O MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS APLICADO AO AJUSTE DE CURVAS

THE METHOD OF THE MINIMAL SQUARES APPLIED TO THE ADJUSTMENT OF CURVES

FELIX, Francisca Edna Ferreira[1]

CORDEIRO JUNIOR, Reginaldo Amaral[2]

RESUMO

Este trabalho é resultado de um projeto de iniciação científica que tinha por objetivo realizar uma revisão bibliográfica sobre os fundamentos da Álgebra Linear e relacionar as suas definições e teoremas ao ajuste de curvas, uma aplicação denominada o Método dos Mínimos Quadrados (MMQ). Baseando-se em uma pesquisa de caráter teórico, tecemos um pouco sobre a descoberta e o desenvolvimento desse método e a sua aplicabilidade em uma empresa que busca relacionar o número de unidades produzidas com o custo por unidade, usando a aproximação por exponencial.

Palavras-chave: Álgebra linear. Ajuste de curvas. Método dos mínimos quadrados.

ABSTRACT

This work is the result of a project of scientific initiation that had as objective to carry out a bibliographical revision on the fundamentals of Linear Algebra and to relate its definitions and theorems to the adjustment of curves, an application denominated the Method of Minimum Square (MMQ). Based on a theoretical nature research, we have touched on the discovery and development of this method and its applicability in a company that seeks to relate the number of units produced to the cost per unit, using the exponential approximation.

Keywords: Linear algebra. Adjusting curves. Minimum squares method.

1 INTRODUÇÃO

O presente trabalho é resultado de um projeto de iniciação científica que tinha por objetivo relacionar os conteúdos que fundamentam a Álgebra Linear, com aplicações da Matemática, uma dessas aplicações é o Método dos Mínimos Quadrados (MMQ) para o ajuste de curvas. Esta proposta surgiu pelo fato de sabermos da vasta aplicabilidade da Álgebra Linear e de sua importância para a Matemática, pois como afirma Dorier (1994) apud Celestino (2000, p. 45) “É fato que a Álgebra Linear constitui uma parte importante no conteúdo matemático (...), sendo vista como uma disciplina fundamental por quase todos os matemáticos e por muitos cientistas que a utilizam como ferramenta" e culminou no meu Trabalho de Conclusão de Curso.

Além disso, desde a sua descoberta no século XIX até os dias atuais, o Método dos Mínimos Quadrados desempenha um relevante papel em diversas áreas, pois consiste em um processo que nos permite encontrar uma função que melhor descreve um certo conjunto de informações experimentais, possibilitando a obtenção de previsões para dados desconhecidos.

O Método dos Mínimos Quadrados é usado geralmente para ajustes lineares, mas em alguns casos pode ser aplicado em outras funções, tais como as polinomiais e exponenciais a qual

[1] Graduada em Licenciatura em Matemática pelo Instituto Federal da Paraíba (IFPB). Endereço eletrônico: edna.felix@academico.ifpb.edu.br

[2] Mestre em Matemática pela Universidade Federal da Paraíba (UFPB). Docente do Instituto Federal da Paraíba (IFPB), Cajazeiras, PB, Brasil. Endereço eletrônico: reginaldo.cordeiro@ifpb.edu.br.

será apresentada neste trabalho. A sua utilização nos permite, por exemplo, ajustar os dados de uma população em um determinado período, fazendo possíveis previsões sobre seu crescimento. Outro exemplo da sua aplicação aparece na administração, quando uma empresa pretende relacionar o custo médio com a quantidade de unidades produzidas em um dia.

No que diz respeito aos procedimentos metodológicos para construção do presente trabalho, nossa proposta foi realizar uma pesquisa bibliográfica acerca dos conteúdos da Álgebra Linear, pautada nos estudos de especialistas da área, tais como Boldrini et al(1980), Hoffman(1970), Pulino (2012), Biezeuner (2006), Silva (2007), Andrade (2006), entre outros. E, em seguida, relacionar estes conteúdos com uma aplicação. Neste sentido, este trabalho apresenta caráter teórico.

2 MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS

Dados são coletados a partir de observações e medições em diversas áreas, tais como estudos econômicos, sociais, ambientais e até mesmo na medicina. Entretanto, dados coletados dessa forma, geralmente estão sujeitos a erros, o que impede uma previsão para dados desconhecidos. Mas, nos dias atuais, informações de previsão são altamente necessárias.

Uma ferramenta que nos auxilia nessa busca por informações de previsão são os estudos a respeito de uma das grandes aplicações da Matemática, mais especificamente da Álgebra Linear, o Método dos Mínimos Quadrados. O mesmo consiste na determinação de parâmetros de uma função, na qual o seu gráfico melhor representa o comportamento de dados coletados experimentalmente. Entretanto, dados coletados dessa forma, dificilmente podem ser representados por uma única função. Então, para a determinação de tais parâmetros é necessário solucionar um sistema de equações que provêm do resultado da soma do produto interno das funções nos pontos x_i do gráfico.

2.1 Aspectos históricos

Um dos primeiros problemas ocasionados por erros de medidas obtidas experimentalmente que se tem registro foram debatidos pelos astrônomos, quando estes buscavam a determinação da posição dos corpos celestes.

Segundo Crato (1999), estes problemas foram sentidos por vários astrônomos como Hiparco (180-125 a.C), Eratóstenes (276-194 a.C) e Aristarco (310-230 a.C) quando repararam que suas medidas eram passíveis de falhas, pois admitiam ligeiras variações de momento para momento e de observador para observador. Porém, aceitavam aproximações para as medidas que eram obtidas sem se preocupar com os problemas estatísticos das suas mensurações, ou pelo menos, não escreveram sobre esses problemas.

Tycho Broche (1546-1061), astrônomo da era pré-telescópica, foi o primeiro ou pelo menos um dos primeiros a se preocupar com as medidas obtidas e o rigor das suas observações. Ele tirava várias medidas de um mesmo parâmetro, juntava as observações feitas, omitia erros grosseiros e assim obtinha médias que eram utilizadas para as suas estimativas.

> [...] desenvolveu um programa de medidas dos céus que ultrapassou em muito o rigor dos antigos. As suas observações sobre a posição dos astros, o movimento dos planetas e as distâncias serviram de base ao trabalho do seu colaborador Johannes Kepler (1571 - 1630), para o estabelecimento das célebres leis sobre as órbitas dos planetas. Sem as medidas rigorosas de Tycho Brache, é pouco provável

> que Kepler pudesse ter estabelecido as leis que levam seu nome (CRATO, 1999, p. 27).

O controle da precisão da medida desenvolvido por Tycho era novidade para a época, mas ainda estava longe dos métodos modernos que utilizam intervalos de confiança e desvios padrões. Mais tarde, iniciou-se um estudo matemático sistemático da combinação das observações, realizado por Roger Joseph Boscovich (1711 - 1787), Pierre Simon Laplace (1749 - 1827), Adrien - Marie Legendre (1752 - 1833) e Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855). Esses estudos ocuparam gerações que buscavam encontrar um método ideal de combinação de medidas pontuais obtidas em momentos distintos.

Foram apresentadas diversas soluções na virada do século XVIII para o XIX. Mas a que teve maior desenvolvimento teórico, eficácia e maior aplicação prática, foi o Método dos Mínimos Quadrados publicado por Legendre em 1805 na sua obra *Nouvelles Méthodes pour la Détermination des Orbites des Cométes* (Novos Métodos para Determinação das Órbitas dos Cometas) e por Gauss em 1809 na obra *Theoria Motus Corporum Coelestium* (Teoria do Movimento dos Corpos Celestes). Contudo, mesmo sendo Legendre o primeiro a publicar, é atribuído a Gauss a prioridade da criação do método, pois ele teria obtido os resultados entre 1794-1795.

Com as publicações feitas por Gauss e Legendre, o método tornou-se essencial nas análises de dados astronômicos o qual foi aderido por Laplace e outros matemáticos. Após 30 anos da sua primeira publicação, em 1839, Gauss generalizou o Método dos Mínimos Quadrados, melhorando suas bases teóricas e encontrando um modelo prático para a minimização de erros.

Após cerca de um século da descoberta do Método dos Mínimos Quadrados, começaram a surgir os primeiros relatos da sua utilização nas demais áreas que trabalham com análise de resultados, dados experimentais e combinações de medidas. Atualmente o método é essencial em diversas áreas, como relata Anton apud Marinelli (2002, p. 77):"O método de quadrados mínimos é muito utilizado em várias áreas, como na Física Experimental, Astronomia, Biologia, Administração, Estatística. Já existe até mesmo um modelo de quadrados mínimos para a audição humana".

Neste sentido, vale ressaltar a importância dessa aplicação da Álgebra Linear, nas mais diversas áreas do conhecimento, inclusive na Astronomia que motivou a sua descoberta e desenvolvimento.

3 FUNDAMENTAÇÃO MATEMÁTICA

Nesta seção apresentaremos alguns aspectos teóricos sobre espaços vetoriais e seus desdobramentos, a saber, combinação linear, produto interno e projeção ortogonal.

3.1 Espaço vetorial

A noção de Espaço Vetorial é um dos conceitos básicos da Álgebra Linear, sendo um conjunto que satisfaz as oito propriedades que veremos abaixo na sua definição formal.

Definição 3.1) Um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ é um conjunto V, não vazio, com duas operações: adição

$$+ : V \times V \to V,$$

e multiplicação por escalar,

$$\cdot : \mathbb{K} \times V \to V,$$

tais que, para quaisquer $u,v,w \in V$ e $a,b \in \mathbb{K}$, as seguintes propriedades são satisfeitas. Com relação à adição: 1) $u+v=v+u, u,v \in V$; 2) $(u+v)+w=u+(v+w), u,v,w \in V$; 3) existe um elemento $\mathbf{0}$ em V, tal que $u+\mathbf{0}=u, u \in V$; 4) para cada $u \in V$, existe $-u \in V$, tal que $u+(-u)=\mathbf{0}$. Com relação à multiplicação por escalar: 1) $(ab)u=a(bu), u,v \in V$; 2) $(a+b)u=au+bu, a,b \in \mathbb{K}$ e $\forall u \in V$; 3) $a(u+v)=au+av, a \in \mathbb{K}$ e $u,v \in V$; 4) $1 \cdot u = u, u \in V$.

Exemplo 3.1: conjunto $V=M_{m \times n}$ das matrizes de ordem $m \times n$ com soma e multiplicação por escalar usuais é um espaço vetorial.

Exemplo 3.2: O conjunto $V=P_n$ dos polinômios de grau menor ou igual a n e com coeficientes reais, munido das operações usuais

$$\begin{array}{ccc} P_n \times P_n & \to & P_n \\ (a+bx+\cdots+cx^n)+(d+ex+\cdots+fx^n) & \mapsto & ((a+d)+(b+e)x+\cdots+(c+fx^n) \end{array}$$

e

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times P_n & \to & P_n \\ \alpha(a+bx+\cdots+cx^n) & \mapsto & (\alpha a+\alpha bx+\cdots+\alpha cx^n) \end{array}$$

é um espaço vetorial.

3.2 Combinação linear

É uma característica de um espaço vetorial que consiste na obtenção de novos vetores a partir de vetores dados.

Definição 3.2: Sejam V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$, e $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{K}$. Então o vetor $v=\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+\cdots+\alpha_n v_n$ é um elemento de V que chamamos de combinação linear de $v_1, v_2, \cdots, v_n$.

Exemplo 3.3: Seja $v=1+2x+x^2 \in \mathbb{P}^3$. Note que v pode ser escrito como combinação linear de $\{1,x,x^2\}$. Solução: De fato, temos que

$$1+2x+x^2=1 \cdot 1+2 \cdot x+1 \cdot x^2.$$

3.3 Produto interno

Interessados no estudo de espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$, os quais nos permitam falar sobre comprimento de um vetor e de um ângulo entre dois vetores, apresentaremos uma generalização do conceito de produto escalar no $\mathbb{R}^n$ e faremos isso por meio de uma aplicação definida sobre pares de vetores que tomam valores escalares no corpo, denominada produto interno.

Definição 3.3: Seja V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$. Um produto interno sobre V é uma função que a cada par de vetores v_1 e v_2, associa um número, denotado por $\langle v_1, v_2 \rangle$, satisfazendo as seguintes propriedades: 1) $\langle u+v,w\rangle=\langle u,w\rangle+\langle v,w\rangle, u,v,w\in V$; 2) para $\alpha\in\mathbb{K}$; $\langle \alpha u,v\rangle=\alpha\langle u,v\rangle, u,v\in V$; 3) $\langle u,v\rangle=\overline{\langle v,u\rangle}, u,v\in V$; 4) $\langle u,u\rangle>0$ se $u\neq 0$

Exemplo 3.4: Seja V o espaço vetorial das funções reais contínuas. Sejam $f_1,f_2\in V$. Se

$$f:=\langle f_1,f_2\rangle=\sum_{i=1}^{n} f_1(x_i)\cdot f_2(x_i),$$

então f é um produto interno. Solução*:* De fato, sejam $f_1,f_2\in V$ e $\lambda\in\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\langle f_1+f_2,f_3\rangle&=\sum_{i=1}^{n}(f_1+f_2)(x_i)\cdot f_3(x_i)\\&=\sum_{i=1}^{n}(f_1(x_i)+f_2(x_i))\cdot f_3(x_i)\\&=\sum_{i=1}^{n}f_1(x_i)\cdot f_3(x_i)+f_2(x_i)\cdot f_3(x_i)\\&=\sum_{i=1}^{n}f_1(x_i)\cdot f_3(x_i)+\sum_{i=1}^{n}f_2(x_i)\cdot f_3(x_i)\\&=\langle f_1,f_3\rangle+\langle f_2,f_3\rangle.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle f_1,f_2\rangle&=\sum_{i=1}^{n}f_1(x_i)\cdot f_2(x_i)\\&=\sum_{i=1}^{n}f_2(x_i)\cdot f_1(x_i)\\&=\langle f_2,f_1\rangle.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle \lambda f_1,f_2\rangle&=\sum_{i=1}^{n}(\lambda f_1)(x_i)\cdot f_2(x_i)\\&=\sum_{i=1}^{n}\lambda f_1(x_i)\cdot f_2(x_i)\\&=\lambda\sum_{i=1}^{n}f_1(x_i)\cdot f_2(x_i)\\&=\lambda\langle f_1,f_2\rangle.\end{aligned}$$

$$\langle f_1,f_1\rangle=\sum_{i=1}^{n}f_1(x_i)\cdot f_1(x_i)=\sum_{i=1}^{n}(f_1(x_i))^2>0.$$

$\langle f_1,f_1\rangle=0$ se $f_1(x_i)=0$.

Portanto, $f:=\langle f_1,f_2\rangle=\sum_{i=1}^{n}f_1(x_i)\cdot f_2(x_i)$, é um produto interno.

Definição 3.4: Seja V um espaço vetorial com produto interno sobre um corpo $\mathbb{K}$, definimos para cada $u\in V$ um número $\|u\|=\sqrt{\langle u,u\rangle}$. Este valor é chamado de norma de u e dizemos que V munido dessa norma é um espaço normado.

3.4 Ângulo entre dois vetores

Definição 3.5: Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ munido com produto interno. O ângulo entre dois vetores não nulos $u,v\in V$ é definido como sendo o valor de $\theta\in[0,\pi]$ que satisfaz a equação

$$\cos\theta=\frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\cdot\|v\|}.$$

Definição 3.6*:* Seja V um espaço vetorial, sobre um corpo $\mathbb{K}$, com produto interno. Dizemos que os vetores $u,v\in V$ são ortogonais se, e somente se, $\langle u,v\rangle=0$ e denotamos por $u\perp v$.

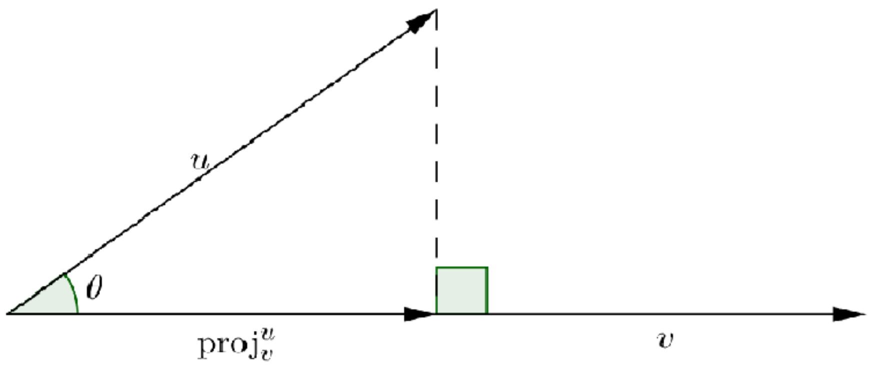
3.5 Projeção ortogonal

Em um espaço vetorial com produto interno podemos definir a projeção ortogonal de um vetor u sobre um vetor não nulo v por

$$\mathrm{proj}_v^u = \frac{\langle u,v\rangle}{\langle v,v\rangle}\cdot v$$

Ou seja, a projeção ortogonal de u sobre v é um múltiplo escalar de v.

Figura 1: Projeção ortogonal de u em direção a v.



Fonte: autores

Proposição 3.1) Seja V um espaço vetorial com produto interno e $v \in V$ um vetor não nulo, então $u - \mathrm{proj}_v^u$ é ortogonal a v, para todo $u \in V$. Demonstração: Sabemos que

$$\mathrm{proj}_v^u = \frac{\langle u,v\rangle}{\langle v,v\rangle}\cdot v.$$

Então

$$u - \mathrm{proj}_v^u = u - \frac{\langle u,v\rangle}{\langle v,v\rangle}\cdot v.$$

Tomando o produto interno com v, obtemos

$$\begin{aligned}\langle u-\mathrm{proj}_v^u, v\rangle = \langle u - \frac{\langle u,v\rangle}{\langle v,v\rangle}\cdot v, v\rangle = \langle u,v\rangle - \frac{\langle u,v\rangle}{\langle v,v\rangle}\cdot\langle v,v\rangle \\ = \langle u,v\rangle - \langle u,v\rangle = 0\end{aligned}.$$

Logo, $u - \mathrm{proj}_v^u$ é ortogonal a v, para todo $u \in V$.

Teorema 3.1) Seja V um espaço vetorial com produto interno. Seja W um subespaço de V. Então, para todo $w \in W$. $proj_w^u$ é a melhor aproximação de u em W, isto é,

$$\| u - \mathrm{proj}_w^u \| < \| u - w \|,$$

para qualquer w em W diferente de proj_w^u. Demonstração*:* Note que

$$u-w=(u-\mathrm{proj}_w^u)+(\mathrm{proj}_w^u-w).$$

Como W é um subespaço de V e $u, \mathrm{proj}_w^u \in W$, então $\mathrm{proj}_w^u - w \in W$. Pela Proposição 3.1, obtemos que $u-\mathrm{proj}_w^u$ é ortogonal a todo vetor em W. Logo, $u-\mathrm{proj}_w^u$ é ortogonal a $\mathrm{proj}_w^u - w \in W$. Dessa forma, satisfazem o Teorema de Pitágoras, ou seja

$$\|u-w\|^2=\|u-\mathrm{proj}_w^u\|^2+\|\mathrm{proj}_w^u-w\|^2.$$

Portanto,

$$\|u-w\|^2>\|u-\mathrm{proj}_w^u\|^2.$$

Extraindo a raiz, temos

$$\|u-w\|>\|u-\mathrm{proj}_w^u\|.$$

3.6 DESCRIÇÃO MATEMÁTICA DO MÉTODO

Quando buscamos encontrar uma função que melhor se ajuste aos dados obtidos através de um experimento, devemos levar em consideração dois itens fundamentais, como afirma Boldrini (1980): “Qualquer medida contém um erro (inerente ao aparelho de medição, falha do operador etc)”.

Pode já existir algum argumento teórico ou de bom senso que nos indique qual deve ser o aspecto analítico da função. Sendo assim, em muitas situações, conhece-se os pontos $(x_i, f(x_i))$, em que cada $f(x_i)$ é obtido experimentalmente, e deseja-se obter a expressão analítica de uma dada curva $y=g(x)$ que melhor se ajusta a esse conjunto de pontos.

Dessa forma, se temos os dados:

x	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n
$f(x)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$	$\cdots$	$f(x_n)$

e queremos encontrar a função $g(x)$ que seja a melhor aproximação de $f(x)$, então vamos supor que conhecemos os aspectos analíticos de duas funções $g_1(x)$ e $g_2(x)$, e que queremos “aproximar" a função $f(x)$ por uma combinação linear de g_1 e g_2, isto é, queremos encontrar constantes c_1 e c_2 tais que

$$g(x)=c_1g_1(x)+c_2g_2(x)$$

seja uma “boa aproximação" para $f(x)$.

Para tanto introduziremos a noção de distância entre funções. Primeiramente, definimos o seguinte produto interno no espaço vetorial das funções e a distância com relação ao produto interno, respectivamente.

$$\langle f_1, f_2\rangle=\sum_{i=1}^{n} f_1(x_i)\cdot f_2(x_i). \tag{1}$$

$$\| f_1 - f_2 \| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (f_1(x_i) - f_2(x_i))^2}. \tag{2}$$

Observação 3.1) Note que a expressão dentro do radical é exatamente a soma dos quadrados dos desvios que existem entre f_1 e f_2 em cada ponto x_i.

Assim, calculando a distância entre $f(x)$ e $g(x) = c_1 g_1(x) + c_2 g_2(x)$ obtemos

$$D(c_1, c_2) = \| f - c_1 g_1 - c_2 g_2 \| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - c_1 g_1(x_i) - c_2 g_2(x_i))^2}.$$

Como o procedimento consiste em encontrar a "melhor aproximação" então devemos minimizar a distância entre $f(x)$ e $g(x)$. Para isso, seguindo com procedimentos de minimização de função de várias variáveis, basta minimizarmos a soma dos quadrados dos desvios, uma vez que, encontrar os mínimos da função distância é equivalente a encontrar os mínimos da função distância ao quadrado, sendo assim, minimizaremos seguinte função

$$Q = \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - c_1 g_1(x_i) - c_2 g_2(x_i))^2.$$

Para tanto, precisamos encontrar os pontos críticos dados por $\frac{\partial Q}{\partial c_1} = 0$ e $\frac{\partial Q}{\partial c_2} = 0$. Mas,

$$\frac{\partial Q}{\partial c_1} = 2\sum_{i=1}^{n} ((f(x_i) - c_1 g_1(x_i) - c_2 g_2(x_i))(-g_1(x_i))$$

$$0 = \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - c_1 g_1(x_i) - c_2 g_2(x_i))(-g_1(x_i))$$

$$0 = -\sum_{i=1}^{n} f(x_i) g_1(x_i) + c_1 \sum_{i=1}^{n} g_1(x_i) g_1(x_i) + c_2 \sum_{i=1}^{n} g_2(x_i) g_1(x_i)$$

e

$$\frac{\partial Q}{\partial c_2} = 2\sum_{i=1}^{n} ((f(x_i) - c_1 g_1(x_i) - c_2 g_2(x_i))(-g_2(x_i))$$

$$0 = \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - c_1 g_1(x_i) - c_2 g_2(x_i))(-g_2(x_i))$$

$$0 = -\sum_{i=1}^{n} f(x_i) g_2(x_i) + c_1 \sum_{i=1}^{n} g_1(x_i) g_2(x_i) + c_2 \sum_{i=1}^{n} g_2(x_i) g_2(x_i)$$

E, portanto, c_1 e c_2 que tornam $g(x) = c_1 g_1(x) + c_2 g_2(x)$ a melhor aproximação de $f(x)$, é dada pela resolução do sistema

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)g_1(x_i) = c_1\sum_{i=1}^{n} g_1(x_i)g_1(x_i) + c_2\sum_{i=1}^{n} g_1(x_i)g_2(x_i) \\ \sum_{i=1}^{n} f(x_i)g_2(x_i) = c_1\sum_{i=1}^{n} g_2(x_i)g_1(x_i) + c_2\sum_{i=1}^{n} g_2(x_i)g_2(x_i) \end{cases}$$

ou, lembrando o produto interno (2) definido nesta seção obtemos

$$\begin{cases} \langle g_1, f\rangle = c_1\langle g_1, g_1\rangle + c_2\langle g_1, g_2\rangle \\ \langle g_2, f\rangle = c_1\langle g_2, g_1\rangle + c_2\langle g_2, g_2\rangle. \end{cases}$$

Uma outra maneira de obtermos esse sistema é utilizando o Teorema 3.1 da melhor aproximação, que garante que se $g(x)$ é a melhor aproximação de $f(x)$ no espaço vetorial V, sendo este o espaço das funções, então

$$g(x) = \mathrm{proj}_v^f.$$

Além disso, pela Proposição 3.1, $f-g$ é ortogonal a todo $v \in V$. Logo, $f-g$ é ortogonal a g_1 e g_2. Portanto, $\langle g_1, f-g\rangle = 0$ e $\langle g_2, f-g\rangle = 0$. Por outro lado,

$$\begin{aligned} \langle g_1, f-g\rangle &= \langle g_1, f - c_1g_1 - c_2g_2\rangle \\ &= \langle g_1, f\rangle - c_1\langle g_1, g_1\rangle - c_2\langle g_1, g_2\rangle \end{aligned} \quad \text{e}$$

$$\begin{aligned} \langle g_2, f-g\rangle &= \langle g_2, f - c_1g_1 - c_2g_2\rangle \\ &= \langle g_2, f\rangle - c_1\langle g_2, g_1\rangle - c_2\langle g_2, g_2\rangle \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{cases} \langle g_1, f\rangle - c_1\langle g_1, g_1\rangle - c_2\langle g_1, g_2\rangle = 0 \\ \langle g_2, f\rangle - c_1\langle g_2, g_1\rangle - c_2\langle g_2, g_2\rangle = 0 \end{cases} \quad \text{ou,}$$

$$\begin{cases} \langle g_1, f\rangle = c_1\langle g_1, g_1\rangle + c_2\langle g_1, g_2\rangle \\ \langle g_2, f\rangle = c_1\langle g_2, g_1\rangle + c_2\langle g_2, g_2\rangle. \end{cases}$$

Como conhecemos $g_1(x)$, $g_2(x)$ e $f(x)$ nos pontos x_i, resolvemos o sistema e encontramos os valores de c_1 e c_2. Esse procedimento é chamado método dos mínimos quadrados para o ajuste de curvas e podemos generalizar para o caso em que precisarmos encontrar $c_1, c_2, \cdots c_n$ tais que $g(x) = c_1g_1 + c_2g_2 + \cdots + c_ng_n$ seja a melhor aproximação de $f(x)$. Neste caso, os coeficientes $c_1, c_2, \cdots c_n$ devem satisfazer o seguinte sistema linear

$$\begin{cases} \langle g_1, f\rangle & = & c_1\langle g_1, g_1\rangle & + & c_2\langle g_1, g_2\rangle & + & \cdots & + & c_n\langle g_1, g_n\rangle \\ \vdots & = & \vdots & + & \vdots & + & \cdots & + & \vdots \\ \langle g_n, f\rangle & = & c_1\langle g_n, g_1\rangle & + & c_2\langle g_n, g_2\rangle & + & \cdots & + & c_n\langle g_n, g_n\rangle. \end{cases}$$

4 MÉTODO DOS MINÍMOS QUADRADOS E O AJUSTE DE CURVAS

O Método dos Mínimos Quadrados se destaca com a sua aplicação ao ajuste de curvas que consiste em um procedimento matemático que objetiva determinar a partir dos dados obtidos no experimento uma curva que os expresse matematicamente. Além disso, devemos determinar uma função que melhor se adapta a essa curva e muitas vezes, o grande desafio está em determinar esta função.

Para tanto, devemos observar o diagrama de dispersão para ver a forma geral dos pontos e seguir o modelo matemático mais coerente com a disposição dos pontos, como veremos a seguir.

É importante ressaltar que muitas vezes não é possível realizar o processo e encontrar a função manualmente e, quando isso acontece, precisamos utilizar recursos computacionais. Neste trabalho, utilizamos do Software Geogebra para a construção dos gráficos de dispersão, gráfico da curva que melhor se a adapta aos dados e na resolução dos sistemas de equações.

4.1 Aproximação exponencial

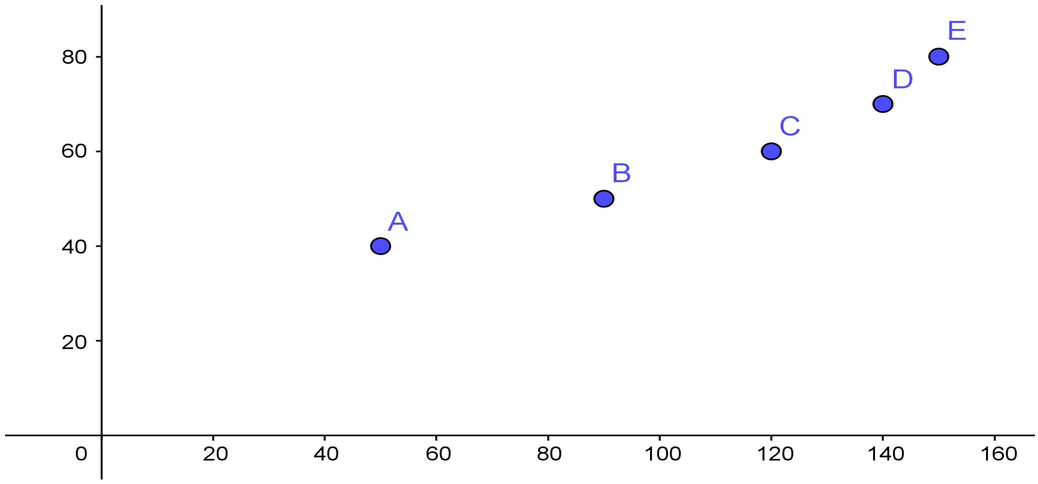
Determinada empresa apresenta a relação entre número de produtos e custo da produção de acordo com a seguinte tabela:

Nº de Produtos	Custo de Produção
50	$40
90	$50
120	$60
140	$70
150	$80

Esses dados são representados na figura 2.

O dono da empresa quer saber quanto será os custos, caso sejam produzidas 200 unidades em um dia.

Figura 2: Gráfico de dispersão Nº de Produtos X Custo da Produção



Fonte: Autores

Inicialmente devemos observar que os dados representados no diagrama de dispersão apresentam um crescimento exponencial. Logo, a função que melhor se ajustará aos dados é da forma $g(x) = ae^{bx}$. Aplicando o logaritmo neperiano, obtemos

$$g(x) = \ln g(x) = \ln a + bx.$$

Logo, vamos aproximar a seguinte tabela modificada:

Unidade Produzida	Custo de Produção em $\ln$
50	3,7
90	3,9
120	4,1
140	4,2
150	4,4

Chamando $c_1 = \ln a$, $c_2 = b$, $g_1 = 1$ e $g_2 = x$, temos

$$\ln g(x) = c_1 g_1(x) + c_2 g_2(x).$$

Fazendo o produto interno das funções nos pontos x_i da tabela, obtemos

$$\langle g_1, g_1 \rangle = 1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 1\cdot 1 = 5$$
$$\langle g_1, g_2 \rangle = 1\cdot 50 + 1\cdot 90 + 1\cdot 120 + 1\cdot 140 + 1\cdot 150 = 550$$
$$\langle g_2, g_1 \rangle = 50\cdot 1 + 90\cdot 1 + 120\cdot 1 + 140\cdot 1 + 150\cdot 1 = 550$$
$$\langle g_2, g_2 \rangle = 50\cdot 50 + 90\cdot 90 + 120\cdot 120 + 140\cdot 140 + 150\cdot 150 = 67.100$$
$$\langle g_1, f \rangle = 1\cdot 3{,}7 + 1\cdot 3{,}9 + 1\cdot 4{,}1 + 1\cdot 4{,}2 + 1\cdot 4{,}4 = 20{,}3$$
$$\langle g_2, f \rangle = 50\cdot 3{,}7 + 90\cdot 3{,}9 + 120\cdot 4{,}1 + 140\cdot 4{,}2 + 150\cdot 4{,}4 = 2.271$$

Daí,

$$\begin{cases} 5c_1 + 550c_2 = 20{,}3 \\ 550c_1 + 67.100c_2 = 2.271. \end{cases}$$

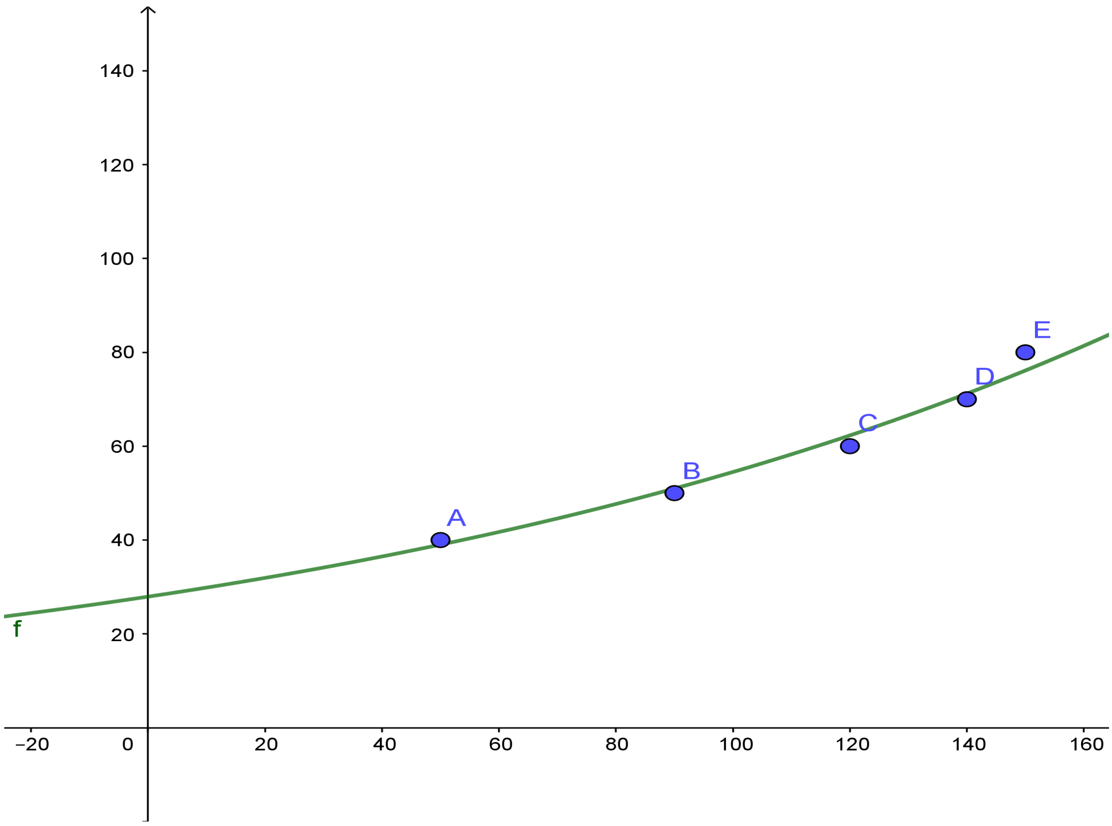
Resolvendo o sistema, encontramos $c_1 \cong 3{,}33$ e $c_2 \cong 0{,}01$. Mas, $a = e^{c_1} = e^{3{,}33} = 27{,}94$ e $b = c_2 = 0{,}01$. Logo, a curva que melhor se adapta aos dados da tabela é dada por $g(x) = 27{,}94e^{0{,}01x}$, como podemos observar no gráfico da Figura 3.

Dessa forma, para saber quanto será gasto com a fabricação de 200 unidades, basta encontrar $g(200)$. Assim,

$$g(200) = 27{,}94e^{0{,}01\cdot 200} = 206{,}45.$$

Portanto, os custos que a empresa terá para fabricar 200 unidades do produto será de 206,45 reais.

Figura 3: Curva que melhor se adapta aos dados do experimento



Fonte: Autoria própria.

5 CONCLUSÃO

Por meio deste trabalho, podemos observar como os conteúdos abordados pela Álgebra Linear fundamentam uma aplicação Matemática importante para diversas áreas. A realização desta pesquisa, possibilitou a autora um estudo mais aprofundado sobre a Álgebra Linear e como os seus conteúdos, que são vistos de forma tão axiomática, podem aparecer em situações do cotidiano, facilitando a compreensão dos mesmos.

Muitos livros foram pesquisados e assim, constatamos a existência de diversas aplicações do Método dos Mínimos Quadrados em diferentes áreas. Desta forma, vimos a possibilidade desse estudo ser aplicado ao ensino básico através da utilização da teoria de matrizes. Neste sentido, um estudo futuro pode ser voltado à administração, sobre a utilização do Método dos Mínimos Quadrados para o controle de estoque e lucratividade de uma empresa, ou ainda, o modelo de Mínimo Quadrado para audição humana.

REFERÊNCIAS

ANDRADE, P. **Elementos da Álgebra Linear**. Notas de aula, UFC, 2006. Disponível em: <https://www.passeidireto.com/arquivo/5802589/elementos-de-algebra-linear---placido-andrade>. Acesso em: 20.09.2018.

BIEZEUNER, R. J. **Álgebra Linear**. Notas de Aula, UFMG, 2006. Disponível em: http://www.mat.ufmg.br/~rodney/notas_de_aula/algebralinear.pdf. Acesso em: 20.09.2018.

BOLDRINI, J. L... [et al.], **Álgebra Linear**. São Paulo, 3. Ed. Editora HARBA ltda, 1980.

CELESTINO, M. R. **Ensino - aprendizagem da Álgebra Linear: as pesquisas brasileiras na década de 90**. Tese (Mestrado em Educação Matemática) - PUC-SP, São Paulo, 2000.

CRATO, N. **O papel do Mínimo Quadrado na descoberta dos planetas**. Disponível em: http://pascal.iseg.utl.pt/ncrato/papers/MinQdSPM.pdf. Acessado em: 20.09.2018.

HOFFMAN, K. **Álgebra Linear**. Traduzido por Adalberto P. Bergamarco. São Paulo, Editora Universidade de São Paulo e Polígono, 1970.

MARINELLI, M. F. **Método dos Mínimos Quadrados**. Trabalho de conclusão de curso, UFSC, Santa Catarina, 2002.

SILVA, A. de A. **Introdução à Álgebra Linear.**

João Pessoa, Editora Universitária/UFPB, 2007.

PULINO, P. **Álgebra Linear e suas aplicações**.

Notas de aula, Universidade Estadual de campinas, São Paulo, 2012. Disponível em: https://www.ime.unicamp.br/~pulino/ALESA/Texto/cap05.pdf. Acesso em: 20.09.2018.