor-pesquisador verificar se algum grupo utilizou um procedimento diferente que apresente potencial para alavancar a construção de saberes, além do já realizado, e que contribua na direção dos objetivos delineados no planejamento. Ao sequenciar as atividades, o professor-pesquisador organiza as intervenções dos alunos para que atinjam os objetivos estabelecidos. Por fim, ao estabelecer conexões, o docente traz práticas comuns, vivenciadas pelos estudantes contextualizando-as aos conteúdos matemáticos, a fim de oportunizar o exercício de diferentes estratégias, promovendo recursos para a discussão das ideias centrais de cada resolução apresentada por esses estudantes.

Para Clark e Peterson (1986), é na realização do planejamento que os professores tomam decisões, é um momento relevante para suas escolhas/direcionamentos, que podem causar um forte impacto nas oportunidades que os alunos têm para aprender. Ao planejar o ensino com antecedência, o professor pode obter os seguintes benefícios:

> (i) satisfação das suas necessidades pessoais, reduzindo a sua ansiedade e incerteza, definindo um caminho de modo a ganharem segurança e confiança;
>
> (ii) preparação do ensino, nomeadamente, para conhecerem, recolherem e organizarem os materiais e para organizarem o tempo e o evoluir da atividade;
>
> (iii) utilização durante o ensino, designadamente, a organização dos alunos na aula, como iniciar uma dada atividade, como auxiliar de memória ou definindo uma estrutura para o ensino e avaliação. (SERRAZINA, 2017, p.10).

Nesta pesquisa, a elaboração do planejamento da aula foi a primeira etapa para o professor realizar a investigação da própria prática; a aplicação da tarefa foi a segunda etapa, nela o planejamento é posto em prática, é o momento em que o professor interage com os alunos, produzindo questionamentos e acompanhando cada passo do trabalho discente; a terceira e última etapa representou o coroamento das etapas anteriores, pois é durante a análise dos dados que o professor-pesquisador faz uso da produção escrita pelos estudantes e do material áudio-gravado das aulas. É importante destacar que a reflexão ocorre desde a primeira etapa citada, quando o professor-pesquisador busca fundamentação teórica e um robusto planejamento das tarefas a serem propostas aos alunos. Ao refletir sobre a própria prática ao longo desse processo, o professor olha para seu trabalho e, amparado pelo referencial teórico, identifica os pontos em que sua atuação atingiu o objetivo e pode traçar novas ações para aprimorar os pontos onde sua prática requer melhorias.

É importante destacar que as etapas do trabalho para o professor realizar a pesquisa da própria prática se diferem das etapas do trabalho com a atividade exploratório-investigativa, as quais, de acordo com Cyrino e Oliveira (2016), são: a apresentação da tarefa, momento de garantir que os estudantes compreenderam o que está sendo solicitado; o desenvolvimento da tarefa, em que emergem as estratégias que subsidiarão a seleção e o sequenciamento; a discussão coletiva, que é o momento da discussão das diferentes estratégias; e a sistematização da aprendizagem, que faz o conhecimento matemático aparecer a partir da produção dos alunos.

Para Zeichner e Diniz-Pereira (2005), a investigação da própria prática surgiu como resposta à visão do professor como técnico, que aplica o que foi produzido por outras pessoas fora da esfera prática. Em contrapartida, essa nova dinâmica propõe a busca por valorizar o profissional tornando-o ativo e mais autônomo na construção de saberes. Enquanto Cochran-Smith e Lytle (1999) concebem a pesquisa da própria prática como um estudo sistemático e intencionado dos professores sobre o seu próprio trabalho, Ponte (2002) explora algumas possibilidades que se abrem ao professor pesquisador da própria prática como: ser protagonista no desenvolvimento curricular e profissional, potencializar o desenvolvimento profissional, agir como transformador da cultura escolar, fornecer elementos para a maior compreensão dos problemas educacionais. Em certos casos, ela ainda pode contribuir para o desenvolvimento da cultura profissional no campo da prática e para o conhecimento da sociedade em geral (PONTE, 2002).

Em consonância com os autores apresentados, vemos a aprendizagem docente como um processo de construção de significados que se modificam de acordo com o envolvimento, com a situação em questão. Este envolvimento contribui para a direção dos acontecimentos e para a preparação do indivíduo para envolver-se em outros acontecimentos similares (ROGOFF,1998).

Para realizar a pesquisa da própria prática, será observada a atuação docente enquanto os alunos realizam uma tarefa de cunho exploratório, que, de acordo com Ponte *et al* (1997), tem mote problematizador no sentido de levar o aluno a formular objetivos mais precisos e realizar conjecturas. Esse tipo de tarefa precisa passar por três momentos distintos: introdução, desenvolvimento e a discussão final (TUDELLA *et al*,1999), os quais favorecem aos estudantes a troca de conhecimentos, o desenvolvimento da criatividade e a ampliação de seu repertório de saberes. Aqui, ocorrem dois processos distintos e simultâneos: o professor reflete sobre seu planejamento da tarefa e objetivos estabelecidos; e a aquisição de conhecimento, pelos estudantes, na resolução da tarefa proposta.

## 3 METODOLOGIA

Esta pesquisa é classificada como aplicada quanto à utilização dos resultados, visto que se dá em sala de aula, *lócus* dessa investigação; de natureza qualitativa quanto ao método, ao manter uma relação dinâmica entre o mundo real e o sujeito, sendo descritiva e se utilizando do método indutivo, trazendo o processo como seu foco principal ao valorizar o percurso reflexivo do professor-pesquisador durante a aplicação de uma tarefa; também possui fins exploratórios ao proporcionar maior familiaridade com o problema de investigar a própria prática, para aumentar o conhecimento sobre a reflexão a partir dessa prática de pesquisa (GIL, 2002). Os dados foram organizados a partir de elementos práticos e fundamentados na teoria (PONTE, 2003; ZEICHNER E DINIZ-PEREIRA, 2005; COCHRAN-SMITH E LYTLE, 1999; GAUTHIER, 1998) no sentido de que trouxessem algum significado para as seguintes questões diretoras de pesquisa: Como a pesquisa sobre a própria prática pode fornecer subsídios ao professor para a reflexão sobre o planejamento e a ação docente? Quais os efeitos dessa prática reflexiva para o professor que pesquisa a própria prática?

A escolha da tarefa foi feita em conjunto por professores que lecionavam no Ensino Médio, com interesse comum no pensamento covariacional[5]. No entanto, a aplicação e a análise dos dados foram realizadas de forma individual, com vistas ao professor-pesquisador investigar sua própria prática. Os dados foram obtidos por meio da produção escrita dos estudantes, de material aúdio-gravado da realização da aula, pelos estudantes e pelo professor-pesquisador, os quais foram posteriormente transcritos, e do diário de investigação do próprio professor. A prática do professor foi analisada com elementos teóricos subsidiados a partir dos fundamentos de Gauthier (1998) quanto aos saberes veiculados e a reflexão destes, já a prática de ensino (planejamento e aplicação) foi respaldada em elementos teóricos de Ponte (2005), Mata-Pereira e Quaresma (2013), Sherin (2002), Stein *et al* (2008), a fim de elucidar o objetivo de pesquisa.

O Quadro 1 mostra a tarefa proposta aos alunos.

No planejamento da aula, foram definidos o objetivo, as possíveis dúvidas e intervenções, bem como os possíveis direcionamentos que seriam realizados pelo professor-pesquisador, levando em consideração a planificação de aulas conforme Serrazina (2017). Adotou-se, nesta etapa, como objetivo do desenvolvimento desta tarefa: estimular os alunos a pensarem matematicamente pela perspectiva da covariação, ou seja, da variação de uma magnitude

[5]Para Mestre (2014), o pensamento covariacional é baseado na análise de como duas quantidades variam simultaneamente e mantém essa variação como uma parte explicita e dinâmica da descrição da função.

conforme outra magnitude também varia. A partir disso, elencaram-se as possíveis dificuldades e intervenções, conforme indica o Quadro 2.

**Quadro 1:** Tarefa proposta

| |
|---|
| Um leitor mandou, para uma revista, a seguinte análise de um livro que ele havia acabado de ler, com muitas páginas: "O livro é eletrizante, muito envolvente mesmo! A cada página terminada, mais rápido eu lia a próxima! Não conseguia parar!"<br>Desenhe um gráfico que represente o número $n$ de páginas que esse leitor concluía pelo tempo decorrido $t$, mas de modo a refletir corretamente a mensagem do leitor à revista. Não se preocupe com detalhes, mas com a tendência geral do gráfico. Explique brevemente como pensou. |

Fonte: os autores

**Quadro 2:** Possíveis Dificuldades e respectivas intervenções

| **Possíveis dificuldades** | **Intervenções** |
|---|---|
| - Não conseguir no primeiro momento entender o que a tarefa está pedindo. | - Explicar em plenário o contexto da questão.<br>- Atendimento individual nos grupos. |
| - Tentar resolver recorrendo a uma fórmula de função | - Sugerir aos grupos a pensarem sem a necessidade de recorrer a cálculos.<br>- Descrever o que está entendo do problema. |
| - Dificuldade para definir as variáveis nos eixos do plano cartesiano. | - Sugerir a apresentação das variáveis envolvidas no problema. |
| - Tentar resolver recorrendo a quantidades de páginas e tempos. | - Sugerir aos grupos a pensarem sem a necessidade de recorrer a quantidades de páginas e tempos. |

Fonte: os autores

A aplicação da tarefa se deu no dia 21/09/2018 durante as duas primeiras aulas do período matutino e envolveu 15 alunos. A turma escolhida para a aplicação foi um segundo ano do Ensino Médio de uma escola da rede estadual de Londrina/PR, na qual o professor-pesquisador era, à época, o professor regente de Matemática. Essa turma, de modo geral, era considerada indisciplinada por todos os professores, com defasagem de conteúdos e apresentava falta de interesse na realização de tarefas e atividades propostas. Foi pensando nessas características que o professor-pesquisador fez a escolha da turma, pois se acreditava que a utilização de tarefas exploratórias poderia oferecer uma oportunidade aos estudantes para pensar matematicamente, produzir conhecimentos por meio das discussões e negociações de resultados, o que de fato aconteceu conforme será mostrado adiante.

A aula iniciou com o professor apresentando a tarefa e solicitando aos alunos que se agrupassem em trios, conforme a afinidade; foram formados cinco grupos. A turma aceitou muito bem a proposta da atividade. Ressalta-se que durante a aplicação da tarefa foi produzido material áudio-gravado, um gravador por grupo e um com o professor-pesquisador, contando também com um diário de investigação, elaborado posteriormente a aplicação das atividades. Todo esse material proporcionou subsídios ao professor-pesquisador para pesquisar a sua própria prática.

Para identificar os grupos na apresentação dos dados e nas análises, eles foram nomeados como Grupo 1, ..., Grupo 5; os alunos pertencentes a cada grupo foram chamados de A1, A2 e A3, o professor/pesquisador de P e as falas de F.

## 4 APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS

Inicialmente, devido à restrição de páginas do artigo, serão apresentados alguns recortes das discussões apresentadas por alguns grupos e das intervenções realizadas pelo professor-pesquisador. Na próxima seção, são apresentadas as reflexões da própria prática a partir desta tarefa.

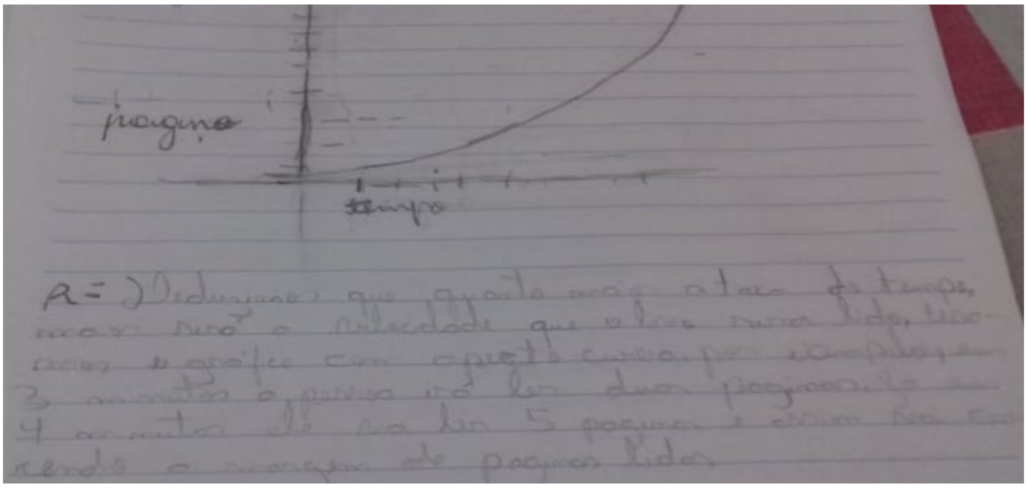
O Quadro 3 apresenta algumas discussões produzidas pelo grupo 1, enquanto a Figura 1 apresenta a resolução da sua tarefa [transcrição da resposta: Deduzimos que quanto maior a taxa de tempo, maior será a velocidade que o livro será lido, teremos o gráfico com aspecto curvo, por exemplo, em 3 minutos a pessoa irá ler duas páginas. Já em 4 minutos ele vai ler 5 páginas e assim vai conhecendo a margem de páginas lidas].

**Quadro 3:** Discussões produzidas pelo grupo 1

| |
|---|
| F1- A1 Qual o tipo de gráfico podemos usar? |
| F2- A2 Tem aquele assim (reta), aquele assim (barras) e aquele assim (curva) (Os estudantes indicaram os gráficos com desenhos, como o professor estava acompanhando a discussão, teve a oportunidade de constatar). |
| F3- A3 Acho que tem que ser esse de reta. |
| F4- A1 Por quê? |
| F5- A3 Por que à medida que passa o tempo, mais páginas eu leio. |
| F6- A2 Mas está escrito mais rápido eu leio e não mais páginas eu leio. |
| F7- P Qual a diferença entre mais páginas eu leio e mais rápido eu leio? |
| F8- A3 É que mais páginas eu leio pode ser o mesmo tanto, à medida que passa um tempo leio dez páginas, dois tempos leio vinte páginas e assim por diante. |
| F9- A1 Então tem que ser esse de curva. |
| F10- P Por que ele não começa aqui (origem do plano cartesiano)? |
| F11- A2 Porque tem aquelas páginas em branco do começo! (Risos). |

Fonte**:** protocolo de pesquisa

**Figura 1:** Resolução da tarefa proposta pelo grupo 1




**Fonte:** Protocolo de pesquisa

Ao analisar a produção do Grupo 1, de F1 a F6 o professor-pesquisador observou que o grupo compreendeu a proposta da tarefa, por este motivo realizou poucas interferências, mas produziu questionamentos que auxiliaram na escolha do tipo de gráfico. O questionamento realizado em F7 provocou uma reflexão nos discentes que é vista em F8 e F9 e parece ter sido decisivo para a escolha do tipo de gráfico. De acordo com Fontana (2000), a mediação do professor é importante para o aluno poder, com base em seus conceitos espontâneos, raciocinar, reproduzir e aplicar conceitos aprendidos. Em F10, foi posta uma questão que no momento passou despercebida pelo professor-pesquisador, mas que apresenta potencial para a produção de uma discussão que poderia culminar no aprendizado da Matemática em questão, qual o significado do gráfico não iniciar na origem do plano cartesiano sistema cartesiano?

Para Cengiz et al (2011), o professor deve desempenhar os papéis de trazer, ou seja, convidar os alunos a partilhar suas estratégias, apoiar as construções de diferentes representações, ampliar as possibilidades de interpretação de dados por meio das intervenções. Ao realizar o tratamento dos dados, o professor-pesquisador pode perceber que essas intervenções poderiam ter sido bem mais profundas e representativas, fato que o permitiu repensar a interação com os estudantes no sentido de planejar questões que os instiguem a buscar outras respostas e novas estratégias de ação, uma importante reflexão para um replanejamento *à posteriori*.

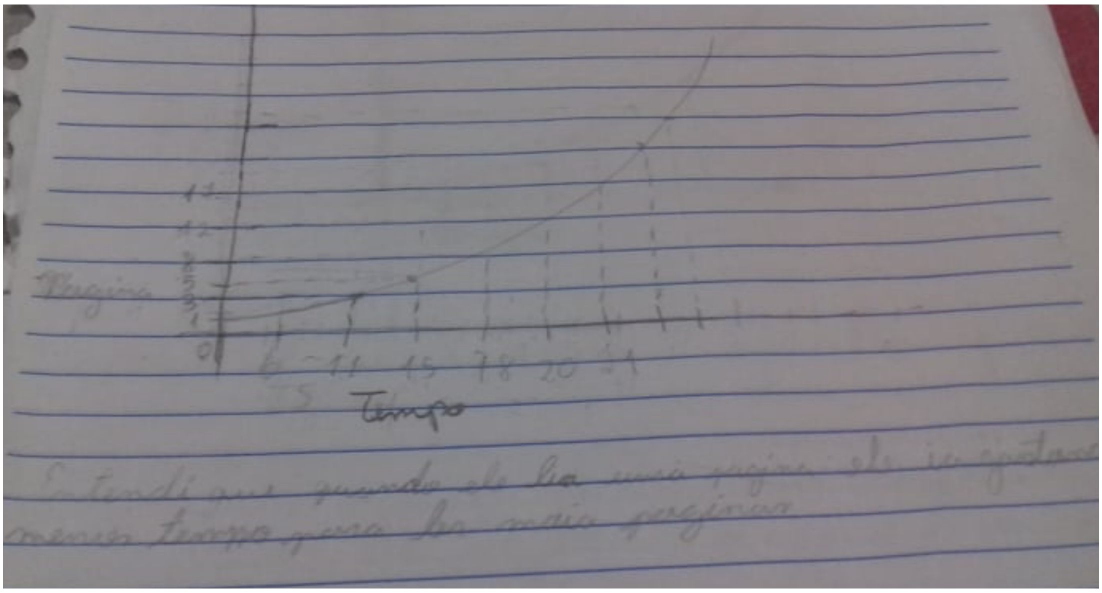
Já no Grupo 3, as discussões ocorreram conforme exposto no Quadro 4. A Figura 2 mostra a resolução da tarefa por esse Grupo 3 [Transcrição da resposta: Entendi que quando ele lia uma página ele ia gastando menos tempo para ler mais páginas].

**Quadro 4:** Discussões produzidas pelo Grupo 3

| |
|---|
| F1-A1 Qual o nome desse gráfico aqui? |
| F2-A2 Plano cartesiano. |
| F3-A3 É alguma coisa assim mesmo. |
| F4-A1 Não piá, o nome dele é específico, tem esse aqui (exponencial), tem aquele assim (barras) (o aluno realizou um esboço dos gráficos, que foram vistos posteriormente pelo professor). |
| F5-A3 Vamos perguntar para ele (professor) qual é nome desse gráfico. |
| F6-P Este é um gráfico exponencial, enquanto o outro é um gráfico de barras. |
| F7-A2 Se você considerar o tempo, vamos colocar aqui (na vertical). |
| F8-A1 Não pode ser aí, tem que ser aqui (na horizontal). |
| F9-A3 Vamos colocar o tempo, 10, 20 e 30 minutos. |
| F10-A2 Você demora 30 minutos para ler uma página? |
| F11-A3 Não! É que tem que ter o tempo e o número de páginas. |
| F12-P Por que tem que ter o tempo e número de páginas? |
| F13-A1 Não tem tempo, é só representar. |
| F14-A3 Não, a gente tem que analisar o gráfico, eu não entendi. |
| F15-A2 Agora está certo, mas tenta fazer um bagulho mais curvado. |
| F16-A2 Você não tem que começar o gráfico daí, tem que ser do começo. |
| F17-A1 Se em três minutos ele leu três páginas, em quatro minutos ele leu cinco páginas, assim vemos que o gráfico é crescente porque cresce e faz uma curva por ele ler cada vez mais rápido. |

Fonte: protocolo de pesquisa

**Figura 2**: Resolução da tarefa proposta pelo grupo 3




**Fonte:** Protocolo de pesquisa

Já na produção do Grupo 3, de F1 a F5 o professor-pesquisador percebe que os alunos estão refletindo sobre os tipos possíveis de gráfico. Já em F6 ele responde dúvidas dos alunos, classificando os gráficos que foram desenhados pelo grupo. Para o Grupo 3, a escolha da variável dependente e independente representou um problema, pois eles discordaram em vários momentos quais seriam os eixos que representariam o número de páginas e tempo. Rogoff (1998) ressalta que a apropriação de conhecimento ocorre à medida que o indivíduo se modifica através do envolvimento em cada questão.

O gráfico pensado pelo Grupo 3 foi um gráfico com aparência exponencial cuja abscissa representa o tempo e a ordenada representa o número de páginas. Conforme F14, uma das discussões abordou a necessidade de haver números para o tempo e para o número de páginas, porém, após alguma discussão, acabaram percebendo que poderiam resolver a tarefa sem levar em conta os números.

Ao realizar a discussão de fechamento das atividades, o professor-pesquisador se deu conta das oportunidades de aprendizagem que foram perdidas, assim como na resolução do grupo1, a resolução do grupo 3 também não começa na origem do sistema cartesiano, situação que foi reforçada na análise e interpretação dos dados, fato este que mostra a importância da reflexão da prática docente para o aprimoramento do trabalho do professor, conforme vemos em Cochran-Smith e Lytle (1999) e, em especial, em Stein et al (2008), já que a tentativa foi de antecipar possíveis resoluções e dúvidas que pudessem ser apresentadas pelos alunos, mas que em seu planejamento não foi possível contemplar em sua totalidade, mesmo porque a dinâmica de ensino e aprendizagem tem suas variações e incertezas, o imprevisto pode ser instigante nesse sentido para que o professor também faça uso da criatividade e destreza em agir na urgência a partir de seus saberes docentes.

Na resolução de uma atividade similar, a questão dos tipos de gráficos, seus significados e suas escalas devem ter uma ênfase maior, pois esses detalhes que passaram despercebidos podem representar o limiar entre o aprendizado da Matemática e a formação de obstáculos didáticos. Durante a atuação docente, o professor se vê em um ambiente volátil, onde tudo acontece ao mesmo tempo e de forma muito rápida. Desta forma, é necessária uma rápida tomada de decisões por parte do professor, que pode não abarcar todas as dificuldades apresentadas, ora por não estar em determinado grupo no momento em que acontece a discussão, ora por deixar passar despercebidas situações de aprendizagem que têm potencial para influenciar positivamente, ou negativamente, o aprendizado dos estudantes. Isso reforça a importância da reflexão sobre a própria prática, quando o professor a torna como objeto de suas aprendizagens e planejamento das próximas aulas.

Parte das discussões do Grupo 4 estão apresentadas no Quadro 5, e a resolução da tarefa desse grupo está na Figura 3 [Transcrição da resposta: o segundo gráfico foi pensado de acordo com o tempo ele lia mais e mais rápido com a variação do tempo. O tempo ia passando e as páginas iam almentando [sic] cada vez mais].

**Quadro 5:** Discussões produzidas pelo Grupo 4

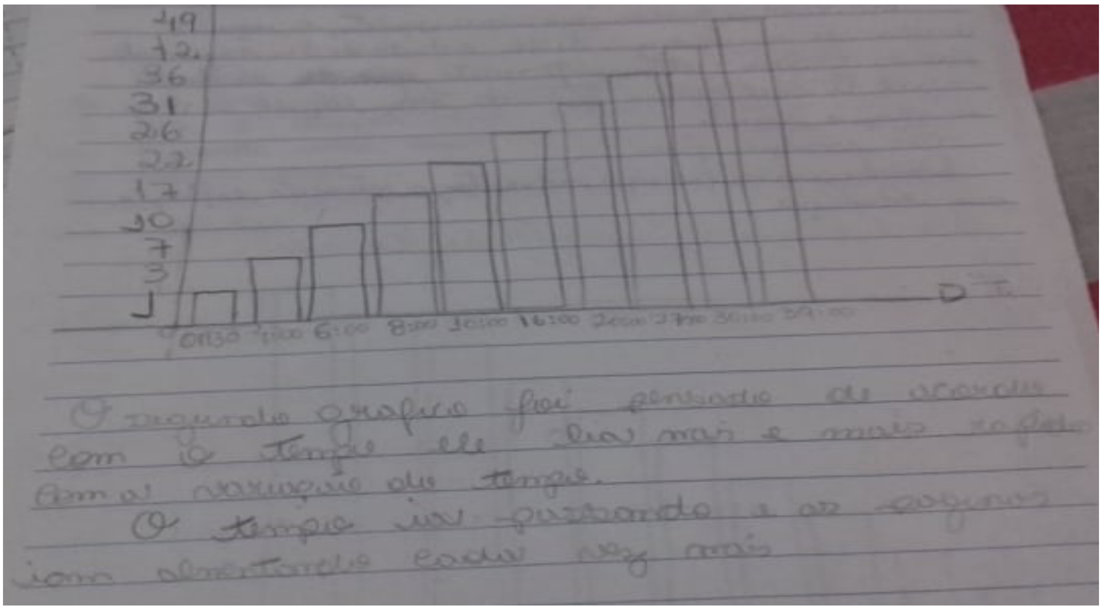
| |
|---|
| F1-A1 Quais os tipos de gráficos? |
| F2-A2 Tem aquele assim (linhas).[apresentou um desenho] |
| F3-P Existem outros tipos de gráficos? |
| F4-A2 Aquele assim (barras) e tem mais. |
| F5-A3 Mas nós temos que ler e interpretar a situação, é o que ele quer. |
| F6-A1 Ele leu mais rápido as páginas. |
| F7-A3 Se ele tivesse dado dois números para a gente, seria mais fácil. |
| F8-P Por que seria mais fácil? |
| F9-A3 Porque teríamos números para ligar. |
| F10-P Para construir a representação dessa situação é necessário que tenha números? |
| F11-A1 Ah! Professor, nós aprendemos que é preciso números para ligar. (ao que tudo indica, o aluno se referia ao gráfico de uma função produzida no ano anterior). |
| F12-A2 Assim, estamos indo de cinco em cinco, até cinquenta aqui [mostrou o eixo das ordenadas] e aqui [mostrou o eixo das abscissas] até uns dez. (apresentando um desenho, que reforça a hipótese anterior). |
| F13-P Porquê de cinco em cinco aqui (ordenada) e de dez em dez (abscissa) aqui? |
| F14-A1 Pronto! Olha que lindo ficou o gráfico. Agora o professor vem e fala que está tudo errado! |
| F15-P O que significam as barras? |
| F16-A1 A quantidade de páginas lidas naquele determinado tempo. |
| F17-P Então se eu olhar o tempo três, quantas páginas eu li? |
| F18-A2 No tempo três, li dez páginas! |
| F19-P E se eu olhar até o tempo três, quantas páginas eu li? |
| (nesses questionamentos, F15, F 17 e F19 têm o objetivo de aguçar o pensamento dos estudantes). |
| F20-A2 Li dez páginas professor. |
| F21-P O mesmo tanto? Como? |

**Fonte:** protocolo de pesquisa

Na resolução do Grupo 4, é apresentada uma estratégia diferente dos outros grupos, o gráfico de barras. Essa foi uma das possíveis estratégias elencadas no momento do planejamento docente da tarefa. A participação do professor-pesquisador neste grupo foi maior devido às dificuldades que os alunos apresentavam, eles ficaram presos à necessidade de utilizar números.

O professor-pesquisador fez questionamentos que os levaram a pensar nos tipos de gráficos, na necessidade ou não de construir escalas no gráfico e no significado do gráfico de barras conforme vemos em F3, F8 e F10, respectivamente. Quando questionado pelo professor-pesquisador o porquê de as páginas estarem postas de cinco em cinco e de dez em dez (F13), o grupo novamente se reuniu e apresentou outro gráfico agora com a representação das páginas estando postas de vinte em vinte. Assim os questionamentos do professor-pesquisador atingiram os alunos, que foram convidados a pensar e a refletir sobre seus apontamentos, como se vê nas falas F15 a F20.

**Figura 3:** Resolução da tarefa proposta pelo grupo 4



**Fonte:** Protocolo de pesquisa

Em suma, a ação do professor-pesquisador corrobora com o que Cyrino e Oliveira (2016) nos apresentam quando mencionam as etapas para se trabalhar uma tarefa exploratório-investigativa. Assim, foi possível verificar que, na apresentação da tarefa, o professor-pesquisador zelou para que os estudantes compreendessem o que estava sendo solicitado; no desenvolvimento da tarefa, em que as estratégias emergiram para a resolução de problemas, ele fez tentativas para subsidiar a seleção e o sequenciamento feito pelos estudantes; no momento de discussão coletiva, pode propiciar o diálogo fazendo alusão às diferentes estratégias apresentadas por eles; e, por fim, no momento de sistematização da aprendizagem, evidenciou o conhecimento matemático a partir da produção dos alunos. Face ao exposto, é possível pontuar que as tarefas exploratório-investigativas apresentam potencial de qualificar o ensino e a aprendizagem a partir da dinâmica pedagógica do professor face ao contexto de sala de aula, que se permite elencar seus saberes docentes no “aqui e agora”, no sentido de incentivar e provocar os alunos para avançarem em suas ideias e feitos.

## 5 REFLEXÃO DOCENTE ACERCA DOS RESULTADOS APRESENTADOS

A tarefa foi pensada para estimular os alunos a pensarem na variação de uma magnitude tendo outra variação dependente da primeira magnitude. Nota-se que essa é uma tarefa que não é comum na educação básica e exige o saber disciplinar ao qual Gauthier(1998) faz referência, o que pode gerar um certo desconforto docente, pelo próprio domínio necessário do conteúdo e porque os alunos poderiam simplesmente não aceitar a pensar no assunto e responder o que se pedia. Contudo, isso não aconteceu. Todos os alunos envolveram-se no processo e a tarefa foi realizada. Logo, a tarefa atingiu seus objetivos, pois a turma respondeu às questões propostas chegando à conclusões plausíveis e esperadas no ensino deste conteúdo, utilizando estratégias variadas, houve envolvimento dos estudantes o que ajudou a aliviar a tensão causada pela situação de trabalhar em sala um tipo de tarefa com a qual o docente não estava acostumado.

Por outro lado, ter feito o planejamento estabelecendo objetivo da tarefa, possíveis dificuldades e intervenções trouxe mais segurança, sendo maior a sensação de ter a situação sob controle, justamente por não ter que lidar com o improviso.

A ação de pesquisar a própria prática pode mostrar as limitações da prática docente, haja vista que tudo acontece de forma muito rápida e exige do professor o apontamento de outras possibilidades para maximizar o aprendizado. Ao realizar a pesquisa da própria prática, o professor-pesquisador observou que poderia realizar outros questionamentos como: Quais tipos de gráficos os alunos conheciam? Quais as aplicações para cada tipo de gráfico? Qual a necessidade ou não da construção da escala do gráfico? Qual o significado da escala degenerada utilizada por alguns grupos? Qual o significado do gráfico começar ou não pela origem do sistema cartesiano?

A resolução da tarefa ainda fez o professor-pesquisador refletir sobre a forma de ensinar gráficos. Por que os alunos disseram que era preciso ter números para fazer gráficos (Quadro 5, F11-A1)? Que tipos de tarefas poderiam ser trabalhadas com os estudantes para que eles tivessem essa habilidade de avaliar covariações ou mesmo de fazer gráficos que denotassem um comportamento?

Para Fontana (2000, p. 19), “a mediação do outro faz emergir na mente do aluno um sistema de processos complexos de compreensão ativa e responsiva, juntamente com as experiências e as habilidades por ele já adquiridas”, isso nos leva a refletir sobre a importância de mais momentos como estes.

Desta forma, acredita-se que o objetivo da tarefa para o grupo foi alcançado e ainda superou as expectativas do professor-pesquisador; houve harmonia entre os integrantes, que negociaram significados, discutiram estratégias e realizaram a produção escrita. Quanto ao objetivo do professor-pesquisador, este também foi alcançado, mediante suas intervenções, as quais possibilitou aos grupos pensar, refletir sobre suas ideias e, em alguns momentos, mudar de opinião, construindo novos saberes. Para Fontana (2000), o grande desafio é esperar o movimento do outro, o tempo de elaboração e resistir à tentação de impor os caminhos.

## 5.1 Algumas discussões sobre o fechamento das atividades

Para realizar o fechamento das atividades, cada grupo apresentou à classe sua resolução junto a uma breve explicação. Neste momento, surgiu a discussão entre os alunos sobre qual seria a resolução correta, essa manifestação dos estudantes permitiu ao professor-pesquisador pensar sobre as concepções que aparecem arraigadas nas falas deles, o que o levou a “refletir no sentido de considerar os pré-conceitos em relação à Matemática”, haja vista que para muitos estudantes e professores o resultado é mais importante que o raciocínio ou a interpretação de uma situação genérica. Nessa situação, houve soluções que remetiam a funções exponenciais, cujo gráfico é representado por uma curva ascendente e a funções do primeiro grau, cujo gráfico é representado por uma reta. Então o professor-pesquisador fez um apanhado geral com as produções dos grupos, com o objetivo de levar os alunos a perceberem quais gráficos melhor representavam a solução da tarefa, mas sem desconsiderar as estratégias e percursos realizados por eles na resolução da tarefa. Fez isso mediante o propósito de convidá-los a repensar sobre as diferentes formas de se trabalhar em uma tarefa, sem menosprezar o caminho percorrido por cada grupo de estudantes.

Cada grupo fez suas colocações e o professor-pesquisador conduziu a discussão final conforme será apresentado no Quadro 6.

**Quadro 6:** Discussões sobre o fechamento das atividades

| |
|---|
| F1-P Vemos que há duas estratégias em comum, o gráfico que representa uma curva exponencial e o gráfico que representa uma reta (função do primeiro grau). |
| F2-G4 Professor são três tipos de gráficos, tem o nosso que é de barras! |
| F3-P Podemos dizer que o gráfico de vocês pode ser representado por uma reta? |
| F4-G4 Acho que não professor! |
| F5-P Vamos fazer o seguinte, traçar uma linha que passa pelo meio de cada uma das barras. |
| F6-G3 E não é que apareceu uma reta! |
| F7-G4 Nós jamais pensaríamos nisto. |
| F8-P E nos gráficos de curva exponencial, há alguma coisa em comum? |
| F9-G1 Há, eles não começam do zero! |
| F10-P E o que isto quer dizer? |
| F11-G3 Quer dizer que quando abrimos o livro já temos páginas lidas? |
| F12-P Isso realmente acontece? |
| F13-G1 Não, pois o número de páginas varia conforme vamos lendo. |
| F14-P E esses gráficos aqui (reta) o que representam? |
| F15-G3 Que ele lê sempre o mesmo tanto de páginas. |
| F16-P Exatamente. |
| F17-G4 Então o nosso gráfico não deveria ser assim. |

**Fonte:** protocolo de pesquisa

Por meio das discussões de fechamento, os integrantes dos grupos perceberam que as suas estratégias não responderam adequadamente a questão, porém foi enfatizada a importância da mobilização realizada por eles para encontrar táticas para a resolução da tarefa, a argumentação para defender seu modo de agir e a apresentação do seu trabalho aos outros grupos. Durante essa discussão, foram levantadas as características de cada gráfico e abordagem de pontos relevantes como se vê nas falas 5, 8, 12 e 14 do quadro 6. Essas discussões representam um aspecto importante da atuação docente, pois foi neste momento que o professor-pesquisador realizou questionamentos que abarcaram todas as estratégias produzidas pelos estudantes.

Porém, no momento da análise dos dados, o professor-pesquisador se deu conta que a direção por ele tomada aponta para a concepção de ensino centrada no professor, o que o incomodou, visto que intencionava trabalhar pela mediação do conhecimento. Tais indícios foram por ele pontuados como: faz os questionamentos conforme seu interesse, não dando muito espaço a outros pontos de vista. Esse direcionamento transformou uma atividade exploratório-investigativa na resolução de um problema, e que foi percebido a partir da reflexão da própria prática. Fontana (2000) afirma que é preciso buscar equilíbrio entre evitar o autoritarismo e apresentar uma falsa neutralidade diante de situações adversas, buscar este equilíbrio não é uma tarefa fácil, muitas vezes o professor nem percebe que está defendendo somente o seu ponto de vista durante a aplicação das atividades.

Para Barbier (2002, p. 115), a investigação da própria prática nos permite “conhecer a realidade do mundo tal qual nós a percebemos nas nossas interações”. É preciso compreender que o professor deve se colocar no centro de seu próprio percurso (DEROUET,1996), fazendo questionamentos que proporcionem a reflexão nos alunos. Freire (1997) questiona como a pesquisa poderia permitir escolhas/tomadas de decisão mais coerentes e pertinentes e Barbier (2002) diz que é necessário conhecer em que medida a pesquisa da própria prática pode contribuir para o professor ver e escutar de forma mais sensível o universo afetivo, imaginário e cognitivo do outro, pois dessa forma o alcance de sua prática pode ser maximizado. A gravação e a posterior análise do professor-pesquisador possibilitou o adequado distanciamento e reflexões sobre a condução do seu próprio trabalho.

Diante das discussões apresentadas, é possível perceber que a pesquisa da própria prática possibilitou ao professor-pesquisador momentos de aprendizagem dos saberes apontados por Gauthier (1998) para a profissionalização docente. Assim, foi possível apresentar e discutir esses saberes como: o disciplinar, do conteúdo matemático ensinado, como foi o estudo do comportamento de um gráfico que representa uma situação genérica e problematizada pelo professor-pesquisador a partir do domínio desse conhecimento; o curricular, relativo à transformação da disciplina em programa de ensino, que naquele contexto de sala de aula veiculou caminhos para a abordagem do conteúdo; das ciências de educação, relacionado ao saber profissional específico que não está relacionado com a ação pedagógica, mas que se pode verificar sutilmente nas relações didáticas mediante o domínio dos fundamentos da educação matemática face à sua disposição em planejar um conteúdo a partir de tarefas exploratório-investigativas; saber da tradição pedagógica, relativo ao saber dar aulas, que pode ser mudado e adaptado pelo saber da experiência e validado pelo saber da ação pedagógica, revelado em suas reflexões durante o processo investigado; saber da experiência, que esteve relacionado aos julgamentos considerados na ação docente e o saber da ação pedagógica, que configurou sua experiência de ensino testada e publicizada.

Juntos, esses saberes subsidiam o professor na construção de seus próprios caminhos, dando oportunidade de mudanças de postura e atitude, bem como na interação com os alunos, em como realiza os direcionamentos e como lida com as dificuldades encontradas em sala de aula. A experiência do professor-pesquisador, em foco neste estudo, corrobora com Lima (2006) quando menciona sobre a construção de saberes pedagógicos, pois no momento em que começou a compreender a própria prática; primeiro com aplicação das tarefas, depois com a leitura dos dados, e por último com sua análise e as leituras realizadas, começou a refletir sobre sua atuação docente, sobre os saberes mobilizados e implicações pedagógicas que traziam ao processo de ensino e aprendizagem. Neste sentido, a pesquisa da própria prática produz o que Morin (1999) chama de incitação do bem pensar e o que Bourdieu (1998) relaciona com os efeitos e as implicações nas formas de poder, de participação e de ação, efeitos que alavancam a formação e a profissionalização docente.

Outro aspecto importante é a relação professor-aluno, que pode atribuir significado à reflexão docente sobre sua ação de ensinar em vista das configurações apresentadas pelos estudantes, o que lhe permite pensar e repensar seu planejamento de forma espiral e contínua, quando este está aberto ao movimento de formação permanente.

## 6 ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

Este trabalho evidenciou a importância do cumprimento das três etapas necessárias para o professor que deseja investigar a própria prática, face à realização de uma tarefa exploratória: o planejamento que fundamenta e subsidia o trabalho; a aplicação, que é momento de interação entre professor e os estudantes e a análise e interpretação dos dados, momento no qual que o professor realiza a pesquisa da própria prática. Juntas, essas etapas dão condições ao professor-pesquisador direcionar o seu trabalho, buscando consonância entre o planejado e o realizado, podendo assim desenvolver sua prática docente e adequá-la às necessidades da comunidade que leciona, veiculando metodologias personalizadas, que atendam às especificidades daquele grupo de alunos, buscando resultados mais expressivos em suas aprendizagens e proporcionando, entre outras coisas, a mudança na postura do professor que percebeu a importância da interação entre os grupos e os integrantes de cada grupo, pois o que a princípio parecia apenas conversa, mobilizou e produziu conhecimentos.

A análise dos resultados permitiu ao professor-pesquisador observar o quanto o uso de tarefas exploratórias proporciona uma excelente oportunidade de aprendizagem aos integrantes do processo educativo (alunos, professores e outros profissionais da educação), os quais têm a oportunidade de mobilizar conhecimentos, elaborar estratégias, discutir diferentes formas para solucionar a tarefa. A reflexão sobre sua atuação em sala de aula permitiu, entre outros pontos, notar a participação de cada aluno na resolução da tarefa, as discussões sobre qual matemática responderia melhor a tarefa, a negociação de símbolos e significados, a produção matemática, a escrita necessária à resolução da tarefa e o alcance das intervenções realizadas pelo professor. Em alguns casos, foi possível ao professor-pesquisador verificar a necessidade de novas intervenções, de perguntas mais claras que proporcionassem mais reflexões nos alunos, bem como aproveitar melhor as oportunidades de desenvolver raciocínio matemático dos alunos, como por exemplo, questionando o significado de vários tipos de gráficos em relação ao problema em análise.

Em relação às questões “Como a pesquisa sobre a própria prática pode fornecer subsídios ao professor para a reflexão sobre o planejamento e a ação docente?” e “Quais os efeitos dessa prática reflexiva para o professor que pesquisa a própria prática?”, consideramos que os problemas de aprendizado em Matemática podem ser repensados em vista da reflexão docente sobre sua ação a perpassar pelo planejamento e replanejamento desta em busca de melhorias para as necessidades veiculadas em uma situação real de aprendizagem, essa prática reflexiva permite ao professor-pesquisador realizar uma autocrítica a respeito do seu trabalho, do seu desempenho em sala de aula, da sua capacidade de lidar com as dificuldades de ensino, de aprendizagem e de comunicação com os estudantes, tem a oportunidade de identificar os pontos onde sua prática apresentou acertos, onde deve ser reforçada e onde precisa melhorar. Essa análise oferece subsídios ao aprimoramento profissional e pessoal do professor-pesquisador da própria prática. No episódio relatado neste artigo, essa prática reflexiva permitiu reconhecer momentos em que sua intervenção poderia ser mais efetiva, e vislumbrar caminhos mais promissores para trabalhar com gráficos, por exemplo.

## REFERÊNCIAS

BARBIER, R. **A pesquisa-ação**. Trad. Lucie Didio. Brasília: Plano Editora, 2002.

BOURDIEU, P. **O poder simbólico**. Trad. Fernando Tomaz. 2ª ed. Rio de Janeiro: Bertrand Brasil, 1998.

CARARO, E.F.F; LOUREIRO, D. Z.: KLUBER, T. E. Metodologias de pesquisa em investigação sobre a formação de professores que ensinam matemática, **Hipátia**, São Paulo, v. 5, n. 1, p. 143-154, 2020.

CENGIZ, N., KLINE, K.; GRANT, T. J. Extending students' mathematical thinking during wholegroup discussions. **Journal of Mathematics Teacher Education**, Dordrecht, n. 14, p. 355-374, 2011.

CHARLOT, B. **Relação com o saber, formação dos professores e globalização**: questões para educação hoje. Porto Alegre: Artmed, 2005.

CYRINO, M. C. C. T.; OLIVEIRA, H.M. Ensino exploratório e casos multimídia na formação de professores que ensinam matemática. In: CYRINO, M. C. C. T. (Org.). **Recurso multimídia para a formação de professores que ensinam matemática**: elaboração e perspectivas. Londrina: EDUEL, 2016. p.19-32.

COCHRAN-SMITH, M.; LYTLE, S. L. Relationships of knowledge and practice: teacher learning in communities. **Review of Research in Education,** USA, v.24, p. 249-305, 1999.

CLARK, C. M. ;PETERSON, P. P. Teachers' thought and processes. In: WITTROCK, M.C. (Ed.). **Hanbook of Research on Teaching**. New York, NY: Macmillan,1986. p.255-296.

DEROUET, J.L. O funcionamento dos estabelecimentos de ensino em França: um objecto científico em redefinição. In: BARROSO, J. **O estudo da escola**. Porto: Porto Editora, 1996. p. 61-85.

FREIRE, P. **A importância do ato de ler**: em três artigos que se complementam. 33. ed. São Paulo: Cortez, 1997.

FORQUIN, J.C. Saberes escolares, imperativos didáticos e dinâmicas sociais. **Teoria da Educação**, n. 5, p.28-49, 1992.

FONTANA, R. A. **Mediação pedagógica na sala de aula**. 3 ed. Campinas: Autores Associados, 2000. (Coleção Educação Contemporânea).

GAUTHIER, C. **Por uma teoria da Pedagogia:** pesquisas contemporâneas sobre o saber docente. Ijuí: Unijuí, 1998.

GIL, A. C. **Como Elaborar Projetos de Pesquisa**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2002.

LIMA, C. N. M. F.**Investigação da própria prática docente utilizando tarefas exploratório-investigativas em um ambiente de comunicação de idéias Matemáticas no Ensino Médio**. 2006. 204p. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade São Francisco, Itatiba, 2006.

MESTRE; C. **O desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos do 4.º ano de escolaridade**: Uma experiência de ensino. 2014. Tese (Doutoramento em Educação na especialidade de Didática da Matemática) - Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, Lisboa, 2014.

MORIN, E. **O Método**: O conhecimento do conhecimento. Porto Alegre: Sulina, 1999.

PONTE, J.P. Investigação sobre investigações matemáticas em Portugal. **Investigar em Educação**, Lisboa: APM, 2003. Disponível em http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/03-Ponte(Rev-SPCE).pdf. Acesso em: 18 mai. 2020.

PONTE, J.P. Investigação colaborativa: Potencialidades e problemas. In: GTI (Org.). **Reflectir e investigar sobre a prática profissional.** Lisboa: APM, 2002. p.5-55.

PONTE, J. P. Gestão curricular em Matemática. In: GTI (Org.). **O professor e o desenvolvimento curricular**. Lisboa: APM, 2005. p.11-34

PONTE, J. P.; BOAVIDA, A. M.; GRAÇA, M.; ABRANTES, P. **Didáctica da Matemática**. Lisboa: Ministério da Educação -Departamento do Ensino Secundário, 1997.

PONTE, J. P.; MATA-PEREIRA, J.; QUARESMA, M. Ações do professor na condução de discussões matemáticas**, Quadrante**, Lisboa, v. 22, n. 2, p. 55-81, 2013.

POZO, J. **Aprendices e Maestros**. Madri: Alianza Editorial, 1996.

ROGOFF, B. Observando a atividade sociocultural em três planos: apropriação participatória, participação guiada e aprendizado. In: WERTSH, J.V.; RIO, P.; ALVAREZ, A. (Orgs.) **Estudos socioculturais da mente**. Trad. Maria da Graça Gomes Paiva e André Rossano Teixeira Camargo. Porto Alegre: ArtMed, 1998. p. 123-142.

SERRAZINA, L. Planificação do ensino e aprendizagem da matemática. In: **A Prática dos Professores**: Planificação e discussão coletiva na sala de aula. 1ª Ed. Porto: APM, 2017. p. 09-31.

SHERIN, M. G. A balancing act: developing a discourse community in a mathematics classroom. **Journal of Mathematics Teacher Education**, Dordrecht, n. 5, p. 205-233, 2002.

STEIN, M. K, ENGLE, E. A, SMITH, M. S, HUGHES, E. K, Orchestrating productive mathematical discussions: five practices for helping teachers move beyond show and tell. **Mathematical Thinking and Learning**, Abingdon, n. 10, p. 313-340, 2008.

TUDELLA, A.; FERREIRA, C.; BERNARDO, C.; PIRES, F.; FONSECA, H.; SEGURADO, I.; VARANDAS, J. A dinâmica de uma aula com investigações. In: ABRANTES, P.; PONTE, J.P.; FONSECA, H.; BRUNHEIRA, L. (Org.). **Investigações matemáticas na aula e no currículo**. Lisboa: Projeto MPT e APM, 1999. p. 87-96.

ZEICHNER, K.M., DINIZ-PEREIRA, J. E. Pesquisa dos educadores e formação docente voltada para a transformação social. **Cadernos de pesquisa**, São Paulo, v. 35, n. 125, p. 63-80, mai/ago. 2005.

**Submetido em maio de 2020.**
**Aprovado em setembro de 2020.**

# O ENSINO DE GEOMETRIA UTILIZANDO O OBJETO MATEMÁTICO POLIEDROS DUAIS

## LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA UTILIZANDO EL OBJETO MATEMÁTICO POLIEDROS DUALES

MOHR, Ana Regina da Rocha[1]

JELINEK, Karin Ritter[2]

SILVA, Patrícia Lima da[3]

**RESUMO**

Este trabalho se constitui como um relato de experiência proveniente de um trabalho de pesquisa que teve por objetivo propor uma alternativa para o ensino de Geometria, por meio da utilização de um objeto matemático ainda pouco explorado no ambiente escolar, a saber: os Poliedros Duais. A proposta aqui relatada se constituiu como uma pesquisa participante, realizada com 20 estudantes do 3º ano do Ensino Médio de uma escola pública, e intentou a verificação, por meio de construções, da existência de apenas cinco tipos de poliedros regulares, bem como a construção do tetraedro regular e seu dual e do hexaedro regular e seu dual. Embora tenha se ressaltado a dificuldade em encontrar fontes de pesquisas confiáveis que tratassem dos poliedros duais, foi possível estruturar um conjunto de atividades que contribuísse para alcançar o objetivo proposto, visto que encontrou-se uma alternativa para o ensino dos Poliedros Duais. Ao longo do estudo também se percebeu que, algumas vezes, as expressões “poliedros de Platão” e “poliedros regulares” são utilizadas como sinônimos em algumas literaturas, o que entendemos não ser adequado uma vez existem poliedros de Platão que não são regulares.

**Palavras-chave**: Ensino de Matemática. Geometria. Poliedros Duais.

**RESUMEN**

Este trabajo se constituye como un relato de experiencia proveniente de un trabajo de investigación que tuvo por objetivo proponer una alternativa a la enseñanza de la Geometría en la que se utilice un objeto matemático que todavía está poco explorado en el ambiente escolar, a saber: los Poliedros Duales. La propuesta aquí relatada se constituyó como una investigación participante, realizada con 20 estudiantes del 3º año de la Enseñanza Secundaria de una escuela pública, y propuso la verificación por medio de construcciones de la existencia de sólo cinco tipos de poliedros regulares, así como la construcción del tetraedro regular y su dual y del hexaedro regular y su dual. Aunque se haya resaltado la dificultad en encontrar fuentes de investigación confiables que trataran sobre los poliedros duales, fue posible estructurar un conjunto de actividades que contribuyera a alcanzar el objetivo propuesto, visto que fue posible encontrar una alternativa a la enseñanza de los Poliedros Duales. A lo largo del estudio también se percibió que, a veces, las expresiones “poliedros de Platón” y “poliedros regulares” se utilizan como sinónimos en algunas literaturas, lo que entendemos que no es adecuado una vez que existen poliedros de Platón que no son regulares.

**Palabras clave:** Enseñanza de Matemática. Geometría. Poliedros Duales.

[1] Mestre em Ensino de Ciências Exatas pela Universidade Federal do Rio Grande (FURG). Professora da Rede Básica de Ensino do Rio Grande do Sul, Santo Antônio da Patrulha, RS, Brasil. Endereço-eletrônico: ar.mohr@hotmail.com.

[2] Doutora em Educação pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS). Docente do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas do Instituto de Matemática, Estatística e Física da Universidade Federal do Rio Grande (FURG), Santo Antônio da Patrulha, RS, Brasil. Endereço eletrônico: karinjelinek@furg.br.

[3] Mestre em Matemática pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRS). Técnica Matemática do Instituto de Matemática, Estatística e Física da Universidade Federal do Rio Grande (FURG), Santo Antônio da Patrulha, RS, Brasil. Endereço eletrônico: patriciasilva@furg.br.

## 1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

A palavra Matemática, como utilizada hoje, começou a aparecer somente no século XIV. “No grego, matema (ou matemata) significa algo como aprender e explicar. Todos os pensadores, artesãos e produtores gregos, que hoje são lembrados como os pioneiros da Matemática, buscavam sobreviver no seu ambiente e transcendê-lo” (D’AMBROSIO, 2011, p.19).

De maneira semelhante, surgem os primórdios da Geometria. Desde os tempos mais antigos, os povos vêm desenvolvendo o pensamento geométrico, muitas vezes de forma inconsciente. Essas pessoas deixaram muitos vestígios sobre seus conhecimentos nessa área e muito do que se conhece hoje sobre Geometria se deve a eles. Segundo Roque, “os mesopotâmicos e egípcios realizavam cálculos com medidas de comprimentos, áreas e volumes, e alguns de seus procedimentos aritméticos devem ter sido obtidos por métodos geométricos, envolvendo transformações de áreas” (ROQUE, 2012, p. 93).

Portanto, a Geometria é uma área da Matemática que estuda diversos objetos e situações que têm relação com o cotidiano, surgindo, dessa forma, a oportunidade de apreciar as particularidades da Matemática. Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) afirmam que o ensino de Geometria

> deve possibilitar aos alunos o desenvolvimento da sua capacidade de desenvolver problemas práticos do cotidiano, como, por exemplo, orientar-se no espaço, ler mapas, estimar e comparar distâncias percorridas, reconhecer propriedades de formas geométricas básicas, saber usar as diferentes unidades de medida. Também é um estudo em que os alunos podem ter oportunidade especial, com a certeza, não a única, de apreciar a faceta da matemática que trata de teoremas e argumentações dedutivas. (BRASIL, 2006, p.75).

Dessa maneira, para auxiliar no ensino da Geometria, convém que haja a busca por alternativas que possam torná-lo mais atrativo, desenvolvendo a iniciativa, o raciocínio dedutivo e o pensamento crítico, a fim de minimizar as dificuldades encontradas pelos alunos e professores, visto que o ensino dessa área da Matemática acabou por ficar afastado dos currículos por um longo período. Passos e Nacarato (2014, p. 01) destacam que:

> Depois de longo período de abandono quase absoluto no final do século XX, o ensino de geometria na educação básica começa a fazer parte de debates e estudos acadêmicos, gerando muitas discussões em congressos nacionais e internacionais de Educação Matemática, e deu lugar a muitas pesquisas de mestrado e doutorado, tanto no Brasil como no exterior. O ensino de geometria nas escolas, até então relegado às últimas páginas dos livros didáticos, volta a compor, de forma mais integrada e ao longo das unidades, a maioria dos livros didáticos de matemática quando esses passam a contemplar, de certo modo, orientados pelos Parâmetros Curriculares Nacionais.

Diante disso, a fim de auxiliar nessas discussões sobre o ensino de Geometria, este trabalho teve como objetivo propor uma alternativa para o ensino de Geometria, por meio da utilização de um objeto matemático ainda pouco explorado no ambiente escolar: os poliedros duais. A ideia da atividade foi criar a possibilidade de uma aula prática, investigativa e de construção, além de permitir aos alunos a construção de seu próprio material de estudo.

Os dados experimentais deste estudo foram obtidos por meio de uma intervenção pedagógica, realizada com 20 alunos de uma turma do 3º ano do Ensino Médio, em uma escola pública da rede estadual do Rio Grande do Sul no ano de 2018. Inicialmente, realizou-se no laboratório de informática a manipulação do *software Poly*[4] *Pro* com o objetivo de os alunos conhecerem e analisarem os poliedros regulares. Em seguida, os alunos comprovaram a existência de apenas cinco tipos de poliedros regulares através da construção e da análise das alternativas possíveis. No segundo momento da intervenção pedagógica, foram feitas as construções dos poliedros regulares com polígonos.

No terceiro momento, foi feita a construção do tetraedro, do hexaedro e do octaedro com canudos (optou-se, neste estudo, por construir apenas esses três poliedros regulares em função do grau de dificuldade das outras construções e do tempo proposto para a atividade). No quarto momento, a professora levou alguns poliedros duais para os alunos manipularem e explicou alguns conceitos relacionados a esses poliedros. Durante a explicação, e por meio de alguns questionamentos, os alunos conseguiram identificar que era possível associar alguns poliedros já construídos e realizaram a construção do tetraedro e do hexaedro e de seus respectivos duais.

Dessa maneira, este estudo está estruturado em seções. A primeira seção refere-se aos poliedros de Platão e aos poliedros regulares, destacando que existe diferença entre eles. A segunda seção refere-se aos poliedros duais, a terceira apresenta os procedimentos metodológicos e a última traz os resultados obtidos com este estudo e as considerações finais.

## 2 POLIEDROS DE PLATÃO E POLIEDROS REGULARES

Segundo Boyer (1999), Platão expôs suas ideias sobre os poliedros regulares pela primeira vez em um diário intitulado *Timaeus*[5], presumivelmente nome de um pitagórico, que serviu como principal interlocutor. Nesse diário, os poliedros regulares foram chamados de “corpos cósmicos” ou “sólidos platônicos” devido à explicação sobre os fenômenos científicos.

Boyer (1999) ainda complementa que os cinco poliedros regulares que, mais tarde, foram nomeados poliedros de Platão eram associados aos elementos da natureza: o tetraedro ao fogo; o hexaedro à terra; o icosaedro à água; e o octaedro ao ar. No entanto, o dodecaedro foi associado ao universo, pois Platão o considerava o quinto elemento do universo em razão da admiração que os pitagóricos possuíam por esse poliedro.

Para Dolce e Pompeo (1993, p. 130),

> um poliedro é chamado poliedro de Platão se, e somente se, satisfazer às seguintes condições: a) todas as faces têm o mesmo número de arestas; b) todos os ângulos poliédricos têm o mesmo número de arestas; c) vale a relação de Euler ($V - A + F = 2$).

Mas vale ressaltar que os poliedros de Platão não são apenas os cinco tipos de poliedros regulares. Assim, “existem cinco, e somente cinco, classes de poliedros de Platão” (DOLCE; POMPEO, 1993, p. 130). O autor caracteriza classe como um conjunto de poliedros que satisfazem às condições para serem considerados um poliedro de Platão. Dessa forma, nota-se, por exemplo, que um prisma reto de base quadrada satisfaz a todas as condições apresentadas, portanto, é um poliedro de Platão. Porém, se todas as suas faces não forem quadradas, ele não pode ser

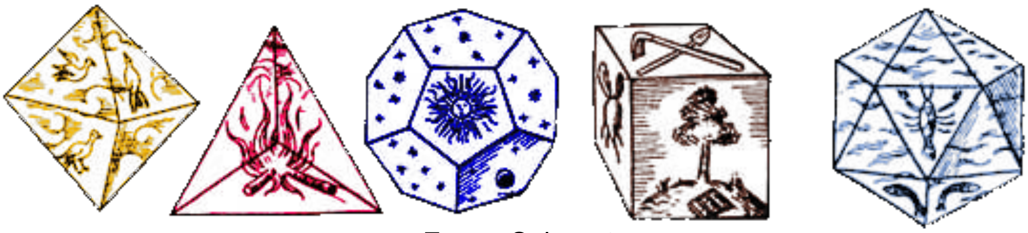
[4] *Poly* é um programa *shareware* desenvolvido em junho de 2003, sendo de responsabilidade da empresa Pedadoguery *Software* Inc., que disponibiliza gratuitamente no endereço digital <http\\:www.peda.com/poly/> uma versão avaliativa completa.

[5] *Timaeus* é um dos diálogos de Platão, principalmente na forma de um longo monólogo do personagem-título, escrito por volta de 360 a.C. O trabalho apresenta a especulação sobre a natureza do mundo físico e os seres humanos (BOYER, 1999).

considerado um poliedro regular, visto que "um poliedro convexo é regular quando: a) suas faces são polígonos regulares e congruentes; b) seus ângulos poliédricos são congruentes" (DOLCE; POMPEO, 1993, p. 132). Os poliedros regulares possuem a seguinte propriedade: "existem cinco, e somente cinco, tipos de poliedros regulares. [...] Todo poliedro regular é um poliedro de Platão, mas nem todo poliedro de Platão é um poliedro regular" (DOLCE; POMPEO, 1993, p. 133).

Portanto, a existência de apenas cinco tipos de poliedros regulares justifica-se em função de seus ângulos poliédricos, visto que, para formar um ângulo poliédrico, são necessárias, no mínimo, três faces, sendo que a soma de seus ângulos não pode ser igual ou maior do que 360°. A Figura 1 traz os cinco poliedros regulares com a ilustração dos elementos associados, por Platão, a cada um deles.

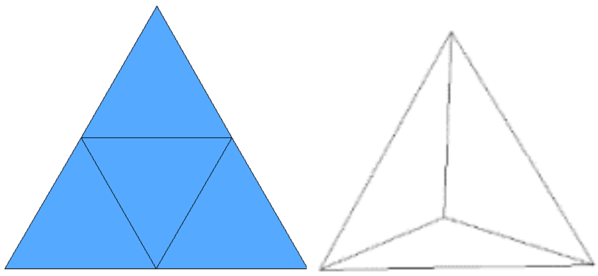
**Figura 1:** Poliedros de Platão



Fonte: Sulman[6]

Buscando analisar a Relação de Euler para tais poliedros, tem-se que o tetraedro regular é composto por triângulos equiláteros, conforme se pode observar na Figura 2. Em cada vértice do tetraedro concorrem três arestas. O tetraedro possui quatro faces, quatro vértices e seis arestas.

**Figura 2:** Tetraedro regular



Fonte: *Software Poly Pro*

O hexaedro regular é o único poliedro regular cujas faces são quadradas, conforme se pode notar na Figura 3. Em cada vértice do hexaedro concorrem três arestas, e todas as faces desse poliedro possuem quatro arestas. O hexaedro possui seis faces, oito vértices e doze arestas.

Outro poliedro que também é formado por triângulos equiláteros é o octaedro regular. Ele é composto por oito faces triangulares, seis vértices e doze arestas, sendo que, em cada vértice do octaedro, concorrem quatro arestas, conforme mostra a Figura 4.

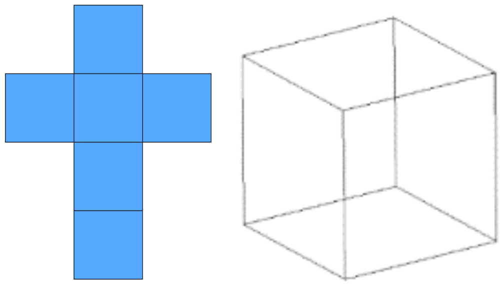
O dodecaedro regular é um poliedro composto por faces pentagonais regulares, como se pode verificar na Figura 5. Em cada vértice do dodecaedro concorrem três arestas, e todas as faces

[6] Site Pitágoras e o Pitagorismo. Disponível em: <http://filovida.org/wp-content/uploads/2015/11/solidos-de-platon.gif>. Acesso em: 28 mar. 2018.

desse poliedro possuem cinco arestas. O dodecaedro possui doze faces, vinte vértices e trinta arestas.

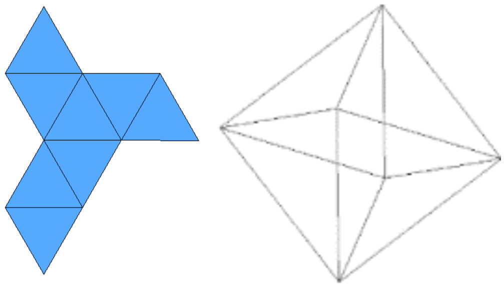
O icosaedro regular também é um poliedro composto por faces triangulares equiláteras, conforme se pode observar na Figura 6. Em cada vértice do icosaedro concorrem cinco arestas, e todas as faces desse poliedro possuem três arestas. O icosaedro possui vinte faces, doze vértices e trinta arestas.

**Figura 3:** Hexaedro regular



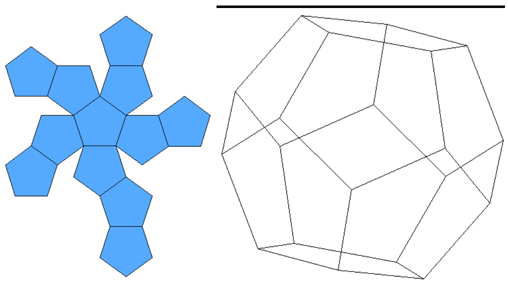
Fonte: *Software Poly Pro*

**Figura 4:** Octaedro regular



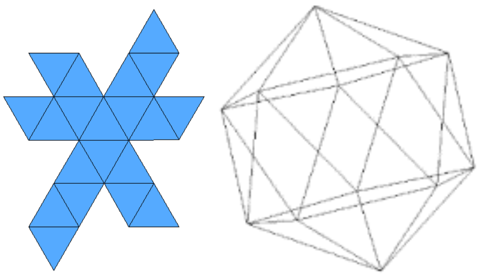
Fonte: *Software Poly Pro*

**Figura 5:** Dodecaedro regular



Fonte: *Software Poly Pro*

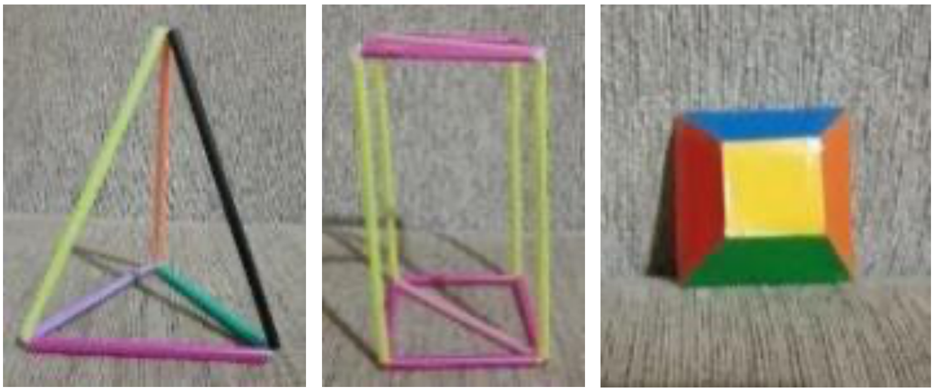
**Figura 6:** Icosaedro regular



Fonte: *Software Poly Pro*

Assim, apresentam-se os cinco tipos de poliedros regulares existentes. Cada um desses cinco tipos de poliedros regulares pertence a uma das cinco classes de poliedros de Platão. A Figura 7 mostra alguns poliedros de Platão que não são regulares a fim de ilustrar o fato de que nem todo poliedro de Platão é regular.

**Figura 7:** Tetraedro não regular, hexaedros não regulares



Fonte: Elaborado pelas autoras

A primeira imagem é a de um tetraedro com apenas três faces congruentes. Esse fato não o torna um poliedro regular, mas ele continua sendo um poliedro de Platão. Esse poliedro é conhecido como pirâmide de base triangular. Isso também acontece com as seguintes imagens dessa figura, que pertencem à classe do hexaedro. A segunda imagem, conhecida como tronco de pirâmide de base quadrada, possui todas as suas faces formadas por quadriláteros: quatro trapézios congruentes entre si e dois quadrados não congruentes. A última imagem é conhecida como prisma de base quadrada. Ele possui quatro faces congruentes e duas bases congruentes entre si.

## 3 POLIEDROS DUAIS

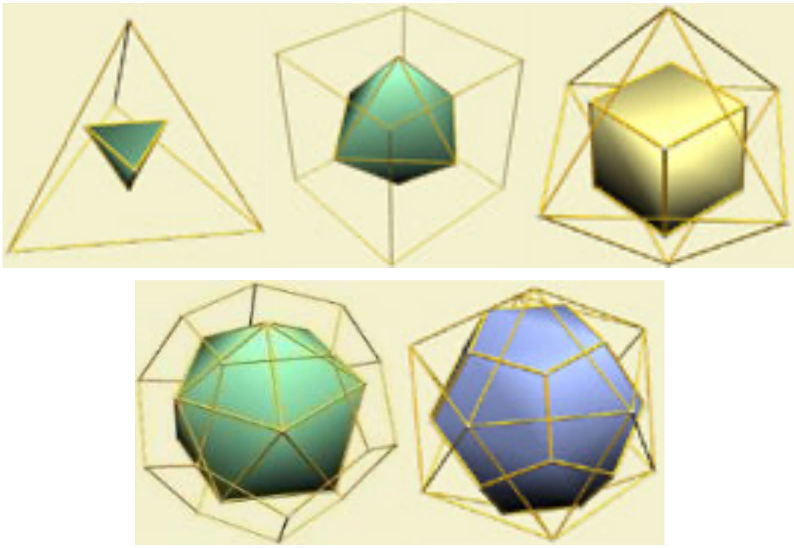
O dual de um poliedro é o nome dado ao poliedro que se obtém quando se une através de segmentos de reta o centro das faces adjacentes de um poliedro. Dessa forma, cria-se um poliedro dentro de outro poliedro, de modo que os vértices do poliedro interior coincidam com o centro das faces do poliedro exterior. Logo, “consideram-se dois poliedros como duais quando um está inscrito no outro, de tal forma que os vértices do poliedro inscrito são os centros das faces[7] do poliedro circunscrito” (KALEFF, 2003, p. 105). Ou seja, construir o poliedro dual de um poliedro regular é inscrever um poliedro em outro de modo que os vértices do poliedro inscrito coincidam com os centros das faces do poliedro original. A Figura 8 mostra os poliedros regulares com seus respectivos duais.

Observa-se, então, que o dual do tetraedro é o próprio tetraedro. O dual do hexaedro é o octaedro, bem como o dual do octaedro é o hexaedro. O dual do dodecaedro é o icosaedro, da mesma forma que o dual do icosaedro é o dodecaedro. Os poliedros duais são também chamados recíprocos, pois o número de faces do dual corresponde ao número de vértices do original, assim como o número de vértices corresponde ao número de faces do original. Então, um poliedro e seu

[7] Note que todo polígono regular possui uma circunferência inscrita, cujo centro pode ser determinado pelo encontro das bissetrizes internas. Esse ponto é chamado centro do polígono ou centro da face do poliedro regular.

dual têm o mesmo número de arestas, porém, o número de vértices e de faces fica invertido, exceto no tetraedro, no qual coincidem.

**Figura 8:** Poliedros regulares e seus duais



Fonte: Atractor: Poliedros[8]

## 4 CAMINHOS METODOLÓGICOS E RELATO DA ATIVIDADE DESENVOLVIDA

Este estudo é uma pesquisa participante que, para Gerhardt e Silveira (2009, p. 40), caracteriza-se "pelo envolvimento e identificação do pesquisador com as pessoas investigadas". O estudo teve por objetivo propor uma alternativa para o ensino de Geometria, por meio da utilização de um objeto matemático ainda pouco explorado no ambiente escolar: os poliedros duais. O estudo foi realizado em uma Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio, localizada na mesorregião Metropolitana de Porto Alegre e na microrregião de Gramado-Canela, mais precisamente no Vale do Paranhana. A escola tem uma boa infraestrutura e conta com 14 salas de aula, biblioteca, refeitório, laboratório de informática com acesso à internet, laboratório de Ciências, sala de projeção e vídeo. Para apoio pedagógico, a escola tem duas coordenadoras, duas orientadoras e uma profissional na sala do Atendimento Educacional Especializado - AEE.

A intervenção pedagógica foi realizada com uma turma de 20 alunos de 3º ano do Ensino Médio no ano de 2018, da qual uma das autoras era professora, e as atividades tiveram uma duração de 12 períodos de 48 minutos cada. Durante as aulas, os alunos utilizaram o *software Poly Pro* para visualizar e conhecer os poliedros. Para a construção dos poliedros, foram usados como material didático canudos, linhas, cartolina, régua, cola, fita adesiva e tesoura.

As atividades realizadas foram adaptadas do site da Universidade Federal Fluminense - UFF[9] e do livro "Vendo e entendendo poliedros: do desenho ao cálculo através de quebra-cabeças e outros materiais concretos[10]".

[8] Site Atractor. Disponível em: <http://www.atractor.pt/mat/Polied/>. Acesso em: 28 mar. 2018.

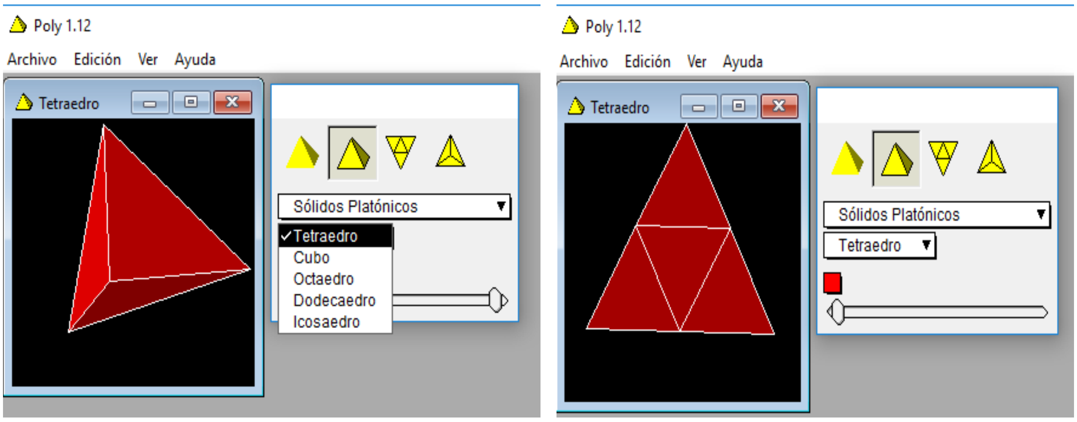
[9] Endereço eletrônico: <http://www.uff.br/cdme/platonicos/platonicos-html/solidos-platonicos-br.html>. Acesso em: 18 mar.2018.

[10] KALEFF, A. M. *Vendo e entendendo poliedros: do desenho ao cálculo através de quebra-cabeças e outros materiais concretos.* 2 ed. Editora UFF, 2003.

### 4.1 Comprovação da existência de apenas cinco tipos de poliedros regulares

A primeira atividade teve como objetivo comprovar a existência de apenas cinco tipos de poliedros regulares. No primeiro momento, os alunos foram levados para o laboratório de informática, em que cada aluno utilizou um *netbook*[11] com o *software Poly Pro* pré-instalado. Nos primeiros minutos, eles tiveram um tempo livre para conhecer melhor os comandos do aplicativo. Na segunda etapa da aula, os alunos foram direcionados a manipular os poliedros regulares que, no software, estão na categoria dos sólidos platônicos. A Figura 9 mostra a interface desse *software*.

**Figura 9:** Interface do *software Poly Pro* na categoria dos sólidos platônicos




Fonte: *Software Poly Pro*

Durante a manipulação dos poliedros no *software,* os alunos preencheram o Quadro 1.

**Quadro 1:** Dados sobre os sólidos platônicos

| Poliedro Regular | Forma das faces | Nº de faces (F) | Nº de vértices (V) | Nº de arestas (A) | F + V – A = 2 | Nº de faces que se encontram em cada vértice |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Tetraedro** | triângulos | 4 | 4 | 6 | 4 + 4 – 6 = 2 | 3 |
| **Hexaedro** | quadrados | 6 | 8 | 12 | 6 + 8 – 12 = 2 | 3 |
| **Octaedro** | triângulos | 8 | 6 | 12 | 8 + 6 – 12 = 2 | 4 |
| **Dodecaedro** | pentágonos | 12 | 20 | 30 | 12 + 20 – 30 = 2 | 3 |
| **Icosaedro** | triângulos | 20 | 12 | 30 | 20 + 12 – 30 = 2 | 5 |

Fonte: Elaborado pelas autoras

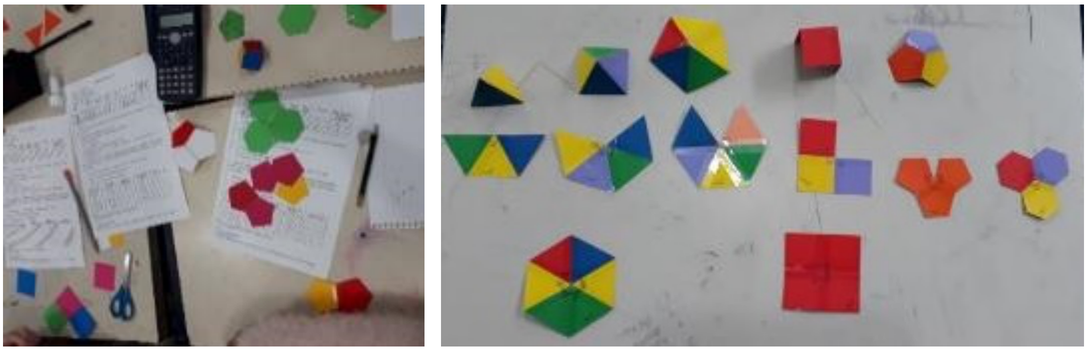
No segundo momento, após realizar o preenchimento do Quadro1, foram realizados alguns questionamentos, como: “O que é um ângulo poliédrico ou bico poliédrico[12] e qual a sua relação

[11] A escola foi beneficiada com 60 *netbooks* e armários móveis pelo Governo do Estado do Rio Grande do Sul no ano de 2015. A entrega dos *netbooks* é referente aos projetos Laboratórios Móveis e Um Computador por Aluno.
[12] Para Machado (1989), bico poliédrico são ângulos poliédricos e faces planas, sendo necessário, para formar um bico poliédrico, unir, no mínimo, três polígonos por um de seus lados, mas podendo utilizar mais de três polígonos, se necessário. É importante lembrar que a soma dos ângulos internos desse bico não pode ser igual ou maior do que 360°.

com o número de faces que se encontram em cada vértice?"; "Será que existe mais algum poliedro regular?"; "Será possível construir um poliedro com um bico poliédrico composto por seis triângulos?"; "E com quatro quadrados?"; "E se fossem quatro pentágonos?"; "Será possível construir um poliedro regular com hexágonos?".

Nesse momento, os alunos apenas responderam aos questionamentos e anotaram suas respostas em uma folha, sem que fossem realizadas quaisquer discussões a respeito delas, visto que a proposta da atividade era que eles, na próxima aula, por meio de construções, pudessem analisar se suas hipóteses estavam corretas. Assim, depois de responderem aos questionamentos, os alunos foram divididos em grupos e vários polígonos regulares foram entregues para cada grupo (triângulos, quadrados, pentágonos e hexágonos). Depois, foi proposto trabalhar com o conceito de bico poliédrico e solicitado que construíssem, por meio de hipóteses, todas as possibilidades de construção de bicos poliédricos com aqueles polígonos. A Figura 10 mostra alguns bicos poliédricos formados pelos alunos.

**Figura 10:** Bicos poliédricos formados com polígonos



Fonte: Elaborado pelas autoras

Depois de construir e analisar os possíveis bicos poliédricos formados, os alunos retomaram a folha com as respostas dos questionamentos anteriores e fizeram algumas conjecturas a respeito das suas construções. Comprovaram a existência de apenas cinco tipos de poliedros regulares, pois, inicialmente, imaginavam poder existir um número maior deles. Em um primeiro momento, trabalhar com hipóteses não foi uma atividade fácil, visto que não estavam acostumados com esse tipo de interpretação.

Mas, logo após as primeiras conjecturas, já se familiarizaram com a estratégia, conseguindo-se observar resultados positivos frente à proposta. Portanto, eles perceberam que existem apenas cinco possíveis bicos poliédricos com polígonos regulares de mesmo tipo, pois, para formar um bico poliédrico, é necessário unir, no mínimo, três polígonos por um de seus lados e a soma dos ângulos internos desse bico não pode ser igual ou maior do que 360º.

Sendo assim, constataram não ser possível construir mais nenhum tipo de poliedro regular, pois não é possível construir mais do que cinco tipos de bico poliédrico. Logo, não é possível construir um bico poliédrico usando seis triângulos, nem com quatro quadrados, nem com três pentágonos e nem com três hexágonos. As atividades desenvolvidas nessa seção tiveram duração de dois períodos de 48 minutos cada.

### 4.2 Construção dos poliedros regulares com polígonos

Nesse momento, os alunos construíram, usando a ideia de bico poliédrico, os cinco poliedros regulares, utilizando aqueles polígonos regulares entregues anteriormente, conforme mostra a

Figura 11.

**Figura 11:** Os cinco sólidos regulares construídos com polígonos

Fonte: Elaborado pelas autoras

Com a intenção de posteriormente realizar a constatação geométrica, foi solicitado aos alunos que preenchessem o Quadro 2.

**Quadro 2:** Verificação geométrica da existência de apenas 5 poliedros regulares

| Polígono regular | Valor do ângulo interno | Números de polígonos usados | Soma dos ângulos internos | Poliedro formado |
|---|---|---|---|---|
| Triângulos | 60° | 3 | 180° | Tetraedro |
| Triângulos | 60° | 4 | 240° | Octaedro |
| Triângulos | 60° | 5 | 300° | Icosaedro |
| Triângulos | 60° | 6 | 360° | Não existe |
| Quadrados | 90° | 3 | 270° | Hexaedro |
| Quadrados | 90° | 4 | 360° | Não existe |
| Pentágonos | 108° | 3 | 324° | Dodecaedro |
| Pentágonos | 108° | 4 | 432° | Não existe |
| Hexágonos | 120° | 3 | 360° | Não existe |

Fonte: Elaborado pelas autoras

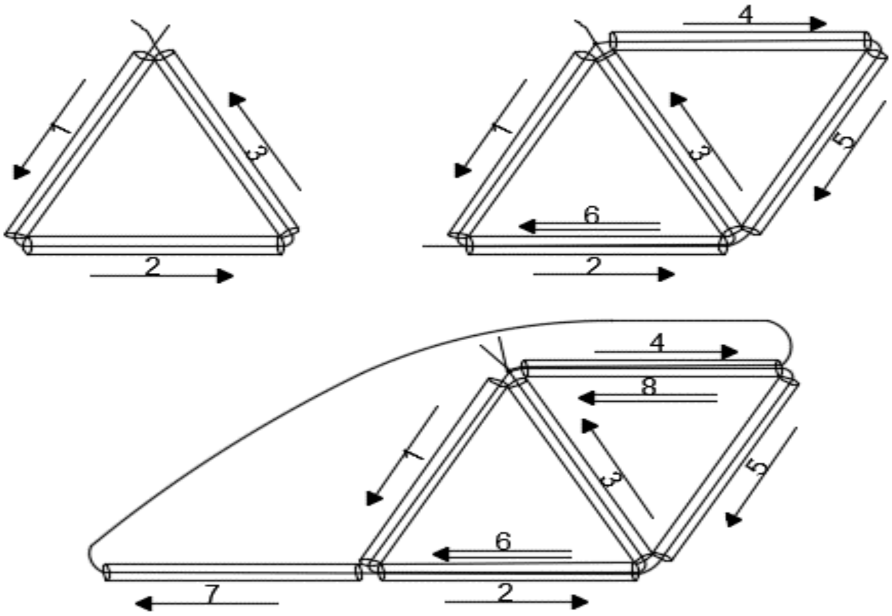
Com os resultados obtidos, foi possível constatar, geometricamente, a existência de apenas cinco tipos de poliedros regulares. As atividades desenvolvidas nessa seção tiveram duração de dois períodos de 48 minutos cada.

## 4.3 Construção do esqueleto do tetraedro regular, hexaedro regular e octaedro regular com canudos

Após as constatações da existência de apenas cinco tipos de poliedros regulares e suas construções com polígonos, foi apresentado aos alunos o modelo de esqueleto dos poliedros. Segundo Kaleff (2003), existem dois tipos de representações concretas que auxiliam no reconhecimento e na análise das propriedades dos poliedros: o modelo casca, que representa a superfície do poliedro, e o modelo esqueleto, que representa a estrutura das arestas do poliedro.

Essa atividade teve como objetivo a construção dos esqueletos de alguns poliedros regulares analisando o porquê do hexaedro se deformar, não conseguindo manter a estrutura de um poliedro rígido. Para realizar as seguintes construções, foi utilizado o esquema fornecido em Kaleff (2003). O primeiro poliedro construído foi o tetraedro regular. Para essa construção, os alunos precisaram de um metro de linha, seis pedaços de 15 cm de comprimento de canudos de mesma cor (optou-se, em função do tempo, já estabelecer as medidas, visto que se teve a intenção de mais tarde utilizar esses poliedros para a construção dos poliedros duais). A Figura 12 mostra os passos a serem seguidos para essa construção.

**Figura 12:** Esquema do Tetraedro regular




Fonte: Adaptado de Kaleff (2003, p.134)

Essa foi a primeira construção utilizando canudos e linhas. Apesar de os alunos ainda não terem trabalhado com canudos, todos conseguiram realizar a construção. O esquema foi entregue em uma folha, e a professora acompanhou as construções, certificando-se de que todos os estudantes construíram esse poliedro.

O segundo poliedro construído foi o octaedro regular. Para essa construção, foram necessários dois metros de linha, doze pedaços de 12 cm de comprimento de canudos de mesma cor. Inicialmente, com esses canudos e o fio de linha, foram construídos quatro triângulos e, na sequência, esses triângulos foram unidos dois a dois. Os próximos passos foram realizados conforme a Figura 13.

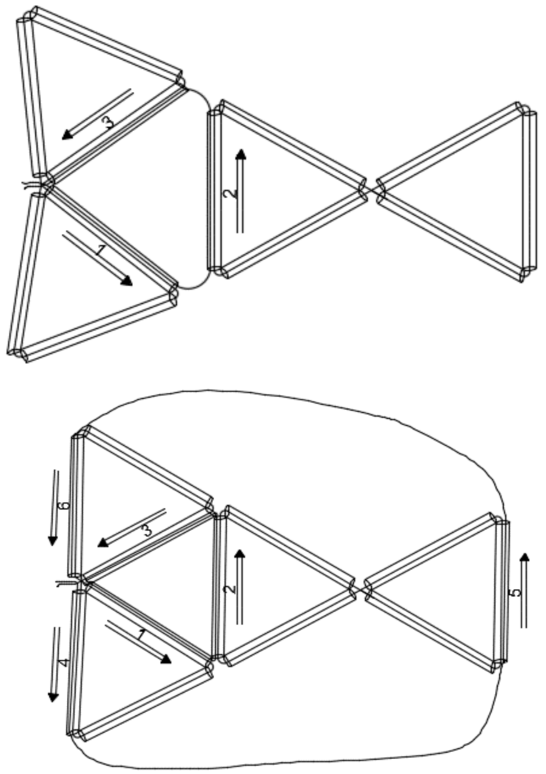
Nessa construção, os alunos já estavam familiarizados com os materiais utilizados e não houve grandes dificuldades para realizar a tarefa proposta.

O terceiro poliedro construído foi o hexaedro regular. Para essa construção, foram necessários dois metros de linha, doze pedaços de comprimento de 17 cm de canudos de mesma cor. A Figura 15 mostra os passos a serem seguidos para realizar a construção do hexaedro.

Ao finalizar a construção do hexaedro, os alunos puderam perceber que o poliedro não permanecia em pé sem se deformar. Nesse momento, foram realizados questionamentos a respeito dessa situação, chegando-se à conclusão de que o triângulo é um polígono rígido, ou seja, sua forma é estável. Para auxiliar nessa compreensão, foram construídos polígonos com canudos e realizadas tentativas de deformação.

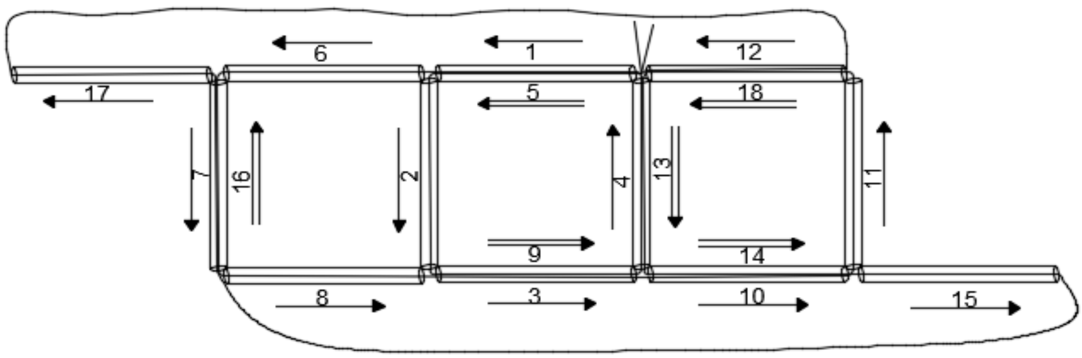
Após as construções, realizou-se uma reflexão sobre como deixar os poliedros estáveis, concluindo-se que uma opção era construir diagonais, pois, no caso do hexaedro, cada face estaria sendo dividida em dois triângulos. A Figura 16 traz algumas construções realizadas pelos alunos.

**Figura 13:** Esquema do Octaedro regular



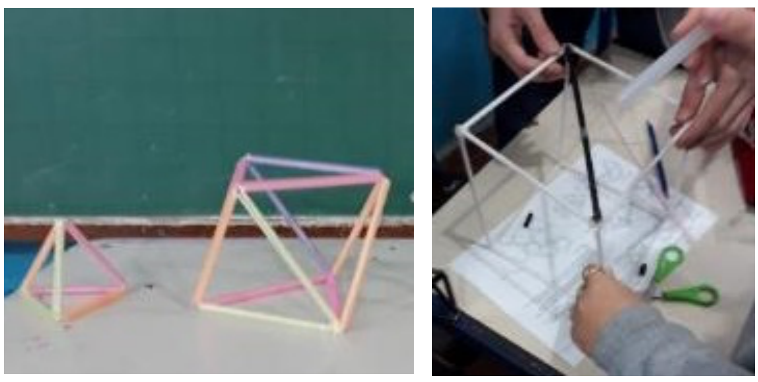

Fonte: Adaptado de Kaleff (2003, p.134)

**Figura 15:** Esquema do Hexaedro regular




Fonte: Adaptado de Kaleff (2003, p.136)

**Figura 16:** Esqueleto dos poliedros regulares: tetraedro, octaedro e hexaedro



Fonte: Elaborado pelas autoras

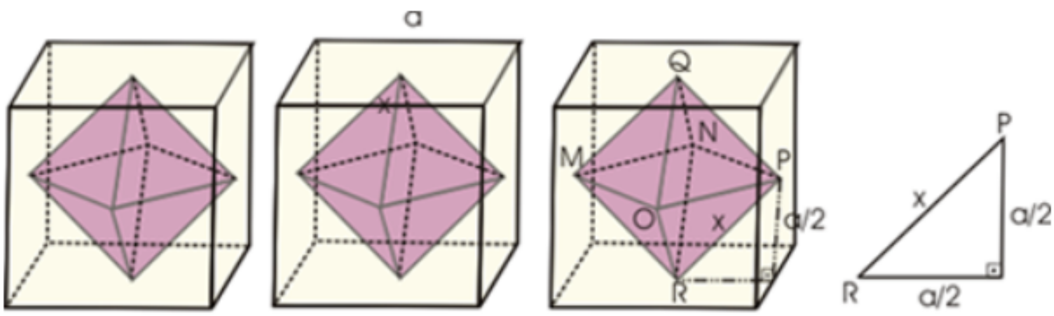
Dessa forma, terminou-se a construção de alguns dos esqueletos dos poliedros regulares, sendo eles o tetraedro regular, o octaedro regular e o hexaedro regular.

### 4.4 Construção dos poliedros duais

Inicialmente, construiu-se um hexaedro regular com seu dual, sendo o dual do hexaedro um octaedro. Considera-se o hexaedro como o poliedro original e o octaedro regular o seu dual. Para deduzir uma fórmula para encontrar o valor da aresta do dual, denota-se a aresta do hexaedro como (a) e a aresta do octaedro sendo (x).

O hexaedro regular, nesse caso, é um poliedro com seis faces quadradas, considerando o triângulo retângulo destacado na Figura 17.

**Figura 17:** Hexaedro regular com o seu dual




Fonte: UFF – Poliedros de Platão e seus duais[13]

Logo, a figura mostra que se pode considerar (x) como a hipotenusa e a/2 a aresta do triângulo retângulo. Dessa forma, pelo Teorema de Pitágoras, tem-se que:

$$x^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \rightarrow x = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4}} \rightarrow x = \sqrt{\frac{2a^2}{4}} \rightarrow x = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Depois de deduzir a fórmula para encontrar a medida da aresta do dual do hexaedro, realizou-se a sua construção. Nesse momento, foi sugerido aproveitar o hexaedro já construído anteriormente. Sabendo que esse hexaedro tinha uma aresta medindo 17cm, os alunos realizaram os cálculos para construir o seu respectivo dual. Ao finalizar os cálculos, perceberam que o valor da aresta do octaedro tem um valor aproximado de 12 cm e que eles também já tinham esse poliedro construído.

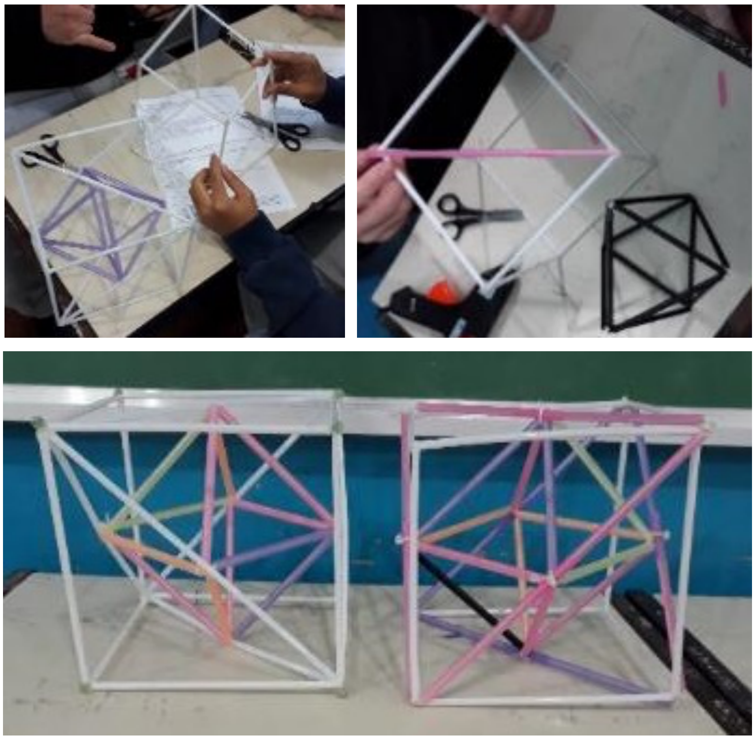
Para se juntar o octaedro ao centro das faces do hexaedro, foram realizados alguns questionamentos sobre como saber onde está localizado o centro da sua face, que, no caso do hexaedro, é um quadrado. Nesse momento, foi necessário relembrar o conceito de bissetriz e lembrar que, em todo polígono regular, tem-se uma circunferência inscrita, cujo centro pode ser determinado pelo encontro das bissetrizes internas. Outro conceito relembrado é que, no caso do quadrado, a diagonal coincide com a bissetriz e o ponto de encontro delas é exatamente o meio.

Dessa maneira, após essas conclusões, os alunos utilizaram as diagonais que já tinham sido colocadas no hexaedro e realizaram a medição da diagonal, dividindo esse valor ao meio. Em seguida, todas as diagonais foram marcadas na sua metade com uma caneta. Essa marcação

[13] Site da Universidade Federal Fluminense. Disponível em: <http://www.cdme.im-uff.mat.br/poliedros_platao_dual/aluno05.html>. Acesso em: 21 de mar. 2018.

serviu como referência para posicionar os vértices do octaedro. Foram usadas duas maneiras diferentes para firmar essas estruturas, sendo uma delas com cola quente e a outra com a utilização de linha de costura para amarrar. A Figura 18 mostra essas construções.

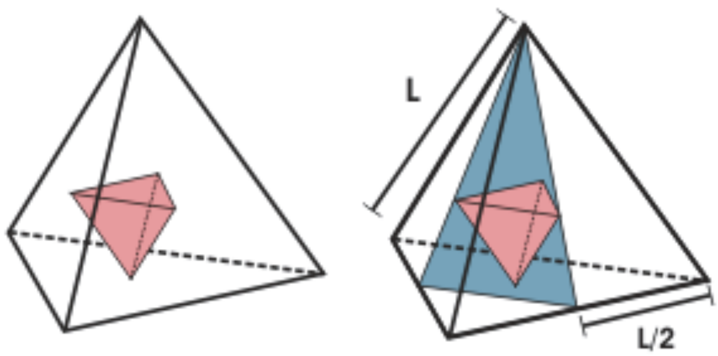
**Figura 18:** Construção do Hexaedro e seu dual



Fonte: Elaborado pelas autoras

Na sequência, construiu-se um tetraedro regular com seu dual, sendo o dual do tetraedro o próprio tetraedro. Ao considerar o tetraedro com aresta L como o poliedro original, deduz-se a fórmula da aresta do seu dual de lado l, conforme a Figura 19.

**Figura 19:** Tetraedro com o seu dual

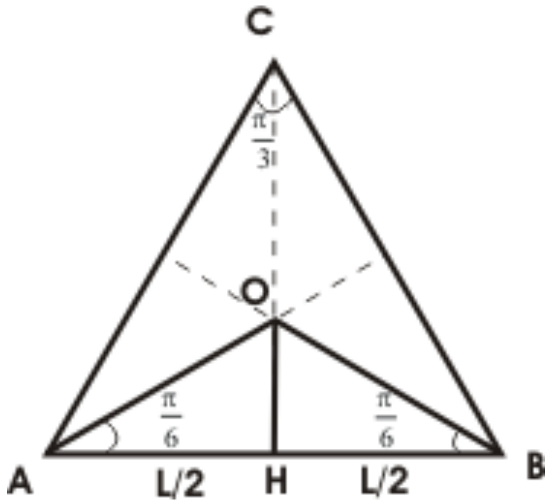



Fonte: UFF – Poliedros de Platão e seus duais[14]

Sendo o tetraedro um poliedro regular que possui quatro faces triangulares equiláteras, então, ABC é uma dessas faces, considerando o seu baricentro, indicado por O. Para isso, basta tomar as bissetrizes de dois dos lados da face.

[14] Site da Universidade Federal Fluminense. Disponível em: <http://www.cdme.im-uff.mat.br/poliedros_platao_dual/aluno07.html>. Acesso em: 21 de mar. 2018.

**Figura 20:** Triângulo equilátero ABC



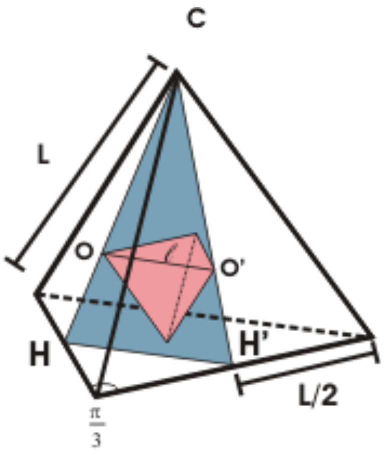

Fonte: UFF – Poliedros de Platão e seus duais

Considere o segmento $\overline{CH}$ uma das alturas da face (que coincide com a bissetriz) e tome os segmentos $\overline{AO}$, $\overline{BO}$ e $\overline{CO}$. Dessa forma, a face ABC fica dividida em três triângulos isósceles que são congruentes entre si e formam os triângulos ABO, BCO e CDO. Então, OÂB = $\frac{\pi}{6}$.

$$sen\,\frac{\pi}{6} = \frac{\overline{OH}}{\overline{AO}} \rightarrow \frac{\overline{OH}}{\overline{CO}} = \frac{1}{2} \rightarrow \overline{OH} = \frac{1}{2}\,.\overline{CO} \rightarrow \overline{CH} = \overline{CO} + \overline{OH} \rightarrow \overline{CH} = \frac{3}{2}\overline{CO}$$

Agora, no tetraedro, observe o triângulo isósceles CHH' com base medindo *L*/2. Nele, os segmentos $\overline{OH}$ e $\overline{O'H'}$ têm a mesma medida.

**Figura 21:** Tetraedro com triângulo CHH'




Fonte: UFF – Poliedros de Platão e seus duais

Pelo teorema de Tales, tem-se que

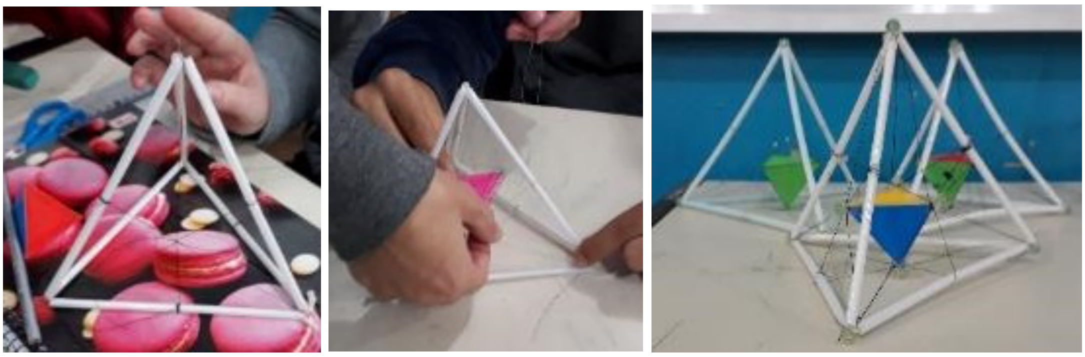
$$\frac{\overline{CO}}{\overline{l}} = \frac{\overline{CH}}{\frac{L}{2}} \rightarrow \frac{\overline{CO}}{\overline{l}}\,.\,\frac{L}{2} = \frac{3}{2}\,.\overline{CO} \rightarrow L = 3l$$

Depois de deduzir a fórmula para a medida da aresta do dual do tetraedro, foi realizada a sua construção. Nesse momento, foi sugerido aproveitar o tetraedro já construído anteriormente com canudos e calcular a medida da aresta para o seu dual, sabendo que esse tetraedro tinha uma aresta medindo 12 cm. Os alunos realizaram os cálculos e descobriram que precisavam de um tetraedro com aresta medindo 4 cm. Para a construção desse tetraedro, foram utilizados polígonos de papel.

Para juntar o tetraedro dual ao centro das faces do tetraedro original, foram realizados alguns questionamentos sobre como saber onde está localizado o centro da face de um triângulo. Nesse momento, foi necessário relembrar o conceito de baricentro que, no caso do triângulo equilátero, coincide com o incentro, que é o encontro das bissetrizes.

Depois desses questionamentos, os alunos utilizaram linha de costura e encontraram o baricentro de cada face. Ainda valendo-se da linha de costura, cada vértice foi amarrado com um nó ao ponto médio de seu segmento oposto. Ao finalizar as três bissetrizes, o ponto de encontro delas foi utilizado como o centro da face do tetraedro. Depois de terem realizado essa etapa, os alunos utilizaram linha de costura para unir o tetraedro dual ao centro da face do tetraedro original. A Figura 22 traz essas construções.

**Figura 22:** Construção do Tetraedro e seu dual



Fonte: Elaborado pelas autoras

Dessa forma, finalizaram-se as construções do tetraedro e do hexaedro e de seus respectivos duais. Durante essas construções, foi possível relembrar vários conceitos já trabalhados anteriormente, como bissetriz, incentro, baricentro, características dos poliedros, relação de Euler, Teorema de Pitágoras e Teorema de Tales. Portanto, durante a realização dessa atividade prática, utilizando materiais manipulativos, os alunos tiveram a oportunidade de perceber que, para se trabalhar com materiais manipulativos, é necessário saber a teoria em que se baseiam as construções. Dessa maneira, conseguiu-se alcançar o objetivo proposto com esta intervenção pedagógica.

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste momento, é conveniente ressaltar a dificuldade em encontrar fontes de pesquisas confiáveis que tratem sobre os poliedros duais. Diante desse fato, este estudo baseou-se nas contribuições de Dolce e Pompeo (1993) para o estudo dos poliedros de Platão e de Kaleff (2003) para o estudo dos poliedros duais e suas construções. No decorrer do estudo, percebeu-se que, algumas vezes, as expressões “poliedros de Platão” e “poliedros regulares” são utilizadas como sinônimos em algumas literaturas. Em função disso, aproveita-se esse relato de experiência para enfatizar que existem poliedros de Platão que não são regulares, como, por exemplo, os prismas de base quadrada.

No que se refere ao objetivo deste trabalho, que, além de propor uma alternativa para o ensino de Geometria, foi o de construir, em especial, alguns poliedros regulares e os seus duais, ficou evidente a importância da posição do professor como um agente que busca a construção de um ambiente mais interessante, possibilitando ao aluno trabalhar com materiais que possam facilitar sua aprendizagem. Portanto, percebeu-se que o fato de trabalhar com materiais manipulativos pode auxiliar o aluno a ler, interpretar e calcular, pois não se trata apenas da aplicação de fórmulas, e sim de uma combinação entre a teoria e a prática, além de proporcionar uma aula criativa que visa a um ambiente mais investigativo e construtivo.

O estudo aqui apresentado é resultado de uma intervenção pedagógica, que buscou propor uma alternativa para o ensino de Geometria, por meio da utilização de um objeto matemático ainda pouco explorado no ambiente escolar, a saber: os poliedros duais.

Durante a realização das atividades, foi evidenciado o interesse e o entusiasmo dos alunos com cada prática proposta. Assim, notou-se que, na Matemática, em especial no ensino de Geometria, quando se trabalha com a utilização de materiais manipulativos, tem-se uma alternativa viável, visto que há a possibilidade de se relacionar os conceitos com o material construído. Portanto, conclui-se que o ensino de Geometria, quando trabalhado de forma prática, pode ser uma ferramenta com potencialidades para o desenvolvimento dos alunos, evidenciando-se, também, que a construção dos poliedros duais pode ser uma alternativa.

## REFERÊNCIAS

BRASIL. MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CULTURA. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio.** Volume 2: Ciência da Natureza, Matemática e tecnologia. Brasília: MEC, 2006.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. 2. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 1999.

D'AMBROSIO, U. **Uma síntese sociocultural da História da Matemática.** São Paulo: Proem Editora, 2011.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos de Matemática Elementar:** Geometria espacial posição e métrica. 5 ed. São Paulo: Atual, 1993.

GERHARDT, T. E.; SILVEIRA, D. T. (Orgs.) **Métodos de pesquisa**. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2009.

KALEFF, A. M. **Vendo e entendendo poliedros:** do desenho ao cálculo através de quebra-cabeças e outros materiais concretos. 2 ed. Niterói: Editora UFF, 2003.

MACHADO, N. J. **Os Poliedros de Platão e os Dedos da Mão.** São Paulo: Scipione, 1989.

PASSOS, C. L. B.; NACARATO, A. M. O ensino de geometria no ciclo de alfabetização: um olhar a partir da provinha Brasil. **Revista Educação Matemática em Pesquisa**, São Paulo, v. 16, n. 4, p. 1147 - 1168, 2014.

ROQUE, T. **História da matemática:** uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

**Submetido em agosto de 2019.**
**Aprovado em maio de 2020.**

# CONHECIMENTOS DE ANÁLISE MATEMÁTICA PRESENTES NO EXAME NACIONAL DE DESEMPENHO DOS ESTUDANTES

## KNOWLEDGE OF MATHEMATICAL ANALYSIS PRESENT IN THE NATIONAL EXAMINATION OF STUDENT EVALUATION

PARÓDIA, Douglas Pereira[1]

PEREIRA, Paula de Almeida[2]

OTERO-GARCIA, S. César[3]

**RESUMO**

O presente trabalho apresenta um levantamento predominantemente quantitativo das questões consideradas pertinentes a uma disciplina de Análise Matemática abordadas nas avaliações do ENADE aplicadas para as Licenciaturas em Matemática desde o estabelecimento dessa avaliação até 2017. Apresenta, também, uma breve visão histórica sobre a evolução da disciplina de Análise para os cursos de Matemática e sobre as avaliações aplicadas aos cursos superiores no Brasil. Dentre os resultados apresentados, está a evidente diminuição no número de questões de Análise Matemática nas provas do ENADE e as discussões levantadas sobre esse dado.

**Palavras-chave:** Educação Matemática no Ensino Superior. Ensino de Análise Matemática. Ensino de Cálculo Diferencial e Integral. Formação Matemática do Professor. História de Processos Pedagógicos.

**ABSTRACT**

The present work presents a predominantly quantitative survey of the issues considered pertinent to a discipline of analysis addressed in the assessments of ENADE applied to the Degree in Mathematics since the establishment of this evaluation. It also presents a brief historical view on the evolution of the discipline of analysis for mathematics courses and on the assessments applied to higher education in Brazil. Among the conclusions presented is the evident decrease in the number of questions of Analysis in the ENADE tests and discussions about this data.

**Keywords:** Mathematics Teaching in Undergraduate Courses. Analysis Teaching. Differential and Integral Calculus Teaching. Mathematics Teacher Education. Pedagogical Processes History.

## 1 INTRODUÇÃO

Vários pesquisadores já abordaram algumas questões a respeito da disciplina de Análise Matemática em cursos de formação de professores, como Reis (2001); Pinto (2001); Batarce (2003); Moreira, Cury e Vianna (2005); Ciani, Ribeiro e Júnior (2006); Silva (2006); Pasquini (2007); Moreira e Vianna (2016). Também, dentro do nosso projeto de pesquisa *A Disciplina de Análise Matemática em Cursos de Formação de Professores*, podemos destacar trabalhos como Martinês (2012); Gomes (2013); Otero-Garcia, Baroni e Martinês (2013); Otero-Garcia e Cammarota (2013); Baroni e Otero-Garcia (2014); Gomes, Otero-Garcia, Silva e Baroni (2015) e Silva (2015).

---

[1] Licenciado em Matemática pelo Instituto Federal de São Paulo (IFSP). Docente de Matemática do Colégio Anglo Campos do Jordão. Endereço eletrônico: douglaspp7@hotmail.com.

[2] Licenciada em Matemática pelo Instituto Federal de São Paulo (IFSP). Servidora técnico-administrativa do Instituto Federal de São Paulo (IFSP). Endereço eletrônico: paulaalmeida@ifsp.edu.br.

[3] Doutor em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista (UNESP). Docente do Instituto Federal de São Paulo (IFSP). Endereço eletrônico: oterogarcia@ifsp.edu.br.

Embora as supracitadas pesquisas tenham trazido valiosos elementos para se entender as mais diversas questões relacionadas à disciplina de análise, muitas questões permanecem em aberto, mostrando que ainda há um vasto campo a ser pesquisado dentro da temática. Discutir o papel e a relevância da disciplina de análise em cursos de formação de professores de matemática é, assim, uma tarefa extremamente complexa, porém, acreditamos ser necessária e urgente.

Com o objetivo central de justamente dar conta dessa problemática anunciada surgiu o já citado projeto *A Disciplina de Análise em Cursos de Formação de Professores de Matemática*, cuja proposta é analisar os mais diversos aspectos envolvidos na questão de que fala seu título, sobretudo os históricos. Dentro do âmbito desse projeto maior, insere-se o presente trabalho, que, dentre as diversas possibilidades de pesquisa sobre o Ensino de Análise Matemática, objetiva analisar quais são os conteúdos da disciplina de Análise Matemática avaliados nas provas do Exame Nacional de Desempenho dos Estudantes (ENADE). Isso porque, ao analisar o Ensino de Análise na formação de professores e considerar sua obrigatoriedade, ainda que em nível de fundamentos, é natural levantar questionamentos sobre a forma como a aquisição dos seus conteúdos é verificada. A avaliação pode ser colocada em pauta considerando diversos pontos de vista, sendo que aqui optamos por trabalhar com o dos órgãos externos que avaliam a aquisição do conhecimento por meio de balizadores gerais, mais especificamente, o ENADE.

## 2 O EXAME NACIONAL DE DESEMPENHO DOS ESTUDANTES

Houve várias iniciativas no sentido de avaliar a educação superior no Brasil ao longo do tempo. Segundo Polidori, Marinho-Araújo e Barreyro (2006), o início deu-se com a avaliação dos cursos de pós-graduação pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), na década de 1970, existindo, posteriormente, diversos instrumentos no âmbito dos cursos de graduação, como o Programa de Avaliação da Reforma Universitária (PARU), de 1983, a “Comissão de Notáveis” de 1985 e o Grupo Executivo da Reforma da Educação Superior (GERES), de 1986. Os autores apontam ainda que, entre as décadas de 1980 e 1990, universidades iniciaram experiências de autoavaliação, estabelecendo uma via de comunicação com o Ministério da Educação (MEC) ao criarem a Associação das Instituições Federais do Ensino Superior (ANDIFES), que possibilitou a construção do Programa de Avaliação Institucional das Universidades Brasileiras (PAIUB) em 1994.

Segundo Verhine, Dantas e Soares (2006), em 1995 foi estabelecido o Exame Nacional de Cursos (ENC), que era aplicado aos estudantes concluintes de determinados cursos como requisito obrigatório para liberação do diploma. O exame ficou conhecido como “Provão” e foi aplicado até 2003, ano em que foi proposto o Sistema Nacional de Avaliação da Educação Superior (SINAES), aprovado e instituído por meio de medida provisória do mesmo ano e oficializado pela Lei nº 10.861, de 14 de abril de 2004. Como nova abordagem para avaliação de cursos, o SINAES incluía o Exame Nacional de Desempenho dos Estudantes (ENADE).

Segundo Brito (2007), o objetivo do SINAES é avaliar as instituições de ensino, os cursos ofertados e o desempenho dos estudantes, sendo o ENADE uma das ferramentas utilizadas para essa avaliação. É importante ressaltar que, segundo Brito e Limana (2005), não é possível analisar a educação superior por meio de um único instrumento. Assim, a proposta do SINAES é uma avaliação em eixos, quais sejam:

a) avaliação das instituições: dividida entre a avaliação interna, realizada pelas Comissões Próprias de Avaliação (CPA), e a avaliação externa, realizada por professores selecionados de outras instituições de ensino do país;
b) avaliação dos cursos de graduação: avaliação externa realizada por uma equipe de especialistas de áreas afins cujos resultados vinculam-se ao reconhecimento e renovação do reconhecimento dos cursos;
c) avaliação dos estudantes: tem como instrumento o ENADE, aplicado a grupos amostrais de alunos que se encontram no final do primeiro e do último ano de formação, constituído por uma prova e um formulário socioeconômico.

A prova do ENADE é composta por quarenta questões, sendo dez de conhecimentos gerais, comuns a todos os cursos, e trinta de conhecimentos específicos. A seleção dos estudantes que prestarão o exame é feita por amostragem pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), cabendo à instituição de ensino apenas enviar a lista dos discentes que cumprem os requisitos para realizar a prova. São considerados ingressantes os estudantes que cumpriram de 7% a 22% da carga-horária mínima do curso até o início do período de inscrição, e concluintes, aqueles que cumpriram pelo menos 80% (BRITO; LIMANA, 2005).

Para Brito (2008), o ENADE não é simplesmente um substituto do antigo provão, pois tem objetivos diferentes. De acordo com Polidori, Marinho-Araújo e Barreyro (2006), o objetivo primordial do ENADE, enquanto processo avaliativo, é a identificação de aspectos que necessitam ser modificados ou aperfeiçoados nas instituições de ensino superior. Já Dias Sobrinho (2010) afirma que a principal diferença entre os dois exames reside no fato de que o ENC trabalhava com uma avaliação estática, ou seja, uma avaliação que colhia informações pontuais que não forneciam retorno, pois o estudante era avaliado apenas em um momento de sua formação, e o ENADE, com uma avaliação dinâmica, possibilita avaliar o potencial de aprendizagem do estudante em seu ingresso e seu aprendizado demonstrado no último ano. Assim, a ideia do ENADE é avaliar a evolução do estudante entre o primeiro e o último ano de graduação, bem como a sua capacidade de utilizar competências e habilidades necessárias à sua prática profissional.

Brito e Limana (2005) explicam que o ENADE utiliza a ideia de "valor agregado" que, resumidamente, compara o conhecimento do estudante ao ingressar na instituição de ensino com aquele que possui ao deixá-la. Os autores ressaltam que é necessário que a avaliação apresente questões bem distribuídas, dado que serão respondidas tanto por ingressantes quanto por concluintes.

Ao analisar a maneira como as avaliações vêm sendo aplicadas, entretanto, é válido questionar se os objetivos iniciais que visavam avaliar o desenvolvimento do aluno no decorrer do curso estão sendo atingidos, dado que os estudantes que são avaliados quando ingressantes não são os mesmos, obrigatoriamente, avaliados quando concluintes.

## 3 O QUE É ANÁLISE MATEMÁTICA?

Para analisar em que consiste a chamada Análise Matemática, é importante entender o que diferencia os estudos de Análise Matemática em relação ao Cálculo Diferencial e Integral.

Ao diferenciar o Cálculo da Análise, é possível pontuar que o estudo dessa última está intimamente ligado ao conceito de rigor. As bases do Cálculo e da Análise são comuns, e a separação entre eles deve-se em grande parte a esse conceito. Por rigor, entende-se a necessidade de fundamentar afirmações para poder utilizá-las como base para tirar outras conclusões – o rigor deriva de uma questão metodológica da Matemática, que é a necessidade lógica de consistência e coerência do método dedutivo-axiomático, porém o rigor na Matemática não é o rigor no ensino da matemática, da mesma forma para o Cálculo ou a Análise. O movimento do rigor no século XIX foi responsável pela produção de áreas inteiras da Matemática, incluindo pontos importantes da Análise tais como continuidade, continuidade uniforme, convergência uniforme, compacidade e completude. *Aritmetização da Análise* foi o nome dado ao movimento que se iniciou após o século XIX em busca de uma visão de números que se afastasse da Geometria, de modo a ter o rigor necessário e pudesse abarcar e resolver questões que precisavam ser respondidas à época. Muitos matemáticos contribuíram para esse movimento, com destaque para Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) e Karl Wilhelm Theodor Weierstrass (1815-1897) (GRATTAN-GUINESS, 1970; PASQUINI, 2007; OTERO-GARCIA, 2015b; MISSE, LAMMOGLIA, 2020).

Segundo Ávila (2002), até a década de sessenta, as universidades brasileiras, sob influência do ensino europeu, alocavam as disciplinas de Análise logo nos primeiros anos dos cursos de matemática com um conteúdo extenso, que incluía muitos assuntos tratados hoje em cálculo com uma ou várias variáveis, funções de variável complexa, entre outros. Na década de sessenta, a adoção de autores americanos mudou um pouco esse panorama, e o cálculo passou a ser abordado antes da análise na maioria das escolas.

Reforçando as considerações feitas por Ávila (2002), em Otero-Garcia (2015a), o autor traça, por meio de uma pesquisa documental, uma trajetória da disciplina de análise no curso de licenciatura em Matemática da Universidade de São Paulo (USP). O autor conclui que, de uma maneira geral, nos primeiros anos do curso de matemática da USP não havia o que hoje entendemos por "Análise" e "Cálculo", mas grandes disciplinas denominadas por "Análise Matemática" que cumpriam tanto a parte rigorosa dos conteúdos de "Cálculo/Análise" quanto o que podemos considerar mais algorítmica. Dessa forma, os conteúdos de Análise Matemática eram sim ensinados desde a criação do curso, entretanto, o que entendemos por "Análise Matemática", disciplina universitária, só começou a ganhar forma na década de setenta, coincidindo justamente com a época apontada por Ávila (2002). Esse movimento ocorreu por meio do processo de algoritmização pelo qual passaram os primeiros cursos de "Análise Matemática" que, pouco a pouco, foram se aproximando cada vez mais do que hoje entendemos por Cálculo. Paralelamente, o conteúdo que consideramos mais rigoroso/analítico, em um primeiro momento migrou para disciplinas optativas e num segundo momento, foi reincorporado ao currículo obrigatório do curso para então ser uma disciplina de Análise como a entendemos hoje em dia.

Especificamente com relação aos conteúdos, Otero-Garcia (2015a) aponta que o conteúdo dito analítico nos cursos de matemática sofreu um grande enxugamento ao longo dos anos. Ou seja, esse tratamento mais rigoroso, ano a ano, passou a ficar restrito a cada vez menos conteúdos. Nos anos iniciais do curso da USP, tal abordagem era dada não só às funções de uma variável, mas também às de variável complexa, passando por funções de várias variáveis e equações diferenciais. Na última ementa analisada pelo autor, Introdução à Análise, de 2002 (que perdurou até pelo menos 2015), a disciplina de análise dada para a licenciatura passou a dar essa abordagem apenas a alguns pontos considerados "principais".

Em Otero-Garcia (2013), é traçada uma trajetória semelhante à descrita em Otero-Garcia (2015a), sendo o curso da Universidade Estadual Paulista (UNESP) o objeto de pesquisa. Nesse trabalho, as conclusões a que o pesquisador chega são bastante semelhantes, sendo que as diferenças mais notáveis estão no fato de as modificações sempre terem surgido primeiramente na USP e após alguns anos ressoarem na UNESP. Ademais, na UNESP, ao menos até a data de publicação do trabalho, não há uma disciplina de Análise específica para a licenciatura, ao contrário do que ocorreu na USP.

O movimento que descrevemos até aqui é importante para entendermos a análise que faremos das questões de Análise Matemática presentes no ENADE. Isso se deve, porque essa "Análise" precisará ser entendida de uma forma muito particular, pois, conforme vimos, a definição do que vem a ser "Análise", disciplina universitária, não é algo tão simples ou uníssono. Dessa forma, respondendo à questão-título desta seção, podemos dizer que não existe uma "Análise Matemática", mas "análises matemáticas", a depender do recorte temporal, geográfico, de abordagem ou qualquer outro definido pelo pesquisador.

Nessa direção, também optamos neste trabalho por fazer um recorte, escolher uma Análise Matemática dentre tantas "análises matemáticas". Evidentemente, optamos por aquilo que entendemos ser representativo, de forma a nos ajudar a compreender nossa questão de pesquisa. Sendo assim, optamos por chamar de Análise Matemática os conteúdos abordados justamente pela disciplina de Introdução à Análise da USP que citamos anteriormente. Isso porque a sua trajetória está bem traçada pela pesquisa de Otero-Garcia (2015a), e trata-se de uma disciplina específica para a Licenciatura (ao contrário da correspondente disciplina na UNESP). Além disso, o curso de matemática da USP de São Paulo é o mais antigo do Brasil, tendo certamente servido de referência para vários outros quer de instituições públicas, quer de instituições privadas. Os conteúdos da referida disciplina são: sequências e séries numéricas; critérios de convergência; série de potências e propriedades; desenvolvimento de funções em séries de potências; séries de Taylor e de Fourier; a construção de $\mathbb{R}$ e o axioma da completude; a expansão decimal dos números reais; demonstrações de alguns dos principais teoremas do Cálculo Diferencial e Integral.

Dessa forma, com base no que foi levantado sobre o Ensino de Análise para os cursos de Licenciatura em Matemática e nas informações coletadas acerca de como é feita a avaliação dos cursos superiores no Brasil, podemos dizer que a proposta deste artigo é apresentar uma tabulação das questões de Análise Matemática. Para isso, tomou-se por base os conteúdos apresentados na disciplina de Introdução à Análise da USP, considerando as provas aplicadas desde a implantação do SINAES até 2017 e, a partir dos dados quantitativos apresentados, tecerem-se considerações e diálogos com a literatura sobre Ensino de Análise Matemática disponível.

## 4 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Optou-se por fazer uma tabulação para dispor os dados analisados. A tabulação é a disposição em tabelas dos dados coletados de modo a facilitar sua análise e a verificação de possíveis relações entre ele e permite sintetizar os dados obtidos para que sua interpretação se torne mais rápida.

Como a quantidade de dados a serem analisados não era demasiadamente grande, sendo necessário interpretar e setorizar conteúdos em categorias predefinidas, com base em características não facilmente identificáveis por ferramentas automatizadas, optamos pela realização de uma tabulação manual. O sistema adotado e, posteriormente, transcrito foi uma variação do traço e risco, proposto por Marconi e Lakatos (2002), que consiste em traçar grupos de linhas para realizar a contagem de itens pertencentes a cada grupo, de modo que cada linha represente um item. Ao final, o número de riscos é calculado. No que se refere a essa abordagem, devem-se observar as seguintes restrições:

a) as categorias de análise usadas para classificar o conteúdo são definidas clara e explicitamente para que outros indivíduos possam aplicá-las ao mesmo conteúdo, a fim de verificar as conclusões;
b) o analista não é livre para selecionar e registrar simplesmente aquilo que chama sua atenção por ser interessante; deve classificar metodicamente todos os assuntos importantes em sua amostra;
c) certo processo quantitativo é usado para proporcionar a média da importância e ênfase da matéria de várias ideias verificadas e para permitir confrontos com outras amostras do material (MARCONI; LAKATOS, 2002, p. 130).

Considerando as restrições colocadas por Marconi e Lakatos (2002), é cabível fazer algumas observações quanto à metodologia utilizada para as tabulações.

Em relação à escolha das categorias nas quais os conteúdos foram primeiramente subdivididos, tomamos como base o parecer CNE/CES 1.302/2001, que dispõe sobre as Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura (BRASIL, 2001). O parecer lista os seguintes conteúdos, comuns a todos os cursos de Licenciatura em Matemática: Cálculo Diferencial e Integral; Álgebra Linear; Fundamentos de Análise; Fundamentos de Álgebra; Fundamentos de Geometria; Geometria Analítica. A parte comum deve ainda incluir: a) conteúdos matemáticos presentes na educação básica nas áreas de Álgebra, Geometria e Análise; b) conteúdos de áreas afins à Matemática que são fontes originadoras de problemas e campos de aplicação de suas teorias; c) conteúdos da Ciência da Educação, da História e Filosofia das Ciências e da Matemática (BRASIL, 2001, p. 6). Além disso, considerando que o ENADE cobra dos licenciandos alguns conteúdos que não podem ser encaixados dentre os listados pelo parecer supracitado, achamos por bem adotar também a categoria "Formação Geral", dado que há questões na avaliação que não são específicas ao professor de matemática em formação.

Dessa forma, as questões do ENADE foram categorizadas seguindo os seguintes conteúdos:

a) Cálculo Diferencial e Integral;
b) Álgebra Linear;
c) Fundamentos de Análise;
d) Fundamentos de Álgebra;
e) Fundamentos de Geometria;
f) Geometria Analítica;
g) Formação Geral;
h) Fundamentos de Matemática (categoria em que consideramos conteúdos matemáticos presentes na educação básica nas áreas de Álgebra, Geometria e Análise);
i) Estatística e Probabilidade (que consideramos como um conteúdo afim à Matemática);
j) Educação/ Educação Matemática (onde consideramos conteúdos pertencentes à Ciência da Educação, da História e Filosofia das Ciências e da Matemática).

A partir das questões obtidas em c) na primeira categorização, realizou-se a segunda, que, desta vez, tomou por base, conforme já apontamos anteriormente, os conteúdos tratados na disciplina de Introdução a Análise do curso de Licenciatura em Matemática da USP.

Com relação à segunda restrição apontada por Marconi e Lakatos (2002), que trata da seleção da amostra, foram analisadas todas as avaliações do ENADE aplicadas para os cursos de Licenciatura em Matemática desde o estabelecimento do exame, em 2004, até 2017.

Para quantificar os dados resultantes, foi contada a quantidade de questões pertencentes a cada categoria, dentre as definidas acima, presentes nas avaliações a cada ano, e posteriormente foi feita uma separação conveniente daquelas que tratam dos assuntos considerados atualmente ligados à análise.

Ainda dentro da abordagem quantitativa, o tipo de estudo realizado utiliza uma premissa causal, ou seja, será buscada uma possível motivação para as ocorrências a partir dos dados expostos e analisados.

## 5 TABULAÇÃO DAS QUESTÕES

O resultado da primeira tabulação está exposto no quadro 1 e no gráfico 1 – algumas questões figuram em mais de uma ocasião no quadro/gráfico por abordarem mais de um eixo para sua resolução.

É possível notar que, dentre as dez categorias propostas, apenas Fundamentos de Análise deixou de figurar em alguma avaliação. Também é evidente a importância dada ao Cálculo Diferencial e Integral, que apresenta uma quantidade considerável de questões em todas as avaliações, haja vista o número total de 30 questões de conhecimentos específicos por prova.

Com relação à segunda tabulação, ou seja, mais especificamente com relação à disciplina de Análise Matemática, o resultado pode ser conferido no quadro 2.

Observa-se que apenas três dos conteúdos listados na ementa considerada são abordados no ENADE, ou seja, não figuram questões de: critérios de convergência, série de potências e propriedades, desenvolvimento de funções em séries de potências, séries de Taylor e de Fourier e a expansão decimal dos números reais. Também é possível observar que, nas duas primeiras avaliações em que foram inseridas questões de análise aplicadas em 2008 e 2011, o número de questões era quatro, no ano de 2014 foram duas questões de análise, e apenas uma em 2017, indicando uma significativa diminuição.

**Quadro 1**: Tabulação das questões presentes no ENADE para os cursos de Licenciatura em Matemática desde 2004**

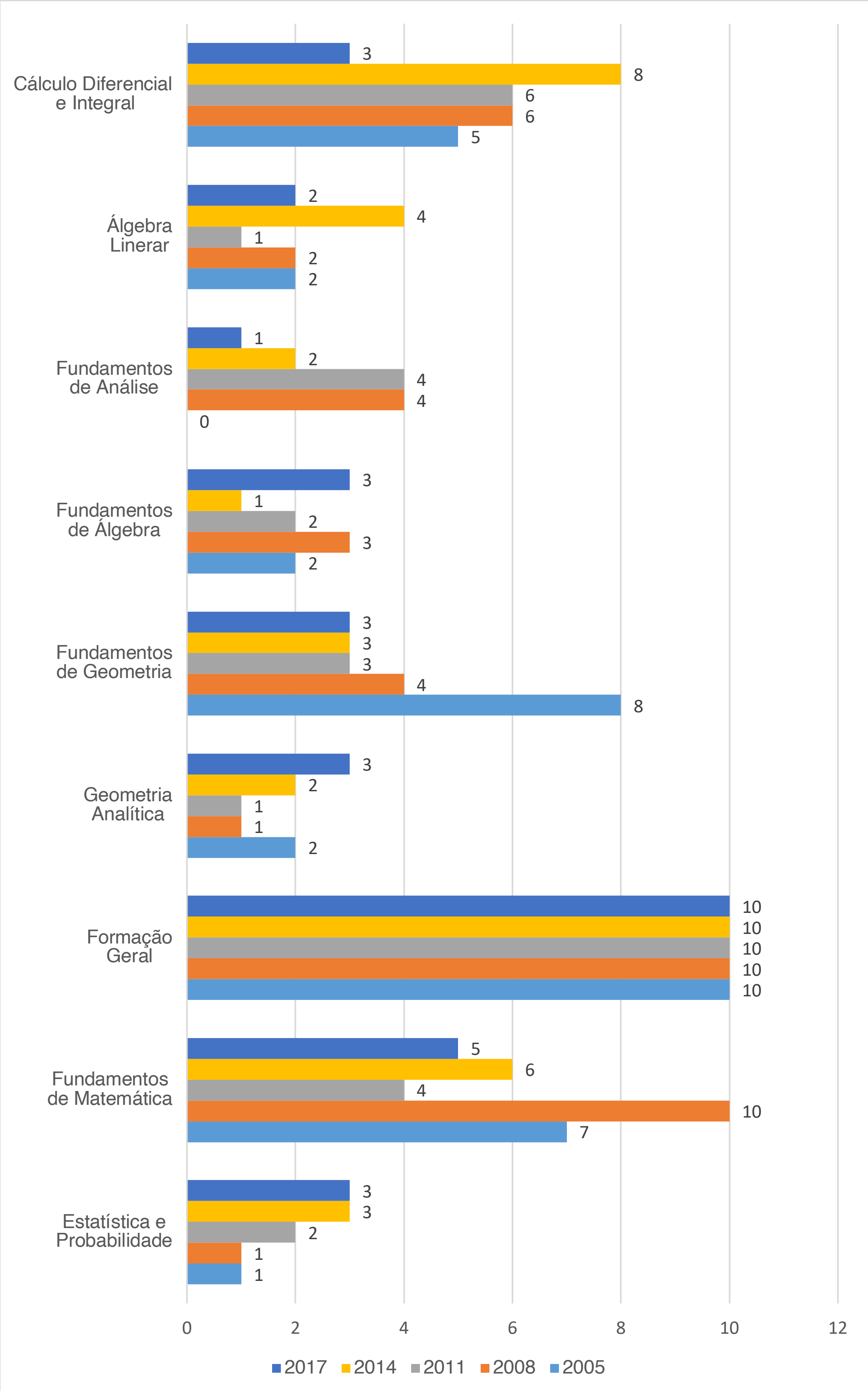
| **Números das questões que envolveram cada categoria no ENADE de cada ano** | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **Categorias** | **2005** | **2008** | **2011** | **2014** | **2017** |
| Cálculo Diferencial e Integral | 25, 26, 27, 28, 30* | 16, 19, 24, 26, 31, 40* | 10, 14, 17, 21, 22, 25 | 10, 12, 14, 15, 16, 17, 21, 22 | 9, 12, 23 |
| Quantidade de questões/ano | 5 | 6 | 6 | 8 | 3 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Álgebra Linear | 11, 24 | 22, 23 | 9 | 11, 19, 30, QD3* | 14, 16 |
| Quantidade de questões/ano | 2 | 2 | 1 | 4 | 2 |
| Fundamentos de Análise | | 19, 20, 26, 29* | 10, 18, QD4*, QD5* | 17, 22 | 23 |
| Quantidade de questões/ano | 0 | 4 | 4 | 2 | 1 |
| Fundamentos de Álgebra | 19, 23 | 18, 27, 30 | 11, 20 | 9 | QD3*, 17, 25 |
| Quantidade de questões/ano | 2 | 3 | 2 | 1 | 3 |
| Fundamentos de Geometria | 15, 16, 17, 20, 21, 29*, 31, 37 | 15, 25, 34, 40* | 12, 24, 33 | 23, 24, QD4* | 22, 24, 26 |
| Quantidade de questões/ano | 8 | 4 | 3 | 3 | 3 |
| Geometria Analítica | 18, 22 | 12 | 23 | 20, QD3* | QD4*, 11, 19 |
| Quantidade de questões/ano | 2 | 1 | 1 | 2 | 3 |
| Formação Geral | 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8*, 9*, 10* | 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9*, 10* | 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, QD1*, QD2* | 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, QD1*, QD2* | 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, QD1*, QD2* |
| Quantidade de questões/ano | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 |
| Fundamentos de Matemática | 13, 14, 20, 21, 38, 39, 40 | 11, 12, 14, 17, 21, 28*, 32, 35, 36, 39 | 13, 15, 16, 19 | 18, 26, 27, 30, QD4*, QD5* | QD5*, 13, 15, 18, 27 |
| Quantidade de questões/ano | 7 | 10 | 4 | 6 | 5 |
| Estatística e Probabilidade | 12 | 13 | QD3*, 31 | 13, 25, 29 | 10, 20, 21 |
| Quantidade de questões/ano | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 |
| Educação/ Educação Matemática | 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 31, 32 | 33, 37, 38 | 26, 27, 28, 29, 30, 32, 34, 35 | 31, 32, 33, 34, 35, QD5*, 28 | QD4*, QD5*, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35 |
| Quantidade de questões/ano | 11 | 3 | 8 | 7 | 11 |

* Questões discursivas. **As provas dos anos que não figuram na tabela, a partir de 2004, não foram aplicadas aos cursos de Licenciatura em Matemática.

Fonte: dos autores.

**Gráfico 1**: Distribuição das questões do ENADE em categorias




Fonte: dos autores

**Quadro 2**: Tabulação específica das questões de Análise presentes no ENADE a partir de 2004**

| | **Números das questões que envolveram cada categoria no ENADE de cada ano** | | | |
|---|---|---|---|---|
| **Conteúdo específico** | **2008** | **2011** | **2014** | **2017** |
| Sequências e séries numéricas | 29* | 10, QD4* | 17 | |
| Quantidade de questões/ano | 1 | 2 | 1 | 0 |
| A construção de R e o axioma da completude | 20 | 18 | | |
| Quantidade de questões/ano | 1 | 1 | 0 | 0 |
| Demonstrações de alguns dos principais teoremas do CDI | 19, 26 | QD5* | 22 | 23 |
| Quantidade de questões/ano | 2 | 1 | 1 | 1 |

*Questões dissertativas. **As provas dos anos que não figuram na tabela, a partir de 2004, não apresentaram questões de análise.

Fonte: dos autores

## 6 RESOLUÇÃO COMENTADAS DAS QUESTÕES

A seguir, as questões de Análise presentes nos ENADE realizadas até 2017 serão comentadas uma a uma, sendo que utilizamos como base as resoluções apresentadas por Marinhos e Neves (2011) para os anos de 2005, e as elaboradas pela elaboradas pela Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul (CARDONA et al, 2011 e CASTILHOS; MÜLLER, 2014) para os anos de 2008 e 2011. As questões dos anos de 2014 e 2017 foram resolvidas integralmente pelos autores deste artigo.

### 6.1 Questões de Fundamentos de Análise no Enade de 2008

Questão 19**:** Considere $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função com derivada $\frac{dg}{dt}$ contínua e $f$ a função definida por $\int_0^x \frac{dg}{dt}(t)dt$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Nessas condições, avalie as afirmações que se seguem: I. A função $f$ é integrável em todo intervalo $[a, b], a, b \in \mathbb{R}, a < b$. II A função $f$ é derivável e sua derivada é a função $g$. III A função diferença $f - g$ é uma função constante. É correto o que se afirma em: a) I, apenas. b) II, apenas. c) I e III, apenas. d) II e III, apenas. e) I, II e III.

Resolução**:** Avaliaremos cada uma das afirmações. I. Inicialmente, a função $g$ é definida dos reais nos reais ($\mathrm{g}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$). Sendo o intervalo $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ delimitado por dois números reais e, por hipótese, a derivada da função g, $\frac{\mathrm{dg}}{\mathrm{dt}}$, contínua, temos, pelo teorema de Weierstrass[4], que ela é limitada no intervalo $[0, \mathrm{x}]$ para qualquer $\mathrm{x}$ escolhido no intervalo $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$. É possível afirmar, portanto, que a função $\int_0^{\mathrm{x}} \frac{\mathrm{dg}}{\mathrm{dt}}(\mathrm{t})\mathrm{dt}$ está bem definida e é continua em qualquer intervalo $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ e, assim, é integrável em $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$.

[4] Teorema de Weierstrass: Toda função contínua num intervalo fechado $[a, b]$ assume um máximo e um mínimo em $[a, b]$.

Assim, a afirmação I é verdadeira. II. O Teorema Fundamental do Cálculo nos diz que existe uma relação inversa entre as operações de integração e derivação. Aplicando esse conceito ao problema proposto, temos que a derivada de $\int_0^x \frac{dg}{dt}(t)dt$ é $\frac{dg}{dt}(t)$. O enunciado nos diz que $\frac{dg}{dt}(t)$ é a derivada de g, desse modo, $\frac{dg}{dt}(t) \neq g$, pois é sua primitiva. Assim, a afirmação II é falsa. III. Como apontado em II, derivada de $\int_0^x \frac{dg}{dt}(t)dt$ é $\frac{dg}{dt}(t)$, que é igual à derivada de g. Por terem a mesma derivada, temos que f e g são ambas primitivas de $\frac{dg}{dt}(t)$, o que significa que o que as diferencia é uma constante. Assim, a afirmação III é verdadeira. A resposta correta é, portanto, a alternativa C.

Comentários**:** A questão apresentada se enquadra no conteúdo previsto para a disciplina de Análise na USP, sob o tópico “Demonstrações de alguns dos principais teoremas do Cálculo Diferencial e Integral”. A resolução exige que o estudante tenha conhecimento do Teorema de Weierstrass e do Teorema Fundamental do Cálculo, resultados importantes dentro da análise matemática, além de ter sedimentado o conceito de primitiva de uma função.

* * *

Questão 20**:** Para cada número real $x$, considere o conjunto $C_x$ formado por todos os números obtidos somando-se a $x$ um número racional, isto é, $C_x = \{x + r : r \in \mathbb{Q}\}$. Sob essas condições, conclui-se que: a) o número $\pi$ pertence ao conjunto $C_1$. b) o conjunto $C_4 \cap C_5$ possui um único elemento. c) o número $\sqrt{2}$ pertence ao conjunto $C_{\sqrt{3}}$. d) os conjuntos $C_3$ e $C_{1/3}$ são iguais. e) o número zero pertence ao conjunto $C_\pi \cup C_{-\pi}$.

Resolução: Avaliaremos cada uma das afirmações. a) O conjunto $C_1$ é formado por números obtidos a partir da lei de formação: $C_1 = \{1 + r : r \in \mathbb{Q}\}$. Como 1 e $r$ são racionais, $1 + r$ também deve ser racional. Como $\pi$ é um número irracional, não pode pertencer a $C_1$. Assim, a afirmação a) é falsa. b) A segunda afirmação pode ser refutada com um contraexemplo. Temos que $C_4 = \{4 + r : r \in \mathbb{Q}\}$ e $C_5 = \{5 + r : r \in \mathbb{Q}\}$. Por exemplo, $\{4 + 2 = 6 \in C_4\}$ e $\{5 + 1 = 6 \in C_5\}$, ou seja, $6 \in C_4 \cap C_5$e $\{4 + 3 = 7 \in C_4\}$ e $\{5 + 2 = 7 \in C_5\}$, o que significa que $7 \in C_4 \cap C_5$ e demonstra que existem pelo menos dois elementos pertencentes a $C_4 \cap C_5$. c) Vamos supor que exista um número $r \in \mathbb{Q}$, tal que $\sqrt{3} + r = \sqrt{2}$. Subtraindo $\sqrt{3}$ de ambos os lados da equação, temos $r = \sqrt{2} - \sqrt{3}$, que resultará em um número irracional, o que é absurdo, pois $r$, por hipótese, é um número racional. Não existe, portanto, um número $r \in \mathbb{Q}$, tal que $\sqrt{3} + r = \sqrt{2}$ e concluímos que o número $\sqrt{2}$ não pertence ao conjunto $C_{\sqrt{3}}$. *Assim, a afirmação c) é falsa.* d) Para avaliar afirmação d), é necessário observar que, para um $x$ racional, $C_x$ será igual a $\mathbb{Q}$. Como 3 e 1/3 são números racionais, ambos, $C_3$ e $C_{1/3}$, são iguais a $\mathbb{Q}$ e, assim, são iguais entre si. Assim, essa afirmação é verdadeira. e) A lei de formação do conjunto $C_\pi$ é $\{\pi + r : r \in \mathbb{Q}\}$. Temos que $0 = \pi + (-\pi)$, entretanto, $(-\pi)$ é um número irracional, não se enquadrando nos valores admitidos para $r$. Portanto, $0 \notin C_\pi$. De forma análoga, podemos concluir que $0 \notin C_{-\pi}$. Isso posto, $0 \notin (C_\pi \cup C_{-\pi})$. Assim, a afirmação e) é falsa. Portanto, a resposta correta é a alternativa d).

Comentários: A questão apresentada enquadra-se no conteúdo previsto para a disciplina de Análise na USP sob o tópico “A construção de R e o axioma da completude”. A resolução exige que o estudante tenha conhecimento de conceitos pertencentes à teoria dos conjuntos, com ênfase para propriedades dos números racionais, irracionais e reais.

* * *

Questão 26**:** Analisando a função $f(x, y) = x^2(x - 1) + y(2x - y)$, definida no domínio $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$, um estudante de cálculo diferencial escreveu o seguinte: A função $f$ tem um ponto de mínimo global em $D$, *porque* o ponto $(0,0)$ é um ponto crítico de $f$. A respeito da afirmação feita pelo estudante, assinale a opção correta: a) As duas asserções são proposições verdadeiras, e a segunda é uma justificativa correta da primeira. b) As duas asserções são proposições verdadeiras, mas a segunda não é uma justificativa correta da primeira. c) A primeira asserção é uma proposição verdadeira, e a segunda é falsa. d) A primeira asserção é uma proposição falsa, e a segunda é verdadeira. e) Ambas as asserções são proposições falsas.

Resolução: Como todas as alternativas versam sobre a validade ou não das asserções feitas, inicialmente, avaliaremos tais asserções e, posteriormente, cada uma das afirmações. a) O conjunto $D$ apresentado é fechado, ou seja, inclui todos os seus pontos de fronteira, e também é limitado, podendo ser chamado de conjunto compacto. Considerando que o domínio é compacto e observando ainda que a função é polinomial e, portanto, contínua, pode-se dizer, pelo teorema de Weierstrass, que ela atinge o mínimo global e o máximo global em $D$. Assim, a primeira afirmação é verdadeira. b) Para saber se $(0,0)$ é um ponto crítico de $f$, primeiro é necessário fazer as derivadas parciais de f e então substituir as coordenadas dadas. Caso $f_x(0,0) = 0$ e $f_y(0,0) = 0$, ou se uma das derivadas parciais não estiver definida em $(0,0)$, esse será um ponto crítico de $f$. No caso, $f_x(x,y) = 3x^2 - 2x + 2y$ e $f_y(x,y) = 2x - 2y$. Substituindo o ponto dado nas derivadas parciais, temos: $f_x(0,0) = 0$ e $f_y(0,0) = 0$. Assim, a segunda afirmação é verdadeira. c) Verificaremos agora se a segunda afirmação é uma justificativa correta para a primeira. O fato de possuir derivadas parciais iguais a zero em determinado ponto, não garante que a função terá um máximo e um mínimo local nesse ponto. Assim, a segunda afirmação não justifica a primeira, donde conclui-se que a alternativa correta é a b).

Comentários: A questão apresentada enquadra-se no conteúdo previsto para a disciplina de Análise na USP sob o tópico "Demonstrações de alguns dos principais teoremas do Cálculo Diferencial e Integral". A resolução exige que o estudante tenha conhecimento de Teoremas e definições utilizados no cálculo, tais como, mínimo global, máximo global e ponto crítico, além de ter certa clareza sobre quais dessas definições e como podem ou não ser interligadas.

* * *

Questão 29**:** Considere a sequência numérica definida por $a_1 = \sqrt{a}$; $a_{n+1} = \sqrt{a + \sqrt{a_n}}$, para $n = 1, 2, 3, ...$ Usando o princípio de indução finita, mostre que $a_n < a$ para todo $n \geq 1$ e $a \geq 2$. Para isso, resolva o que se pede nos itens a seguir e transcreva suas respostas para o Caderno de Respostas, nos locais devidamente indicados. a) Escreva a hipótese e a tese da propriedade a ser demonstrada. b) Prove que $a(a-1) > 0$ para $a \geq 2$. c) Mostre que $\sqrt{a} < a$, para todo $a \geq 2$. d) Supondo que $a_n < a$, prove que $a_{n+1} < \sqrt{2a}$. e) Mostre que $a_{n+1} < a$. f) A partir dos passos anteriores, conclua a prova por indução.

Resolução: a) Hipótese: a sequência $a_n$, é definida por $a_1 = \sqrt{a}$ e $a_{n+1} = \sqrt{a + \sqrt{a_n}}$, para $n = 1, 2, 3, ...$, com $a \geq 2$. *Tese:* $a_n < a$ para todo $n \geq 1$. b) Consideremos que $a \geq 2$. Convenientemente, podemos adicionar -1 em ambos os lados da desigualdade sem perda de generalidade. Obteremos $a - 1 \geq 2 - 1$, ou seja, $a - 1 \geq 1$. Assim, $a - 1$ é positivo. Sabendo que $a - 1$ é positivo e, por hipótese, $a \geq 2$, o produto $a(a-1)$ resultará também em um número positivo. Portanto, $a(a-1) > 0$ para $a \geq 2$, conforme queríamos demonstrar. c) Considerando o resultado obtido no item anterior, temos que $a(a-1) > 0$ para $a \geq 2$. Realizando a distributiva na desigualdade demonstrada, temos: $a^2 - a > 0$. Adicionando $a$ em ambos os lados da desigualdade, temos: $a^2 > a$. Utilizando a raiz quadrada dos dois lados da desigualdade, temos que $a > \sqrt{a}$ e, sem perda de generalidade, que $\sqrt{a} < a$ conforme queríamos demonstrar. d) Supondo que $a_n < a$, temos que $\sqrt{a_n} < \sqrt{a}$. Do item anterior, temos que $\sqrt{a} < a$ e, por transitividade, $\sqrt{a_n} < a$. Somando $a$ em ambos os lados da desigualdade, temos $a + \sqrt{a_n} < a + a$, ou seja, $a + \sqrt{a_n} < 2a$. Novamente, aplicando a raiz nos dois lados da desigualdade, temos $\sqrt{a + \sqrt{a_n}} < \sqrt{2a}$. Mas, de acordo com a definição dada no enunciado, $\sqrt{a + \sqrt{a_n}} = a_{n+1}$, então $a_{n+1} < \sqrt{2a}$, conforme queríamos demonstrar. e) Por hipótese, temos que $a \geq 2$. Subtraindo 2 em ambos os lados da desigualdade, temos: $a - 2 \geq 2 - 2$, ou seja, $a - 2 \geq 0$. Multiplicando ambos os lados da desigualdade por $a$, temos: $a(a-2) \geq 0$, e assim, $a^2 - 2a \geq 0$. Adicionando $2a$ em ambos os lados da desigualdade, temos: $a^2 \geq 2a$, o que podemos transcrever, sem perda de generalidade, como $2a \leq a^2$. Aplicando a raiz quadrada dos dois lados da desigualdade, temos: $\sqrt{2a} \leq a$. Foi demonstrado no item d) que $a_{n+1} < \sqrt{2a}$, então, por transitividade, $a_{n+1} < \sqrt{2a} \leq a$, e portanto, $a_{n+1} < a$, conforme queríamos demonstrar. f) O que queremos demonstrar é a tese exposta no item a), com base na hipótese apontada no mesmo item. Para realizar a prova por indução há três passos: I. é necessário inicialmente verificar se a proposição em teste é válida para $n = 1$. Como demonstrada em c), é válida. II. Suporemos que a proposição é válida para um número $n$. III. É necessário verificar se a proposição é válida para $n + 1$. Como demonstrado nos itens d) e e), é válida. Logo, por indução, a propriedade é válida para qualquer natural, conforme queríamos demonstrar.

Comentários**:** A questão apresentada se enquadra no conteúdo previsto para a disciplina de Análise na USP sob o tópico “Sequências e séries numéricas”. A resolução exige que o estudante tenha conhecimento de sequências recorrentes, princípio da indução finita e propriedades dos números reais, como distributividade, multiplicidade, monotonicidade e transitividade.

## 6.2 Questões de Fundamentos de Análise no Enade de 2011

Questão 10**:** Sabe-se que, para todo número inteiro $n > 1$, tem-se $\frac{n\sqrt[n]{e}}{e} < \sqrt[n]{n!} < \frac{n\sqrt[n]{ne}}{e}$. Nesse caso, se $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = a$, então: a) $a = 0$. b) $a = \frac{1}{e}$. c) $\mathrm{a} = 1$. d) $a = e$. e) $a = +\infty$.

Resolução: O que se deseja calcular é $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$, dada a desigualdade $\frac{n\sqrt[n]{e}}{e} < \sqrt[n]{n!} < \frac{n\sqrt[n]{ne}}{e}$, para $n > 1$ como base. É necessário observar que a função cujo limite se deseja calcular não é igual a nenhum dos termos da inequação dada. Podemos, entretanto, multiplicar todos os termos por $1/n$ e assim, obter : $\frac{n\sqrt[n]{e}}{e.n} < \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} < \frac{n\sqrt[n]{ne}}{e.n}$. A desigualdade passa a ser: $\frac{\sqrt[n]{e}}{e} < \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} < \frac{\sqrt[n]{ne}}{e}$. Calculando o limite de $\frac{\sqrt[n]{e}}{e}$ quando $n \to +\infty$, temos: $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{e}}{e} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}}{e}$. Mas como $n \to +\infty$, $\frac{1}{n} \to 0$. Assim, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}}{e} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{e^0}{e} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{e} = \frac{1}{e}$. Por outro lado, calculando o limite de $\frac{\sqrt[n]{ne}}{e}$ quando $n \to +\infty$, temos: $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{ne}}{e} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{n}.\sqrt[n]{e}}{e}$ valendo-nos de propriedades de limites, sabemos que o limite dos produtos é o produto dos limites, então, teremos: $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n}. \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{e}}{e}$. Olhando separadamente para cada um dos limites, temos que o primeiro, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n}$, resulta em $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} n^0 = \lim\limits_{n\to+\infty} 1 = 1$, e o segundo, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{e}}{e}$, já foi calculado e resulta em $\frac{1}{e}$. Desse modo, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{ne}}{e} = 1.\frac{1}{e} = \frac{1}{e}$. Como os dois limites encontrados são iguais a $\frac{1}{e}$, pelo Teorema do confronto, $\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\frac{1}{e}$. Conclui-se, portanto, que a alternativa correta é a b).

Comentários: A questão apresentada se enquadra no conteúdo previsto para a disciplina de Análise na USP sob o tópico “Sequências e séries numéricas”. A resolução exige que o estudante tenha conhecimento de sequências numéricas, aplicação de propriedades de limites e teoremas importantes como o Teorema do Confronto. Noções básicas sobre exponenciação também são exigidas para a resolução do problema.

* * *

Questão 18**:** Duas grandezas $x$ e $y$ são ditas *comensuráveis* se existe um número racional $q$ tal que a medida de $x$ é igual a $q$ vezes a medida de $y$. Com base nesse conceito, são grandezas comensuráveis: a) a aresta de um cubo de volume $V$ e a aresta de um cubo de volume $2V$. b) a área e o perímetro de um círculo, quando o raio é um número racional. c) a área e o diâmetro de um círculo, quando o raio é um número racional. d) o comprimento e o diâmetro de uma circunferência. e) a diagonal e o lado de um quadrado.

Resolução: Para resolver essa questão, iremos testar cada uma das alternativas apresentadas e verificar se seus resultados são racionais. Ou seja, dadas duas medidas, verificaremos se a divisão da primeira pela segunda resulta em um racional. a) Chamemos de $x$ a aresta do cubo de volume $V$ e de $y$, a aresta do cubo de volume $2V$. Teremos os seguintes valores para os volumes: $V=x^3$ e $2V=y^3$. Entretanto, a relação que deve ser feita é entre as arestas. Encontraremos, então, os valores de $x$ e $y$. Aplicando a raiz cúbica nos dois lados da igualdade para ambos os casos, temos: $\sqrt[3]{V}=\sqrt[3]{x^3}$ e $\sqrt[3]{2V}=\sqrt[3]{y^3}$, que resulta em: $\sqrt[3]{V}=x$ e $\sqrt[3]{2}.\sqrt[3]{V}=y$. Queremos saber se a razão entre x e y é racional, portanto: $\frac{x}{y}=\frac{\sqrt[3]{V}}{\sqrt[3]{2}.\sqrt[3]{V}}$. Concluiremos assim que $\frac{x}{y}=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, que é um número irracional. Portanto, a aresta de um cubo de volume $V$ e a aresta de um cubo de volume $2V$ não são comensuráveis. b) A área $A$, de um círculo de raio $R$ é $\pi R^2$, e seu perímetro $P$, é $2\pi R$. A razão entre essas duas grandezas é $\frac{A}{P}=\frac{\pi R^2}{2\pi R}$, que resulta em $\frac{R}{2}$. Como foi afirmado no enunciado que R é racional, $\frac{R}{2}$ é racional. Podemos concluir que a área e o perímetro de um círculo, quando o raio é um número racional são comensuráveis. c) A área de um círculo de raio R é $\pi R^2$, e seu diâmetro $D$, é $2R$. A razão entre essas duas grandezas é $\frac{A}{D}=\frac{\pi R^2}{2R}$, que resulta em $\frac{\pi R}{2}$. $R$ é racional (por hipótese), enquanto $\pi$ é um número irracional, assim, seu produto resulta em um número irracional, que dividido por 2, será ainda irracional. Podemos concluir que a área e o diâmetro de um círculo, quando o raio é um número racional não são comensuráveis. d) O comprimento C de uma circunferência de raio R é $2\pi R$, e seu diâmetro $D$, é $2R$. A razão entre essas duas grandezas é $\frac{C}{D}=\frac{2\pi R}{2R}$, que resulta em $\pi$, que é um número irracional. Podemos concluir que o comprimento e o diâmetro de uma circunferência não são comensuráveis. e) Seja $l$, o lado de um quadrado, temos, pelo Teorema de Pitágoras, que sua diagonal $d$ é $l\sqrt{2}$. A razão entre essas duas grandezas é $\frac{d}{l}=\frac{l\sqrt{2}}{l}$, que resulta em $\sqrt{2}$, que é um número irracional. Podemos concluir, assim, que a diagonal e o lado de um quadrado não são comensuráveis. A resposta correta é a alternativa b).

Comentários: A questão apresentada enquadra-se no conteúdo previsto para a disciplina de Análise na USP sob o tópico “A construção de R e o axioma da completude”. A resolução exige que o estudante tenha conhecimento do conceito de comensurabilidade, e consequentemente certo domínio acerca de propriedades dos conjuntos dos números racionais e irracionais, além de conhecimentos básicos de geometria.

* * *

Questão discursiva 4: Considere a sequência numérica definida por $a_1 = a, a_{n+1} = \frac{4a_n}{2+a_n^2}$, para $n \geq 1$. Use o princípio de indução finita e mostre que $a_n < \sqrt{2}$, para todo número natural $n \geq 1$ e para $0 < a < \sqrt{2}$, seguindo os passos indicados nos itens a seguir: a) Escreva a hipótese e a tese da propriedade a ser demonstrada. b) Mostre que $s = \frac{4a}{2+a^2} > 0$, para todo $a > 0$. c) Prove que $s^2 < 2$, para todo $0 < a < \sqrt{2}$. d) Mostre que $0 < s < \sqrt{2}$. e) Suponha que $a_n < \sqrt{2}$ e prove que $a_{n+1} < \sqrt{2}$. f) Conclua a prova por indução.

Resolução: a) Hipótese: $(a_n)$ é a sequência definida por: $a_1 = a, a_{n+1} = \frac{4a_n}{2+a_n^2}$, para $n \geq 1$, em que $0 < a_1 = a < \sqrt{2}$. *Tese:* $a_n < \sqrt{2}$, para todo número natural $n \geq 1$. b) Observando o denominador $2 + a^2$, podemos afirmar que ele será sempre positivo, dado que $a^2$ sempre será um número positivo e, adicionado a 2 que é positivo, resultará em um número também positivo. Observando, por outro lado, o numerador $4a$ e, considerando que $0 < a < \sqrt{2}$, por hipótese, podemos afirmar que ele sempre será positivo, dado que $a$ é positivo e é multiplicado por 4, que também é positivo. Dessa forma, como a razão $\frac{4a}{2+a^2}$ será sempre positiva, pois é feita entre dois números positivos. *Portanto* $s = \frac{4a}{2+a^2} > 0$*, conforme queríamos demonstrar.* c) Temos que $s = \frac{4a}{2+a^2}$. Assim, $s^2 = \frac{(4a)^2}{(2+a^2)^2}$. Desenvolvendo a expressão, temos: $s^2 = \frac{16a^2}{4+4a^2+a^4}$. Queremos que mostrar que $\frac{16a^2}{4+4a^2+a^4} < 2$. Inicialmente, vamos supor que $s^2 > 2, para\ 0 < a < \sqrt{2}$. Isso equivale a dizer que $16a^2 > 2(4 + 4a^2 + a^4)$ ou seja, $8a^2 > 4 + 4a^2 + a^4$. Podemos reescrever a desigualdade, sem perda de generalidade, como $4 + 4a^2 + a^4 < 8a^2$, subtraindo $8a^2$ em ambos os lados da desigualdade, temos: $4 - 4a^2 + a^4 < 0$, que pode ser reescrito como $(2 - a^2)^2 < 0$, o que é absurdo. Suponhamos agora, que $s^2 = 2$. Desenvolvendo a equação de forma análoga à que foi feita com a inequação anterior, obteremos$(2 - a^2)^2 = 0$, o que também é absurdo, uma vez que $0 < a < \sqrt{2}$ e, o único valor de $a$ que resultaria em zero, seria $\sqrt{2}$. Desse modo, a afirmação de que $s^2 < 2$ deve ser verdadeira. De fato, afirmar que $s^2 < 2$, equivale a dizer que $16a^2 < 2(4 + 4a^2 + a^4)$, ou seja, $8a^2 < 4 + 4a^2 + a^4$. Podemos reescrever a desigualdade, sem perda de generalidade, como $4 + 4a^2 + a^4 > 8a^2$, subtraindo $8a^2$ em ambos os lados da desigualdade, temos: $4 - 4a^2 + a^4 > 0$, que pode ser reescrito como $(2 - a^2)^2 > 0$, o que é sempre verdade, para qualquer valor de $a$. Desse modo, $\mathrm{s}^2 < 2$, para todo $0 < \mathrm{a} < \sqrt{2}$, conforme queríamos demonstrar. d) Provamos em b) que $\mathrm{s} > 0$, para todo $\mathrm{a} > 0$. Em c), provamos que prove que $\mathrm{s}^2 < 2$, para todo $0 < \mathrm{a} < \sqrt{2}$, o que equivale a dizer que $\mathrm{s} < \sqrt{2}$. De posse desses dois resultados, e do fato de que raiz quadrada é uma função crescente, concluímos que $0 < s < \sqrt{2}$, para todo $0 < \mathrm{a} < \sqrt{2}$, conforme queríamos demonstrar. e) Assumamos que $a_n < \sqrt{2}$ é verdade. Como demonstrado em d), $0 < s < \sqrt{2}$, então $a_{n+1} < \sqrt{2}$. f) O que queremos demonstrar é a tese exposta no item a), com base na hipótese apontada no mesmo item. Para realizar a prova por indução há três passos: I. é necessário inicialmente verificar se a proposição em teste é válida para $n = 1$. Por hipótese, $a_1 = a$ e $a < \sqrt{2}$, ou seja, a propriedade é válida para $n = 1$. II. Suporemos que a proposição é válida para um número $n$. III. É necessário verificar se a proposição é válida para $n + 1$. Como demonstrado no item e), é válida. Logo, por indução, a propriedade é válida para qualquer natural, conforme queríamos demonstrar.

Comentários: A questão apresentada enquadra-se no conteúdo previsto para a disciplina de Análise na USP sob o tópico “Sequências e séries numéricas”. A resolução exige que o estudante tenha conhecimentos acerca de sequências por recorrência, além do princípio da indução finita e realização de demonstrações por indução.

* * *

Questão discursiva 5**:** O Teorema do Valor Intermediário é uma proposição muito importante da análise matemática, com inúmeras aplicações teóricas e práticas. Uma demonstração analítica desse teorema foi feita pelo matemático Bernard Bolzano (1781 – 1848). Nesse contexto, faça o que se pede nos itens a seguir: a) Enuncie o Teorema do Valor Intermediário para funções reais de uma variável real. b) Resolva a seguinte situação-problema: o vencedor da corrida de São Silvestre-2010 foi o brasileiro Mailson Gomes dos Santos, que fez o percurso de 15 km em 44 min e 7 seg. Prove que, em pelo menos dois momentos distintos da corrida, a velocidade instantânea de Mailson era de 5 metros por segundo. c) Descreva uma situação real que pode ser modelada por meio de uma função contínua $f$, definida em um intervalo $[a, b]$, relacionando duas grandezas $x$ e $y$, tal que existe $k \in (a, b)$ com $f(x) \neq f(k)$, para todo $x \in (a, b), x \neq k$. Justifique sua resposta.

Resolução: a) Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua, então, para todo $f(a) < k < f(b)$, existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = k$. b) Inicialmente, converteremos para segundos o tempo gasto na prova pelo corredor: $(44 \times 60) + 7 = 2647$. Como a distância percorrida pelo corredor foi de $15\,km$, o que equivale a $15000$ metros, sua velocidade média em $m/s$ foi: $\frac{15000\,m}{2647\,s} = 5{,}67m/s$. Admitiremos que no instante inicial $V(0)$, a velocidade do corredor era igual a $0$, assim como no momento final $V(2647)$, dessa maneira, a função é definida no intervalo $[0, 2647]$ e $V(0) = V(2647) = 0$. Admitiremos também que a função é contínua no intervalo em que está definida. Desse modo, pode-se afirmar que existe ao menos um momento $t_0$ na prova em que a velocidade do corredor foi igual à sua velocidade média, ou seja, $V(t_0) = 5{,}67m/s$. Temos então que $V(0) < 5 < V(t_0)$ e também que $V(2647) < 5 < V(t_0)$. Pelo Teorema do Valor Intermediário, temos então que em, pelo menos, dois instantes, $t_1 \in [0, t_0]$ e $t_2 \in [t_0, 2647]$, $V(t_1) = V(t_2) = 5$. c) Qualquer situação-problema modelada por uma função contínua em um intervalo $[a, b]$ que seja estritamente crescente ou decrescente, ou uma função em que $f(a) \neq f(b)$, atenderia a esse enunciado.

Comentários: a questão apresentada enquadra- se no conteúdo previsto para a disciplina de análise na USP sob o tópico “Demonstrações de alguns dos principais teoremas do Cálculo Diferencial e Integral”. A resolução exige que o estudante tenha conhecimentos acerca de funções contínuas e suas propriedades, especificamente o Teorema do Valor Intermediário, sabendo enunciá-lo e aplicá-lo.

## 6.3 Questões de Fundamentos de Análise no Enade de 2014

Questão 17**:** Considere $(x_n), n \in \mathbb{N}$, uma sequência de números reais positivos tal que $x_{n+1} = \frac{x_n}{n+1}$. Nesse caso, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ é igual a: a) $+\infty$. b) $0$. c) $x_1$. d) $1$. e) $e$.

Resolução: Inicialmente, escreveremos os primeiros termos da sequência para observar a relação entre eles e localizar o termo geral: $x_1 = \frac{x_0}{1}$, $x_2 = \frac{x_1}{2} = \frac{x_0}{1.2}$, $x_3 = \frac{x_2}{3} = \frac{x_0/2}{3} = \frac{x_0}{1.2.3}$, $x_4 = \frac{x_3}{4} = \frac{x_0/6}{4} = \frac{x_0}{1.2.3.4}$,... $x_n = \frac{x_0}{n!}$. Por hipótese, $x_0$ é positivo e podemos observar que é constante. Assim, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_0}{n!} = 0$. Portanto, a resposta correta é a alternativa b).

Comentários**:** A questão apresentada enquadra-se no conteúdo previsto para a disciplina de análise na USP sob o tópico "Sequências e séries numéricas". A resolução exige que o estudante tenha conhecimentos acerca de sequências e séries e limites.

* * *

Questão 22**:** Um dos problemas mais importantes estudados pelo cálculo diferencial e integral diz respeito à maximização e minimização de funções. Um desses problemas está relacionado à função cúbica definida por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, em que $a, b, c$ e $d$ são constantes reais, com $a \neq 0$. Acerca dessa cúbica, avalie as afirmações a seguir: I. A função $f$ possui apenas um ponto de inflexão, independentemente dos valores de $a, b, c$ e $d$. II. Se $b^2 - 3ac > 0$, então $f$ possui um ponto de máximo local e um ponto de mínimo local. III. Se f possui um ponto de máximo local e um ponto de mínimo local, então a média aritmética das abscissas desses dois pontos extremos corresponde à abscissa do ponto de inflexão. É correto o que se afirma em: a) I, apenas. b) II, apenas. c) I e III, apenas. d) II e III, apenas. e) I, II e II.

Resolução: Avaliaremos cada uma das afirmações. I. Para verificar se um ponto $p$ é um ponto de inflexão de $f$, precisamos testar se $f$ apresenta concavidades voltadas para sentidos diferentes a partir de $p$. Ou seja, dado o intervalo $]a, b[$, contido no domínio da função, precisamos verificar se em $]a, p[$ e $]p, b[$ as concavidades da função voltam-se para sentidos opostos. Para fazer essa verificação, faremos a derivada de segunda ordem de $f$ e, dado o intervalo que se deseja verificar, a depender se o resultado for maior ou menor do que zero, saberemos se a concavidade será para cima ou para baixo, respectivamente. Igualando a zero a segunda derivada, poderemos saber, ainda, qual é a abscissa do ponto de inflexão. Derivando $f(x)$, temos: $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$. Fazendo a segunda derivada: $f''(x) = 6ax + 2b$. Igualando a zero a segunda derivada: $6ax + 2b = 0$. A abscissa do ponto de inflexão será: $6ax = -2b \to x = -\frac{2b}{6a} \to x = -\frac{b}{3a}$. É necessário avaliar as situações para $a$ positivo e negativo. Inicialmente, se $a > 0$, $f''(x) > 0$ no intervalo $]-\frac{b}{3a}, \infty[$ e $f''(x) < 0$ em $]-\infty, -\frac{b}{3a}[$, desse modo, a função terá concavidade para cima em $]-\frac{b}{3a}, \infty[$ e para baixo em $]-\infty, -\frac{b}{3a}[$. Assim, é possível afirmar que $-\frac{b}{3a}$ é o único ponto de inflexão de $f$, nesse caso. Por outro lado, caso $a < 0$, $f''(x) < 0$ no intervalo $]-\frac{b}{3a}, \infty[$ e $f''(x) > 0$ em $]-\infty, -\frac{b}{3a}[$, desse modo, a função terá concavidade para baixo em $]-\frac{b}{3a}, \infty[$ e para cima em $]-\infty, -\frac{b}{3a}[$. Assim, é possível afirmar que $-\frac{b}{3a}$ é o único ponto de inflexão de $f$ também nesse caso. Portando, a afirmação I é verdadeira. II. Para determinar os pontos de máximo e mínimo local, é necessário voltar nossa atenção para a derivada de primeira ordem da função $f$. Caso a derivada de primeira ordem seja igual a zero em um ponto, e a de segunda ordem maior do que zero, neste mesmo ponto é um ponto de mínimo local. Por outro lado, caso a derivada de primeira ordem seja igual a zero no ponto, e a derivada de segunda ordem seja menor do que zero, é um ponto de máximo local. A derivada de primeira ordem de f é: $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$. Como dito, $f'(x)$ precisa ser igual a zero no ponto $p$, então: $3ax^2 + 2bx + c = 0$. De fato, considerando $f'(x) = 0$ como uma equação de segundo grau, caso $\Delta = 4b^2 - 4 \times 3a \times c$ seja maior do que zero, haverá duas raízes reais e distintas para ela, e podemos reescrever $\Delta$ da seguinte maneira: $\Delta = 4(b^2 - 3ac)$. Assim, como 4 é um número positivo, caso $b^2 - 3ac > 0$, $\Delta$ será maior do que zero e haverá duas raízes que podem ser expressas como: $x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-3ac}}{3a}$ e $x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-3ac}}{3a}$. A derivada de segunda ordem da função é: $f''(x) = 6ax + 2b$. Substituindo nela os pontos em que a derivada de primeira ordem será zero, teremos: $f''(x_1) = 6a\frac{-b+\sqrt{b^2-3ac}}{3a} + 2b \to f''(x_1) = 2\sqrt{b^2 - 3ac}$, que é sempre positivo. $f''(x_2) =$

$6a\frac{-b-\sqrt{b^2-3ac}}{3a}+2b \rightarrow f''(x_2)=-2\sqrt{b^2-3ac}$, que é sempre negativo. Desse modo, $x_1$ é ponto de mínimo da função e $x_2$ é ponto de máximo da função. Portanto, a afirmação II é verdadeira. III. As abscissas dos pontos mínimo e máximo locais foram encontrados no item anterior, assim, basta fazer a média aritmética entre eles: $\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{\frac{-b+\sqrt{b^2-3ac}}{3a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-3ac}}{3a}}{2}=\frac{\frac{-2b+}{3a}}{2}=-\frac{2b}{6a}=-\frac{b}{3a}$, que é exatamente o valor encontrado para o ponto de inflexão em I. Portanto, a afirmação III é verdadeira. Conclui-se, assim, que a alternativa correta é e).

Comentários: A questão apresentada enquadra-se no conteúdo previsto para a disciplina de análise na USP sob o tópico "Demonstrações de alguns dos principais teoremas do Cálculo Diferencial e Integral". A resolução exige que o estudante tenha conhecimentos acerca de funções, especificamente, sobre teoremas que tratam de máximos e mínimos e ponto de inflexão, conseguindo aplicar seus resultados para a resolução do problema. Também exige conhecimento em derivadas de primeira e segunda ordem.

## 6.4 Questões de Fundamentos de Análise no Enade de 2017

Questão 23**:** Considerando que um estudante esteja testando um software para calcular o valor da integral $\int_{-2}^{1}\left(\frac{1}{x^2}-5\right)dx$, avalie as asserções a seguir e a relação proposta entre elas: I. O resultado $\int_{-2}^{1}\left(\frac{1}{x^2}-5\right)dx=-\frac{33}{2}$, apresentado pelo software, está correto porque II. a primitiva da função $f(x)=\frac{1}{x^2}-5$ é a função $F(x)=-\frac{1}{x}-5x$ e, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, conclui-se que $\int_{-2}^{1}\left(\frac{1}{x^2}-5\right)dx=\left(-\frac{1}{x}-5x\right)\Big|_{-2}^{1}=\left(-\frac{1}{1}-5.1\right)-\left(-\frac{1}{(-2)}-5(-2)\right)=-\frac{33}{2}$. A respeito dessas asserções, assinale a opção correta: a) As asserções I e II são proporções verdadeiras, e a II é uma justificativa correta da I. b) As asserções I e II são proposições verdadeiras, mas a II não é uma justificativa correta da I. c) A asserção I é uma proposição verdadeira, e a II é uma proposição falsa. d) A asserção I é uma proposição falsa, e a II é uma proposição verdadeira. e) As asserções I e II são proposições falsas.

Resolução: Avaliaremos cada uma das afirmações. I. Inicialmente, observando a integral dada, é possível perceber que ela pode ser separada em duas outras integrais, a saber: $\int_{-2}^{1}\left(\frac{1}{x^2}\right)dx$ e $\int_{-2}^{1}(-5)dx$. A integral $\int_{-2}^{1}(-5)dx$ pode ser resolvida por substituição simples, pois não apresenta pontos críticos, o que não ocorre com $\int_{-2}^{1}\left(\frac{1}{x^2}\right)dx$. Dessa forma, ater-nos-emos a esta última. $\int_{-2}^{1}\left(\frac{1}{x^2}\right)dx$, tem um ponto de descontinuidade. De fato, $x$ não pode assumir o valor zero, entretanto, a integral vai de $-2$ a $1$, passando por esse valor. Será necessário trabalhar, portanto, com integrais impróprias: $\int_{-2}^{1}\left(\frac{1}{x^2}\right)dx=\lim_{b\to0-}\int_{-2}^{b}\left(\frac{1}{x^2}\right)dx+\lim_{b\to0+}\int_{b}^{1}\left(\frac{1}{x^2}\right)dx$, $\lim_{b\to0-}\int_{-2}^{b}\left(\frac{1}{x^2}\right)dx=\lim_{b\to0-}\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_{-2}^{b}=\infty$, e $\lim_{b\to0+}\int_{b}^{1}\left(\frac{1}{x^2}\right)dx=\lim_{b\to0+}\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_{b}^{1}=\infty$. Desse modo, a integral $\int_{-2}^{1}\left(\frac{1}{x^2}-5\right)dx$ diverge. Portanto, a afirmação I é falsa. II. O Teorema Fundamental do Cálculo somente se aplica a funções contínuas e, portanto, não pode ser aplicado a essa situação, dado que existe uma descontinuidade em $x=0$. Portanto, a afirmação II é falsa. A alternativa correta é e).

Comentários**:** A questão apresentada enquadra-se no conteúdo previsto para a disciplina de Análise na USP sob o tópico "Demonstrações de alguns dos principais teoremas do Cálculo

Diferencial e Integral". A resolução exige que o estudante tenha conhecimentos acerca de descontinuidade e o Teorema Fundamental do Cálculo, além de técnicas de integração com ênfase para integrais impróprias.

## 7 DISCUSSÕES

Algumas observações podem ser feitas acerca das avaliações do ENADE aplicadas até 2017. Inicialmente, é possível notar que, em todas as avaliações já aplicadas, há questões relacionadas ao tema "Demonstrações de alguns dos principais teoremas do Cálculo Diferencial e Integral". Isso pode ser considerado razoável, uma vez que a análise busca, dentre outras questões, trazer uma visão mais rigorosa sobre os resultados utilizados no cálculo. Observa-se também que existe preocupação em avaliar as capacidades dos alunos no que se refere a sequências e séries numéricas, pois questões acerca desse assunto figuram em três das quatro avaliações aplicadas.

Comparativamente ao quadro geral, é possível verificar que a maior ênfase nas avaliações é dada aos conteúdos de Fundamentos de Matemática, Fundamentos de Geometria e Cálculo Diferencial e Integral.

Ademais, é visível a diminuição no número de questões referentes a Análise Matemática nas últimas duas avaliações do ENADE aplicadas às licenciaturas em matemática, bem como a abrangência curta dos conteúdos propostos para essa disciplina. Dessa forma, pode-se considerar que as questões relacionadas ao Cálculo Diferencial e Integral incluem conteúdos que, antigamente, eram abordados nas disciplinas de análise (OTERO-GARCIA, 2011). O que difere, entretanto, é a abordagem menos analítica focada apenas na resolução do problema que é dada no cálculo. Seria o caso de se considerar os argumentos contrários à utilização do excessivo rigor na licenciatura e assumir que a visão aplicada no Cálculo é suficiente?

Otero-Garcia (2011) levanta diversos questionamentos acerca dos motivos que levam a disciplina de Análise a estar presente nos cursos de Licenciatura, dentre eles, se ela não serviria apenas como um filtro para apontar estudantes com potencial para seguir no Bacharelado. Entretanto, há de se considerar que muitos matemáticos defendem a obrigatoriedade da Análise mesmo para a modalidade de Licenciatura. Tanto os matemáticos quanto os educadores matemáticos consultados nas pesquisas de Moreira, Cury e Vianna (2005) e Moreira e Vianna (2016) apresentaram argumentos em defesa da obrigatoriedade da disciplina de Análise na licenciatura, afirmando que a Análise proporciona:

I. entendimento da Matemática, uma vez que desenvolve a maturidade intelectual e a "Cultura Matemática" explicando os "porquês" e dando segurança ao licenciando, distanciando o aluno de fórmulas e regras desconexas ao proporcionar uma visão integrada da Matemática e a compreensão da disciplina como instrumento para aplicação;
II. um contato com a matemática "superior", conhecimento acerca de demonstrações, a organização do conhecimento matemático;
III. fundamentação e aprofundamento do conhecimento estudado na educação básica, permitindo ao licenciando conhecer de modo mais abrangente o conteúdo que lecionará e, assim, estar apto inclusive a decidir que nível de aprofundamento dará a cada conteúdo.

Essa não é, necessariamente, a posição dos autores dos trabalhos citados e, a título de um contraponto, Elias e Sachs (2018), em uma discussão mais geral sobre a formação matemática do professor, defendem que a Matemática a ser trabalhada na formação inicial deve estar conectada aos saberes que efetivamente são mobilizados na prática docente.

É interessante verificar, também, que os conteúdos abordados e que enquadramos na área de interesse de Análise, seguindo o programa de curso da USP, são abordados também em cursos de Cálculo. Sequências e séries numéricas, questões relativas a números reais e demonstrações e utilização de teoremas interessantes para o Cálculo Diferencial e Integral estão presentes em obras que tratam especificamente de Cálculo e não, necessariamente, de Análise. Estaríamos caminhando para uma “algoritmização no ENADE”, do mesmo modo como os cursos de Licenciatura caminharam para a “algoritmização da Análise Matemática”?

Como vimos, a visão predominante[5] entre matemáticos e os educadores matemáticos é de que há a necessidade da obrigatoriedade do curso de Análise para a Licenciatura, respeitados os conteúdos e bibliografias indicados por cada um. A questão que se coloca, entretanto, vai no sentido de analisar se, em um aspecto quantitativo, as avaliações oficiais aplicadas à licenciatura em matemática concederiam papel de importância a essa disciplina. Como frequentemente acontece ao se trabalhar com pesquisa, a resposta parece relativa. Fatores como o número limitado de questões reunido em cada avaliação e o caráter interdisciplinar das questões apresentadas devem ser considerados.

É possível perceber que o foco maior é dado para os procedimentos resolutivos das questões. A matemática como ferramenta. Embora o conhecimento formal e rigoroso auxilie no entendimento dos problemas apresentados, não é obrigatório, na maioria das vezes, que o estudante conheça a demonstração dos teoremas. Além disso, pode-se considerar que saber demonstrar não é condição necessária ou suficiente para garantir seu entendimento. Afinal, até que ponto os professores permitem a experimentação, a tentativa, a construção das demonstrações pelos estudantes? Em que medida essas demonstrações são apresentadas como algo definitivo ou que precisa ser reproduzido nas provas?

Respondendo à questão colocada neste trabalho, pode-se dizer que o nível de exigência em relação aos conteúdos de Análise Matemática no ENADE é baixo, se considerarmos que é dado foco no uso das ferramentas matemáticas em lugar de seu entendimento. Entretanto, ao considerar que o entendimento mais profundo possibilita maior facilidade de interpretação e, por assim dizer, maior “intimidade” do discente com os temas abordados, a Análise ainda tem papel importante a desempenhar nas avaliações nacionais de cursos de graduação.

## 8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Chegando à parte conclusiva de nosso trabalho, achamos relevante destacar que este, assim como qualquer trabalho científico, não buscou responder em absoluto às questões sobre as quais nos debruçamos. Ao contrário, por vezes os questionamentos levantados são em número maior do que aqueles que são respondidos, o que não nos causa surpresa, visto que a filosofia nos mostra que “as perguntas [...] são mais essenciais que as respostas e cada resposta transforma-se em uma nova pergunta” (JASPERS, 1971).

---

[5] Evidentemente que não há um consenso, haja vista que, até mesmo a presença nas licenciaturas do Cálculo Diferencial e Integral, não é um consenso. Gereti (2018), por exemplo, defende que não deveria haver essa disciplina nos cursos de licenciatura em Matemática.

Expusemos dados por meio de uma análise prioritariamente bibliográfica e buscamos fazer sobre eles nossas reflexões. O processo de quantificação das questões presentes no ENADE para as licenciaturas em matemática trouxe valores que, consideramos, mostram uma diminuição na abordagem da Análise Matemática, mas também podem ser utilizados para a realização de outras medições. Vemos este trabalho como uma oportunidade para que outros se desenvolvam nesse sentido, sendo possível realizar novas tabulações específicas de outras disciplinas e, assim, tirar novas conclusões. Os resultados obtidos podem, ainda, servir para mostrar quais assuntos, dentre os elencados, figuram com maior frequência no ENADE no que diz respeito à Análise Matemática.

Concluímos ressaltando que compreendemos que a análise produzida neste texto só permite uma avaliação evidentemente parcial do que se considera como nível de exigência. Nesse sentido, semelhantemente como se faz em áreas de pesquisa como a Didática da Matemática, podemos dizer que a nossa análise é *uma análise à priori do nível de exigência*. Além disso, não negamos que nossa escolha pela disciplina de Introdução à Análise da USP como referência para a tabulação não deixa de ser, em certa medida, arbitrária, uma vez que não é o currículo da USP que baliza o instrumento legal que institui as diretrizes para as licenciaturas e seus conteúdos obrigatórios. Entretanto, tratou-se apenas de uma escolha possível diante do quadro em que não conseguimos falar de “Análise Matemática” e sim de análises matemáticas, conforme justificamos antes. Nossa análise não se esgota, porém caso outros referenciais fossem usados que não os nossos, teríamos outra pesquisa que não a nossa. Por fim, as nossas análises de questões contemplam o enquadramento numa grade estipulada, porém não apresentam dados estatísticos das distribuições de respostas, nem analisam os erros cometidos e as possíveis justificativas para tanto. Todavia, considerando que a finalidade do processo avaliativo é identificar aspectos que precisam ser aperfeiçoados ou modificados nas instituições, essa análise poderia contribuir para tanto.

Esperamos, em oportunidades futuras, dar a esta pesquisa novas roupagens e novos focos, minimizar as fragilidades que apontamos (e as que não detectamos por ora), abranger outros tópicos pertinentes à análise, ao uso do rigor, e, desse modo, contribuir para o incremento da produção na área do Ensino de Análise Matemática.

## REFERÊNCIAS

ÁVILA, G. O Ensino do Cálculo e da Análise. **Revista Matemática Universitária**, São Paulo, n.33, p. 83-95, dezembro de 2002.

BARONI, R. L. S.; OTERO-GARCIA, S. C. **Aspectos da História da Análise Matemática de Cauchy a Lebesgue**. 1. ed. São Paulo: Cultura Acadêmica, 2014.

BATARCE, M. S. **Um Contexto Histórico para Análise Matemática para uma Educação Matemática**. 2003. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2003.

BRASIL. Conselho Nacional de Educação/ Câmara da Educação Superior (CNE/CES), Ministério da Educação. Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura. **Parecer CNE/CES 1.302/2001**. Relator: Francisco César de Sá Barreto. Aprovado em 06 de novembro de 2001.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), Diretoria de Estatística e Avaliação da Educação Superior (DEAES), Ministério da Educação. **Exame Nacional de Desempenho dos Estudantes (ENADE 2005)**: Área Matemática. CESPE. Brasília: 2005.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), Ministério da Educação. **Exame Nacional de Desempenho dos Estudantes (ENADE 2008)**: prova de Matemática. SINAES. Brasília: 2008.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), Ministério da Educação. **Exame Nacional de Desempenho dos Estudantes (ENADE 2011)**: matemática. SINAES. Brasília: 2011.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), Ministério da Educação. **Exame Nacional de Desempenho dos Estudantes (ENADE 2014)**: Matemática Licenciatura. SINAES. Brasília: 2014.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), Ministério da Educação. **Exame Nacional de Desempenho dos Estudantes (ENADE 2017)**: Matemática Licenciatura. SINAES. Brasília: 2017.

BRITO, M. R. F. de; LIMANA, A. O modelo de avaliação dinâmica e o desenvolvimento de competências: algumas considerações a respeito do ENADE. **Avaliação**, Campinas, p. 9-32, 2005.

BRITO, M. R. F. de. ENADE 2005: perfil, desempenho e razão da opção dos estudantes pelas licenciaturas. **Avaliação: Revista da Avaliação da Educação Superior**, v. 12, n. 3, 2007.

BRITO, M. R. F. de. O SINAES e o ENADE: da concepção à implantação. **Avaliação: Revista da Avaliação da Educação Superior**, v. 13, n. 3, 2008.

CARDONA, A. V.; AZAMBUJA, C. R. J.; SANTOS, M, B. dos. (Org.). **ENADE Comentado 2008**: Matemática. EDIPUCRS. Porto Alegre, 2011.

CASTILHOS, M. B. M.; MÜLLER, T. J. (Org.). **ENADE Comentado:** matemática 2011. EDIPUCRS. Porto Alegre, 2014.

CIANI, A. B.; RIBEIRO, D. M.; JÚNIOR, M. A. G. Formação de Professores de Matemática: um ponto de vista de egressos. In: ENCONTRO GAÚCHO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9., 2006, Caxias do Sul. **Anais...**. Caxias do Sul: Universidade de Caxias do Sul, 2006.

DALFOVO, Michael Samir; LANA, Rogério Adilson; SILVEIRA, Amélia. Métodos quantitativos e qualitativos: um resgate teórico. **Revista Interdisciplinar Científica Aplicada**, v. 2, n. 3, p. 1-13, 2008.

DIAS SOBRINHO, J. Avaliação e transformações da educação superior brasileira (1995-2009): do Provão ao SINAES. **Avaliação: Revista da Avaliação da Educação Superior**, Sorocaba: v. 15, n. 1, 2010, p. 195-224.

ELIAS, H; SACHS, L. Um ensaio teórico sobre saber mais matemática para ensinar. **Perspectivas da Educação Matemática**, v. 11, n. 27, 2018, p. 955-977.

GRATTAN-GUINESS, Ivor. **The Development of the Foundations of Mathematical Analysis from Euler to Riemann**. Massachusetts: The Colonial Press Inc., 1970. Copyright by The Massachussetts Institute of Technology.

GERETI, L. C. V. D**elineando uma pesquisa: legitimidades para a disciplina de Cálculo na formação do professor de matemática**. 2018. (164f.). Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2018.

GOMES, D. O. **A disciplina de análise segundo licenciados e professores de matemática da educação básica**. 2013. 266f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2013.

GOMES, D. O.; OTERO-GARCIA, S. C.; SILVA, L. D.; BARONI, R. L. S. Quatro ou Mais Pontos de Vista sobre o Ensino de Análise Matemática. **Bolema**, Rio Claro, v. 29, n. 53, p. 1242-1267, 2015.

JASPERS, Karl. **Introdução ao pensamento filosófico**. São Paulo: Cultrix, 1971.

MARINHOS, A. F.; NEVES, R.. **Enade 2005 – matemática licenciatura: questões resolvidas**. Fundação Educacional Unificada Campograndense (FEUC), Faculdades Integradas Campo-grandenses (FIC). Coordenação de Matemática: 2011.

MARCONI, Marina de Andrade; LAKATOS, Eva Maria. **Técnicas de pesquisa**. 5. ed. São Paulo: Atlas, 2002.

MARTINÊS, P. T. **O papel da disciplina de análise segundo professores e coordenadores**. 2012. 117f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2012.

MISSE, B. H. L.; LAMMOGLIA, B. Uma Perspectiva Histórica do Conceito de Continuidade Matemática. **Hipátia**: Revista Brasileira de História, Educação e Matemática, v.5, n.1, 2020.

MOREIRA, P. C.; CURY, H. N.; VIANNA, C. R. Por que análise real na licenciatura? **Zetetiké**, Campinas, n.23, p.11-42, 2005.

MOREIRA, P. C.; VIANNA, C. R. Por Que Análise Real na Licenciatura? Um Paralelo entre as Visões de Educadores Matemáticos e de Matemáticos. **Boletim de Educação Matemática**, v. 30, n. 55, 2016.

OTERO-GARCIA, S. C. **Uma trajetória da disciplina de análise e um estado do conhecimento sobre seu ensino**. 2011. 2 v. 529 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2011.

OTERO-GARCIA, S. C. Disciplinas de Análise na História de seu Ensino: uma trajetória no curso de licenciatura em matemática da UNESP de Rio Claro. **História da Ciência e Ensino**, v. 7, p. 1-44, 2013.

OTERO-GARCIA, S. C.; BARONI, R. L. S.; MARTINÊS, P. T. Uma trajetória da disciplina de Análise e o seu papel para a formação do professor de matemática. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 15, n. 3, p. 692-917, 2013.

OTERO-GARCIA, S. C.; CAMMAROTA, G. Releituras de um Estado do Conhecimento do Ensino de Análise a partir da Noção de Cognição Inventiva. **Alexandria**, v.6, n.1, p. 235-250, 2013.

OTERO-GARCIA, S. C. Disciplinas de Análise na História de seu Ensino: uma trajetória no curso de licenciatura em matemática da USP de São Paulo. **História da Ciência e Ensino**, v. 11, p. 56-90, 2015a.

OTERO-GARCIA, S. C. **Integrale, Longueur, Aire de Henri Lebesgue**. 2015. 374f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2015b.

PASQUINI, R. C. G.. **Um Tratamento para os Números Reais via Medição de Segmentos**: uma Proposta, uma Investigação. 2007. 209 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2007.

PINTO, M. M. F. Discutindo a Transição dos Cálculos para a Análise Real. In: LAUDARES, J. B.; LACHINI, J. (Orgs.). **A Prática Educativa sob o Olhar de Professores de Cálculo**. Belo Horizonte: Fumarc, 2001. p. 123-145.

POLIDORI, M. M.; MARINHO-ARAUJO, C. M.; BARREYRO, G. B. SINAES: perspectivas e desafios na avaliação da educação superior brasileira. **Ensaio**: aval. Pol. Públ. Educ., Rio de Janeiro, v.14, n.53, p. 425-436, 2006.

REIS, F. S. **A Tensão entre Rigor e Intuição no Ensino de Cálculo e Análise: a visão de professores-pesquisadores e autores de livros didáticos**. 2001. 302f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2001.

SILVA, L. R. R. **Prof. J. O. Monteiro de Camargo e o Ensino de Cálculo Diferencial e Integral e de Análise na Universidade de São Paulo**. 2006. 233f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2006.

SILVA, L. D. **Conhecimentos presentes na disciplina de análise nos cursos de licenciatura em Matemática no Brasil**. 2015. 236f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2015.

VERHINE, R. E.; DANTAS, L. M. V.; SOARES, J. F. Do Provão ao ENADE: uma análise comparativa dos exames nacionais utilizados no Ensino Superior Brasileiro. **Ensaio**: aval. Pol. Públ. Educ., Rio de Janeiro, v.14, n.52, p. 291-310, 2006.

**Submetido em fevereiro de 2019.**
**Aprovado em novembro de 2019.**

# ETNOMATEMÁTICA INDÍGENA: UMA ANÁLISE DOCUMENTAL DOS ARTIGOS PUBLICADOS NA REVISTA BOLEMA

## INDIGENOUS ETHNOMATHEMATICS: A DOCUMENTARY ANALYSIS OF ARTICLES PUBLISHED IN BOLEMA MAGAZINE

CÂNDIDO, Ranierisson Augusto[1]

CINTRA, Vanessa de Paula[2]

**RESUMO**

Esta pesquisa tem cunho qualitativo, e tem como objetivo apresentar um estudo em que buscamos identificar, evidenciar e compreender as tendências das pesquisas que envolvem a Etnomatemática Indígena, publicadas no periódico Bolema, perfazendo o período de 1985, quando tiveram início as atividades da revista, até abril de 2019. Para selecionarmos os artigos, buscamos, em cada edição, fazer a leitura dos títulos dos artigos e, quando necessário, suas palavras-chave e resumos. Ao fim desse processo, encontramos doze artigos, os quais, a partir de nossa análise, foram subdivididos em quatro categorias: especificidades da cultura indígena; atividades didáticas; formação de professores; e cultura indígena e Educação Matemática. Podemos observar que, após o primeiro trabalho publicado na revista *Bolema* dentro da temática aqui investigada, encontramos um espaço de tempo grande até outra publicação que se enquadrasse na pesquisa, pois se passaram quase dezesseis anos para encontrarmos outro trabalho publicado envolvendo a Etnomatemática Indígena. Observamos também que, apesar da pouca quantidade de trabalhos encontrados, eles não têm predominância em uma categoria específica; eles estão divididos igualmente dentro das categorias, o que nos mostra uma diversidade de assuntos trabalhados. Por fim, destacamos a importância da Etnomatemática como uma forma de compreender melhor a Matemática, visto que ela pode ser considerada como geradora de novas ideias surgidas de diversas culturas, além de possuir o papel de expandir os horizontes acerca da própria Matemática.

**Palavras-chave:** Cultura indígena. Atividades didáticas. Tribo indígena. Etnomatemática indígena.

**ABSTRACT**

This is a qualitative research that aims to present a study in which we sought to identify, highlight and comprehend researches trends involving Indigenous Ethnomathematics, published in Bolema, including the period since 1985, when the magazine's activities started, until April 2019. In order to select the articles, we attempted to read its titles and, when necessary, its keywords and abstracts, in each edition. At the end of this process, we identified twelve articles that were subdivided into four categories, from our analysis: specificities of indigenous culture; didactic activities; teacher training; and indigenous culture and Mathematics Education. We could notice, after the first work published in *Bolema* magazine within the theme investigated here, a long period of time until the appearance of another publication that fit the research, once it has been almost sixteen years until we have found another published work involving Indigenous Ethnomathematics. We also noticed that despite the few publications found, they have no predominance in a specific category; they are equally divided within the categories, which shows us a diversity of worked subjects. Finally, we highlighted the importance of Ethnomathematics as a way to better understand Mathematics, since it can be regarded as a generator of new ideas arising from different cultures, besides playing the role in expanding the horizons of Mathematics itself.

**Keywords:** Indigenous culture. Didactic activities. Indian tribe. Indigenous ethnomathematics

[1] Graduado em Licenciatura em Matemática pela Universidade Federal do Triângulo Mineiro (UFTM), Uberaba, Minas Gerais, Brasil. Endereço eletrônico: rani20_@hotmail.com

[2] Doutora em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista (UNESP). Docente na Universidade Federal do Triângulo Mineiro (UFTM), Uberaba, Minas Gerais, Brasil. Endereço eletrônico: vanessa.cintra@uftm.edu.br

## 1 INTRODUÇÃO

Em busca de compreender a Etnomatemática, pautamo-nos em alguns teóricos, em especial D'Ambrosio (2011), que define a Etnomatemática como a Matemática praticada de forma implícita ou não por diferentes grupos culturais, tais como: comunidades urbana e rural, comunidades indígenas, classes profissionais, além de vários outros grupos que partilham o mesmo objetivo ou tradições dentro da sociedade.

Há uma vasta diversidade de conceitos que abrangem a Etnomatemática, como destaca D'Ambrosio (2011, 2019), uma vez que ela pode ser trabalhada a partir de qualquer comunidade ou cultura, além de não precisar estar ligada à cultura dominante.

Em um resgate histórico, Mattos (2016) destaca que D'Ambrosio (1984, 1985) foi um dos primeiros a utilizar o terno Etnomatemática e ressalta a importância do pronunciamento na Conferência Internacional de Educação Matemática (ICME), em Adelaide, na Austrália, em 1984, no qual D'Ambrosio utiliza o termo Etnomatemática formalmente, tornando-se, assim, o responsável por lançar tal nomenclatura e iniciar o movimento na comunidade matemática. Nessa direção, Miarka (2011) destaca que a Etnomatemática vem sendo trabalhada há muitos anos por diversos pesquisadores, apoiados principalmente em D'Ambrósio.

Miarka (2011) traz um panorama do surgimento da Etnomatemática até o período de 2011, para isso, entrevistou alguns pesquisadores de referência no seguimento: Ubiratan D'Ambrosio; Eduardo Sebastiani; Paulus Gerdes; Gelsa Knijnik; e Bill Barton. Em seu trabalho, buscou identificar "A dimensão teórica da Etnomatemática" e "A prática de pesquisa em Etnomatemática".

Sobre "A dimensão teórica da Etnomatemática", esse autor apresenta a diversidade da concepção de Etnomatemática e indica a preocupação em não permitir que o pesquisador, durante sua investigação, se considere superior, modelador da cultura, sendo necessário evidenciar o grupo, suas individualidades e suas especificidades. De maneira geral, considera-se que a Matemática produzida por uma cultura nem sempre vai ao encontro da Matemática acadêmica, mas é necessário compreendê-la como uma fonte de conhecimento. Em grande parte das culturas, a Matemática está relacionada diretamente com as atividades do cotidiano; sendo assim, uma concepção restrita sobre Etnomatemática pode ser um empecilho para o trabalho. O autor argumenta também que em todas as culturas, por mais que não denominem os seus conhecimentos matemáticos como tal, estes estão presentes na comunidade.

É valido ressaltar que alguns pesquisadores, devido à grandiosidade do termo Etnomatemática, tentaram introduzir outros termos menos abrangentes dentro da Etnomatemática, mas não tiveram sucesso nesta tentativa. Nessa direção, Miarka (2011, p. 393) afirma que "[...] todos os discursos, no entanto, possuem uma base comum: o respeito e a necessidade ética de compromisso com o outro estudado". De maneira geral, as concepções sobre Etnomatemática direcionam para o mesmo pensamento inicial, que foi o ponto de partida definido por D'Ambrosio.

No que diz respeito a "A prática da pesquisa em Etnomatemática", Miarka (2011) destaca a não necessidade do pesquisador ficar inserido dentro de uma comunidade, mas passar por diversos grupos culturais. A falta de pesquisa de campo não é um empecilho na Etnomatemática, uma vez que é possível acompanhar, interpretar, compreender o grupo, sem estar totalmente inserido nele.

A partir das considerações destacadas, apresentamos neste texto um estudo em que buscamos identificar, evidenciar e compreender as principais tendências das pesquisas que envolvem a Etnomatemática Indígena nos trabalhos que foram publicados na revista Boletim de Educação Matemática (Bolema), em 63 edições.

## 2 ETNOMATEMÁTICA INDÍGENA

Para falar sobre povos indígenas, Silva (2013) recomenda destacar o processo de colonização sofrido por esses povos e comenta que uma grande parte das comunidades indígenas sofreu com a inserção de pessoas alheias a sua comunidade em seu contexto cultural.

Para Lübeck (2013), essa inserção traz consigo uma diversidade de problemas, sendo o choque cultural o maior deles, pois dois povos com características, costumes e linguagens diferentes começam a apresentar conflitos em todos estes aspectos. Para esse autor, o grande problema é que tais dilemas recaem na dificuldade de comunicação, e para quebrar esta barreira um povo acaba sobressaindo sobre o outro. Neste sentido, uma comunidade começa a perder força e acaba sendo disseminada e extinguindo assim suas especificidades, suas características, suas crenças, em suma, sua cultura, dessa forma, são adotadas características dos dois povos por meio de uma mistura cultural.

Esse processo de colonização também é destacado por Silva (2013), que relata que, quando um grupo ou um indivíduo se enxerga como o centro de tudo e enquadra o outro a partir de seus valores, acaba gerando desrespeito, conflitos, opressão e dominação de um sobre o outro.

Essa colonização interfere em tudo dentro da comunidade, no que se refere à crença, aos rituais, à linguagem, aos conhecimentos, à forma de ensinar e aprender, à comunicação. Devido a essa inserção, em todos os segmentos, a cultura dominante passa a ter um destaque maior, e elimina a outra cultura, dificultando futuros estudos e pesquisas, por não se terem mais as características da cultura dominada.

No que tange à Educação Indígena, a mesma perpassa por esta problemática, os colonizadores enxergam a necessidade no primeiro momento de se comunicar, com isso, passam a ensinar a língua deles para esta comunicação, deixando de lado a língua nativa da comunidade. Segundo Monteiro (2016, p.29),

> [...] a inclusão da escola em comunidades indígenas, ao longo de muitos séculos, teve como característica fundamental a imposição da educação escolar a essas comunidades, primeiramente pela coroa portuguesa e depois, pelo estado brasileiro. Ambos tinham como meta fazer com que as comunidades indígenas assimilassem a cultura da sociedade envolvente, se integrando com isso, à população brasileira. Esse processo, que objetivava, como já dito, a homogeneização da educação, não respeitava e muito menos valorizava os costumes e o conhecimento produzido por essas comunidades tradicionais.

Lübeck (2013, p. 150) afirma que, para a tribo indígena Guarani, “[...] a concepção de estudo é muito mais do que a escola eventualmente oferece, visto que na sua sensatez, o conhecimento não pode ser ensinado, sendo, antes, uma revelação; um ato típico da sua liberdade”. O autor afirma ainda que, “[...] para os guaranis, a sua vida é uma ‘escola’, o seu conhecimento e seu estudo advém da convivência, especialmente com os anciões” (LÜBECK, 2013, p. 149).

Nessa direção, Silva (2013) relata que as cerimônias e os rituais indígenas, por exemplo, estão carregados de conhecimentos e saberes. Esses saberes dentro das comunidades indígenas, apesar de não serem sistematizados, possuem diversos conhecimentos da educação conhecida como acadêmica. Com ênfase, destacamos que a matemática está presente no cotidiano da comunidade e é evidenciada nas atividades realizadas, contudo ela não possui uma forma exata e clara de ser explicada.

Com o passar do tempo, as escolas foram sendo cada vez mais inseridas nas comunidades indígenas, e em alguns casos os professores que lecionam nestas escolas são indígenas que optaram por deixar suas comunidades, foram em busca de formação acadêmica, e, após esta formação, retornaram para suas aldeias, com o intuito de ensinar a comunidade indígena.

Este movimento de busca de conhecimento por parte de alguns indígenas é importante, pois, ao retornarem à sua comunidade para ensinar, têm a capacidade de mesclar os conhecimentos adquiridos com os que já possuem. Assim, fazem a ligação do conhecimento acadêmico com o contexto social da comunidade, conseguindo evidenciar as duas formas de conhecimento.

Lübeck (2013) afirma que, apesar do processo de colonização, as comunidades indígenas buscaram focar em suas culturas, retomando costumes, linguagem e crenças, em paralelo com as culturas predominantes. Incorporando uma mistura homogênea, de modo a conservarem seus costumes e conseguirem manter a comunicação com a comunidade que está ao seu redor.

## 3 O TRABALHO DESENVOLVIDO

A metodologia adotada nesta investigação é de cunho qualitativo, o que, segundo Goldenberg (1999), não é uma representação numérica de dados, mas sim um aprofundamento da compreensão de um grupo, o que exige do pesquisador uma flexibilidade para realizar e analisar os dados. Dentro da abordagem de pesquisa qualitativa, utilizamos a modalidade de análise documental, que “[...] propõe-se a produzir novos conhecimentos, criar novas formas de compreender os fenômenos e dar a conhecer a forma como estes têm sido desenvolvidos” (SÁ-SILVA; ALMEIDA; GUINDANI, 2009, p. 14).

Apoiados nessa metodologia, apresentamos um estudo em que buscamos identificar, evidenciar e compreender as tendências das pesquisas que envolvem a Etnomatemática Indígena publicadas no Boletim de Educação Matemática (Bolema). A escolha por este periódico se deu por ser considerada uma das mais antigas e importantes publicações na área da Educação Matemática no Brasil, tem sido avaliado como periódico QUALIS NACIONAL A pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), estar registrado no *Scientific Electronic Library Online* (SciELO) e no *Journal Citation Reports* (JCR) que é uma base que apresenta indicadores de bibliométricos (índice de repercussão, o fator de impacto, entre outros).

O Bolema teve suas primeiras edições publicadas no ano de 1985 e, a partir do ano 2000, passou a ser publicado periodicamente a cada semestre. Devido à demanda da comunidade, a partir do ano de 2008, passou a ter suas edições publicadas a cada trimestre, incorporando a suas publicações algumas edições temáticas.

Considerando o objetivo deste trabalho, fizemos o levantamento das pesquisas que abordam a Etnomatemática Indígena presentes em 63 edições da revista Bolema (desde a primeira, que foi publicada em 1985, até a publicada em abril de 2019). A coleta de dados foi realizada por meio do site do Portal de Periódicos da Unesp e pelo do site da Scielo, nos quais todas as edições do Bolema estão disponíveis.

Para a busca das pesquisas, num primeiro momento fizemos a leitura dos títulos dos artigos de cada edição da revista – os títulos em línguas estrangeiras foram traduzidos, para se realizar a leitura. Em alguns casos, quando o título não deixava claro o contexto do artigo, realizamos a leitura das palavras-chave e do resumo, com o intuito de sanar qualquer dúvida, ou seja, se o artigo se enquadrava ou não na nossa busca pelos trabalhos que envolvem a Etnomatemática Indígena.

Após esse trabalho, encontramos um total de doze artigos na vertente da Etnomatemática Indígena; entre estes, três escritos em espanhol, conforme observamos no Quadro 1.

**Quadro 1:** Listagem dos artigos encontrados na revista Bolema

| Ano | n. | Título | Autores |
|---|---|---|---|
| 1989 | 6 | Sobre Aritmética e Ornamentação Geométrica: análise de alguns cestos de índios do Brasil | GERDES, P. |
| 2005 | 23 | Códice Florentino y Pensamiento Matemático. Cultura Otomí en el Valle del Mezquital | PEDRAZA, E. B. |
| 2006 | 25 | Educação Matemática, Multiculturalismo e Preconceito: que homem é tomado como medida de todos os outros? | COSTA, W. N. G. ; DOMINGUES, K. C. M. |
| 2008 | 30 | Análisis a una Figura Tradicional de las Mochilas Arhuacas. Comunidad Indígena Arhuaca. Sierra Nevada de Santa Marta, Colombia. | ARAÚJO. A. A. |
| 2009 | 33 | Avaliação em Matemática no Contexto da Educação Indígena. | SILVA, C. M. S.; SAD, L. A. |
| 2009 | 34 | A Formação de Professores e suas Relações com Cultura e Sociedade: a educação escolar indígena no centro das atenções. | RODRIGUES, M.; FERREIRA, R.; DOMITE, M. C. S. |
| 2012 | 42B | Educação Matemática na Escola Indígena sob uma Abordagem Crítica. | BERNARDI, L. dos S. ; CALDEIRA, A.D. |
| 2014 | 50 | A Educação Matemática no Contexto da Etnomatemática Indígena Xavante: um jogo de probabilidade condicional. | COSTA, B. J. F.; TENÓRIO, T.; TENÓRIO, A. |
| 2015 | 53 | A experiência etnográfica: sobre habitar e ser habitado pelo mundo Apyãwa. | SEVERINO FILHO, J. |
| 2016 | 56 | Etnomatemática do Sistema de Contagem Guarani das Aldeias Itaty, do Morro dos Cavalos, e M'Biguaçu. | SILVA, S. F.; CALDEIRA, A. D. |
| 2017 | 58 | Dificultades Metodológicas en la Investigación sobre Pensamiento Matemático Indígena y su Paradójica Educación Matemática. | AROCA, A.; CAUTY, A. |
| 2017 | 58 | Apropriação de Práticas Discursivas da Matemática Escolar: considerações a partir de uma experiência de formação intelectual de educadores indígenas. | BRITO, R. P. S.; FONSECA, M. C. F. R. |

Fonte: Autoria própria

Podemos observar que, após o primeiro trabalho publicado na revista Bolema dentro da temática aqui investigada, encontramos um espaço de tempo grande até outra publicação que se enquadrasse na pesquisa, pois se passaram quase dezesseis anos para encontrarmos outro trabalho publicado envolvendo a Etnomatemática Indígena.

## 3.1 APRESENTANDO E DISCUTINDO OS DADOS

Buscamos identificar, evidenciar e compreender as tendências que envolvem Etnomatemática Indígena nos 12 artigos que foram encontrados em 10 das 67 edições da revista Bolema. Fizemos isso a partir da discussão das categorias de análise: Especificidades da Cultura Indígena; Atividades Didáticas; Formação de Professores; Cultura Indígena e Educação Matemática.

Na categoria de análise "Especificidades da Cultura Indígena", encontramos três artigos, apresentados no Quadro 2, um que destaca a questão cultural de aldeias indígenas, um sobre o sistema de numeração de uma determinada aldeia e outro que traz um olhar sobre o habitar de uma comunidade indígena.

**Quadro 2**: Especificidades da cultura indígena

| Título | Ano | Autores |
|---|---|---|
| Códice Florentino y Pensamiento Matemático. Cultura Otomí en el Valle del Mezquital | 2005 | PEDRAZA, E. B. |
| A experiência etnográfica: sobre habitar e ser habitado pelo mundo Apyãwa | 2015 | SEVERINO FILHO, J. |
| Etnomatemática do Sistema de Contagem Guarani das Aldeias Itaty, do Morro dos Cavalos, e M'Biguaçu | 2016 | SILVA, S. F.; CALDEIRA, A. D. |

Fonte: Autoria própria

O artigo de Pedraza (2005), cujo título é "Códice Florentino y Pensamiento Matemático. Cultura Otomí en el Valle del Mezquital", teve como objetivo verificar como está presente o conhecimento matemático acadêmico entre os povos indígenas da tribo Otomí, e como ela é utilizada nesta cultura. O povo Otomí encontra-se no centro do México, no vale do Mezquital.

Para essa pesquisa, Pedraza (2005) se pautou no texto "Historia general de las cosas de Nueva Espanã", conhecido como Códice Florentino. Este Códice é um trabalho histórico, que foi pesquisado entre os anos 1558 e 1577, e abrange temas como religião, história, organização social, política, comércio e costumes do cotidiano. A pesquisadora encontrou nele diferentes momentos em que a matemática se fez presente, tais como no espaço, nos números, nas medidas e no tempo, evidenciando assim a presença do conhecimento matemático acadêmico dentro da cultura Otomí, mesmo que de forma implícita. Nesse sentido, Silva (2013, p. 291) destaca que são ações que "estão intrinsecamente ligadas às celebrações dos ritos, cerimônias, atividades cotidianas e, sendo assim, as ações relacionadas à contagem, quantificação, medição, ordenação, classificação, etc., são sedimentadas pela lógica da vivência/convivência estabelecida socialmente".

Pedraza (2005) evidencia os ciclos de festas que são padronizados com a época de fartura na aldeia, e os artefatos manuais que, segundo a autora, em sua maioria são utilizados como forma de expressão, os quais apresentam simetria, formas geométricas, mostrando novamente conceitos matemáticos presentes dentro da cultura, conforme podemos perceber nas figuras apresentadas por Pedraza (2005).

Severino Filho (2015), em seu artigo intitulado "A experiência etnográfica: sobre habitar e ser habitado pelo mundo Apyãwa", teve como objetivo construir um conjunto de estudos e reflexões sobre os conhecimentos de povos indígenas e suas epistemologias.

Para o desenvolvimento do seu trabalho, fez uso da observação de campo e, durante esse momento, para adentrar melhor a comunidade, Severino Filho (2015) buscou evitar o excesso de abordagens e interrupções nas atividades dos indígenas, e o uso inconveniente da máquina fotográfica e do gravador. Ao evitar o uso desses equipamentos, percebeu que os mesmos estavam passando de mãos em mãos entre membros da comunidade, e assim foram geradas imagens com diferentes focos, dependendo de quem os manuseava.

Os anciãos focavam em uma visão mais interna da aldeia, sempre de um mesmo ponto; os homens adultos já buscavam uma visão externa à aldeia, fotografando as aldeias vizinhas; quando passadas para as mãos das mulheres, as imagens tinham uma visão geral de tudo, dos rituais, das crianças, das atividades dos homens; já nas mãos dos jovens, as imagens eram de curtas distâncias, sempre voltadas paras os grupos de jovens e suas atividades; e, por fim, quando estavam nas mãos das crianças, eram cenas de ousadia e liberdade, as meninas sempre em torno dos quintais e cuidando dos bebês e das crianças menores, e os meninos no entorno da aldeia, com os estilingues e flechas.

**Figura 1**: Artefatos manuais

Fonte: Pedraza (p. 10, 2005)

Severino Filho (2015) apresentou, em seu trabalho, a comunidade e suas divisões etnográficas, em cujo centro da aldeia ficava a Takãra, que é uma cabana onde são realizados os rituais e reuniões da comunidade, e nesses momentos pôde compreender sobre o processo de produção de conhecimento e ensino das práticas e da cultura Apyãwa.

Silva e Caldeira (2016), no artigo intitulado "Etnomatemática do Sistema de Contagem Guarani das Aldeias Itaty, do Morro dos Cavalos, e M'Biguaçu", tiveram como objetivo analisar o sistema de contagem e alguns símbolos gráficos, mais especificamente apresentar o sistema e os símbolos gráficos dos Guarani das aldeias Itaty e M'Biguaçu, no estado de Santa Catarina.

Inicialmente, os autores trazem um recorte sobre a colonização, por meio da qual, ao chegarem os portugueses às terras brasileiras, foi imposta aos índios uma nova cultura, considerando todos os saberes deles como inferiores e sem valor perante os colonizadores. Os autores ainda ressaltam que os indígenas foram submetidos a uma prática escolar, com o objetivo de aniquilar sua cultura e produzir mão de obra indígena. O que é reafirmado por Monteiro (2016, p. 26), que destaca que a colonização, "[..] ao longo de muitos séculos, teve como característica fundamental a imposição da educação escolar a essas comunidades".

Silva e Caldeira (2016) relatam que as duas comunidades vivem da agricultura, da caça e dos artefatos que são produzidos para uso e comércio, e ambas recebem atendimento médico periodicamente. Quanto à vertente escolar, os autores afirmam que as duas possuem escola indígena, com professores indígenas e não indígenas. Ressaltam também que, entre os diversos desafios das escolas, está a revitalização dos conhecimentos da cultura Guarani – nestes conhecimentos se incluem os matemáticos.

Esses autores apresentam os símbolos gráficos do sistema de contagem Guarani para os números de 1 a 100 (um a cem) e afirmam que a Etnomatemática possibilitou compreender as representações gráficas Guarani para os números; e estes símbolos têm ao mesmo tempo a função de quantificação e a de expor elementos dessa cultura. No que diz respeito aos números para os Guaranis, Lübeck (2013) afirma que eles compreendem a importância dos números, e os adotam mais no sentido qualitativo. Nesse contexto, Silva e Caldeira (2016) afirmam que o sistema numérico Guarani possui a base cinco, o que é facilmente justificado pela quantidade de dedos da mão, e também pelo caule da mandioca, que possui caroços que se alinham em grupos de cinco.

Os artigos presentes nesta categoria nos mostram, por um lado, a diversidade, e ao mesmo tempo as especificidades das comunidades indígenas. Cada comunidade possui suas tradições, crenças, costumes, linguagens, meios de comunicação e regras. Essas especificidades vêm passando de geração em geração, deixando vivos os costumes das comunidades indígenas. Sendo assim, conforme D'Ambrósio (2011) explica, a Matemática pode ser entendida como a arte ou técnica de conhecer e entender os saberes de uma determinada cultura, e que as pesquisas em Etnomatemática em grande parte necessitam de uma aproximação à cultura a ser estudada.

Na categoria de análise "Atividades Didáticas", indicamos três artigos, conforme o Quadro 3. Nele apresentamos trabalhos que foram desenvolvidos por meio de atividades didáticas que foram elaboradas considerando a cultura indígena local.

**Quadro 3***:* Atividades didáticas

| Título | Ano | Autores |
|---|---|---|
| Sobre Aritmética e Ornamentação Geométrica: análise de alguns cestos de índios do Brasil. | 1989 | GERDES, P. |
| Análisis a una Figura Tradicional de las Mochilas Arhuacas. Comunidad Indígena Arhuaca. Sierra Nevada de Santa Marta, Colombia. | 2008 | ARAÚJO. A. A. |
| A Educação Matemática no Contexto da Etnomatemática Indígena Xavante: um jogo de probabilidade condicional. | 2014 | COSTA, B. J. F.; TENÓRIO, T.; TENÓRIO, A. |

Fonte: Autoria própria

Gerdes (1989), em seu artigo intitulado "Sobre Aritmética e Ornamentação Geométrica: análise de alguns cestos de índios do Brasil", traz uma análise de padrões de cestos cilíndricos de fundo quadrado, onde cada um destes cestos possui um padrão diferente em suas paredes laterais. O autor relata que adquiriu quatro cestos com padrões de construção diferentes, sendo que três destes foram adquiridos pelo autor em Rio Claro, São Paulo, onde lhe foi informado terem vindo de tribos indígenas do norte do Brasil, e o outro foi adquirido em São Paulo e provém da aldeia Kawayará dos índios Wai-Wai.

O artigo traz algumas considerações comuns entre os cestos: todos apresentam padrões preto e branco; eles se entrelaçam de forma cruzada; todos os fios tiveram uma metade tingida de preto, e a outra metade manteve sua cor natural; o fundo de cada cesto é congruente numa rotação de 90º, ou seja, nos quatros quadrantes; e todas as espirais pretas giram em sentido contrário ao das espirais brancas; com isso, os cesteiros (aqueles que produzem os cestos) conseguiram fazer com que, nas paredes laterais dos cestos, a parte preta cruzasse somente com a parte branca.

Seguindo essa solução, foi possível trazer padrões planares utilizados em esteiras para os cestos. Gerdes (1989) discute que esses padrões encontrados nos cestos são simétricos e concluiu que os cesteiros são obrigados a escolherem um número de tiras (N), de tal modo que no cesto haja espaço para que o padrão apareça exatamente P vezes. Ele observa então que $N = P \times Q$, onde o Q é o número de tiras que gera o elemento padrão. Como o fundo do cesto é composto por quatro quadrantes congruentes, o autor afirma que, $N = 4n$, onde cada um destes quadrantes é responsável por gerar um quarto da parede cilíndrica do cesto. Se para a construção do cesto se faz necessário repetir p vezes um padrão, é garantido que $n = p \times q$, que implica em $P = 4p$. A partir destas colocações, o autor concluiu que os cesteiros provavelmente estavam cientes da relação $n = p \times Q$, na qual os valores de P e Q determinam o número (n) de tiras que serão utilizadas em cada quadrante do fundo do cesto. Esse desenvolvimento é defendido por Gerdes em sua entrevista a Miarka (2011, p. 307) a quem diz: "[...] não se trata de reconhecer a matemática de uma prática, mas de reconstruir as técnicas utilizadas para a elaboração de um artefato e buscar possíveis ideias matemáticas envolvidas nesse processo".

Com o intuito de facilitar a compreensão do leitor, Gerdes (1989) nomeia cada um dos cestos de A, B, C e D. Ao analisar a construção do cesto A, o autor, utilizando a fórmula definida, constatou que, apesar de os cesteiros estarem cientes da quantidade de fios necessários para a construção do cesto, não foram cuidadosos no momento da construção, pois as filas tinham quantidades diferentes nas larguras, podendo assim esse cesto ser uma cópia de outro cesto mais antigo. Ao analisar os cestos B, C e D e utilizando a fórmula encontrada, o autor verificou que é possível construir o cesto de forma perfeita, de modo que cada padrão esteja exatamente igual, porém, ao analisar a construção destes cestos, verificou que, devido a um erro de agrupamento, o cesteiro precisou criar uma figura diferente na parede vertical, para que o cesto fechasse.

Araújo (2008), em seu artigo intitulado "Análisis a una Figura Tradicional de las Mochilas Arhuacas. Comunidad Indígena Arhuaca. Sierra Nevada de Santa Marta, Colombia", segue a mesma perspectiva de Gerdes (1989), mas utiliza mochilas ao invés dos cestos. Araújo (2008) ressalta que as mochilas arhuaca são objetos que fazem parte do patrimônio cultural da Colômbia, com isso, as construções dessas mochilas contribuem para estabelecer e reafirmar a identidade cultural arhuaca.

As mochilas são tecidas em espiral contínuo ou fracionado, quando se faz necessário emendar alguns fios, e possuem padrões figurativos na sua superfície cilíndrica. O autor afirma que existem diversos padrões figurativos utilizados na construção das mochilas, e ilustra dezesseis destes modelos, tomando como objeto de estudo o Háku, a cobra cascavel. Para os arhuacos, a figura da cascavel tem uma simbologia muito complexa, passando pela questão do tempo, e até mesmo pela vida amorosa dos aldeões.

O autor relata que as mochilas Háku possuem um padrão figurativo composto por losangos ou diamantes. Esse padrão figurativo está presente na pele da cascavel, por isso essas mochilas recebem esse nome. Araújo (2008) afirma que a variação de uma mochila Háku para outra está na questão da angulação das figuras; em algumas mochilas os padrões figurativos estão maiores, em outras, mais achatados, ou mais compridos, o que está ligado diretamente com a idade das cascavéis. Todas possuem um mesmo padrão figurativo e à medida que elas crescem, essas figuras sofrem alterações. Na figura a seguir, trazemos de Araújo (2008) uma imagem que identifica uma mochila Háku com seu objeto natural que a representa.

Araújo (2008) ressalta a matemática presente nestas construções, uma vez que as mochilas possuem simetria, padrões figurativos idênticos e centralização. Para os arhuacas, esta matemática pode estar presente de forma implícita, mas o autor afirma que ela é evidente nas construções. Essa construção das mochilas está ligada ao pensamento de Gerdes, que enxerga o conhecimento matemático implícito nos artefatos.

O autor afirma que esta análise, da construção das mochilas, poderia ser levada para dentro dos cursos de Matemática, não só dentro da comunidade indígena, mas de modo geral, como um meio de dar significado à cultura arhuacas, evidenciando, através da Etnomatemática, diferentes vertentes que a Matemática possui, de acordo com cada cultura.

Em uma abordagem diferente dos dois trabalhos apresentados nesta categoria, Costa, Tenório e Tenório (2014), em seu artigo intitulado "A Educação Matemática no Contexto da Etnomatemática Indígena Xavante: um jogo de probabilidade condicional", utilizam a tecnologia computacional para a construção de seu trabalho, aplicando um jogo com alunos do 7º ano do

Ensino Fundamental. Cumprindo o que está indicado no currículo do Rio de Janeiro no item "Campo de tratamento de Informação", os autores afirmam que, a partir do jogo, os alunos podem começar a desenvolver a noção indutiva de probabilidade, pensando em estratégias na primeira jogada, para talvez reduzir a quantidade de números na próxima jogada.

**Figura 2**: Mochilas Háku e cascavel

Fonte: Araújo (p. 6, 2008)

Antes de abordar o jogo "Adivinhe o número Xavante", os autores trouxeram um tópico que aborda a Etnomatemática Indígena, no qual os mesmos afirmam que muitos educadores têm um grande interesse no estudo da história da Etnomatemática Indígena. No que diz respeito à trajetória histórica, a Educação Escolar Indígena atuou como agente de controle, evangelização e imposição forçada de mudança social, e hoje se buscam a valorização e a proteção da cultura indígena. Segundo Costa, Tenório e Tenório (2014), no Brasil existe uma pluralidade de etnias, da qual se originam diferentes modos de vida, valores, crenças e conhecimentos, mas em geral tal pluralidade é posta de lado nas escolas. Monteiro (2016. p. 18) reforça esse posicionamento:

> Esse modelo de educação, que se origina em um período da história chamado de Modernidade, já dá, há algum tempo, evidentes sinais de esgotamento por priorizar, na sua essência, uma quase que total separação do homem com a natureza. Trata-se de uma concepção que privilegia o conhecimento racional, gerado pela ciência moderna alicerçada no método experimental, alçando a linguagem matemática como uma das únicas – senão a única – linguagens capazes de traduzir de forma inequívoca o conhecimento tido como verdadeiro.

Costa, Tenório e Tenório (2014) ressaltam ainda que os Xavantes vivem em terras indígenas no Mato Grosso, e nos últimos anos têm apresentado um grande aumento em sua população. A linguagem dos numerais na cultura Xavante possui um termo que os representa e uma representação com as mãos.

O jogo "Adivinhe o número Xavante", elaborado no software Scratch, baseia-se em dois personagens: o conquistador e o índio. Os autores explicam que o objetivo do jogo é que o conquistador adivinhe o número que o índio escolheu aleatoriamente entre 0 e 9.

Costa, Tenório e Tenório (2014) concluem que a Etnomatemática valoriza o conhecimento matemático de todas as culturas, e que a Matemática presente na cultura Xavante está dentro delas. Afirmam ainda que a construção do conhecimento não é feita apenas através dos livros; alguns recursos, como a tecnologia e a Etnomatemática, são aportes para discutir conceitos matemáticos e culturas diferentes.

Os artigos desta categoria nos mostram a riqueza de conhecimento que os indígenas possuem, evidenciada na construção dos cestos e das mochilas que contêm um padrão e uma lógica matemática, que, apesar de em alguns casos não estarem perfeitos, ainda seguem a lógica da construção.

É importante ressaltar, ainda, que a utilização de tecnologias para apresentar a nomenclatura dos numerais de uma cultura indígena é muito importante e ao mesmo tempo diferente. O uso da tecnologia está cada vez mais presente no dia a dia dos alunos, então é de extrema importância inseri-la ao contexto escolar.

Na categoria de análise "Formação de Professores", encontramos três artigos, apresentados no Quadro 4, que destacam a formação de professores indígenas nos cursos de especialização e na formação continuada.

**Quadro 4** : Formação de professores

| Título | Ano | Autores |
|---|---|---|
| Avaliação em Matemática no Contexto da Educação Indígena. | 2009 | SILVA, C. M. S.; SAD, L. A. |
| A Formação de Professores e suas Relações com Cultura e Sociedade: a educação escolar indígena no centro das atenções. | 2009 | RODRIGUES, M.; FERREIRA, R.; DOMITE, M. C. S. |
| Apropriação de Práticas Discursivas da Matemática Escolar: considerações a partir de uma experiência de formação intelectual de educadores indígenas. | 2017 | BRITO, R. P. S.; FONSECA, M. C. F. R. |

Fonte: Autoria própria

Silva e Sad (2009), em seu artigo intitulado "Avaliação em Matemática no Contexto da Educação Indígena", apresentam uma proposta de avaliação em Matemática implementada no contexto da formação continuada para educadores indígenas. As autoras relatam que uma barreira encontrada na criação desta avaliação é a de que, mesmo conhecendo os diversos modos de avaliar, elas estavam em busca de uma avaliação que favoreceria os diversos tipos de conhecimentos.

Os educadores presentes nesse curso de formação são das comunidades indígenas Guarani e Tupinikim. Essas comunidades, de acordo com as autoras, conquistaram o direito de ter em suas escolas somente educadores indígenas, e esse fator enriquece a cultura das aldeias.

> Cabe a ele fazer dialogar, articular conhecimentos diversos para, de um lado, garantir a difusão da cultura indígena no ambiente escolar, dando sustentação à sua identidade étnico-cultural e, de outro, promover o acesso aos códigos da sociedade não indígena, necessários às relações advindas da situação de contato. (MONTEIRO, 2016, p. 30).

Para a realização do curso de formação continuada dos educadores indígenas, as autoras trabalharam diversas atividades, e destacam a de pintura corporal e a confecção de cestos, práticas constantes nas aldeias indígenas nas quais, a partir da construção, obtêm-se diversas figuras geométricas. O momento foi utilizado pelas autoras para contextualização das construções geométricas, dos padrões, e como estas construções podem refletir no ensino da Matemática e da geometria. Ao final do curso, foi aplicada aos educadores indígenas uma avaliação geral dos encontros, e uma autoavaliação. A partir desta avalição, as autoras conseguiram um retorno quanto ao aproveitamento didático das atividades para as futuras aulas dos educadores.

Silva e Sad (2009) afirmam que o contato com estes educadores lhes ensinou que os mesmos vivem em constante avaliação, em pares, na comunidade, e em suas atividades. Por fim, as dificuldades iniciais das pesquisadoras foram transpostas, acontecendo uma prática de avaliação no sentido mais formativo, qualitativo e interativo. Silva e Sad (2009) concluem que temeram por se afastarem de uma avaliação escolar clássica, mas o caminhar das ações pedagógicas e da aprendizagem as aproximou de atitudes avaliativas constantes durante o curso.

O trabalho de Rodrigues, Ferreira e Domite (2009), intitulado "A Formação de Professores e suas Relações com Cultura e Sociedade: a educação escolar indígena no centro das atenções", apresenta a formação de professores de uma forma diferente à de Silva e Sad, na qual os autores apresentam um diálogo em torno das questões contemporâneas formuladas por educadores indígenas e não indígenas envolvidos na formação de professores indígenas. Trata-se de três educadores em busca de compreender o que é importante para uma construção no âmbito da educação escolar indígena.

Os autores, quando comentaram sobre "A formação de professores em um contexto intelectual", ressaltaram a importância de se trabalhar com a autorreflexão, de ser um professor reflexivo contínuo sobre sua visão de mundo e ação na sociedade. Apontam também a importância da valorização do meio cultural no qual se vive, principalmente se o docente não faz parte da cultura dominante. Por meio do diálogo entre indígenas e não indígenas, os autores perceberam a possibilidade do surgimento de informações sobre o cotidiano, questões políticas e burocráticas da formação de professores indígenas. Eles veem que o diálogo entre pesquisador e educador de dois grupos socioétnicos, de modo informal, é um meio que envolve os educadores em um processo crítico reflexivo sobre o saber fazer pedagógico.

O trabalho apresenta um diálogo entre os três autores, no qual relatam que a cada dia as aldeias estão mais cercadas pela cultura não indígena, até mesmo nas escolas presentes dentro das aldeias. Outro ponto discutido foi em relação aos encontros entre os professores indígenas e não indígenas, que eles relatam serem de extrema importância para os dois lados, e que a troca de experiência é um excelente momento para o crescimento pessoal. Acrescentam ainda que é necessário que as comunidades indígenas tenham mais espaço dentro da sociedade, pois existe o choque de realidade em seus primeiros contatos com a cultura externa à da aldeia; além disso, eles enxergam uma necessidade de relacionar a cultura indígena com a não indígena, de forma a preparar os alunos para experiências futuras.

Brito e Fonseca (2017), em seu artigo intitulado "Apropriação de Práticas Discursivas da Matemática Escolar: considerações a partir de uma experiência de formação intelectual de educadores indígenas", nos apresentam a formação de professores de um curso de formação intelectual para educadores indígenas das tribos Patao, Xakriabá e Tupiniquim, apresentando a relação entre a matemática escolar e as práticas matemáticas indígenas.

Os autores destacam que, no geral, existe uma predominância da matemática escolar, em relação às práticas matemáticas indígenas, e acrescentam que o mesmo ocorre dentro dos cursos de formação de professores indígenas. Relatam também que a apropriação desta matemática escolar, pelo licenciando indígena, não pode ser só uma assimilação, é preciso trabalhar a questão da significação com estes alunos.

Brito e Fonseca (2017) ressaltam a relação entre matemática escolar e indígena, e que, apesar da matemática escolar estar inserida cada vez mais nas escolas indígenas, é evidente certo distanciamento entre as duas matemáticas. Os alunos indígenas ainda apresentam dificuldades para compreender alguns conteúdos e de fazer a assimilação da palavra com o seu significado matemático. Esse posicionamento dos autores está atrelado ao que afirma Silva (2013, p. 29): "um dos problemas de grande parte dos estudos sobre a produção dos saberes e conhecimentos e, de forma especial, os, matemáticos, é retirar esses saberes de seu contexto de produção".

Percebemos que os artigos desta categoria pontuam acerca da formação de professores em diferentes vertentes, mas a conclusão se encaminha para o mesmo sentido: a necessidade de formação específica para professores indígenas e a necessidade de encontrar o elo que liga a matemática escolar aos conceitos matemáticos presentes nas aldeias indígenas.

Na categoria de análise “Cultura Indígena e Educação Matemática”, apresentamos três artigos, conforme o Quadro 5, que perpassam o preconceito e o multiculturalismo, as dificuldades no ensino à comunidade indígena, e a Educação Matemática Crítica.

**Quadro 5:** Cultura Indígena e Educação Matemática

| Título | Ano | Autores |
|---|---|---|
| Educação Matemática, Multiculturalismo e Preconceito: que homem é tomado como medida de todos os outros? | 2006 | COSTA, W. N. G.; DOMINGUES, K. C. M |
| Educação Matemática na Escola Indígena sob uma Abordagem Crítica. | 2012 | BERNARDI, L. S.; CALDEIRA, A. D. |
| Dificultades Metodológicas en la Investigación sobre Pensamiento Matemático Indígena y su Paradójica Educación Matemática. | 2017 | AROCA, A.; CAUTY, A. |

Fonte: Autoria própria.

Bernardi e Caldeira (2012), em seu artigo intitulado “Educação Matemática na Escola Indígena sob uma Abordagem Crítica”, apresentam as problemáticas que envolvem a Educação Indígena que vêm de séculos atrás, começando com a colonização, por meio da qual os indígenas foram catequisados, para servirem como força de trabalho, até os dias atuais, nos quais se tenta integrá-los a fim de uma evolução cultural unilateral. Afirmam ainda que só em 1988 a população indígena teve um amparo na Constituição brasileira, a qual concede aos indígenas o direito à prática de suas culturas, o direto à Educação bilíngue, entre outros.

No que remete à Educação bilíngue, Monteiro (2016) apresenta sua importância, visto as dificuldades de se ensinar à comunidade indígena sem a utilização da Educação bilíngue, principalmente ao se ensinar um contexto em que a palavra em português não existe na língua indígena. Relatam ainda que a comunidade indígena Kaingang teve um impasse, pois foi conduzida a passar pela “transformação” de índio para não índio, mas, apesar disso, manteve suas identidades, afirmando-se enquanto povo indígena. Atualmente, as tradições indígenas e a contemporaneidade estão lado a lado; segundo os autores, os indígenas enxergam na escola um espaço no qual conseguem reafirmar sua identidade e estabelecer diferentes relações com as comunidades do entorno.

Na perspectiva da Educação Matemática, os autores destacam a existência de diferentes etnociências e suas influências que criam a Matemática, utilizando com aporte principal trabalhos publicados por Ubiratan D’Ambrosio (1984, 2011, 2019). Utilizam também de Gelsa Knijnik (1996, 2004) que afirma que o contexto da educação escolar indígena significa conceber o processo educativo pautado na matemática tradicional do povo Kaingang e na matemática institucional, para que a comunidade indígena possa se fortalecer politicamente, tornando-se consciente das diferentes possibilidades de utilização do conhecimento matemático.

Bernardi e Caldeira (2012) descrevem a Educação Matemática Crítica, utilizando como aporte Ole Skosvsmoe (2004). Olhando para a Matemática crítica, os autores levantaram um questionamento sobre as preocupações dos indígenas com relação à educação escolar e à educação tradicional dos seus povos, e apresentam como resposta alguns posicionamentos: para os indígenas, a escola não é o único lugar de aprendizado; a relação entre os líderes da aldeia e o restante da comunidade é de troca constante; o que é aprendido na escola é passado para os líderes, e os conhecimentos antigos e costumes dos líderes são passados para o restante da comunidade. Com isso, a relação do educando com o educador, a relação da escola com a comunidade, é de companheirismo, distanciando algumas possíveis barreiras. O que conversa diretamente com Lübeck (2013, p. 149): "[...] para os guaranis, a sua vida é uma 'escola', o seu conhecimento e seu estudo advêm da convivência, especialmente com os anciões".

Outro questionamento apresentado pelos autores é acerca da posição de fronteira nos desejos dos estudantes indígenas em aprender. Para responder a esta questão, eles afirmam que os motivos para aprender estão relacionados com os antecedentes da pessoa, com o seu *background*, experiências anteriores que justificam fatos/ações anteriores, e o *foreground*, que são os planos para o futuro, pautados nas ideias de Ole Skvsmose (2004).

Costa e Domingues (2006), no trabalho intitulado "Educação Matemática, Multiculturalismo e Preconceito: que homem é tomado como medida de todos os outros?", apresentam a questão da multicultura, e afirmam que a palavra multiculturalismo possui o sentido do reconhecimento da diversidade humana, isto é, a existência de diversas perspectivas, visões de mundo, conhecimentos, atitudes e valores. Para ilustrar o preconceito que algumas culturas enfrentavam, as autoras trouxeram um tópico no qual utilizaram as pesquisas como suporte para a manutenção dos preconceitos e discriminações, e destacam as fábulas que eram utilizadas na Grécia antiga para separar as pessoas que tinham poderes do restante da população, quando as fábulas se tornaram insuficientes para explicar as diferenças e outras explicações foram engrenadas, como a craniometria, que é a medição do tamanho do crânio.

Outro ponto salientado pelas autoras é a padronização da ciência ocidental, que transforma as experiências de uma classe dominante em experiências universais. Neste sentido, elas destacam a valorização de uma única forma de racionalidade como sendo parte de um discurso que promove preconceitos e discriminação; a divulgação da ideia da universalidade do conhecimento; a educação como reprodutora de atos discriminatórios e práticas racistas; a matemática e seu ensino como forte aliada nesse processo; e a possibilidade de transformação deste quadro.

Enfatizando o tópico que trata da Matemática, Costa e Domingues (2006) afirmam que existe o discurso que atesta a unicidade e universalidade da Matemática, negando assim a existência de conhecimentos matemáticos diferentes. A Matemática dita única é apenas uma parte do conhecimento matemático construído pela humanidade, visto que alguns conhecimentos foram discriminados e silenciados.

Para quebrar essa barreira, as autoras utilizaram a Etnomatemática, que se configura como uma das mais importantes possibilidades de valorização no contexto de Educação Matemática, em que se busca a contextualização da Matemática a partir de fatos históricos e culturais. Reafirmam, assim, D'Ambrosio, que, em entrevista a Miarka (2011, p. 91), ressalta que "[...] o respeito, junto com a solidariedade e a cooperação, é um dos pilares da Etnomatemática".

Contudo, a Etnomatemática tem se empenhado em compreender a lógica, o modo de pensar, o conhecimento matemático e a racionalidade indígena. Dentro do contexto matemático, a comparação das culturas em grande parte é no processo de contagem, no qual a cultura dominante tem um sistema estabelecido e as culturas indígenas, em sua maioria, não têm bem definido. Lübeck (2013) destaca o processo de contagem dos Guarani, e ressalta que, apesar de terem apenas palavras relacionadas com os números, eles fazem associação e composição destas palavras, possibilitando contar, além disso.

Para concluir, os autores afirmam que a Educação Matemática na escola indígena Kaingang se faz necessária para compreender como ela pode contribuir com a comunidade, para garantir o seu espaço na sociedade. Para eles, cabe a toda a comunidade escolar indígena assumir o papel de protagonismo para buscar mudanças, e escrever/reescrever sua história.

Aroca e Cauty (2017), em seu artigo intitulado “Dificultades Metodológicas en la Investigación sobre Pensamiento Matemático Indígena y su Paradójica Educación Matemática”, buscam determinar as principais dificuldades enfrentadas pelo pesquisador em Etnomatemática, tendo em vista o pensamento matemático indígena alheio à comunidade. Para essa construção, os autores trabalharam com Análise Documental de textos produzidos na Colômbia, e alguns trechos de entrevistas foram retirados destes textos para a construção do artigo.

Aroca e Cauty (2017) trabalharam a partir do seguinte questionamento: quais as questões metodológicas que dificultam a percepção e compreensão do pensamento matemático indígena? Partindo deste questionamento, destacam algumas dificuldades que eles acreditam serem as mais relevantes perante a indagação.

Uma das dificuldades destacadas pelos autores é a de definir o que significa ser indígena e as tensões na coleta de informações. Para discutir essas dificuldades, Aroca e Cauty (2017) utilizaram duas entrevistas retiradas de um dos textos-base do artigo. Dessas entrevistas, uma foi realizada com um indígena tradicional, e outra com um não tradicional. Os autores concluem que ser indígena não pode ser um conceito absoluto, pois depende da realidade de cada comunidade indígena, o que está diretamente ligado à dificuldade em coletar informações, pois as características variam para cada comunidade, abrindo uma gama enorme para coletar informações. No que se refere à coleta de informações, Gerdes, por Miarka (2011, p. 295), afirma que “O diálogo pode ser visto como um meio de enriquecer as próprias experiências com a experiência do outro. É interessante pensar que tipo de experiência é esta que o outro nos proporciona no diálogo”.

Outra dificuldade destacada pelos autores foi com relação às traduções, sobre como interpretar uma cultura extinta e com poucas informações registradas. Os autores apresentam o quanto esta questão complica a pesquisa em Etnomatemática, começando pela falta de registros escritos, tornando o trabalho mais complexo e dependente da colaboração da comunidade estudada. Ao pensar nas traduções de textos, entram as possíveis interpretações dos tradutores, que podem apresentar um contexto, ou uma ideia diferente ao expressar sua opinião na tradução. Gerdes, por Miarka (2011, p. 306), afirma: “[...] a importância de atentar para os aspectos linguísticos de um grupo cultural, considerando que o pesquisador deve conhecer a sua língua e que, não sendo esta materna a visão envolvida no estudo pode ser diferenciada”.

A partir de todas essas discussões, Aroca e Cauty (2017) consideram que a falta de pesquisas em Etnomatemática indígena dificulta o processo dos pesquisadores em identificar, interpretar as relações indígenas com o mundo atual.

Por fim, esta categoria de análise apresenta alguns pontos mais delicados, ao se tratar das problemáticas que surgiram na colonização e que permanecem até os dias atuais, e das problemáticas no processo de pensamento matemático indígena, além de trabalhar com os conceitos de Multiculturalismo e de Educação Matemática Crítica.

## 4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

É válido retomar que vários dos pesquisadores entrevistados por Miarka (2011) tentaram uma nova vertente para a definição de Etnomatemática, porém, perceberam que a nomenclatura já existente desta área de estudo já englobava tudo, e com isso acabavam voltando à ideia inicial definida anteriormente por Ubiratan D'Ambrosio.

No que se refere à neutralidade destacada pelos autores dentro da Etnomatemática, é válido ressaltar que, por mais que ela se faça necessária, ao falarmos ou escutarmos algo, inconscientemente já expressamos nossas concepções. Com isso, é importante destacar que é uma interpretação, pois a mesma pode estar carregando um pouco da concepção do autor.

No que remete aos dados da pesquisa, após a leitura dos doze artigos encontrados na revista Bolema no período de 1985, quando tiveram início as atividades da revista, até abril de 2019, conseguimos apresentar algumas considerações. O primeiro ponto a ser destacado é a lacuna de quase dezesseis anos sem publicações de artigos com a temática de Etnomatemática Indígena, na revista Bolema, entre o primeiro artigo, publicado em 1989, e o segundo artigo, publicado em 2005, e depois disso a frequência dos artigos publicados dentro da temática foi aumentando.

Entretanto, a diversidade destes artigos é o ponto a ser destacado no trabalho, pois, mesmo em pouca quantidade, e divididos apenas em quatro categorias, o leque de abordagens de trabalhos dentro da Etnomatemática Indígena é enorme. Em cada categoria de análise se encaixaram três trabalhos, e esses trabalhos, apesar de terem o foco principal parecido, apresentam narrativas distintas que nos possibilitam caminhos/conhecimentos diferentes dentro das categorias.

Na categoria "Especificidades da Cultura Indígena", ficou evidente a diversidade da cultura de acordo com a região, os costumes da comunidade. No que se refere à categoria "Atividades Didáticas", surgiu a utilização de tecnologias para o ensino dos números de uma comunidade indígena e a Matemática implícita na construção dos artefatos das comunidades. Quanto à categoria "Formação de professores", todos os autores destacam a necessidade de uma formação específica para os indígenas. Por fim, a categoria "Cultura Indígena e Educação Matemática" apresenta uma discussão mais teórica em torno dos conceitos de multiculturalismo, Educação Matemática Crítica e as dificuldades metodológicas no pensamento matemático indígena.

Apesar desta gama de conhecimentos citados, é preciso continuar sempre em busca de novos conhecimentos, de modo a aumentar as pesquisas nesta temática, pois, a partir das pesquisas em Etnomatemática Indígena, podemos organizar, apresentar, conhecer, apreender diversos conhecimentos que ficam restritos às comunidades indígenas e que podem acabar perdendo-se com o tempo, se não forem documentados para que possam ter visibilidade.

Concluímos que ainda há muito a ser pesquisado dentro da Etnomatemática Indígena, e que é necessário apoiar cada vez mais estas pesquisas, para que os conhecimentos das comunidades indígenas não se percam com o passar dos anos.

## REFERÊNCIAS

ARAÚJO, A. A. Análisis a una Figura Tradicional de las Mochilas Arhuacas. Comunidad Indígena Arhuaca. Sierra Nevada de Santa Marta, Colombia. **Bolema**, Rio Claro, SP, v. 21, n. 30, p. 163-180, 2008.

AROCA, A.; CAUTY, A. Dificultades Metodológicas en la Investigación sobre Pensamiento Matemático Indígena y su Paradójica Educación Matemática. **Bolema**, Rio Claro, SP, v. 31, n. 58, p. 841-860, 2017.

BERNARDI, L. S.; CALDEIRA, A. D. Educação Matemática na Escola Indígena sob uma Abordagem Crítica. **Bolema**, Rio Claro, SP, v. 26, n. 42B, p. 409-431, 2012.

BRITO, R. P. S.; FONSECA, M. C. F. R. Apropriação de Práticas Discursivas da Matemática Escolar: considerações a partir de uma experiência de formação intelectual de educadores indígenas. **Bolema**, Rio Claro, SP, v. 31, n. 58, p. 542-536, 2017.

COSTA, B. J. F.; TENÓRIO, T.; TENÓRIO, A. A Educação Matemática no Contexto da Etnomátematica Indígena Xavante: um jogo de probabilidade condicional. **Bolema**, Rio Claro, SP, v. 28, n. 50, p. 1095-1116, 2014.

COSTA, W. N. G.; DOMINGUES, K. C. M. Educação Matemática, Multiculturalismo e Preconceito: que homem é tomado como medida de todos os outros? **Bolema**, Rio Claro, SP, v. 19, n. 25, p. 45-69, 2006.

D'AMBROSIO, U. Socio-Cultural Bases for Mathematical Education. In: ICME, 5, 1984. **Proceedings**... Adelaide, 1984.

D'AMBROSIO, U. Ethnomatematics and its Place in the History and Pedagogy of Mathematics. **For the Learning of Mathematics,** Fredericton, Canada, v.5, n.1, 1985.

D'AMBROSIO, U. **Etnomatemática**: elo entre as tradições e a modernidade. 4. ed. Belo Horizonte, MG: Autêntica, 2011. 109 p., il. (Tendências em educação matemática).

D'AMBROSIO, U. O Programa Etnomatemática e a Crise da Civilização. **Hipátia: Revista Brasileira de História, Educação e Matemática**, São Paulo, SP, v.4, n.1, p. 16-25, 2019.

KNIJNIK, G. Currículo, cultura e saberes na Educação Matemática de jovens e adultos. In: ANPED SUL, 5, V Seminário de Pesquisa em Educação da Região Sul, 2004, Curitiba/PR. CDROM. **Anais**... Curitiba/PR: Pontifícia Universidade Católica do Paraná, 2004.

KNIJNIK, G. **Exclusão e Resistência**: educação matemática e legitimidade cultural. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.

FILHO, J. S. **Bolema**, Rio Claro, SP, v. 29, n. 53, p. 845-866, 2015.

GERDES, P. Sobre Aritmética e Ornamentação Geométrica: análise de alguns cestos de índios do Brasil. **Bolema**, Rio Claro, SP, v. 4, n. ESPECIAL 1, p. 11-34, 1989.

GOLDENBERG, M. **Arte de pesquisar**: como fazer pesquisa qualitativa em Ciências Sociais. 7. ed. Rio de Janeiro: Record, 1999.

LÜBECK, M. **Utopia e esperança**: do mito da terra sem males à educação etnomatemática. 2013. 185 f. Tese (Doutorado) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2013.

MATTOS, J.R.L. (Org). Etnomatemática: saberes do campo. Curitiba, PR: Ed. CRV, 2016. 166p.

MIARKA, R. **Etnomatemática**: do ôntico ao ontológico. 2011. 427 f. Tese (Doutorado) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2011.

MONTEIRO, H. S. R. **O ensino de matemática na educação indígena**: (im)possibilidades de tradução. 2016, 173 f. Tese (Doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2016.

PEDRAZA, E. B. Códice Florentino y Pensamiento Matemático. Cultura Otomí en el Valle del Mezquital. **Bolema**, Rio Claro, SP, v. 18, n. 23, p. 59-77, 2005.

RODRIGUES, M.; FERREIRA, R.; DOMITE, M. C. S. A Formação de Professores e suas Relações com Cultura e Sociedade: a educação escolar indígena no centro das atenções. **Bolema**, Rio Claro, SP, v. 22, n. 34, p. 263-282, 2009.

SÁ-SILVA, J. R.; ALMEIDA, C. D.; GUINDANI, J. F. Pesquisa documental: pistas teóricas e metodológicas. **Revista Brasileira de História & Ciências Sociais**, Santa Vitória do Palmar, RS, v. 1, n. 1, p. 1-15, 2009.

SILVA, A. A. **Os artefatos e mentefatos nos ritos e cerimônias do danhono**: por dentro do octógono sociocultural A'uwe/Xavante. 2013, 348 f. Tese (Doutorado) – Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, 2013.

SILVA, C. M. S.; SAD, L. A. Avaliação em Matemática no Contexto da Educação Indígena. **Bolema**, Rio Claro, SP, v. 22, n. 33, p. 169-188, 2009.

SILVA, S. F.; CALDEIRA, A. D. Etnomatemática do Sistema de Contagem Grarani das Aldeias Itaty, do Morro dos Cavalos, e M´Biguaçu. **Bolema**, Rio Claro, SP, v. 30, n. 56, p. 992-1013, 2016.

SKOVSMOSE. O. Foreground dos educandos e a política de obstáculos para aprendizagem. **Etnomatemática**: São Paulo: Zouk, 2004.



**Submetido em abril 2020.**
**Aprovado em agosto de 2020.**

# MATEMÁTICA, HISTÓRIA E TÉCNICA ENXAIMEL: EXERCÍCIOS DE PENSAMENTOS

## MATHEMATICS, HISTORY AND *FACHWERK* TECHNIQUE: THOUGHT EXERCISES

PSCHEIDT, Daniele Caroline[1]
WAGNER, Débora Regina[2]

**RESUMO**

Neste artigo, busca-se estabelecer um enlace entre a Matemática e a técnica Enxaimel – Fachwerk, encontrada e aplicada em construções predominantemente alemãs no Planalto Norte de Santa Catarina. Em princípio, apresenta-se, numa perspectiva de contextualização, a história da imigração alemã no Brasil e em Santa Catarina. Em seguida, descreve-se a técnica de construção Enxaimel, sua história e as adaptações realizadas no Brasil. Por fim, apresentamos alguns exercícios de pensamentos propostos pelas pesquisadoras, as quais tomam aspectos da história e da cultura alemã, em particular, a técnica Enxaimel como lugar estratégico para promover exercícios de pensamento com matemática.

**Palavras-chave:** Ensino de Geometria. Técnica Enxaimel. Exercícios de Pensamento.

**ABSTRACT**

This article aims establish connections between Mathematics and the Fachwerk technique, wich is found and applied in a large part of the german construction in the northern plateau of Santa Catarina. At first, it will be presented the history of German immigration in Brazil and the province of Santa Catarina, in a contextualized perspective. Then, the construction Fachwerk technique will be described, as it's history and the adaptations made in Brazil. Finally, we present some thought exercises proposed by the researchers, which take aspects of German history and culture, in particular, the Enxaimel technique as a strategic place to promote thought exercises with mathematics.

**Keywords:** Geometry teaching**.** Fachwerk Technique. ThoughtExercises.

## 1 INTRODUÇÃO

A última década do século XX ficou marcada, no âmbito da pesquisa em educação matemática, pela busca incessante em construir relações entre a matemática e outras áreas de conhecimento, a fim de dar outro sentido e justificar aquilo que se ensina e se aprende com matemática nas salas de aula das escolas brasileiras. A ideia de recorrer a um enlace entre os conhecimentos construídos em campos específicos do conhecimento surge como alternativa para facilitar este processo, integrando o conhecimento e dando significado ao saber ensinado.

Com isso, o discurso escolar assumiu, nos últimos anos, a defesa da organização dos conteúdos relacionados às perspectivas da interdisciplinaridade e da contextualização. Tais discursos atravessam também os documentos oficiais que regem a educação do país, os livros didáticos e as propostas pedagógicas de ensino.

[1]Licenciada em Educação do Campo pela Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC). Endereço eletrônico: danielecarolinepscheidt@gmail.com.
[2] Doutora em Educação Científica e Tecnológica pela Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC). Docenta da Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), Florianópolis, SC, Brasil. debora.wagner@ufsc.br

A matemática escolar, por sua vez, passou a ser vista como uma possibilidade de levar o aluno à participação mais crítica na sociedade, uma vez que a escola se tornou um espaço onde as relações sociais são fortemente construídas e estabelecidas (TOMAZ; DAVID, 2008).

Dentre as considerações preliminares presentes nos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática – PCN (BRASIL, 1998, p.15), um dos princípios decorrentes de estudos, pesquisas, práticas e debates ocorridos durante os últimos anos, sugere que:

> A aprendizagem em Matemática está ligada à compreensão, isto é, à apreensão do significado; apreender o significado de um objeto ou acontecimento pressupõe vê-lo em suas relações com outros objetos e acontecimentos. Assim, o tratamento dos conteúdos em compartimentos estanques e numa rígida sucessão linear deve dar lugar a uma abordagem em que as conexões sejam favorecidas e destacadas. O significado da Matemática para o aluno resulta das conexões que ele estabelece entre ela e as demais disciplinas, entre ela e seu cotidiano e das conexões que ele estabelece entre os diferentes temas matemáticos.

Dentre as Competências Específicas de Matemática para o Ensino Fundamental presentes no documento referente à Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2018) destaca-se:

> - Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho.
>
> - Fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos presentes nas práticas sociais e culturais, de modo a investigar, organizar, representar e comunicar informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las criticamente, produzindo argumentos convincentes (BRASIL, 2018, p.267).

Portanto, reconhecer o papel da matemática no processo histórico de construção e invenção do mundo, bem como seus possíveis efeitos que emergem, atravessam, e, muitas vezes, dão suporte para a sustentação de outras áreas do conhecimento é fundamental para se compreender e dar sentido à matemática escolar, uma vez que permite produzir outras relações e significados entre os conteúdos estudados e os conhecimentos produzidos pela humanidade. Aliada a isso, a matemática é convocada a se engajar acrescente preocupação com a formação integral de sujeitos que são tanto efeito como suporte de uma sociedade cada vez mais complexa.

Neste sentido, acreditamos que o enlace entre a técnica Enxaimel e a matemática surge como uma possibilidade para o ensino da geometria nas salas de aula, valorizando tanto os conceitos matemáticos explícitos, como aspectos relacionados aos modos de olhar, o pensamento visual, a construção do pensamento espacial, a imaginação, a intuição, a história da construção de uma técnica e a cultura de um povo. Para tanto, parte-se do pressuposto de que é importante conhecer a história da técnica e entender como ela é formada e como as relações e conceitos matemáticos ali acontecem, bem como vê-la em ação na elaboração de casas e edificações presentes no espaço arquitetônico que compõe parte da cultura dos descendentes de alemães que se fixaram na cidade de Rio Negrinho e região.

Ao percorrer algumas localidades do interior do município de Rio Negrinho, Santa Catarina, facilmente nos deparamos com edificações que chamam nossa atenção pela beleza de sua arquitetura e pelo contexto histórico da época em que foram construídas. Essas edificações, conhecidas como Enxaimel, fazem parte da herança cultural perpassada pelos imigrantes alemães que, fugindo da crise na Europa no período pós-guerra, vieram se instalar no município, a partir do século XIX, em busca de novas oportunidades de trabalho, principalmente no campo.

As casas Enxaimel retratam uma técnica de construção que se baseia na montagem de paredes com hastes de madeira encaixadas entre si. Estas hastes podem ser posicionadas na horizontal, na vertical ou até mesmo inclinadas, sendo preenchidas por pedras ou tijolos. São justamente as hastes de madeira que dão sustentação às estruturas que compõe as construções. Ora, tal estrutura carrega em seu âmago os saberes da matemática!

Mas, afinal, como provocar a emergência de exercícios de pensamento tomando como pressuposto o enlace entre matemática, história e técnica Enxaimel?

Primeiramente, é importante definir o que são exercícios de pensamento e o modo como serão operados neste texto. A ideia de exercício que atravessa esse estudo não os relaciona com práticas ou atividades que possam resultar em um saber-fazer bem feito (LARROSA, 2018), mas, antes, como espaço potente para explorar o pensamento, problematizar verdades, ver o mundo e suas coisas de outra maneira.

Assim, cabe ressaltar que o exercício de pensamento matemático, apresentado neste trabalho, se dá a partir da visualidade das pesquisadoras, cujas memórias, vivências e experiências pessoais são atravessadas pelo conhecimento matemático. Portanto, não querem servir como modelo ou uma sequência didática a ser aplicada em sala de aula, mas, antes, provocar pensamentos com matemática e como ela pode incitar outros modos de promovê-la, ajudando-nos a compreender a elaboração do espaço, considerando o olhar, num diálogo com elementos da geometria plana e espacial.

Logo, o que se deseja com este artigo não está unicamente centrado em ensinar conceitos matemáticos em que se dá à técnica Enxaimel um papel secundário, apenas o lugar da motivação para ver a matemática presente na arquitetura. Sobretudo, nosso objetivo é comunicar visualmente tais conceitos e também proporcionar o entendimento da atividade do olhar em matemática considerando para isso, aspectos da história, da cultura e da elaboração de uma técnica de construção. Entende-se, portanto, que "educar matematicamente não é uma via de mão única onde se aprende somente conceitos e regras através de memorizações e macetes, mas onde está implícito também o ato de criar, refletir, imaginar e construir" (WAGNER, 2012, p.30). Neste contexto, valoriza-se o olhar, a história e a arquitetura não como simples instrumentos ilustrativos e/ou animadores de uma educação matemática tradicional, mas, sobretudo, como agentes importantes no processo de construção do conhecimento e de práticas de produção e interpretação de visualidades[3]. Então, para além de compreender os princípios que norteiam a técnica de construção Enxaimel, será preciso pensar e analisar com e como saberes matemáticos estão implícitos na técnica, bem como exercitar pensamentos a fim de vê-los – os saberes matemáticos e outros – em ação na elaboração do espaço arquitetônico.

## 2 A CHEGADA DOS ALEMÃES NO BRASIL NO SÉCULO XIX

No século XIX, a Europa passava por problemas sociais, tais como o excessivo crescimento populacional, a falta de terras para o trabalho agrícola, a alta alíquota de impostos e a dependência que a população tinha em relação aos latifundiários. Isso era, em partes, "consequência das transformações que se operaram na economia mundial em decorrência da

[3] Visualidade é um termo proveniente dos estudos da Cultura Visual que toma o olhar enquanto práticas discursivas construídas no âmbito da história e da cultura, não simplesmente como aspectos físicos e biológicos.

Revolução Industrial, entre outros aspectos" (JOCHEM, 2002, p.10). Além disso, o fluxo migratório alemão foi impulsionado "a partir da expansão marítima e comercial e da europeização da América" (GREGORY, 2002, p.10).

O descontentamento da população alemã em relação à situação era crescente, no entanto, não foi o único motivo pelo qual os imigrantes vieram a se instalar em terras brasileiras. Uma política de imigração por parte do governo brasileiro, que buscava habitar regiões até então despovoadas e fazer com que esses territórios se tornassem produtores de alimentos e implantar a indústria também impulsionou o movimento migratório.

De acordo com Siriani (2005), um decreto de D. João VI, datado de 16 de março de 1820, declarava de maneira explícita o interesse do governo em incentivar a entrada de imigrantes alemães no Brasil. Para a autora, "poderíamos estar diante de uma política imigratória preferencialmente voltada para o 'branqueamento da raça', o que em diferentes ocasiões e discursos políticos tornou-se patente" (SIRIANI, 2005, p.91). Isso porque a quantidade de população negra no Brasil no século XIX, embora necessária para a manutenção da mão de obra escrava e lucrativa, preocupava e muito os governantes e a elite, pois, dos 3.500.000 brasileiros que aqui viviam, 1.500.000 eram escravos. Ora, os efeitos desses números eram preocupantes, sobretudo, pelo fato do que Siriani (2005, p. 91) nos diz:

> A escravidão tinha efeitos sociais desmoralizantes, embora fosse uma fonte muito lucrativa de mão-de-obra que brutalizava a população e enfraquecia seus laços sociais. O haitianismo, ou seja, o temor de uma rebelião escrava em proporções como as anteriormente vistas em São Domingos, na última década de século XVIII, motivavam as elites a buscar soluções para diminuir as tensões sociais aguçadas pelo grande número de escravos e libertos. O imigrante europeu seria "o tipo racial mais adequado para purificar a raça brasileira", e também o tipo de mão-de-obra adequada para solucionar o problema econômico iminente.

Com o decreto promulgado por D. João VI, houve incentivo àvinda dos navios estrangeiros aos portos nacionais, espaço até então destinado exclusivamente à bandeira lusitana. Por consequência, Vieira Filho e Weissheimer (2011, p. 32) salientam que neste processo ocorria o seguinte fenômeno social:

> Abria-se o Brasil para o mundo e, desde 1808, um decreto permitia, pela primeira vez, a imigração de não-lusitanos. Era natural que, podendo vir ao país, alguns estrangeiros acabassem se fixando nele. Sob a influência de seu Ministro Tomás Antônio de Vilanova Portugal, o Príncipe Regente assinou Carta Régia considerando que "o real serviço e o bem-estar do povo exigiam lavoura e colonização que são medíocres nestes estados", para "promover e dilatar a civilização do vasto reino e o acrescimento de habitantes afeitos aos diversos gêneros de trabalhos com que a agricultura e a indústria costumam remunerar os estados que os agasalham".

Além disso, vale ressaltar que, durante esse período, o Brasil passava por uma crise de mão de obra. Segundo Jochem (2002), o tráfico de escravos passou a ser severamente reprimido a partir de 1850, o que gerou dificuldades para os latifundiários que necessitavam de braços para a lavoura. A imigração surgiu, então, como solução para este problema de restrição escravagista, e com isso, foram criadas no Brasil duas políticas migratórias: "uma voltada para suprir a mão-de-obra dos latifundiários e outra para a fixação de colonos, mediante a concessão de pequena propriedade rural. A primeira, coordenada pelos fazendeiros, embora com apoio governamental; a segunda, promovida pelo Governo Imperial" (p. 111).

A ideia de substituir o trabalho escravo por trabalho livre e o surgimento de um sistema de colonização, pela cessão de pequenas propriedades em terras, foram os principais instrumentos da política imigratória que se instalou no Brasil no período imperial. O objetivo era, dentre outros aspectos, trazer para o Brasil trabalhadores que pudessem substituir a mão de obra dos escravos na agricultura e executar tarefas necessárias à industrialização e ao desenvolvimento econômico. Ou seja, o que se desejava com a imigração era "o povoamento de territórios onde havia vazios demográficos e o assentamento de trabalhadores brancos, considerados eficientes e capazes, procurando implantar no Brasil uma economia moderna" (JOCHEM, 2002, p.12).

Por serem considerados "bons agricultores", o modo de trabalho dos povos alemães era visto como "ideal" para a produção de alimentos e poderia contribuir significativamente para o sistema de colonização e a política imigratória pela qual o Brasil passava após o fim da escravidão. Tal política tinha como foco principal o povoamento pelos trabalhadores brancos com pequenas propriedades de terra, vistos como mais competentes e aptos para inspirar o processo de modernização agrícola no Brasil (FICKER, 1973).

Assim, o ano de 1824 marca o início da corrente migratória alemã no Brasil, sendo a primeira colônia alemã fundada no Rio Grande do Sul, no Vale do Rio dos Sinos, hoje, a cidade de São Leopoldo. Particularmente, as maiores ondas imigratórias para o Brasil aconteceram via governo a partir da segunda metade do século XIX. Este movimento cresceu a partir das décadas de 1870 e 1880 e se estendeu até meados do século XX. A onda imigratória, iniciada no século XIX, trouxe para o Brasil cerca de 4 milhões de trabalhadores.

Se por um lado a ausência de terras era um problema para o povo alemão, por outro, a possibilidade de conquistá-las com grande facilidade em território brasileiro surgia como esperança de um futuro melhor. Os imigrantes alemães eram atraídos para o Brasil pela promessa de grandes extensões de terras produtivas e gratuitas. Além disso, a eles foi prometido ferramentas, condições de trabalho, mantimentos e assistência financeira nos primeiros tempos, além de liberdade religiosa.

No entanto, o incentivo à migração não era uma política de aceitação unânime. Ou seja, enquanto uma parte das autoridades alemãs questionava as consequências da emigração, outra, incentivava o movimento migratório. A emigração funcionava como uma tentativa de "livrar-se do ônus de uma população composta por miseráveis, e dos problemas sociais que esta poderia acarretar" (SIRIANI, 2005, p. 96).

> Para a massa de trabalhadores rurais e artesãos urbanos, sem perspectivas de sobrevivência após a restauração monárquica nos estados germânicos, imposta pelo Congresso de Viena, partir significava a expectativa de libertar-se. Fazendo-se valer deste sonho coletivo, os agentes de propaganda investiam pesado no mito de "fazer a América", de uma terra de liberdades sem fim, fazendo do sonho de muitos a riqueza de alguns (SIRIANI, 2005, p.96).

Contudo, ao embarcarem nos navios, os emigrantes já percebiam o engano de tais promessas:

> Entulhados em acomodações imundas e mal ventiladas, com parcas provisões para aguentar uma travessia que poderia durar de três a quatro meses, não é de se admirar que muitos nem chegassem a pisar no tão sonhado solo brasileiro. Morriam em proporções significativas, principalmente de tifo e cólera, doenças comuns nos navios da época. Essa situação impunha a necessidade do estado de quarentena nos portos de acolhida, antes do desembarque. Além disso, percebiam o malogro da empreitada ao chegarem a seu destino, quando decepcionados, descobriam que

> inúmeras cláusulas de seus contratos serviram apenas de engodo para os atrair às fazendas e núcleos coloniais (SIRIANI, 2005, p.96).

Durante quase todo o período de duração do fluxo imigratório (entre 1824 e 1937), a imigração alemã se caracterizou pela participação contínua no processo de colonização em frentes pioneiras – compartilhada por outros imigrantes europeus, sobretudo italianos – que resultou na formação de um campesinato de pequenos proprietários.

Uma das preocupações do recém emancipado Estado brasileiro era de povoar a região sul do país também para fins de estabelecer suas fronteiras de maneira sólida, se precavendo de possíveis invasões e procurando explorar os recursos naturais que ali poderiam ser encontrados, principalmente o potencial madeireiro da região e o desenvolvimento de comunidades agrícolas que servissem como esteio tanto em novas técnicas de manejo do campo provenientes da Europa, quanto como fator de produção agrícola para subsistência da população em geral (SEYFERTH, 1999).

## 2.1 Imigração alemã em Santa Catarina

No final do ano de 1828, dois navios partiram do Rio de Janeiro em direção a Desterro, atual Florianópolis, trazendo os primeiros imigrantes alemães à Santa Catarina. A primeira colônia a se formar, no vale do Rio Imaruim, no ano de 1829, foi a colônia de São Pedro de Alcântara (VIEIRA FILHO; WEISSHEIMER, 2011), cujo nome foi dado em homenagem ao Imperador Dom Pedro I. Mais tarde, com a intensificação da imigração, outras colônias como as de Santa Isabel e Piedade (1847), Leopoldina (1848), Theresópolis (1860), dentre outras, foram sendo formadas ao logo dos anos que se passaram desde o início do processo de migração.

Os imigrantes que chegavam a São Pedro de Alcântara tinham como desafios iniciais desbravar a mata virgem e o território indígena, bem como resistir aos rigores do clima para que pudessem, enfim, construir suas casas e comunidades, se dedicar ao plantio e se adaptar à nova forma de vida. De modo geral, o grupo era formado por agricultores, artesãos, ferreiros, soldados, carpinteiros que vieram para o Brasil em busca de melhores condições de vida. O fluxo migratório alemão para a colônia de São Pedro de Alcântara durou até a década de 1860.

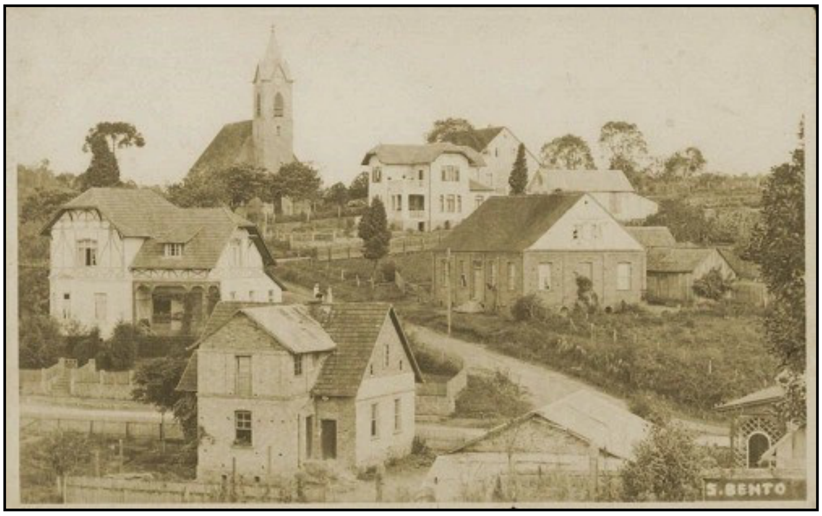
A tentativa de colonização em São Pedro de Alcântara não prosperou conforme se esperava, muito em virtude do terreno altamente acidentado e fatores de ordem geral, provocando novas iniciativas em outras regiões, procurando expandir e solidificar o processo de colonização em Santa Catarina. Tivemos assim, o surgimento de novas colônias, chamadas Dona Francisca, Itajahy (atual cidade de Itajaí) e Blumenau.

A Colônia Dona Francisca foi aprovada pelo Decreto de número 537, de 15 de maio de 1850, quecelebrou o contrato com a Sociedade Colonizadora de Hamburgo, para fundar uma colônia agrícola e livre da mão de obra escrava. A origem da colônia Dona Francisca remonta a terras tomadas como dote da Princesa Dona Francisca, por ocasião da união dos príncipes e recebeu colonos que tinham vínculos com o empreendedorismo ligado a área metalúrgica (VEIGA, 2013).

Com o objetivo de colonizar o planalto norte e marcar as divisas entre os estados do Paraná e de Santa Catarina, surge a Colônia São Bento, considerada uma extensão da Colônia Dona Francisca. Tal colônia foi implantada em cima da serra, possibilitando abertura de caminhos que ligam o planalto catarinense ao litoral.

Segundo Ficker (1973), os povoados e assentamentos dos colonos seguiam um determinado padrão em que uma estrada principal servia como local de venda e troca de produtos, e isso constituía uma região central de relações econômicas, aliado a uma Igreja em um ponto mais alto, de onde todos poderiam visualizá-la, e em torno dela também as residências começavam a se expandir. Conforme os anos iam passando, o que antes parecia uma aldeia começaria a se configurar como um pequeno centro urbano, nos moldes de um pequeno burgo europeu, mas com as características próprias da região do planalto norte catarinense (Figura 1).

**Figura 1**: Colônia de São Bento, atual município de São Bento do Sul




Fonte: https://saobentonopassado.wordpress.com/

Da colônia de São Bento surgiu o município de Rio Negrinho através da Lei Estadual Nº 133 de 30 de dezembro de 1953, tendo anteriormente status de distrito.

A primeira comunidade “oficial” de Rio Negrinho, ou Ann Grünu (lugar verde) como era chamada pelos imigrantes que não entendiam a pronúncia correta do nome do município, foi a Colônia Olsen. De acordo com Kormann (2012, p. 44), a organização da comunidade começa a ganhar contornos mais claros quando:

> Em 1904 foi realizado junto a cruz erguida à beira da estrada a primeira reunião comunitária após a reza do terço. Nesta Reunião se decidiu a construção da escola e da igreja local votada a São Pedro. Em 1911 foi nesta colônia inaugurada a primeira escola oficial de Rio Negrinho. Era a Escola Paroquial de Colônia Olsen sob a direção da paróquia católica de São Bento do Sul, o Padre Antônio Wolmeiner. A primeira missa foi celebrada na residência de José Pscheidt pelo Padre João Batista Spessato que mais tarde se tornou bispo.

Tratando-se de imigração em Rio Negrinho, segundo Kormann (2012), no início do século XX (1904), quando os primeiros habitantes europeus se estabeleceram neste atual município, encontraram neste último rincão do planalto norte catarinense ainda não colonizado terras de boa qualidade para lavouras.

De modo geral, pode-se dizer que a colonização europeia no que hoje compreende o território de Santa Catarina produziu fortes desdobramentos culturais que se estabeleceram através das tradições preservadas pelos colonos europeus, sobretudo, através do idioma, da religião, das atividades culturais de toda ordem, como festividades e folclore típico proveniente dos locais de origem desses imigrantes e da arquitetura própria.

A arquitetura é, segundo Gislon (2013), um dos elementos marcantes das cidades de imigração alemã que evidenciam a identidade cultural da população através de sua plasticidade, cuja característica mais visível dessas paisagens teuto-brasileiras está na forma das edificações. Tais edificações que sobreviveram aos tempos criam um cenário que distingue essas cidades de outras como aquelas representadas pelacolonização italiana ou portuguesa. Em particular, neste artigo, daremos ênfase aos aspectos arquitetônicos provenientes da técnica Enxaimel, uma técnica de construção secular inventada e disseminada pelo mundo pelos povos germânicos.

.

### 2.1.1 A história da arquitetura Enxaimel – *Fachwerk*

Os registros históricos acerca das origens exatas do Enxaimel enquanto modo/técnica de construção são controversos e imprecisos, porém, de certo modo, podemos denotar alguns padrões que se repetem em algumas regiões em detrimento de outras e desse modo temos uma ideia muito próxima da cadeia de acontecimentos e desdobramentos históricos que levaram o Enxaimel a ter uma identificação extremamente forte para com o povo germânico.

De acordo com Wittmann (2016), a técnica de construção Enxaimel representa uma evolução contínua de técnicas rudimentares do período neolítico, passando por habitações chamadas de palafitas, que primavam pela utilização da madeira que, com o passar do tempo, foram se aprimorando até serem elaboradas da maneira como ocorreram na Europa Central, principalmente nos povoados e vilas da Idade Média, no período da queda do Império Romano no Ocidente com as invasões bárbaras.

As origens do Enxaimel indicam a utilização de ferramentas simples, porém eficientes, sendo que o trabalho de talhar a madeira era fundamental para o sucesso dos encaixes. Nesse contexto, na esteira da influência dos Romanos e a utilização de pequenos machados para trabalhar a madeira, surge o Enxó (*Breitbeil*), que servia para plainar as grandes peças de madeira e dar forma aos grandes caibros que fariam toda a formatação e sustentação da macroestrutura da habitação (WITTMANN, 2016).

Em um período em que o ferro ainda era um artigo de luxo e que, devido às guerras e invasões, era reservado mais para a fabricação de armas e ferramentas, utilizava-se, diante desse contexto de racionalização dos recursos, pregos de madeira como forma de fixação das tradicionais treliças que compunham a estrutura do Enxaimel e que iriam marcar essa tradicional técnica de maneira indelével.

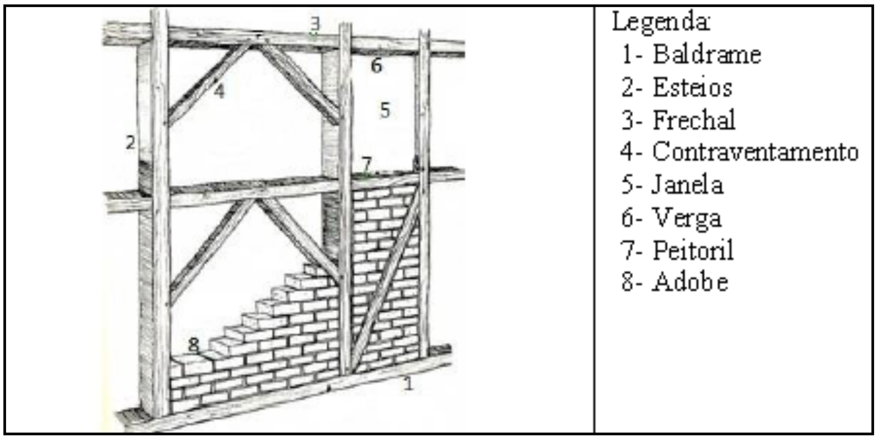
De acordo com Weimer (2005), o padrão de construção Enxaimel consistia basicamente em um arranjo de madeiras, horizontais, verticais e inclinadas de modo a se apoiar mutuamente através de um sistema de encaixe, formando um arranjo de treliças (triangulações), ajustadas e firmes, preenchidas com materiais como taipa, alvenaria, pedras etc.

Outro fator marcante que caracteriza as casas e construções Enxaimel é o telhado. Bastante inclinado, essa estratégia para cobrir as casas foi estabelecida devido ao clima alemão, reconhecido pelo alto volume de chuvas e umidade durante praticamente todo o ano. Deste modo, uma estrutura elevada e bem inclinada impede que a madeira molhe e apodreça rapidamente.

De modo geral, trata-se de uma técnica de construção considerada simples e viável financeiramente. De acordo com Gislon (2013), os elementos básicos de uma construção Enxaimel podem ser representados na Figura 2.

A maneira como se dava a composição dos elementos na construção de sistema Enxaimel favorecia uma estrutura firme e durável desde que a madeira não fosse apoiada diretamente na terra, o que provocava a umidade e o apodrecimento dos caibros. Para dar uma solução a esta questão, os imigrantes utilizaram-se em grande parte do modelo da Baixa-Alemanha, dos vestfalianos e pomeranos, e começaram a apoiar as estruturas de madeira em uma base composta de pedras ou alvenaria, de forma que a estrutura de madeira ficava a uma distância funcional do solo de modo que não viesse a se deteriorar através da umidade do solo.

**Figura 2**: Elementos que compõe a estrutura Enxaimel "A"




Fonte: http://blogneobambu.com

Neste sentido, Veiga (2013) destaca que o sistema de construção Enxaimel não tinha por interesse primário nenhuma pretensão estética e sim pragmática, funcional e de boa relação custo-benefício. As casas eram construídas de acordo com os materiais e recursos que existiam em abundancia nas áreas de colonização, geralmente onde se abriam caminhos, estradas, clareiras e áreas para plantio e a atividade pecuária. Deste modo, a madeira era um elemento que se encontrava com facilidade e cujo processamento rústico não impedia que fossem utilizadas na construção das casas dos colonos de forma muito eficiente, haja vista que as treliças de madeira típicas desse modo de construção possibilitavam uma firmeza estrutural adequada.

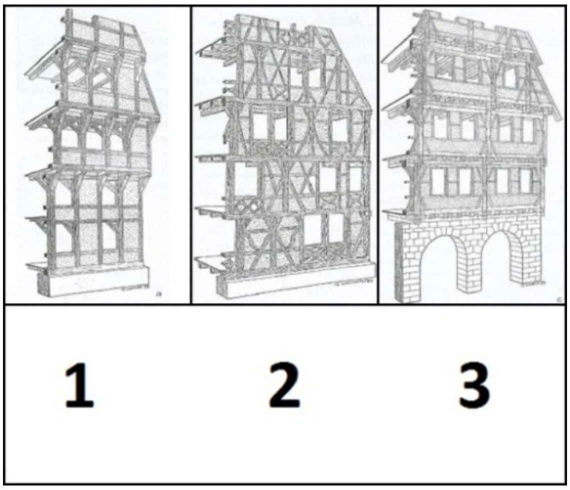
De acordo com Weimer (1983), com a vinda dos imigrantes alemães para o Brasil, três variantes de construção do sistema Enxaimel foram trazidas e desenvolvidas nas colônias sul brasileiras, a saber, conforme enumerado: 1) Enxaimel da Baixa-Alemanha (Vestfalianos e Pomeranos); 2) Enxaimel da Média-Alemanha (Renanos) e 3) Enxaimel da Alta-Alemanha (Bávaros e regiões limítrofes). Sendo que o modelo mais utilizado nas colônias em solo brasileiro fora o Enxaimel da Baixa-Alemanha, pois correspondia ao local de maior emigração de alemães para o Brasil (WEIMER, 1983).

A variação de forma como o Enxaimel é empregada não altera os fundamentos pelos quais ela é concebida, apenas são adaptações necessárias ou convenientes conforme a região que se origina. Pelo menos três grandes variações na forma como se concebeu a construção foram bem mapeadas e estão representadas na Figura 3. A mais popular se encontrava nas regiões do Sul da Alemanha, região que contribuiu com um grande número de imigrantes no processo de colonização do Sul do Brasil.

Ao observar a Figura 3, percebe-se que, embora diferentes maneiras de conceber a macroestrutura do Enxaimel eram empregadas, o sistema de treliças e seus fundamentos básicos permaneciam.

Na Figura 4, é possível observar a composição da estrutura Enxaimel mais utilizada pelos colonos que aportaram em terras brasileiras, com o correspondente nome no idioma alemão.

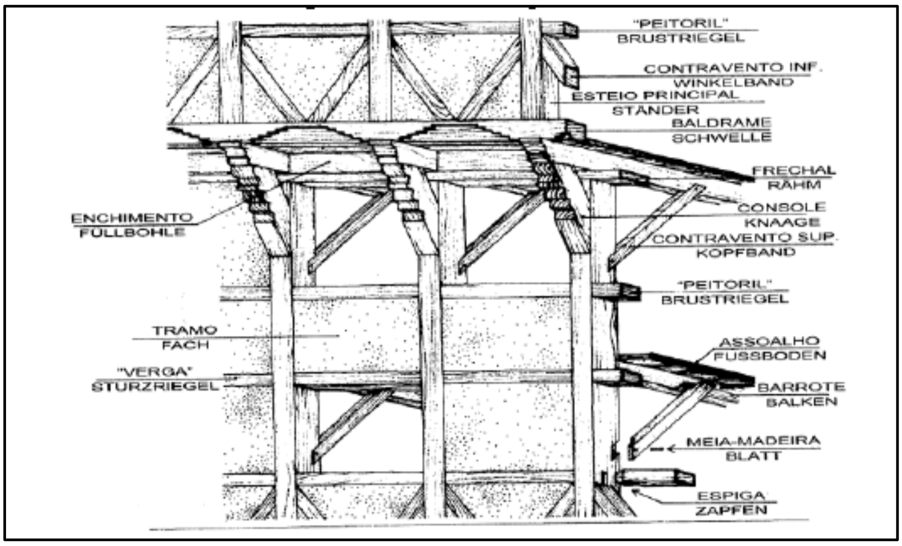
**Figura 3**: Variações do padrão de construção Enxaimel




Fonte: Weimer (2005)

É fundamental que se perceba que as diferenças, variedades, com que se concebia o Enxaimel de uma região da Alemanha para a outra eram notórias, porém não deveras contundentes. Eram modificações pontuais que geralmente deveriam atender a uma demanda provocada por alguma questão de ordem econômica/produtiva ou então da natureza, do clima.

**Figura 4**: Elementos que compõe a estrutura Enxaimel "B"




Fonte: Weimer (2005)

O sistema de construção Enxaimel não é considerado um estilo *per si*, porém assumiu o espaço de referência na identidade e cultura dos povos germânicos que colonizaram o sul do Brasil e, dessa forma, construções que realmente sejam fieis ao estilo Enxaimel são passíveis de tombamento histórico além de contarem com leis de incentivo fiscal.

Hoje em dia, as construções Enxaimel possuem, além da simbologia da identidade de uma região colonizada majoritariamente por imigrantes alemães, um forte apelo turístico e cultural, provocando interesse de pessoas que desejam conhecer mais da cultura germânica através das construções típica, conforme Figura 5, além das festividades, gastronomia e atividades ligadas ao folclore alemão.

**Figura 5**: Casa Enxaimel na Estrada Dona Francisca

Fonte: https://fabiolamusarra.wordpress.com

## 2.2 A arquitetura Enxaimel e a matemática: exercícios de pensamento

De acordo com Unwin (2013, p.4), “(...) a essência da Arquitetura consiste em dar forma a uma parte do mundo, estabelecê-la como um lugar e administrar as relações espaciais”. Tais relações espaciais para a arquitetura são atravessadas por aspectos técnicos, históricos, culturais e estéticos do meio ambiente, mas também por um processo que vai do abstrato ao concreto e que se dá em uma relação intrínseca com a matemática. Isso acontece quer seja por meio de cálculos, quer seja através da projeção do espaço tridimensional em um espaço bidimensional, colocando em jogo a objetividade do olhar e o pensamento espacial, na medida em que operações geométricas como rotação, rebatimento e planificação, por meio do desenho técnico, conferem aos objetos representados rigor racional.

A projeção ortogonal – imagem projetada sobre um plano a partir de uma figura geométrica ou um objeto matemático – é um elemento fundamental da geometria descritiva e também da arquitetura. A geometria descritiva enquanto campo de conhecimento da matemática consiste em representar objetos que possuem altura, largura e profundidade em um plano bidimensional e a partir das projeções, determinar distâncias, ângulos, áreas e volumes em suas verdadeiras grandezas. Com isso, deve-se atingir um nível de abstração no qual, ao visualizar as representações planas (vistas ortogonais) dos objetos, se torne possível imaginar, compreender e executar sua perspectiva e vice-versa (PANISSON, 2007). Ou seja, é preciso que se conheça e domine as particularidades do método para que seja possível fazer uma representação correta, “uma vez que a representação de um projeto deverá possibilitar a leitura e a compreensão não só por parte de quem o fez, mas também, por qualquer outra pessoa, constituindo-se como os princípios da chamada geometria descritiva” (FLORES, 2007, p.160). O conhecimento matemático, em particular o conhecimento geométrico, configura-se, por assim dizer, como efeito e suporte que possibilita e dá condições para que determinadas ideias se estabeleçam no mundo enquanto elementos concretos.

Assim, nos exercícios de pensamento aqui apresentados, olhares e pensamento se voltam, inicialmente, para a maquete[4] de uma casa Enxaimel. Isso para se ver como a matemática

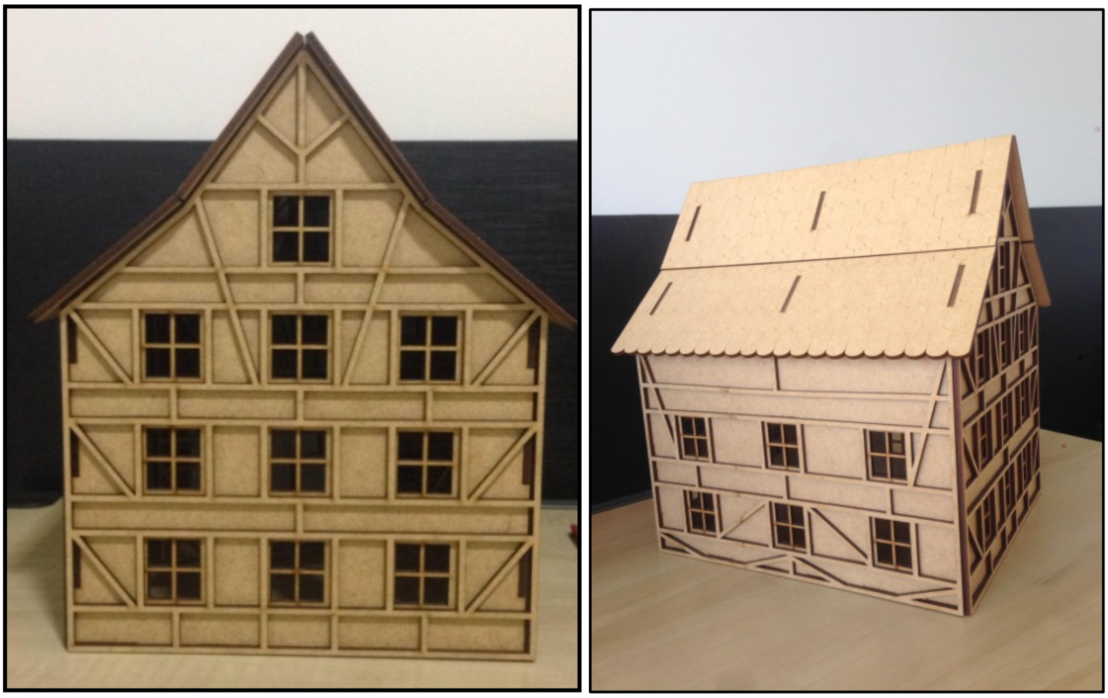
[4] A maquete foi construída pelas autoras do trabalho e foi usada como lugar estratégico para o exercício do olhar e do pensamento matemático.

opera na elaboração de uma técnica de construção e se traduz em conceitos de beleza, harmonia, simetria, equilíbrio e ordem, todos estes, elementos do discurso matemático.

Uma maquete é a representação em escala reduzida de uma obra. A maquete conserva a forma da obra, mas não as suas dimensões, tendo como uma de suas principais características a similitude que possibilita sua aproximação com o comportamento do objeto real, isso, no sentido geométrico.

Ao se centrar os olhos na maquete da Figura 6, é inevitável o encontro com as figuras geométricas. É sabido que a construção de uma maquete que representa de forma realística a imagem de outro objeto requer o domínio de certos conhecimentos. No entanto, além dos quadrados, triângulos, retângulos, ângulos e semi-retas explícitos na imagem, a maquete apresentada na Figuras 6 constitui uma representação arquitetônica harmoniosa. Em outras palavras, mais do que um arranjo de figuras geométricas, nos deparamos com um projeto homogêneo, uma composição simétrica, pois, ao traçarmos um eixo central dividindo a face frontal da maquete ao meio é possível perceber um desdobramento da figura tanto de um lado quanto de outro. Há uma combinação metódica das figuras geométricas, dos ângulos, das linhas que formam a fachada da maquete. Tudo é controlado, medido, pensando, unificado, organizado, atestando o rigor dos traçados que compõe e definem a maquete.

Figura 6: Vista frontal (direita) e vista lateral (esquerda) de uma maquete Enxaimel



Fonte: Pscheidt (2020).

Assim, calcular e proporcionar as dimensões do real e transpô-las em uma maquete ou em um plano do papel exige conhecer e saber operar com matemática não apenas no âmbito prático, mas também como modo de pensar, olhar e concebera construção de um espaço arquitetônico que produz e é produzido por hábitos germânicos, neste caso. Ou seja, para representar e construir objetos torna-se necessário, antes, pensar sobre eles e projetá-los no plano imaginário, no plano das ideias, transpondo-os de uma dimensão para outra. Ora, isso exige um certo nível de abstração no qual, ao visualizar as vistas ortogonais dos objetos, torna-se possível compreender e executar sua representação em perspectiva. A elaboração de um projeto arquitetônico exige, minimamente, do projetista ou arquiteto que saiba operar e, sobretudo, pensar com matemática.

De fato, somos incitados a pensar que a técnica de construção Enxaimel, mais do que um fator de estilo, com o passar do tempo, foi imprimindo um modo de ver e se relacionar com o mundo que parece tomar o conhecimento da matemática como uma verdade capaz de dar sustentação à técnica, uma vez que a matemática que atravessa a construção da maquete permite assegurar ordem, proporção e simetria a mesma.

Contudo, tomar isso como pressuposto não significa afirmar que a invenção da técnica teve uma relação direta com a matemática ou que os sujeitos que a inventaram a conheciam e a aplicavam de modo consciente, mas, antes, que as suas transformações ao longo dos tempos e aproximações com os saberes matemáticos, passados de gerações a gerações, possam de alguma maneira, apresentar ressonâncias de um processo de racionalização e geometrização do espaço e do olhar, tomado de um ponto de vista histórico em relação a um contexto sociocultural (THUILLIER, 1994), afinal:

> a escolha de um modo de representação demonstra uma verdadeira filosofia do espaço, de uma época da história e, até mesmo, de uma civilização. Significa, portanto, que a representação do espaço está intimamente ligada ao regime de saber em questão e à experiência dos homens em relação ao espaço (FLORES, 2007, p.87).

O arranjo arquitetônico da maquete chama atenção e nos incita, outra vez, mesmo que por um breve instante, a deixar de lado a função prática da matemática associada a cálculos e números para assegurar e comprovar a existência das construções, a fim de jogar luz na eterna fixação da arquitetura pela beleza. Por ora, cabe dizer que a noção de beleza que atravessa o olhar e está em pauta neste exercício tem a ver com matemática. Essa tendência em ver regularidades e essa busca por simetria, ordem, equilíbrio, proporção em diversas atividades que são oferecidas, acaba por produzir sentidos e parâmetros para aquilo que entendemos como sendo beleza (WAGNER, 2017). Isso porque "quando olhamos para determinadas imagens, sejam elas da arte, da arquitetura, da matemática ou de qualquer outro meio, um olhar formatado por práticas instituídas historicamente interage com nosso ato de olhar" (WAGNER, 2017, p.106), produzindo (e sendo produzido) hábitos que atravessam e produzem nossas práticas visuais.

Weimer (1983), ao estudar a técnica Enxaimel, destaca a proporção como um elemento importante na composição da construção. Segundo o autor, é interessante notar o sistema de proporções da porta principal da Figura 8, cuja largura total é de 1,15cm e dispõe de duas folhas de 46 cm e 69 cm de largura. A folha maior tem um enfeite na forma do batente que a divide em duas faixas verticais de 23 e 46 cm de largura. Assim, as folhas estão divididas em três faixas de 46, 23 e 46 cm respectivamente, em uma proporção de 2 para 1 para 2 (2 x 1 x 2) (Figura 7).

A propósito, proporção é um conceito matemático que significa uma igualdade entre razões. Ou seja, quando duas razões apresentam o mesmo resultado, dizemos que elas são proporcionais. Geralmente, tal igualdade é representada simbolicamente por frações, como em: $\frac{A}{B} = \frac{C}{D} = Y$. Nessa igualdade, as duas frações, A/B e C/D são chamadas de proporção, enquanto Y é a *constante de proporcionalidade*. Assim, se dividirmos o valor de A por B e o valor de C por D, vamos obter um mesmo valor Y, ou seja, a chamada constante de proporcionalidade.

**Figura 7**: Exemplo de proporção de construção Enxaimel (2 x 1 x 2)

Fonte: Weimer, 1983.

As noções matemáticas de proporção e simetria imprimem harmonia à grande parte dos edifícios construídos pelo homem, principalmente aqueles dos períodos em que a matemática era rigorosamente respeitada, como na Antiguidade Clássica, na Renascença e, mais atualmente, no Modernismo. Por outro lado, a ideia de que a beleza consiste na disposição apropriada e proporcional das partes (como, por exemplo, a proporção áurea) o que implica uma relação ordenada e harmônica parece apoiar-se, de algum modo, em discursos ligados à matemática. Ora, parece haver certa racionalidade matemática ligada ao conceito de beleza, corroborando com modos de compreender e, portanto, construir verdades sobre o que é belo neste mundo! Não obstante, se:

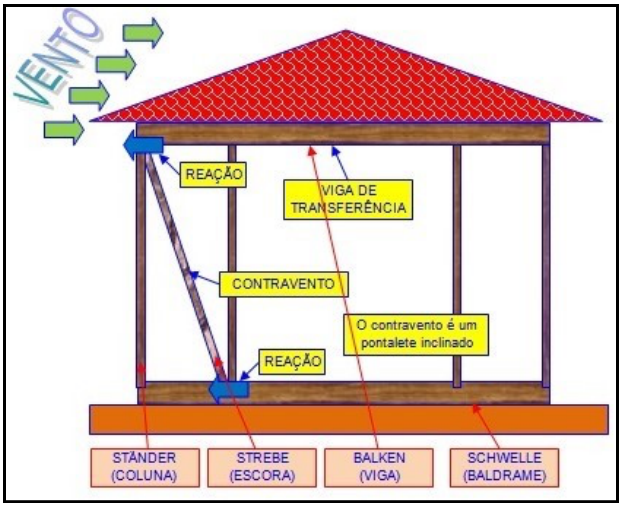
> a beleza pode ser pensada como correlata de um discurso matemático, isso não significa dizer que esta é sua única possibilidade. É sabido que, na atualidade, muitos são os discursos que atravessam a beleza, e dentre estes, há aqueles que negam as regularidades e padrões matemáticos, ou então, que os consideram ultrapassados, como padrões estéticos de outros tempos. Contudo, se há um modo de se compreender a beleza, ligado fortemente a conceitos e regras matemáticas, isso se deve, em parte, ao fato de que a beleza não cessou de apoiar-se em um discurso tão fortemente arraigado, no qual a razão operou como tecnologia e suporte para vê-la. Por ora, muito do que ainda se olha e compreende como beleza, apoia-se nos discursos constituídos no passado e que ainda, de um modo ou de outro, produzem seus efeitos no modo de olhar e compreender a beleza no presente (WAGNER, 2017, p. 106-107).

Voltemos à maquete e a técnica Enxaimel, agora, para olhar para as práticas e saberes da matemática que dão suporte à técnica.

Tal técnica se vale da utilização de noções e conceitos geométricos, sobretudo, no que diz respeito à concepção de sua estrutura em um sistema pautado basicamente em treliças de madeira, que formarão uma rede de triângulos ao ponto de que estes venham a ser uma forma de moldura onde se preencherão os espaços vazios, lacunares, de maneiras a erguer paredes sólidas. As triangulações estabelecem ângulos e forças de tensão que sustentam toda a estrutura desde os fundamentos até a cobertura em si.

No caso das construções Enxaimel, ao remetermos a triangulação a sua técnica de edificação, é possível perceber a aplicação de uma matemática básica e funcional em virtude de uma extrema racionalização dos materiais utilizados e dos fins almejados para sua construção, como por exemplo, a preocupação com a ação dos ventos e seus efeitos sobre a construção representados na Figura 8.

**Figura 8**: A funcionalidade ilustrada das estruturas do Enxaimel

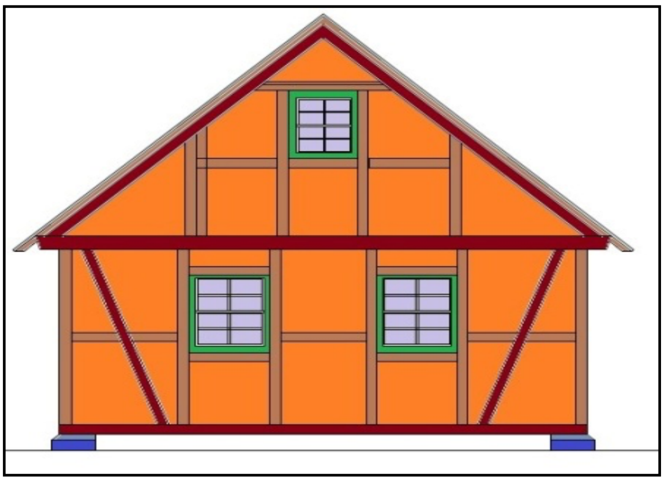



Fonte: http://www.ebanataw.com.br/roberto/vento/enxaimel.htm

Vale ressaltar que para as primeiras construções em Enxaimel, a madeira foi a opção mais eficiente, capaz de oferecer rigidez as casas para resistir à força dos ventos. Usava-se, conforme a Figura 8, um simples pontalete feito de madeira, proporcionando as estruturas resistência suficiente para suportar a força dos ventos. Esse pontalete em madeira, colocado de forma inclinada, formava um triângulo, daí a rigidez oferecida à casa.

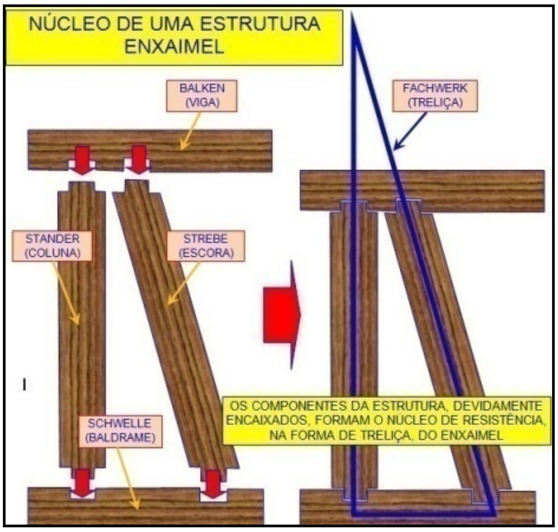
Toda construção Enxaimel é fundamentada num núcleo resistente formado por uma treliça composta por coluna, escora e baldrame. Ora, a estrutura em treliça nada mais é do que uma estrutura cuja montagem toma como base o triângulo (figuras 9 e 10).

**Figura 9**: A fundamentação Enxaimel nas treliças aparentes



Fonte: http://www.ebanataw.com.br/roberto/vento/enxaimel.htm

**Figura 10**: Núcleo detalhado de uma estrutura Enxaimel




Fonte: http://www.ebanataw.com.br/roberto/vento/enxaimel.htm

Nas construções Enxaimel, primeiramente são construídos o alicerce e, posteriormente, são instalados os baldrames, que formam, na maioria das vezes, um quadrilátero. As escoras e as colunas são montadas na sequência, e, por fim, monta-se a viga e a estrutura do telhado, com todas as peças encaixadas.

Nesse tipo de construção, não são usados pregos ou parafusos durante a montagem e os encaixes são travados por pinos de madeira (Figura 11). Depois da estrutura montada, outras peças são instaladas, para formar o vão das janelas e das portas.

**Figura 11**: Os alicerces da construção Enxaimel

Fonte: http://www.ebanataw.com.br/roberto/vento/enxaimel.htm

Assim, se levantássemos uma das pontas de uma casa Enxaimel, levantaríamos a casa inteira, pois ela possui uma estrutura de encaixes extremamente forte, formando uma espécie de bloco único. É como se fossem grandes quebra-cabeças onde tudo se encaixa. As peças em madeira são todas marcadas com números romanos, que indicam a posição da peça na sequência da montagem e depois, junto ao número, vai um pequeno símbolo, podendo ser uma linha inclinada, uma linha deitada, um pontinho, o qual indicará a parede da casa que tal parte se refere. Isso possibilita desmontar e montar a estrutura em qualquer lugar sem cometer erros, seguindo sempre a sequência numérica de trás para frente.

## 3 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os exercícios de pensamento propostos neste estudo possibilitam pensar com e como o enlace entre matemática e técnica de construção Enxaimel pode criar oportunidades para ir além do entendimento de conceitos técnicos e formalizações de cálculos. Colocar os saberes matemáticos no âmbito da problematização, sobretudo para compreender como a matemática se engendra com outros saberes, como ela funciona no processo de concepção e compreensão das formas instituídas para pensar o espaço, a técnica e também, como componente de um discurso estético, é uma estratégia que faz da matemática lugar de exercício de pensamento.

Portanto, investir na relação, qual seja, matemática e arquitetura Enxaimel, considerando uma prática de construção, opera neste trabalho como uma possibilidade de se colocar em prática modos de olhar e de pensar que poderão, quiçá, contribuir para a compreensão do conhecimento geométrico, para o desenvolvimento de habilidades de percepção espacial e para "problematização" de saberes cuja matemática se dá como efeito e suporte (WAGNER, 2012).

O que queremos dizer, ou melhor, provocar com tudo isso, diz respeito a um modo de operar com matemática que visa ultrapassa a mera questão prática. É tratar a matemática, sobretudo, como um modo de pensar, de fazer perguntas, de produzir respostas para o mundo. A matemática que pretendemos movimentar com esses exercícios de pensamento ultrapassa aspectos pragmáticos e utilitários da resolução de cálculo, da verificação de números e aspectos geométricos. Ela quer se colocar como modo de pensar e olhar para o mundo, em especial, aqui, para as especificidades do olhar germânico. Isso para ver como conceitos matemáticos operam e sustentam uma técnica de construção medieval, valorizando aspectos importantes, porém, muitas vezes, esquecidos nas salas de aula de matemática, tais como aqueles ligados à visualização matemática, ao pensamento visual, à história de um povo, associados antes aos aspectos de formação cultural e discursiva da vista, do que, simplesmente, por uma atividade física do olho (WAGNER, 2012).

Por fim, cabe dizer que ao propormos alguns exercícios de pensamento que relacionam a matemática e a técnica Enxaimel proveniente de uma cultura histórica, no caso a cultura alemã, não estamos propondo, necessariamente, modelos a serem seguidos, mas antes, criando espaços de possibilidades para ver e problematizar como determinadas situações e problemas vivenciados pela humanidade se enlaçam numa trama que produz outros saberes.

## REFERÊNCIA

BRASIL. Ministério da Educação. Referencial Educacional Nacional para a Educação Infantil. Brasília, 1998.

BRASIL. Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Educação é a Base. Brasília, MEC/CONSED/UNDIME, 2018.

FICKER, C. **São Bento do Sul:** Subsídios para a sua história. Joinville: Ed. do Autor, 1973.

FLORES, C. R. **Olhar, saber, representar:** sobre a representação em perspectiva. São Paulo: Musa, 2007.

GISLON, J M. A invenção da cidade germânica: tradição, memória e identidade na arquitetura contemporânea de Forquilhinha – SC. Dissertação (Mestrado). Programa de Pós Graduação em Arquitetura e Urbanismo, UFSC, 2013.

GREGORY, V. Imigração alemã no Brasil. **Cadernos Adenauer XIV.** Edição Especial. 224p. 2013.

JOCHEM, T. V. A Formação da Colônia Teresópolis e a Atuação da Igreja Católica (1860-1910). Dissertação (Mestrado). Programa de Pós Graduação em História, UFSC, Florianópolis, 2002.

KORMANN, J. **O tronco Zipperer.** Blumenau: Nova Letra, 2005.

LARROSA, J.; RECHIA, K. **[P] de professor.** São Carlos: Pedro & João Editores, 2018.

PANISSON, E. Gaspar Monge e a sistematização da representação gráfica na arquitetura. Tese (Doutorado). Programa de Pesquisa e Pós-Graduação em Arquitetura, UFRGS, Porto Alegre, 2007.

PSCHEIDT, D. C. Arquitetura Enxaimel:um olhar sob a perspectiva da matemática. Trabalho de Conclusão de Curso (TCC). Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2020.

REIS, L. F.; BARRETO, E. M. **Notas de aula de Geometria Descritiva.** Departamento de Arquitetura e Urbanismo (DAU). Setor de Representação Gráfica e Tecnologia. Viçosa: Universidade Federal de Viçosa, 2007.

SANTANA, N. M. C de. **Colonização alemã no Brasil:** uma história de identidade, assimilação e conflito. Dimensões, vol. 25, 2010, p. 235-248.

SEYFERTH, G. **A colonização alemã no vale do Itajaí-Mirim:** um estudo de desenvolvimento. Porto Alegre: Movimento, 1999.

SIRIANI, S. C. L. **Os descaminhos da imigração alemã para São Paulo no Século XIX**: aspectos políticos. Almanack Braziliense, n°02, novembro 2005. P. 91-100.

THUILLIER, P. **De Arquimedes a Einstein:** a face oculta da invenção científica. Rio de Janeiro: Zahar, 1994.

TOMAZ, V.S.; DAVID, M.M.M.S. **Interdisciplinaridade e aprendizagem da matemática em sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2008.

UNWIN, S. **Exercícios de Arquitetura:** aprendendo a pensar como um arquiteto. Trad. Alexandre Salvaterra. Porto Alegre: Bookman, 2013.

VEIGA, M. Arquitetura neo-enxaimel em Santa Catarina: a invenção de uma tradição estética. 174 f. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação Interunidades em Estética e História da Arte, USP, 2013.

VIEIRA FILHO, D; WEISSHEIMER, M. R. **Roteiros Nacionais de Imigração**: Santa Catarina. Vol. 2. Brasília: IPHAN, 2011.

WAGNER, D. R. Arte, técnica do olhar e educação matemática: o caso da perspectiva central na pintura clássica. Dissertação (Mestrado). Programa de Pós Graduação em Educação Científica e Tecnológica, UFSC, Florianópolis, 2012.

WAGNER, D. R. Visualidades movimentadas em oficinas-dispositivo pedagógico: um encontro entre imagens da arte e professores que ensinam matemática. Tese (Doutorado). Programa de Pós Graduação em Educação Científica e Tecnológica, UFSC, Florianópolis, 2017.

WEIMER, G. **A Arquitetura no Rio Grande do Sul**. 1. ed. Porto Alegre: Mercado Aberto, 1983.

WEIMER, G. **A arquitetura popular da imigração alemã**. 2ª edição. Porto Alegre: UFRGS, 2005.

WITTMANN, A. Conversando sobre Enxaimel – Fachwerk 1. Disponível em:https://angelinawittmann.blogspot.com.br/2016/06/conversando-sobre-enxaimel-fachwerk-1.html. 2016. Acesso em 12. Abr. 2020.

**Submetido em maio de 2020.**
**Aprovado em julho de 2020.**

# OS CONHECIMENTOS MATEMÁTICOS ENVOLVIDOS NA FABRICAÇÃO DO POLVILHO NA COMUNIDADE SANTA MARIA, RIO PARDO DE MINAS/MG

## THE MATHEMATICAL KNOWLEDGE INVOLVED IN THE MANUFACTURE OF FERMENTED CASSAVA FLOUR IN SANTA MARIA COMMUNITY, RIO PARDO DE MINAS/MG

ANTUNES DE SÁ, Aline[1]
OVIGLI, Daniel Fernando Bovolenta[2]

**RESUMO**

Contextualizado na Etnomatemática, este trabalho teve como objetivo sistematizar as matemáticas envolvidas na produção de polvilho na Comunidade Santa Maria, Rio Pardo de Minas/MG. Trata-se de uma pesquisa de natureza qualitativa, para a qual foram desenvolvidas entrevistas semiestruturadas tendo em vista compreender o objeto de pesquisa, além de registros fotográficos que subsidiaram o entendimento das etapas do processo de produção. Identificamos que os agricultores discutem sobre a realidade na qual vivem e acerca dos saberes matemáticos por eles apropriados ao longo da vida e que têm forte impacto na fabricação do polvilho. Os resultados também evidenciam que, mesmo sem escolaridade, conseguem resolver problemas matemáticos com os quais lidam diariamente na produção do polvilho, e utilizam estes conceitos matemáticos em seu dia a dia, passando-os geração após geração.

**Palavras-chave:** Etnomatemática. Produção do polvilho. Medidas não convencionais.

**ABSTRACT**

Contextualized on the theme of Ethnomathematics, this paper aimed to systematize the mathematics involved in the production of fermented cassava flour (known as “polvilho”) in the Community of Santa Maria, Rio Pardo de Minas/MG. It is a qualitative research, for which semi-structured interviews were developed in order to understand the research object, in addition to photographic records that supported the understanding of the stages related to the production process. We found that farmers argue about the reality in which they live and about the mathematical knowledge they have appropriated throughout their lives and that have a strong impact on the production of “polvilho”. The results also show that, even without schooling, they are able to solve mathematical problems with which they deal daily in the production of fermented cassava flour, and use these mathematical concepts in their daily lives, passing them from generation to generation.

**Keywords:** Ethnomathematics. Fermented cassava flour. Non-conventional measures.

## 1 INTRODUÇÃO: O POLVILHO COMO UMA PRODUÇÃO DE CULTURA E VALORES

A Matemática está presente no meio em que estamos inseridos, bem como em tudo o que fazemos, mas muitas vezes passa despercebida. Não é diferente no cultivo da mandioca, produção realizada por muitos agricultores familiares Brasil afora. Da mandioca são extraídos o polvilho e a farinha, o

[1] Licenciada em Educação do Campo pela Universidade Federal do Triângulo Mineiro (UFTM). Endereço eletrônico: alineantunesline49@gmail.com.
[2] Doutor em Educação para a Ciência pela Universidade Estadual Paulista (UNESP). Docente da Universidade Federal do Triângulo Mineiro (UFTM), Uberaba, MG, Brasil. Endereço eletrônico: daniel.ovigli@uftm.edu.br.

primeiro é conhecido na região norte do estado de Minas Gerais como "goma", sendo utilizado como matéria-prima na produção de biscoitos e de tapioca, e a segunda para outros fins alimentícios, como a farofa e a paçoca[3].

A produção do polvilho tem destaque como sendo a maior fonte de renda para os agricultores da Comunidade Santa Maria, situada na região supracitada, tornando-se uma cultura passada de geração em geração. De acordo com D´Ambrosio (2011, p. 35): "A cultura, que é o conjunto de comportamentos compatibilizados, inclui valores. Numa mesma cultura, os indivíduos dão as mesmas explicações e utilizam os mesmos instrumentos materiais e intelectuais no seu dia a dia". Assim, torna-se importante a sistematização desses saberes informais, utilizados por grande parte de agricultores, e frequentemente esses saberes estão ausentes em currículos da escola do campo, de modo que as futuras gerações aprendam tais ensinamentos, que contribuem para seu raciocínio lógico e a valorização destes saberes. Segundo Brito (2016, p. 75):

> O professor deve manter-se atento aos episódios que surgem na sala de aula e procurar sempre colher informações orais e dados escritos pelos alunos por meio de trabalhos individuais ou em grupos realizados em sala, de forma que explorem as questões culturais, modos diferentes de resolução de cálculos como os que são repassados de um pai que muitas vezes não frequentou escola, porém utiliza-se de uma maneira própria de resolver problemas e que muitas vezes repassa aquele conhecimento para seu filho.

Nesse sentido, a escola do campo precisa procurar dialogar com práticas exercidas pelas famílias destes estudantes, que têm suas formas materiais de existência vinculadas ao campo, em seu dia a dia, formas estas que contribuem para sua formação matemática, quando se busca a valorização das culturas locais. Entendemos, então, o sentido de manter a cultura da produção do polvilho na Comunidade Santa Maria, bem como sua sistematização tendo em vista o trabalho com o tema nas aulas de matemática nas escolas do campo da região.

Assim, este artigo, recorte de um trabalho de conclusão do curso de Licenciatura em Educação do Campo: área do conhecimento Matemática oferecido por instituição pública federal de educação superior, tem por objetivo investigar a produção do polvilho na Comunidade Santa Maria, Rio Pardo de Minas/MG, ao levantar e sistematizar como a matemática está envolvida nesse processo de produção. Os objetivos específicos do trabalho são: (i) descrever os processos envolvidos na fabricação do polvilho e (ii) identificar os conhecimentos matemáticos envolvidos, a partir de registro fotográfico e, principalmente, de falas de agricultores locais.

## 2 QUADRO TEÓRICO: O PROGRAMA ETNOMATEMÁTICA E A CULTURA

A etnomatemática, enquanto perspectiva teórica, surgiu em meados da década de 70, tendo como um dos grandes influenciadores o matemático brasileiro Ubiratan D´Ambrosio. Segundo D´Ambrosio (2011, 2019), a aventura da espécie humana é identificada com a aquisição de estilos de comportamentos e de conhecimentos para sobreviver e transcender nos distintos ambientes que ela ocupa, isto é, na aquisição de ETNO, o ambiente natural, social, cultural e imaginário; MATEMA, de explicar, aprender, conhecer, lidar com, e TICA, modos, estilos, artes, técnicas: assim surge a

[3] Trata-se de uma preparação salgada, que tem como ingredientes principais a carne de sol e a farinha de mandioca. Destaque-se que o polvilho e a farinha de mandioca são processados de formas diferentes. Ao citarmos a farinha de mandioca temos como finalidade indicar que esta também é fonte de renda do agricultor, mas seu processo de produção não é o foco desta publicação.

ETNOMATEMÁTICA. Assim, etnomatemática visa à compreensão do saber matemático de diferentes culturas, as quais realizam tarefas que utilizam contagem, classificação, medição, dentre outros.

A (etno)matemática utilizada pelos grupos culturais geralmente não é aprendida nas escolas, mas sim por tradição, no contexto familiar, como no caso da produção de polvilho. Nela identificamos que os agricultores utilizam princípios matemáticos e saberes/fazeres próprios de seu cotidiano, incluindo desde o plantio da mandioca até a produção e a venda do polvilho, o que encontra respaldo no programa etnomatemática. De acordo com D´Ambrosio (2008, p.8):

> Ao praticar a etnomatemática, o educador estará atingindo os grandes objetivos da Educação Matemática, com distintos olhares para ambientes culturais e sistemas de produção. Justifica-se inserir o aluno no processo de produção de seu grupo comunitário e social e evidencia a diversidade cultural e histórica em diferentes contextos.

Não que a Etnomatemática substitua a matemática acadêmica, uma vez que esta última é importante para a atuação do indivíduo no mundo. Mas a Etnomatemática torna-se essencial para a matemática acadêmica, pois contextualiza a cultura do indivíduo ali inserido, sendo que sob as lentes da Etnomatemática o indivíduo expõe suas manifestações culturais.

> Perguntamos qual é o conhecimento matemático que se deve transmitir aos estudantes, de tal maneira que esse conhecimento não entre em choque com o saber matemático que é próprio de suas comunidades, resultado de anos de encontros culturais? Mas ao mesmo tempo em que se quer evitar o prejuízo emocional do choque cultural, que obviamente afeta a criatividade, é necessário fazer com que o conhecimento que resulta da experiência escolar lhes seja útil na vida em comum, própria das sociedades modernas (D´AMBROSIO, 2011, p. 10).

O educador matemático vai além de ensinar a resolver cálculos, necessita evidenciar para o aluno que a matemática é muito mais do que teorias, encontra-se viva em seu cotidiano, em situações com as quais lida a todo o tempo, relacionadas ao seu espaço cultural, o jeito próprio do fazer matemático específico de seu grupo cultural (D´AMBROSIO, 2019). A esse respeito, D´Ambrosio (2008, p.10) afirma que:

> Uma grande dificuldade do processo educacional é que o professor não conhece o ambiente cultural dos estudantes e, portanto, fica difícil reconhecer o que o estudante já sabe e o que é capaz de fazer. Portanto, o professor toma como referência seu próprio ambiente cultural, sua cultura, suas experiências prévias. Esse é um dos maiores equívocos da educação.

O processo educacional se torna mais significativo quando há valorização e respeito ao conhecimento sociocultural do aluno por parte do professor, proporcionando-lhe confiança ao ver que suas raízes culturais foram aceitas e respeitadas pela comunidade escolar. Assim o aluno pode compreender melhor o conhecimento matemático que é desenvolvido em seu dia a dia, passando a valorizar esse conhecimento. Ainda segundo D´Ambrosio (2008, p.10):

> O objetivo do modelo educacional, que chamamos Educação Multicultural, deve ter em conta que o indivíduo, ao voltar para sua comunidade, deve levar um instrumento que lhes permita comunicar-se com a sociedade dominante, fazer comércio, fazer leituras. O ponto crucial é reconhecer que esses estudantes não chegam à escola com "a cabeça vazia", ou, como dizem alguns filósofos da educação, a mente humana não é uma tábula rasa. O fato inegável é que todo estudante, na verdade todo indivíduo, conhece muito, possui explicações e modos

> de fazer, os quais vêm de seu ambiente cultural, de sua cultura, de suas experiências prévias.

Trabalhadores rurais, muitas vezes por falta de oportunidade de frequentarem uma instituição educacional, utilizam a matemática informal para resolver problemas próprios do seu cotidiano, com ideias matemáticas que lhes são específicas. Segundo Rosa e Orey (2016, p. 59):

> A primeira influência cultural está relacionada com a Matemática que surge do ambiente cultural no qual determinado grupo está inserido. Nesse contexto, a influência cultural é uma resposta às necessidades que são observadas pelos componentes do grupo para facilitar as interações sociais. A segunda influência cultural está relacionada com a herança cultural transmitida pelos componentes do grupo. Assim, a influência da herança cultural é uma resposta para solucionar problemas matemáticos internos que são próprios ao grupo.

A partir dessa afirmação dos autores, conclui-se que existem diferentes culturas, havendo, assim, diferentes matemáticas, pois cada grupo lida com a matemática própria do seu contexto. A matemática é criada a partir da necessidade de um grupo, buscando até mesmo facilitar a forma de se expressar desse determinado grupo. Para Bandeira (2016, p. 212):

> (...) valorizar e respeitar o conhecimento sociocultural do aluno ao ingressar na escola lhe dará confiança em seu próprio conhecimento, como também lhe dará certa dignidade cultural ao ver suas raízes culturais sendo aceitas pela comunidade escolar e desse modo saber que esse respeito se estende também à sua família, à sua comunidade.

A partir do momento em que a matemática é aplicada ao contexto sociocultural no qual o aluno vive é possível que ele possa compreendê-la de forma significativa, pois utiliza os conhecimentos matemáticos em seu dia a dia. Todo indivíduo já tem o seu instinto de quantificar e classificar, isso é próprio da espécie humana, cada um desenvolve seu próprio significado a partir de suas práticas cotidianas. Assim, cabe à escola fazer com que os alunos identifiquem que estes já apresentam um pensamento matemático que lhes é específico. Também trabalhos como o nosso, que buscam levantar estas práticas sociais como a produção do polvilho, podem subsidiar processos educativos mais plenos de significado.

## 2.1 Contextualizando a Comunidade Santa Maria

A Comunidade Santa Maria está localizada no município de Rio Pardo de Minas, mesorregião do Alto Rio Pardo, microrregião de Salinas, Região Norte do estado de Minas Gerais, distando aproximadamente 20 quilômetros da sede. O bioma é típico do cerrado, com períodos longos sem chuva, considerado seco. Apresenta aspecto montanhoso, situado próximo à Serra Geral. O município é banhado pelos Rios Pardo e Preto e possui uma área de 3.118,67 km$^2$ e seus habitantes se reconhecem como rio-pardenses (IBGE, 2019).

Rio Pardo de Minas deve seu nome justamente ao rio que atravessa o município, pelo fato de suas águas serem de cor parda e lamacenta. Antigamente, no atual território deste, predominavam grandes fazendas que pertenciam aos primeiros povoadores, os portugueses, que tinham como mão de obra escravos e negros e, desde daquela época, a economia girava em torno da agricultura e da mineração. Para entendermos melhor como se dá a inserção de Rio Pardo de Minas na região Norte do Estado, utilizamos a dissertação de Souza (2017, p. 30):

> O arraial de Rio Pardo floresce a partir da fixação de morada, às margens do rio de mesmo nome, do bandeirante paulista Antônio Luís dos Passos, que circulou pela região em busca de metais preciosos. Posteriormente, pessoas originadas de diversos lugares foram também estabelecendo suas moradias, se concentrando na confluência dos rios Pardo e Preto. Ocuparam-se principalmente de atividades como extração mineral, lavouras diversas e criação de animais, sendo formadas fazendas de criação de gado e de plantações de algodão.

Frente a estas informações, verifica-se que antigamente houve muita exploração do território rio-pardense e que permanece nos dias atuais. A monocultura desenfreada de eucalipto hoje destruiu grande parte da vegetação nativa e da biodiversidade local, o que ocasiona transtornos aos camponeses, como a falta de água gerada pela devastação dessa cultura.

Tendo como principal fonte de renda a produção do polvilho, a Comunidade Santa Maria conta com aproximadamente 60 famílias. Deste total, há um número reduzido de aposentados e uma porcentagem muito pequena que exerce práticas em outros segmentos da agricultura familiar, como a criação de bovinos.

## 3 A PESQUISA QUALITATIVA COMO ORIENTADORA DO ESTUDO

A presente pesquisa busca a compreensão de acontecimentos da vida real, o que a caracteriza como qualitativa, pois envolve o ambiente natural para a obtenção de dados e o pesquisador se torna objeto de pesquisa. Este tipo de pesquisa inclui o estudo do significado das vidas das pessoas nas condições próprias nas quais elas vivem (YIN, 2016).

Dessa forma, na pesquisa qualitativa os investigadores precisam sempre considerar a existência de entrelinhas que podem revelar motivos, intenções ou significados mais profundos nas falas dos participantes (YIN, 2016). Para Matos e Mattos (2016), o cotidiano do trabalhador rural está repleto de saberes e fazeres próprios de seu ambiente cultural: “Nas suas atividades, não só medidas são praticadas, mas os seus raciocínios, na sua forma de matematizar” (p.91). Segundo D´Ambrosio (2006, p. 19) “A pesquisa qualitativa é o caminho para escapar da mesmice. Lida e dá atenção às suas ideias, procura fazer sentido de discurso e narrativas que estariam silenciosas”.

Na pesquisa qualitativa torna-se necessário identificar representações culturais de cada grupo com o qual trabalharemos, pois cada um possui maneira diferente de agir. Com isso, cada pessoa detém conhecimentos, cada qual com sua forma própria de matematizar. E estas formas próprias são desenvolvidas na Comunidade Santa Maria, na produção do polvilho, conforme apresentaremos nas duas próximas seções deste artigo. Destaque-se que a tenda, como é chamada a fábrica artesanal de polvilho, é situada na residência da autora principal deste trabalho. No olhar dos agricultores locais, “tenda” pode ser definida como uma fábrica, porém mais rústica: cada uma tem adaptações próprias realizadas pela família que produz o polvilho.

Já comentamos que o polvilho é utilizado na culinária para produzir biscoitos, bolachas e tapiocas, entre outros. Seu processo de produção é artesanal, sendo utilizado, neste procedimento, vários artefatos como: ralador, peneira, tirador e balaio, por exemplo. Muitas pessoas que desenvolvem esta prática não passaram pelo processo educativo formal, mas usam as ideias matemáticas aprendidas de acordo com suas necessidades, ideias que podem ser modeladas e sistematizadas.

Na primeira etapa da investigação realizamos registros fotográficos detalhados de cada etapa da fabricação do polvilho, a ser descrito na seção 4, bem como desenvolvemos entrevistas semiestruturadas com moradores da comunidade, incluindo anotações acerca do processo de produção, além de breve sistematização sobre a história da comunidade, para entendermos um pouco como a prática de produção do polvilho foi iniciada, questões estas que serão apresentadas na seção 5. Segundo Duarte (2004, p. 3)

> Entrevistas são fundamentais quando se precisa/deseja mapear práticas, crenças, valores e sistemas classificatórios de universos sociais específicos, mais ou menos bem delimitados, em que os conflitos e contradições não estejam claramente explicitados. Nesse caso, se forem bem realizadas, elas permitirão ao pesquisador fazer uma espécie de mergulho em profundidade, coletando indícios dos modos como cada um daqueles sujeitos percebe e significa sua realidade e levantando informações consistentes que lhe permitam descrever e compreender a lógica que preside as relações que se estabelecem no interior daquele grupo, o que, em geral, é mais difícil obter com outros instrumentos de coleta de dados.

Foram realizadas entrevistas com três moradores da comunidade, sendo dois mais antigos, para resgatar lembranças que contribuíram com seus conhecimentos e vivências a respeito de como se dava esta prática antigamente, tendo em vista que hoje há maquinários que facilitam a mão de obra do agricultor, o que antigamente não existia. Foram desenvolvidos dois roteiros diferentes, sendo um deles voltado ao levantamento de informações relacionadas à contextualização da comunidade, bem como às práticas empregadas antigamente, e um segundo que provoca discussões sobre a produção do polvilho.

Optamos pela revelação dos primeiros nomes de cada um dos três entrevistados, com a anuência de todos eles, considerando sua história e relevância no contexto da Comunidade Santa Maria. Todos possuem vínculo direto com o campo, exercem ou já exerceram atividades voltadas ao meio rural:

- Maria tem 86 anos e mora na comunidade desde que se casou, há 66 anos. Atualmente é aposentada, mas antes de se aposentar trabalhava com a produção do polvilho, trabalhos domésticos e na agricultura familiar. Maria afirma praticamente não ter passado por processos de educação formal.
- Assis tem 81 anos, mora na comunidade há aproximadamente 55 anos. É aposentado e, anteriormente, trabalhava em serviços braçais, produção de polvilho e outras atividades da agricultura familiar. Assis informa que teve algumas horas de aula, cursando até a então segunda série do Ensino Fundamental.
- Anfrísio tem 46 anos e reside na comunidade desde que nasceu, sempre trabalhou na agricultura familiar e na produção do polvilho, atividade que desenvolve até hoje e da qual tira o seu sustento. Anfrísio estudou até a então quarta série do Ensino Fundamental.

Os Resultados e a Discussão serão apresentados considerando-se dois eixos, que constam nos objetivos específicos deste trabalho, antes listados. No primeiro deles, integrante da seção 4 deste texto, serão descritos os processos que abrangem a fabricação do polvilho e, no segundo, seção 5, trataremos dos conhecimentos matemáticos envolvidos em sua fabricação.

## 4 OS REGISTROS FOTOGRÁFICOS DOS PROCESSOS ENVOLVIDOS NA FABRICAÇÃO DO POLVILHO

O polvilho é um produto derivado das raízes da mandioca, havendo dois tipos, o azedo (no qual ocorre a fermentação da massa e que apresenta maior acidez) e o polvilho doce (a fermentação acontece em menor grau). O mais produzido na Comunidade Santa Maria é o polvilho doce, pois leva menos tempo para ficar pronto; a produção do polvilho azedo demanda maior tempo no tanque para que ocorra a fermentação.

O processo de produção do polvilho consiste em várias etapas. Na primeira delas o produtor puxa as raízes manualmente e, dependendo da qualidade do solo, se for arenoso, ela é arrancada facilmente, porém, caso seja uma terra mais compactada, precisa-se da ajuda de aparatos como o enxadão ou enxada. O enxadão é uma ferramenta fabricada com metal mais grosso e resistente, sendo mais estreito e mais longo e destinado à realização de tarefas mais "pesadas". O agricultor o utiliza para arrancar mandioca com raízes mais profundas e também para cavar. A enxada, por sua vez, é mais leve e larga, destinada na maioria das vezes para a capina de mato. Na Comunidade Santa Maria ocorre o uso dos dois tipos de ferramentas.

Para levar à tenda as raízes que foram extraídas do solo para o processamento, utiliza-se um tratorito acoplado a uma carreta. Destaca-se que na comunidade há agricultores que usam tração animal. Em seguida, a mandioca recém-colhida é passada em um descascador para lavagem e retirada do excesso da casca escura, como consta na Figura 1.

**Figura 1**: Descascador e lavagem das raízes.

Fonte: autores (2018)

Em seguida as raízes passam pelo processo de descascamento manual, para extração dos resíduos não retirados pelo descascador, bem como a casca amarela que envolve as raízes. Depois desse processo a mandioca é novamente lavada. Posteriormente é ralada/triturada, processo por meio do qual é extraída a massa, como mostra a Figura 2 (esq.).

A massa é colocada em uma caixa com um dissolvedor e, na tenda analisada, para a medida do volume obtido, são utilizados dois baldes de 12 litros cheios de massa em uma caixa de 310 litros não cheia. Essa massa é dissolvida e transportada para a peneira por meio de tubo plástico, onde será separada a massa de goma da água por decantação. A água da massa é derramada no tanque onde o polvilho se assentará, processo no qual ocorre a decantação, em um tempo médio de doze horas, em acordo com a Figura 2 (dir.).

O líquido é escorrido, ficando no tanque a goma que se assentou, a qual é lavada para retirada do “lodo”[4]. Essa goma novamente é passada pelo dissolvedor e em seguida é coada em uma peneira para retirar resíduos e irá assentar-se novamente, ou seja, passará uma segunda vez pelo processo de decantação (Figura 3).

**Figura 2**: Extração (esq.) e decantação da massa (dir)

Fonte: autores (2019)

**Figura 3**: O processo de coagem e a segunda decantação.

Fonte: autores (2019)

A massa é novamente escorrida permanecendo a parte sólida, a conhecida goma, produto do processo de decantação. A esse processo o agricultor deve ficar atento uma vez que, se o lodo misturar-se à goma, a qualidade do produto torna-se inferior, dificultando a venda. A goma é, então, ralada e levada ao terreiro para secagem ao Sol e, em seguida, é medida para, depois, ser ensacada. Para tanto são usados sacos e embalagens de 50 kg, uma medida de 3 litros e um balde de 18 litros, sendo que cada saco comporta 24 medidas.

Destaque-se que são utilizados embalagens e sacos que comportam até 50 kg, mas não necessariamente todos são preenchidos com este total. O “peso” do polvilho varia de região para região e, na comunidade onde esta pesquisa foi desenvolvida, os produtores vendem “na medida”, ou seja, a despeito de os sacos e as embalagens comportarem até 50 kg, são colocadas no saco 24 medidas. Estas 24 medidas são calculadas em baldes de 18 litros, sendo que uma medida ou "salamim" (Figura 4) corresponde a 3 litros. Assim, no saco de 50 kg serão colocados 4 baldes de 18 litros, totalizando 72 litros os quais, divididos por 3, equivalem a 24 medidas. Esquematicamente:

[4] “Lodo” ou “borrel”, como é conhecido, é a secreção que fica por cima da goma, formado por resíduos oriundos do processamento da mandioca.

1) são 4 baldes de 18 litros em um saco de polvilho de 50 kg; 2) 4x18= 72 litros; 3) portanto, cada saco de polvilho é preenchido com 72 litros; 4) 72÷3= 24 medidas.

**Figura 4**: Medida de madeira também conhecida como salamim

Fonte: autores (2019)

Em outras regiões o polvilho é vendido por quilo, neste caso são comportados exatamente os 50 kg, mais isso varia de região pra região.

O agricultor elabora e busca o conhecimento matemático sempre que surge a necessidade. Podemos enxergar a matemática na fabricação do polvilho por meio da existência das medidas acima mencionadas, por exemplo. Também observamos uma destas práticas matemáticas no uso do descascador: por ser um cilindro e para que rode é preciso ter noção de quantidade: caso sejam introduzidos menos de 50% do volume que o aparato comporta, ele não roda; caso sejam colocados mais de 80%, apenas roda e não retira a casca escura da mandioca. O agricultor identifica os 50% considerando a ocupação de metade do volume disponível no descascador e dos 80% em uma divisão imaginária do cilindro em 5 partes, das quais 4 são preenchidas, com aproximação. Sobre estas estimativas cabe dizer que, a partir do momento em que surge a necessidade, ele faz uma estimativa deste volume por meio de experiências e tentativas e, com base nelas, tira suas conclusões, procedimento também presente no pensamento matemático.

Outra estratégia matemática que podemos observar está na exportação da massa para a caixa com dissolvedor. Nesta etapa é utilizado o balde de 12 litros e uma caixa de 310 litros. Para a dissolução são usados dois baldes e a caixa não cheia, sendo que o agricultor criou sua própria medida. É necessário lembrar que nem todos os agricultores utilizam as mesmas medidas. Aqui apresentamos uma tenda específica, registrada por meio das fotos apresentadas no decorrer desta seção, contudo reconhecemos que outras tendas podem apresentar outras medidas.

Processo no qual também se identifica a matemática do agricultor é no ensacamento do polvilho. Nele o agricultor utiliza artefatos como a medida de 3 litros e o balde de 18 litros. O agricultor usa esses conceitos matemáticos e, sem escolarização, a partir de suas demandas práticas, faz cálculos que aprendeu no dia a dia. Seus cálculos incluem medir o polvilho com a medida de 3 litros e um balde de 18 litros. Um saco corresponde a 4 baldes e cada balde são 6 medidas, sendo que em um saco cabem 24 medidas. Então o agricultor multiplica a quantidade de baldes (quatro ao todo) necessária para encher um saco pela quantidade de litros que cabem em um balde, que comporta 18 litros, para obter a quantidade de litros que cabem em um saco. Então

4 x 18 = 72 litros é o que corresponde a um saco de polvilho de aproximadamente 50 kg, conforme indicamos anteriormente.

## 5 RESULTADOS E DISCUSSÃO: AS MEMÓRIAS E PRÁTICAS DOS ENTREVISTADOS

Para ressaltar essas memórias construídas ao longo da vida pelos entrevistados, envolvidos com a produção do polvilho, buscamos mostrar por meio de suas falas um pouco de suas realidades, memórias que por vezes ficaram para trás no tempo, porém vivas em suas mentes, e que de alguma forma fazem parte de suas culturas.

Anfrísio afirma que antigamente era muito difícil se deslocar carregando a produção da mandioca, pois tinha que levar nas costas ou "cacunda", como diz o entrevistado, e quando não era nas costas, utilizavam-se de animais como o burro, em acordo com sua fala:

> [...] hoje a produção melhorou demais... de primeiro era difícil, ô gente, panhava buraquinha[5] de mandioca! Quantas vezes já fui mais pai panhar buraca de mandioca, panhava aqui e levava na cacunda, pai levava uma buraca cercada daqui lá em casa na cacunda e eu levava um tiquinho, mas eu num levava a buraca cheia não. E quando ia pegar em burro, levava duas buracas cheinha no burro e ponhava o saco em riba, ele ponhava de um lado no burro e eu segurava no outro lado pra ele pôr a outra buraca, senão entortava a cangaia[6].

A fala de Maria traz a mesma realidade vivenciada pelo entrevistado Anfrísio ao dizer:

> Animal, na cacunda, Dário [marido da entrevistada] panhava era na cacunda, a bolsa de mandioca na cacunda, assim, panhava na cacunda minha fia, quando era longe era animalo, quando era perto era na cacunda. Ê peleja, minha fia, num tem bêra de sofrimento.

Hoje outros recursos podem favorecer o agricultor familiar ao lhe possibilitar a realização de atividades de forma mais rápida, o que antigamente não existia até pelo fato de não se ter acesso à energia elétrica, a qual chegou à Comunidade Santa Maria no ano de 2005, segundo os entrevistados, o que dificultava ainda mais a mão de obra do agricultor. Anteriormente, para realizar a atividade de ralar a mandioca para extração da massa, os agricultores utilizavam o rodão, como expresso na fala de Anfrísio, "o rodão, o burro puxava e tocava o buneco, aí passou para o motor, o motor era a gasolina", em consonância com a fala de Maria: "Ué, era no braço, é relava [ralava] no braço todo minha fia, a goma, mandioca, não tinha essa história de energia, não".

Em tempos passados os agricultores tinham mais dificuldade na execução de seus trabalhos, e nem por isso deixavam de realizá-los, inclusive porque eram os meios de que dispunham para sobreviver. Segundo Anfrísio, a goma era secada antigamente em toalhas de mesa, por não terem lonas plásticas como no processo hoje realizado:

> [...] secava em cima da mesa, mesa mais pequena que essa [aponta para a mesa do local onde se desenvolvia a entrevista], panhava lá no meio do terreiro e panhava na toalha de mesa, nem lona não tinha não, fazia farinha aí tirava um pouco de goma pra fazer biscoito.

---

[5] Trata-se de um regionalismo para referir-se ao envoltório/bolsa no qual se realizava o transporte da mandioca colhida. Destaque-se que esta e outras ocorrências de regionalismos foram transcritas exatamente da maneira como expressas pelo entrevistado.

[6] "Cangalha" é um utensílio, feito com ganchos, todo em madeira, que se adapta ao lombo de um animal sobre uma proteção ou forro para não feri-lo. Esta expressão é característica da época do tropeirismo.

Com as falas dos entrevistados e o relato da produção por etapas, percebemos que o trabalho do agricultor familiar foi favorecido, pois hoje possuem artefatos que facilitam sua mão de obra. Falas trazidas pelos entrevistados mostram épocas antigas como de muita dificuldade e sofrimento e que hoje, com determinados recursos, o trabalho foi favorecido.

Observa-se que os agricultores, com saberes matemáticos não escolarizados, conseguem resolver contas e interpretar problemas matemáticos com habilidade, problemas matemáticos estes advindos de seu dia a dia, com uma Etnomatemática própria. Considera-se que praticamente não frequentaram a escola, e esses saberes foram adquiridos conforme a necessidade foi surgindo, saberes passados de pais para filhos.

Quando questionados sobre as relações entre a agricultura e a matemática, muitas vezes sem terem passado pela Educação Básica escolar, afirmam que assim procediam para medir o polvilho: "Media assim mesmo, sem saber de nada" (Maria).

Quando Maria traz a fala "media assim mesmo, sem saber de nada", ela está se referindo ao que não aprendeu na escola, mas que sabia medir de acordo os ensinamentos "transmitidos" por seus pais, segundo sua vivência no dia a dia, que foi adquirindo durante sua vida. Como afirma D`Ambrosio (2011, p. 35-36): "A cultura, que é um conjunto de comportamentos compatibilizados e de conhecimentos compartilhados, inclui valores. Numa mesma cultura, os indivíduos dão as mesmas explicações e utilizam os mesmos instrumentos materiais e intelectuais no seu dia a dia".

O cotidiano do agricultor é repleto de saberes próprios de seu ambiente cultural, mesmo que não percebam estão matematizando em seus raciocínios, tendo ideias matemáticas que lhes são especificas. Na matemática escolar geralmente o saber do cotidiano não se faz presente. Quanto ao ensino de matemática em sua época, Maria diz: "É, era poiquera [ruim] minha fia, ô gente, hoje a escola, as leituras de hoje é diferente, nem imita ser de primeiro, ah, nem imita".

A entrevistada não explica porque o ensino era "poiquera", mas em sua fala percebe-se que, como frequentou pouco a escola, não conseguiu apropriar-se de conceitos matemáticos escolarizados, e em outras conversas que tivemos com ela, em situações externas à entrevista, ela conta que a escola apenas ensinava o básico, como somar e subtrair, e que estes não foram por ela aprendidos. Maria é, então, questionada sobre como que ela aprendeu a definir medida: "Media, minha fia, é fácil! Não sei se foi com papai não, nós media, mas não precisava papai ensinar não, aprendeu pela ideia" (Maria).

Na fala de Maria ela define medir como fácil, porque desenvolveram e padronizaram estes conceitos de acordo suas necessidades, preservando-os, o que se torna uma identidade cultural, caracterizando-se como conhecimento, ainda que não acadêmico. Segundo Brito (2016, p.75):

> No entanto esses modos comuns de medir, de contar, de quantificar realizados pelos agricultores em suas comunidades, muitas vezes não são incluídos nas escolas por não fazerem parte da matemática acadêmica. [...] modos diferentes de resolução de cálculos como os que são repassados de um pai que muitas vezes não frequentou escola, porém utiliza-se de uma maneira própria de resolver problemas e que muitas vezes repassa aquele conhecimento para seu filho.

Em consonância com as ideias de Brito (2016), a fala de Maria expressa sua cultura (matemática), que precisa ser valorizada. Voltando-se para o âmbito escolar, há uma importância muito grande de que os conteúdos ministrados pelo professor sejam voltados para o cotidiano do aluno, em nosso caso oriundo do campo, para que este confira significado à matemática estudada em sala de aula. Ao ser questionado sobre os instrumentos utilizados para medir e armazenar antes e hoje o polvilho/goma, diz Assis:

> *Na medida que se dizia três litros e ainda existe, mas hoje as coisas é mais no quilo, né, medida quase nem se fala, né? Mas, justamente, se você precisa de um legume ou qualquer coisa ali, você pode medir num litro que é um quilo, viu, três litros soma uma medida, viu, medida normal, como eu ia lhe dizendo... quando o povo falou que as coisas, cê vê que o povo era simples, tão sem jeito quando falou que ia voltar pra peso e não ia existir aquelas vasilhas de medir coisas. Ah não, se for desse jeito nós morre, porque não ia negociar, mentira que é a mesma coisa, pois não é! [...] Foi conferido as medidas, três litro passou a uma medida, colocou três litros de coisa no seu embornalo[7], na sua sacola igual compra na feira, você pode perceber que é, né, litro bom, a não ser aquelas poiquerinha de latinha, porque tem aquelas latinhas de óleo que vem assim, ali não é conferido não, num dá não, viu, mas se for um litro bom, numa lata boa, pode confiar.*

Como observado na fala do entrevistado, o agricultor sempre encontra soluções matemáticas, que são passadas de geração em geração por meio de seus conhecimentos e experiências, como expressa Assis, pois até hoje utilizam a medida do litro e da medida de madeira, havendo o "litro bom", de medida adequada aos trabalhos do agricultor, e aqueles nos quais o volume a ser colocado não corresponde ao que deveria ser, não sendo possível "confiar" nestas medidas. Segundo Matos e Mattos (2016, p. 98), "Dessa maneira, nas atividades do cotidiano, não há nenhuma necessidade de as medidas estarem em unidades oficiais, embora o trabalhador conheça os seus valores e a aproximação com as medidas padrão".

O litro, que é uma medida que o agricultor utiliza, é uma unidade de medida convencional. A medida de madeira, conhecida como "salamim" (Figura 4), mesmo que não seja convencional, é criada por ele como unidade de medida, vendo que seria útil para seu dia a dia.

Antigamente o agricultor, por não ter recursos, fazia seus próprios instrumentos, como trazem Matos e Mattos (2016, p.101): "o trabalhador precisa mais do que nunca se valer da criatividade para diminuir suas despesas. Assim, ao construir seu próprio utensílio de trabalho, [...] ele estará subsidiando seus gastos". Não que hoje não os façam, porém antigamente relatam não encontrar materiais que facilitassem a mão de obra do agricultor como na atualidade, como traz a fala de Anfrísio por exemplo:

> *Era saco de pano, custurava e panhava nas buracas, hoje tem embalagem, naquele tempo não tinha, era só o saco de pano mesmo, era até toalha de mesa que fazia, da toalha de mesa nós fazia. De primeiro media 24 medidas, era na medida, ele tinha que medir 24 pratos, hoje não, hoje você mede 4 baldes é um saco, cada balde é 6 pratos.*

Na continuação, foi perguntado ao entrevistado Assis se para venderem todos os produtos era utilizado o litro:

> *Era o litro que era a medida, quem quisesse um litro era um litro. O finado Zé Coutinho* [morador da comunidade]*, ele tinha até medida de meio quarto, quatro quartos soma uma medida, viu, e ele tinha a medidinha de meio quarto: "Ô Zeca, me dá aí meio quarto de sal", para aqueles que não podia comprar uma medida.*

Na fala anterior, trazida pelo entrevistado Assis, confirma-se que os agricultores elaboram um conhecimento matemático, sempre que a necessidade exige. Victoriano (2013, p. 24) afirma

[7] O mesmo que bolsa, confeccionado em couro em outras épocas.

que “[...] todo povo tem uma maneira de codificar a sua cultura e é tão importante qualquer cultura, resultado de experiências que vem sendo repassadas de geração em geração. Deve ser preservado”. Assim a maneira de produzir do agricultor foi se modificando, a começar pelo acesso à energia elétrica, que ocorreu em 2005 na Comunidade Santa Maria. Hoje, a partir das tecnologias disponibilizadas ao agricultor, a produção é ampliada, como diz Anfrísio:

> Com certeza, ué, claro, ué, o modo de produzir, que de primeiro era simples demais e hoje a multiplicação é muita, pelo maquinário que tem... no descascador tem que por 80%, cê não pode por nem menos de 50% nem mais de 80%, porque se por mais de 80% ele não bate, só roda.

Vemos que o agricultor tem suas próprias técnicas, que foi aprendendo de acordo com o desenvolvimento do trabalho a partir daquele artefato, nesse caso do entrevistado, sobre o descascador. Segundo Souza (2016, p. 134): “Pelos seus conhecimentos não convencionais, o homem do campo é importante dentro das suas atribuições e sabe distinguir o conceito do certo e errado, assim como do oficial e não oficial apenas aplicando suas teorias empíricas em seu contexto simples e fiel à realidade”.

A partir do momento em que o homem do campo começa a sentir necessidade, ele também passa a criar artefatos que possam ajudá-lo nas tarefas diárias, criando também medidas que vão se tornando permanentes, ou seja, criando raízes ao longo do tempo, que visam à melhoria do trabalho. A respeito da melhoria do trabalho do agricultor, Assis diz:

> Muito, incomparável, nós hoje temos tudo para trabalhar, pois não tem? Toda solução do trabalho nós temos, com que não mudou, ô meu Deus do céu, não gosto nem de falar. O que eu vi, moço, como eu lhe contei aqui, da infância nas caatingas, aquele povo tudo na inteligência de miorá, você sabe o que é fazer um campo de algodão de três a quatro hectare pra ser rancado, os tocos tudo braçal como eu estou lhe dizendo, e depois voltar para tombar no pescoço de boi pra gradiar aquela terra para formar um campo de algodão sem toco nenhum! Isso era pouco serviço?

As aprendizagens dos agricultores foram surgindo a partir de seu trabalho, como diz o entrevistado Anfrísio: *“Aprendi no dia a dia, no trabalho, mesmo”*. Segundo Brito e Mattos (2016, p. 21), “alguns grupos sociais como os agricultores, mesmos oprimidos pela marginalização do saber popular, defendem esse saber voltado para a resolução de problemas práticos e específicos de suas vidas profissionais e que garantem a sobrevivência”.

Dessa forma cabe a nós, enquanto educadores matemáticos do/no campo, valorizar os saberes culturais que vêm da prática cotidiana e, ao considerarmos as falas dos entrevistados, percebemos como a etnomatemática sempre esteve e está presente em suas práticas diárias, na produção, comercialização e armazenamentos de seus produtos.

## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A matemática está presente no dia a dia dos agricultores, desde a produção, o armazenamento e a comercialização dos seus produtos, uma matemática que é específica deste determinado grupo de agricultores, saberes esses que não foram aprendidos na escola e sim construídos a partir das necessidades.

O objetivo principal deste estudo consistiu em sistematizar as matemáticas envolvidas na produção do polvilho na Comunidade Santa Maria, Rio Pardo de Minas/MG. Foram encontradas várias formas de matematizar do agricultor, porém ele utiliza seus saberes informais, ou seja, seus próprios princípios matemáticos, que são saberes/fazeres matemáticos integrados ao seu cotidiano.

As entrevistas realizadas com os agricultores nos fizeram perceber a resistência destas pessoas, as dificuldades pelas quais passaram e ainda passam... até hoje utilizam conceitos matemáticos por eles elaborados/(re)significados/aprendidos, tornando-se assim uma cultura que se estende geração após geração. Entendemos que com as entrevistas e os registros fotográficos realizados conseguimos cumprir os objetivos delineados para o trabalho de conclusão de curso que gerou este artigo, e que nos possibilita levantar outras questões: “Como produzir uma sequência didática que considere a produção de polvilho no ensino de matemática? Qual seria o impacto aos estudantes do campo ao tomarem contato com atividades desta natureza?”.

Compreendemos nas conversas informais e entrevistas realizadas com os agricultores que esses conhecimentos são valores adquiridos, por serem meios de sobrevivência, mesmo com as dificuldades que encontravam antigamente, pelo difícil acesso, pelo trabalho ser quase todo braçal, nem assim o agricultor deixou de realizar a atividade de produção do polvilho.

Hoje podemos perceber pelas falas dos entrevistados que houve modificação de modo gradativo nas formas de produção. A implantação de determinados recursos, a exemplo da energia elétrica, melhorou o modo do agricultor de trabalhar, mas este nunca deixou de empregar conceitos matemáticos construídos por ele, dada a necessidade de se matematizar utilizando, por exemplo, unidades e instrumentos de medida não convencionais, que foram se alterando ao longo do tempo e que, posteriormente, se padronizam com os instrumentos de medidas convencionais.

Um dos instrumentos de unidade de medida que são convencionais para aquele convívio, mas considerado não convencional, utilizado pelo agricultor que fabrica o polvilho, é a medida de 3 litros e o balde de 18 litros. Com esses instrumentos, utilizados pelo agricultor para facilitar a mensuração, eles realizam suas medições.

É necessário respeitar os conhecimentos dos agricultores, e tentar relacionar esses conhecimentos com a matemática escolar, em uma perspectiva de educação no/do campo. Os agricultores transmitem conhecimentos que foram construídos dia após dia, o que a escola precisa considerar. Cabe à instituição escolar desenvolver conceitos matemáticos articulados à realidade do aluno, para que este também compreenda resoluções de problemas práticos diários rumo a uma efetiva educação (matemática) do/no campo.

## REFERÊNCIAS


BANDEIRA, F. A. **Pedagogia etnomatemática**: reflexões e ações pedagógicas em matemática do ensino fundamental. Natal, RN: EDUFRN, 2016.

BRITO, D. R.; MATTOS, J. R. L. Saberes matemáticos de agricultores. *In*: MATTOS, J.R.L. (Org.). **Etnomatemática**: saberes do campo. Curitiba: Editora CRV, 2016. 166 p.

BRITO, M. L. B. Etnomatemática: a matemática escolar e o saber popular em ação no campo. *In*: MATTOS, J. R. L. (Org.). **Etnomatemática**: saberes do campo. Curitiba: Editora CRV, 2016. 166 p.

D`AMBROSIO, U. Prefácio. In: BORBA, M. de C.; ARAÚJO, J. de L. (Orgs.) **Pesquisa qualitativa em educação matemática**. 2 ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

D`AMBROSIO, U. **Etnomatemática**: elo entre tradições e a modernidade. 4. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2011.

D´AMBROSIO, U. O programa etnomatemática e a crise da civilização. **HIPÁTIA - Revista Brasileira de História, Educação e Matemática**. v. 4, n. 1, p. 16-25, jun. 2019. Disponível em <https://ojs.ifsp.edu.br/index.php/hipatia/a

rticle/view/1087/803>. Acesso em 10 jan. 2020.

DUARTE, R. Entrevistas em pesquisas qualitativas. **Educ. rev.**, Curitiba, n. 24, p. 213-225, Dez. 2004.

IBGE - Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. **Área Territorial Oficial**. Consulta por Unidade da Federação. Disponível em <http://www.ibge.gov.br/home/geociencias/areaterritorial/principal.shtm >. Acesso em 09 jun. 2019.

MATOS, S. L. B; MATTOS, J. R. L. O conhecimento matemático de trabalhadores rurais. In: MATTOS, J. R. L. (Org.). **Etnomatemática**: saberes do campo. Curitiba: Editora CRV, 2016. 166 p.

ROSA, M; OREY, D. C. Etnomodelagem: uma relação dialógica entre a etnomatemática e a modelagem. In: Francisco de Assis Bandeira; Paulo Gonçalo Faria Gonçalves. (Org.). **Etnomatemáticas pelo Brasil**: aspectos teóricos, ticas de matema e práticas escolares**.** 1ed.Curitiba, PR: Editora CRV, 2016, p. 40-55.

SOUZA, J. R. **Terras Geraizeiras em disputa**: os processos de autoafirmação identitária e retomada territorial de comunidades tradicionais de Rio Pardo de Minas frente à concentração fundiária. 228 p. (Dissertação - Mestrado Profissional em Sustentabilidade junto a povos e terras tradicionais). Brasília: Universidade de Brasília, 2017.

SOUZA, R. B. Programa etnomatemática: análise de práticas pedagógicas de ensino de matemática no contexto de educação matemática. **Anais...** São Paulo, Julho. 2016. p. 1-12.

VICTORIANO, Celso F. C. **Manaã**: Etnomatemática e o saber cultural do pantaneiro construtor de canoas. Curitiba, PR: CRV, 2013.

YIN, R. Como iniciar um estudo investigativo. In: YIN, R. **Pesquisa Qualitativa do início ao fim.** Porto Alegre: Editora Penso, 2016. Cap. 3. p. 41-42.

**Submetido em março de 2020.**

**Aprovado em junho de 2020.**