CONHECIMENTOS DE ANÁLISE MATEMÁTICA PRESENTES NO EXAME NACIONAL DE DESEMPENHO DOS ESTUDANTES

KNOWLEDGE OF MATHEMATICAL ANALYSIS PRESENT IN THE NATIONAL EXAMINATION OF STUDENT EVALUATION

PARÓDIA, Douglas Pereira[1]
PEREIRA, Paula de Almeida[2]
OTERO-GARCIA, S. César[3]

RESUMO

O presente trabalho apresenta um levantamento predominantemente quantitativo das questões consideradas pertinentes a uma disciplina de Análise Matemática abordadas nas avaliações do ENADE aplicadas para as Licenciaturas em Matemática desde o estabelecimento dessa avaliação até 2017. Apresenta, também, uma breve visão histórica sobre a evolução da disciplina de Análise para os cursos de Matemática e sobre as avaliações aplicadas aos cursos superiores no Brasil. Dentre os resultados apresentados, está a evidente diminuição no número de questões de Análise Matemática nas provas do ENADE e as discussões levantadas sobre esse dado.

Palavras-chave: Educação Matemática no Ensino Superior. Ensino de Análise Matemática. Ensino de Cálculo Diferencial e Integral. Formação Matemática do Professor. História de Processos Pedagógicos.

ABSTRACT

The present work presents a predominantly quantitative survey of the issues considered pertinent to a discipline of analysis addressed in the assessments of ENADE applied to the Degree in Mathematics since the establishment of this evaluation. It also presents a brief historical view on the evolution of the discipline of analysis for mathematics courses and on the assessments applied to higher education in Brazil. Among the conclusions presented is the evident decrease in the number of questions of Analysis in the ENADE tests and discussions about this data.

Keywords: Mathematics Teaching in Undergraduate Courses. Analysis Teaching. Differential and Integral Calculus Teaching. Mathematics Teacher Education. Pedagogical Processes History.

1 INTRODUÇÃO

Vários pesquisadores já abordaram algumas questões a respeito da disciplina de Análise Matemática em cursos de formação de professores, como Reis (2001); Pinto (2001); Batarce (2003); Moreira, Cury e Vianna (2005); Ciani, Ribeiro e Júnior (2006); Silva (2006); Pasquini (2007); Moreira e Vianna (2016). Também, dentro do nosso projeto de pesquisa *A Disciplina de Análise Matemática em Cursos de Formação de Professores*, podemos destacar trabalhos como Martinês (2012); Gomes (2013); Otero-Garcia, Baroni e Martinês (2013); Otero-Garcia e Cammarota (2013); Baroni e Otero-Garcia (2014); Gomes, Otero-Garcia, Silva e Baroni (2015) e Silva (2015).

[1] Licenciado em Matemática pelo Instituto Federal de São Paulo (IFSP). Docente de Matemática do Colégio Anglo Campos do Jordão. Endereço eletrônico: douglaspp7@hotmail.com.
[2] Licenciada em Matemática pelo Instituto Federal de São Paulo (IFSP). Servidora técnico-administrativa do Instituto Federal de São Paulo (IFSP). Endereço eletrônico: paulaalmeida@ifsp.edu.br.
[3] Doutor em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista (UNESP). Docente do Instituto Federal de São Paulo (IFSP). Endereço eletrônico: oterogarcia@ifsp.edu.br.

Embora as supracitadas pesquisas tenham trazido valiosos elementos para se entender as mais diversas questões relacionadas à disciplina de análise, muitas questões permanecem em aberto, mostrando que ainda há um vasto campo a ser pesquisado dentro da temática. Discutir o papel e a relevância da disciplina de análise em cursos de formação de professores de matemática é, assim, uma tarefa extremamente complexa, porém, acreditamos ser necessária e urgente.

Com o objetivo central de justamente dar conta dessa problemática anunciada surgiu o já citado projeto *A Disciplina de Análise em Cursos de Formação de Professores de Matemática*, cuja proposta é analisar os mais diversos aspectos envolvidos na questão de que fala seu título, sobretudo os históricos. Dentro do âmbito desse projeto maior, insere-se o presente trabalho, que, dentre as diversas possibilidades de pesquisa sobre o Ensino de Análise Matemática, objetiva analisar quais são os conteúdos da disciplina de Análise Matemática avaliados nas provas do Exame Nacional de Desempenho dos Estudantes (ENADE). Isso porque, ao analisar o Ensino de Análise na formação de professores e considerar sua obrigatoriedade, ainda que em nível de fundamentos, é natural levantar questionamentos sobre a forma como a aquisição dos seus conteúdos é verificada. A avaliação pode ser colocada em pauta considerando diversos pontos de vista, sendo que aqui optamos por trabalhar com o dos órgãos externos que avaliam a aquisição do conhecimento por meio de balizadores gerais, mais especificamente, o ENADE.

2 O EXAME NACIONAL DE DESEMPENHO DOS ESTUDANTES

Houve várias iniciativas no sentido de avaliar a educação superior no Brasil ao longo do tempo. Segundo Polidori, Marinho-Araújo e Barreyro (2006), o início deu-se com a avaliação dos cursos de pós-graduação pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), na década de 1970, existindo, posteriormente, diversos instrumentos no âmbito dos cursos de graduação, como o Programa de Avaliação da Reforma Universitária (PARU), de 1983, a “Comissão de Notáveis” de 1985 e o Grupo Executivo da Reforma da Educação Superior (GERES), de 1986. Os autores apontam ainda que, entre as décadas de 1980 e 1990, universidades iniciaram experiências de autoavaliação, estabelecendo uma via de comunicação com o Ministério da Educação (MEC) ao criarem a Associação das Instituições Federais do Ensino Superior (ANDIFES), que possibilitou a construção do Programa de Avaliação Institucional das Universidades Brasileiras (PAIUB) em 1994.

Segundo Verhine, Dantas e Soares (2006), em 1995 foi estabelecido o Exame Nacional de Cursos (ENC), que era aplicado aos estudantes concluintes de determinados cursos como requisito obrigatório para liberação do diploma. O exame ficou conhecido como “Provão” e foi aplicado até 2003, ano em que foi proposto o Sistema Nacional de Avaliação da Educação Superior (SINAES), aprovado e instituído por meio de medida provisória do mesmo ano e oficializado pela Lei nº 10.861, de 14 de abril de 2004. Como nova abordagem para avaliação de cursos, o SINAES incluía o Exame Nacional de Desempenho dos Estudantes (ENADE).

Segundo Brito (2007), o objetivo do SINAES é avaliar as instituições de ensino, os cursos ofertados e o desempenho dos estudantes, sendo o ENADE uma das ferramentas utilizadas para essa avaliação. É importante ressaltar que, segundo Brito e Limana (2005), não é possível analisar a educação superior por meio de um único instrumento. Assim, a proposta do SINAES é uma avaliação em eixos, quais sejam:

a) avaliação das instituições: dividida entre a avaliação interna, realizada pelas Comissões Próprias de Avaliação (CPA), e a avaliação externa, realizada por professores selecionados de outras instituições de ensino do país;
b) avaliação dos cursos de graduação: avaliação externa realizada por uma equipe de especialistas de áreas afins cujos resultados vinculam-se ao reconhecimento e renovação do reconhecimento dos cursos;
c) avaliação dos estudantes: tem como instrumento o ENADE, aplicado a grupos amostrais de alunos que se encontram no final do primeiro e do último ano de formação, constituído por uma prova e um formulário socioeconômico.

A prova do ENADE é composta por quarenta questões, sendo dez de conhecimentos gerais, comuns a todos os cursos, e trinta de conhecimentos específicos. A seleção dos estudantes que prestarão o exame é feita por amostragem pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), cabendo à instituição de ensino apenas enviar a lista dos discentes que cumprem os requisitos para realizar a prova. São considerados ingressantes os estudantes que cumpriram de 7% a 22% da carga-horária mínima do curso até o início do período de inscrição, e concluintes, aqueles que cumpriram pelo menos 80% (BRITO; LIMANA, 2005).

Para Brito (2008), o ENADE não é simplesmente um substituto do antigo provão, pois tem objetivos diferentes. De acordo com Polidori, Marinho-Araújo e Barreyro (2006), o objetivo primordial do ENADE, enquanto processo avaliativo, é a identificação de aspectos que necessitam ser modificados ou aperfeiçoados nas instituições de ensino superior. Já Dias Sobrinho (2010) afirma que a principal diferença entre os dois exames reside no fato de que o ENC trabalhava com uma avaliação estática, ou seja, uma avaliação que colhia informações pontuais que não forneciam retorno, pois o estudante era avaliado apenas em um momento de sua formação, e o ENADE, com uma avaliação dinâmica, possibilita avaliar o potencial de aprendizagem do estudante em seu ingresso e seu aprendizado demonstrado no último ano. Assim, a ideia do ENADE é avaliar a evolução do estudante entre o primeiro e o último ano de graduação, bem como a sua capacidade de utilizar competências e habilidades necessárias à sua prática profissional.

Brito e Limana (2005) explicam que o ENADE utiliza a ideia de "valor agregado" que, resumidamente, compara o conhecimento do estudante ao ingressar na instituição de ensino com aquele que possui ao deixá-la. Os autores ressaltam que é necessário que a avaliação apresente questões bem distribuídas, dado que serão respondidas tanto por ingressantes quanto por concluintes.

Ao analisar a maneira como as avaliações vêm sendo aplicadas, entretanto, é válido questionar se os objetivos iniciais que visavam avaliar o desenvolvimento do aluno no decorrer do curso estão sendo atingidos, dado que os estudantes que são avaliados quando ingressantes não são os mesmos, obrigatoriamente, avaliados quando concluintes.

3 O QUE É ANÁLISE MATEMÁTICA?

Para analisar em que consiste a chamada Análise Matemática, é importante entender o que diferencia os estudos de Análise Matemática em relação ao Cálculo Diferencial e Integral.

Ao diferenciar o Cálculo da Análise, é possível pontuar que o estudo dessa última está intimamente ligado ao conceito de rigor. As bases do Cálculo e da Análise são comuns, e a separação entre eles deve-se em grande parte a esse conceito. Por rigor, entende-se a necessidade de fundamentar afirmações para poder utilizá-las como base para tirar outras conclusões – o rigor deriva de uma questão metodológica da Matemática, que é a necessidade lógica de consistência e coerência do método dedutivo-axiomático, porém o rigor na Matemática não é o rigor no ensino da matemática, da mesma forma para o Cálculo ou a Análise. O movimento do rigor no século XIX foi responsável pela produção de áreas inteiras da Matemática, incluindo pontos importantes da Análise tais como continuidade, continuidade uniforme, convergência uniforme, compacidade e completude. *Aritmetização da Análise* foi o nome dado ao movimento que se iniciou após o século XIX em busca de uma visão de números que se afastasse da Geometria, de modo a ter o rigor necessário e pudesse abarcar e resolver questões que precisavam ser respondidas à época. Muitos matemáticos contribuíram para esse movimento, com destaque para Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) e Karl Wilhelm Theodor Weierstrass (1815-1897) (GRATTAN-GUINESS, 1970; PASQUINI, 2007; OTERO-GARCIA, 2015b; MISSE, LAMMOGLIA, 2020).

Segundo Ávila (2002), até a década de sessenta, as universidades brasileiras, sob influência do ensino europeu, alocavam as disciplinas de Análise logo nos primeiros anos dos cursos de matemática com um conteúdo extenso, que incluía muitos assuntos tratados hoje em cálculo com uma ou várias variáveis, funções de variável complexa, entre outros. Na década de sessenta, a adoção de autores americanos mudou um pouco esse panorama, e o cálculo passou a ser abordado antes da análise na maioria das escolas.

Reforçando as considerações feitas por Ávila (2002), em Otero-Garcia (2015a), o autor traça, por meio de uma pesquisa documental, uma trajetória da disciplina de análise no curso de licenciatura em Matemática da Universidade de São Paulo (USP). O autor conclui que, de uma maneira geral, nos primeiros anos do curso de matemática da USP não havia o que hoje entendemos por "Análise" e "Cálculo", mas grandes disciplinas denominadas por "Análise Matemática" que cumpriam tanto a parte rigorosa dos conteúdos de "Cálculo/Análise" quanto o que podemos considerar mais algorítmica. Dessa forma, os conteúdos de Análise Matemática eram sim ensinados desde a criação do curso, entretanto, o que entendemos por "Análise Matemática", disciplina universitária, só começou a ganhar forma na década de setenta, coincidindo justamente com a época apontada por Ávila (2002). Esse movimento ocorreu por meio do processo de algoritmização pelo qual passaram os primeiros cursos de "Análise Matemática" que, pouco a pouco, foram se aproximando cada vez mais do que hoje entendemos por Cálculo. Paralelamente, o conteúdo que consideramos mais rigoroso/analítico, em um primeiro momento migrou para disciplinas optativas e num segundo momento, foi reincorporado ao currículo obrigatório do curso para então ser uma disciplina de Análise como a entendemos hoje em dia.

Especificamente com relação aos conteúdos, Otero-Garcia (2015a) aponta que o conteúdo dito analítico nos cursos de matemática sofreu um grande enxugamento ao longo dos anos. Ou seja, esse tratamento mais rigoroso, ano a ano, passou a ficar restrito a cada vez menos conteúdos. Nos anos iniciais do curso da USP, tal abordagem era dada não só às funções de uma variável, mas também às de variável complexa, passando por funções de várias variáveis e equações diferenciais. Na última ementa analisada pelo autor, Introdução à Análise, de 2002 (que perdurou até pelo menos 2015), a disciplina de análise dada para a licenciatura passou a dar essa abordagem apenas a alguns pontos considerados "principais".

Em Otero-Garcia (2013), é traçada uma trajetória semelhante à descrita em Otero-Garcia (2015a), sendo o curso da Universidade Estadual Paulista (UNESP) o objeto de pesquisa. Nesse trabalho, as conclusões a que o pesquisador chega são bastante semelhantes, sendo que as diferenças mais notáveis estão no fato de as modificações sempre terem surgido primeiramente na USP e após alguns anos ressoarem na UNESP. Ademais, na UNESP, ao menos até a data de publicação do trabalho, não há uma disciplina de Análise específica para a licenciatura, ao contrário do que ocorreu na USP.

O movimento que descrevemos até aqui é importante para entendermos a análise que faremos das questões de Análise Matemática presentes no ENADE. Isso se deve, porque essa “Análise” precisará ser entendida de uma forma muito particular, pois, conforme vimos, a definição do que vem a ser “Análise”, disciplina universitária, não é algo tão simples ou uníssono. Dessa forma, respondendo à questão-título desta seção, podemos dizer que não existe uma “Análise Matemática”, mas “análises matemáticas”, a depender do recorte temporal, geográfico, de abordagem ou qualquer outro definido pelo pesquisador.

Nessa direção, também optamos neste trabalho por fazer um recorte, escolher uma Análise Matemática dentre tantas “análises matemáticas”. Evidentemente, optamos por aquilo que entendemos ser representativo, de forma a nos ajudar a compreender nossa questão de pesquisa. Sendo assim, optamos por chamar de Análise Matemática os conteúdos abordados justamente pela disciplina de Introdução à Análise da USP que citamos anteriormente. Isso porque a sua trajetória está bem traçada pela pesquisa de Otero-Garcia (2015a), e trata-se de uma disciplina específica para a Licenciatura (ao contrário da correspondente disciplina na UNESP). Além disso, o curso de matemática da USP de São Paulo é o mais antigo do Brasil, tendo certamente servido de referência para vários outros quer de instituições públicas, quer de instituições privadas. Os conteúdos da referida disciplina são: sequências e séries numéricas; critérios de convergência; série de potências e propriedades; desenvolvimento de funções em séries de potências; séries de Taylor e de Fourier; a construção de $\mathbb{R}$ e o axioma da completude; a expansão decimal dos números reais; demonstrações de alguns dos principais teoremas do Cálculo Diferencial e Integral.

Dessa forma, com base no que foi levantado sobre o Ensino de Análise para os cursos de Licenciatura em Matemática e nas informações coletadas acerca de como é feita a avaliação dos cursos superiores no Brasil, podemos dizer que a proposta deste artigo é apresentar uma tabulação das questões de Análise Matemática. Para isso, tomou-se por base os conteúdos apresentados na disciplina de Introdução à Análise da USP, considerando as provas aplicadas desde a implantação do SINAES até 2017 e, a partir dos dados quantitativos apresentados, tecerem-se considerações e diálogos com a literatura sobre Ensino de Análise Matemática disponível.

4 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Optou-se por fazer uma tabulação para dispor os dados analisados. A tabulação é a disposição em tabelas dos dados coletados de modo a facilitar sua análise e a verificação de possíveis relações entre ele e permite sintetizar os dados obtidos para que sua interpretação se torne mais rápida.

Como a quantidade de dados a serem analisados não era demasiadamente grande, sendo necessário interpretar e setorizar conteúdos em categorias predefinidas, com base em características não facilmente identificáveis por ferramentas automatizadas, optamos pela realização de uma tabulação manual. O sistema adotado e, posteriormente, transcrito foi uma variação do traço e risco, proposto por Marconi e Lakatos (2002), que consiste em traçar grupos de linhas para realizar a contagem de itens pertencentes a cada grupo, de modo que cada linha represente um item. Ao final, o número de riscos é calculado. No que se refere a essa abordagem, devem-se observar as seguintes restrições:

a) as categorias de análise usadas para classificar o conteúdo são definidas clara e explicitamente para que outros indivíduos possam aplicá-las ao mesmo conteúdo, a fim de verificar as conclusões;
b) o analista não é livre para selecionar e registrar simplesmente aquilo que chama sua atenção por ser interessante; deve classificar metodicamente todos os assuntos importantes em sua amostra;
c) certo processo quantitativo é usado para proporcionar a média da importância e ênfase da matéria de várias ideias verificadas e para permitir confrontos com outras amostras do material (MARCONI; LAKATOS, 2002, p. 130).

Considerando as restrições colocadas por Marconi e Lakatos (2002), é cabível fazer algumas observações quanto à metodologia utilizada para as tabulações.

Em relação à escolha das categorias nas quais os conteúdos foram primeiramente subdivididos, tomamos como base o parecer CNE/CES 1.302/2001, que dispõe sobre as Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura (BRASIL, 2001). O parecer lista os seguintes conteúdos, comuns a todos os cursos de Licenciatura em Matemática: Cálculo Diferencial e Integral; Álgebra Linear; Fundamentos de Análise; Fundamentos de Álgebra; Fundamentos de Geometria; Geometria Analítica. A parte comum deve ainda incluir: a) conteúdos matemáticos presentes na educação básica nas áreas de Álgebra, Geometria e Análise; b) conteúdos de áreas afins à Matemática que são fontes originadoras de problemas e campos de aplicação de suas teorias; c) conteúdos da Ciência da Educação, da História e Filosofia das Ciências e da Matemática (BRASIL, 2001, p. 6). Além disso, considerando que o ENADE cobra dos licenciandos alguns conteúdos que não podem ser encaixados dentre os listados pelo parecer supracitado, achamos por bem adotar também a categoria "Formação Geral", dado que há questões na avaliação que não são específicas ao professor de matemática em formação.

Dessa forma, as questões do ENADE foram categorizadas seguindo os seguintes conteúdos:

a) Cálculo Diferencial e Integral;
b) Álgebra Linear;
c) Fundamentos de Análise;
d) Fundamentos de Álgebra;
e) Fundamentos de Geometria;
f) Geometria Analítica;
g) Formação Geral;
h) Fundamentos de Matemática (categoria em que consideramos conteúdos matemáticos presentes na educação básica nas áreas de Álgebra, Geometria e Análise);
i) Estatística e Probabilidade (que consideramos como um conteúdo afim à Matemática);
j) Educação/ Educação Matemática (onde consideramos conteúdos pertencentes à Ciência da Educação, da História e Filosofia das Ciências e da Matemática).

A partir das questões obtidas em c) na primeira categorização, realizou-se a segunda, que, desta vez, tomou por base, conforme já apontamos anteriormente, os conteúdos tratados na disciplina de Introdução a Análise do curso de Licenciatura em Matemática da USP.

Com relação à segunda restrição apontada por Marconi e Lakatos (2002), que trata da seleção da amostra, foram analisadas todas as avaliações do ENADE aplicadas para os cursos de Licenciatura em Matemática desde o estabelecimento do exame, em 2004, até 2017.

Para quantificar os dados resultantes, foi contada a quantidade de questões pertencentes a cada categoria, dentre as definidas acima, presentes nas avaliações a cada ano, e posteriormente foi feita uma separação conveniente daquelas que tratam dos assuntos considerados atualmente ligados à análise.

Ainda dentro da abordagem quantitativa, o tipo de estudo realizado utiliza uma premissa causal, ou seja, será buscada uma possível motivação para as ocorrências a partir dos dados expostos e analisados.

5 TABULAÇÃO DAS QUESTÕES

O resultado da primeira tabulação está exposto no quadro 1 e no gráfico 1 – algumas questões figuram em mais de uma ocasião no quadro/gráfico por abordarem mais de um eixo para sua resolução.

É possível notar que, dentre as dez categorias propostas, apenas Fundamentos de Análise deixou de figurar em alguma avaliação. Também é evidente a importância dada ao Cálculo Diferencial e Integral, que apresenta uma quantidade considerável de questões em todas as avaliações, haja vista o número total de 30 questões de conhecimentos específicos por prova.

Com relação à segunda tabulação, ou seja, mais especificamente com relação à disciplina de Análise Matemática, o resultado pode ser conferido no quadro 2.

Observa-se que apenas três dos conteúdos listados na ementa considerada são abordados no ENADE, ou seja, não figuram questões de: critérios de convergência, série de potências e propriedades, desenvolvimento de funções em séries de potências, séries de Taylor e de Fourier e a expansão decimal dos números reais. Também é possível observar que, nas duas primeiras avaliações em que foram inseridas questões de análise aplicadas em 2008 e 2011, o número de questões era quatro, no ano de 2014 foram duas questões de análise, e apenas uma em 2017, indicando uma significativa diminuição.

Quadro 1: Tabulação das questões presentes no ENADE para os cursos de Licenciatura em Matemática desde 2004**

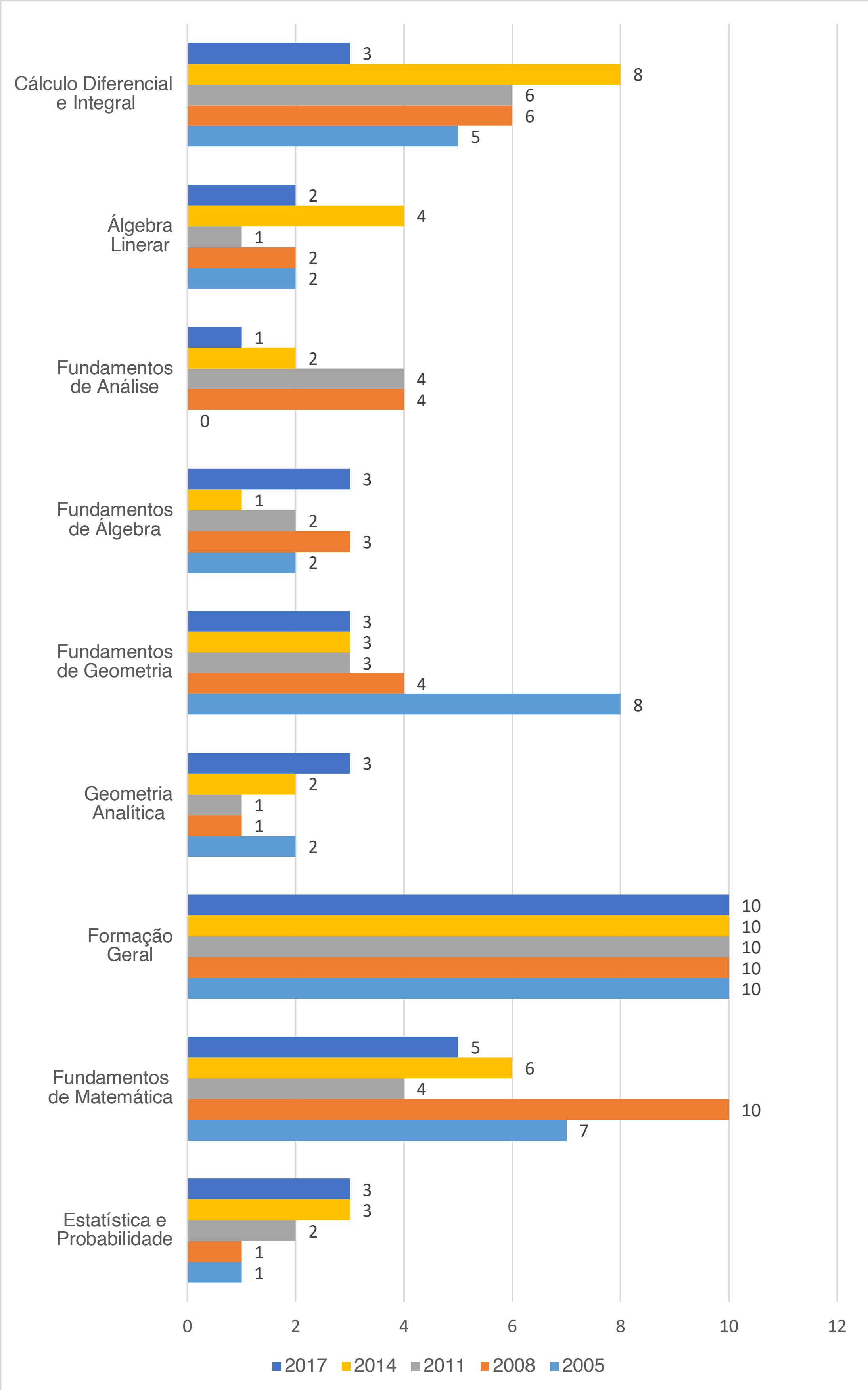
Números das questões que envolveram cada categoria no ENADE de cada ano					
Categorias	**2005**	**2008**	**2011**	**2014**	**2017**
Cálculo Diferencial e Integral	25, 26, 27, 28, 30*	16, 19, 24, 26, 31, 40*	10, 14, 17, 21, 22, 25	10, 12, 14, 15, 16, 17, 21, 22	9, 12, 23
Quantidade de questões/ano	5	6	6	8	3

Álgebra Linear	11, 24	22, 23	9	11, 19, 30, QD3*	14, 16
Quantidade de questões/ano	2	2	1	4	2
Fundamentos de Análise		19, 20, 26, 29*	10, 18, QD4*, QD5*	17, 22	23
Quantidade de questões/ano	0	4	4	2	1
Fundamentos de Álgebra	19, 23	18, 27, 30	11, 20	9	QD3*, 17, 25
Quantidade de questões/ano	2	3	2	1	3
Fundamentos de Geometria	15, 16, 17, 20, 21, 29*, 31, 37	15, 25, 34, 40*	12, 24, 33	23, 24, QD4*	22, 24, 26
Quantidade de questões/ano	8	4	3	3	3
Geometria Analítica	18, 22	12	23	20, QD3*	QD4*, 11, 19
Quantidade de questões/ano	2	1	1	2	3
Formação Geral	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8*, 9*, 10*	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9*, 10*	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, QD1*, QD2*	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, QD1*, QD2*	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, QD1*, QD2*
Quantidade de questões/ano	10	10	10	10	10
Fundamentos de Matemática	13, 14, 20, 21, 38, 39, 40	11, 12, 14, 17, 21, 28*, 32, 35, 36, 39	13, 15, 16, 19	18, 26, 27, 30, QD4*, QD5*	QD5*, 13, 15, 18, 27
Quantidade de questões/ano	7	10	4	6	5
Estatística e Probabilidade	12	13	QD3*, 31	13, 25, 29	10, 20, 21
Quantidade de questões/ano	1	1	2	3	3
Educação/ Educação Matemática	32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 31, 32	33, 37, 38	26, 27, 28, 29, 30, 32, 34, 35	31, 32, 33, 34, 35, QD5*, 28	QD4*, QD5*, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35
Quantidade de questões/ano	11	3	8	7	11

* Questões discursivas. **As provas dos anos que não figuram na tabela, a partir de 2004, não foram aplicadas aos cursos de Licenciatura em Matemática.

Fonte: dos autores.

Gráfico 1: Distribuição das questões do ENADE em categorias



Fonte: dos autores

Quadro 2: Tabulação específica das questões de Análise presentes no ENADE a partir de 2004**

	Números das questões que envolveram cada categoria no ENADE de cada ano			
Conteúdo específico	**2008**	**2011**	**2014**	**2017**
Sequências e séries numéricas	29*	10, QD4*	17	
Quantidade de questões/ano	1	2	1	0
A construção de R e o axioma da completude	20	18		
Quantidade de questões/ano	1	1	0	0
Demonstrações de alguns dos principais teoremas do CDI	19, 26	QD5*	22	23
Quantidade de questões/ano	2	1	1	1

*Questões dissertativas. **As provas dos anos que não figuram na tabela, a partir de 2004, não apresentaram questões de análise.

Fonte: dos autores

6 RESOLUÇÃO COMENTADAS DAS QUESTÕES

A seguir, as questões de Análise presentes nos ENADE realizadas até 2017 serão comentadas uma a uma, sendo que utilizamos como base as resoluções apresentadas por Marinhos e Neves (2011) para os anos de 2005, e as elaboradas pela elaboradas pela Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul (CARDONA et al, 2011 e CASTILHOS; MÜLLER, 2014) para os anos de 2008 e 2011. As questões dos anos de 2014 e 2017 foram resolvidas integralmente pelos autores deste artigo.

6.1 Questões de Fundamentos de Análise no Enade de 2008

Questão 19**:** Considere $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função com derivada $\frac{dg}{dt}$ contínua e f a função definida por $\int_0^x \frac{dg}{dt}(t)dt$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Nessas condições, avalie as afirmações que se seguem: I. A função f é integrável em todo intervalo $[a, b], a, b \in \mathbb{R}, a < b$. II A função f é derivável e sua derivada é a função g. III A função diferença $f - g$ é uma função constante. É correto o que se afirma em: a) I, apenas. b) II, apenas. c) I e III, apenas. d) II e III, apenas. e) I, II e III.

Resolução**:** Avaliaremos cada uma das afirmações. I. Inicialmente, a função g é definida dos reais nos reais ($\mathrm{g}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$). Sendo o intervalo $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ delimitado por dois números reais e, por hipótese, a derivada da função g, $\frac{\mathrm{dg}}{\mathrm{dt}}$, contínua, temos, pelo teorema de Weierstrass[4], que ela é limitada no intervalo $[0, \mathrm{x}]$ para qualquer x escolhido no intervalo $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$. É possível afirmar, portanto, que a função $\int_0^{\mathrm{x}} \frac{\mathrm{dg}}{\mathrm{dt}}(\mathrm{t})\mathrm{dt}$ está bem definida e é continua em qualquer intervalo $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ e, assim, é integrável em $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$.

[4] Teorema de Weierstrass: Toda função contínua num intervalo fechado $[a, b]$ assume um máximo e um mínimo em $[a, b]$.

Assim, a afirmação I é verdadeira. II. O Teorema Fundamental do Cálculo nos diz que existe uma relação inversa entre as operações de integração e derivação. Aplicando esse conceito ao problema proposto, temos que a derivada de $\int_0^x \frac{\mathrm{dg}}{\mathrm{dt}}(\mathrm{t})\mathrm{dt}$ é $\frac{\mathrm{dg}}{\mathrm{dt}}(\mathrm{t})$. O enunciado nos diz que $\frac{\mathrm{dg}}{\mathrm{dt}}(\mathrm{t})$ é a derivada de g, desse modo, $\frac{\mathrm{dg}}{\mathrm{dt}}(\mathrm{t}) \neq \mathrm{g}$, pois é sua primitiva. Assim, a afirmação II é falsa. III. Como apontado em II, derivada de $\int_0^x \frac{\mathrm{dg}}{\mathrm{dt}}(\mathrm{t})\mathrm{dt}$ é $\frac{\mathrm{dg}}{\mathrm{dt}}(\mathrm{t})$, que é igual à derivada de g. Por terem a mesma derivada, temos que f e g são ambas primitivas de $\frac{\mathrm{dg}}{\mathrm{dt}}(\mathrm{t})$, o que significa que o que as diferencia é uma constante. Assim, a afirmação III é verdadeira. A resposta correta é, portanto, a alternativa C.

Comentários**:** A questão apresentada se enquadra no conteúdo previsto para a disciplina de Análise na USP, sob o tópico "Demonstrações de alguns dos principais teoremas do Cálculo Diferencial e Integral". A resolução exige que o estudante tenha conhecimento do Teorema de Weierstrass e do Teorema Fundamental do Cálculo, resultados importantes dentro da análise matemática, além de ter sedimentado o conceito de primitiva de uma função.

* * *

Questão 20**:** Para cada número real x, considere o conjunto C_x formado por todos os números obtidos somando-se a x um número racional, isto é, $C_x = \{x + r : r \in \mathbb{Q}\}$. Sob essas condições, conclui-se que: a) o número π pertence ao conjunto C_1. b) o conjunto $C_4 \cap C_5$ possui um único elemento. c) o número $\sqrt{2}$ pertence ao conjunto $C_{\sqrt{3}}$. d) os conjuntos C_3 e $C_{1/3}$ são iguais. e) o número zero pertence ao conjunto $C_\pi \cup C_{-\pi}$.

Resolução: Avaliaremos cada uma das afirmações. a) O conjunto C_1 é formado por números obtidos a partir da lei de formação: $C_1 = \{1 + r : r \in \mathbb{Q}\}$. Como 1 e r são racionais, $1 + r$ também deve ser racional. Como π é um número irracional, não pode pertencer a C_1. Assim, a afirmação a) é falsa. b) A segunda afirmação pode ser refutada com um contraexemplo. Temos que $C_4 = \{4 + r : r \in \mathbb{Q}\}$ e $C_5 = \{5 + r : r \in \mathbb{Q}\}$. Por exemplo, $\{4 + 2 = 6 \in C_4\}$ e $\{5 + 1 = 6 \in C_5\}$, ou seja, $6 \in C_4 \cap C_5$e $\{4 + 3 = 7 \in C_4\}$ e $\{5 + 2 = 7 \in C_5\}$, o que significa que $7 \in C_4 \cap C_5$ e demonstra que existem pelo menos dois elementos pertencentes a $C_4 \cap C_5$. c) Vamos supor que exista um número $r \in \mathbb{Q}$, tal que $\sqrt{3} + r = \sqrt{2}$. Subtraindo $\sqrt{3}$ de ambos os lados da equação, temos $r = \sqrt{2} - \sqrt{3}$, que resultará em um número irracional, o que é absurdo, pois r, por hipótese, é um número racional. Não existe, portanto, um número $r \in \mathbb{Q}$, tal que $\sqrt{3} + r = \sqrt{2}$ e concluímos que o número $\sqrt{2}$ não pertence ao conjunto $C_{\sqrt{3}}$. *Assim, a afirmação c) é falsa.* d) Para avaliar afirmação d), é necessário observar que, para um x racional, C_x será igual a $\mathbb{Q}$. Como 3 e 1/3 são números racionais, ambos, C_3 e $C_{1/3}$, são iguais a $\mathbb{Q}$ e, assim, são iguais entre si. Assim, essa afirmação é verdadeira. e) A lei de formação do conjunto C_π é $\{\pi + r : r \in \mathbb{Q}\}$. Temos que $0 = \pi + (-\pi)$, entretanto, $(-\pi)$ é um número irracional, não se enquadrando nos valores admitidos para r. Portanto, $0 \notin C_\pi$. De forma análoga, podemos concluir que $0 \notin C_{-\pi}$. Isso posto, $0 \notin (C_\pi \cup C_{-\pi})$. Assim, a afirmação e) é falsa. Portanto, a resposta correta é a alternativa d).

Comentários: A questão apresentada enquadra-se no conteúdo previsto para a disciplina de Análise na USP sob o tópico "A construção de R e o axioma da completude". A resolução exige que o estudante tenha conhecimento de conceitos pertencentes à teoria dos conjuntos, com ênfase para propriedades dos números racionais, irracionais e reais.

* * *

Questão 26**:** Analisando a função $f(x, y) = x^2(x - 1) + y(2x - y)$, definida no domínio $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$, um estudante de cálculo diferencial escreveu o seguinte: A função f tem um ponto de mínimo global em D, *porque* o ponto $(0,0)$ é um ponto crítico de f. A respeito da afirmação feita pelo estudante, assinale a opção correta: a) As duas asserções são proposições verdadeiras, e a segunda é uma justificativa correta da primeira. b) As duas asserções são proposições verdadeiras, mas a segunda não é uma justificativa correta da primeira. c) A primeira asserção é uma proposição verdadeira, e a segunda é falsa. d) A primeira asserção é uma proposição falsa, e a segunda é verdadeira. e) Ambas as asserções são proposições falsas.

Resolução: Como todas as alternativas versam sobre a validade ou não das asserções feitas, inicialmente, avaliaremos tais asserções e, posteriormente, cada uma das afirmações. a) O conjunto D apresentado é fechado, ou seja, inclui todos os seus pontos de fronteira, e também é limitado, podendo ser chamado de conjunto compacto. Considerando que o domínio é compacto e observando ainda que a função é polinomial e, portanto, contínua, pode-se dizer, pelo teorema de Weierstrass, que ela atinge o mínimo global e o máximo global em D. Assim, a primeira afirmação é verdadeira. b) Para saber se $(0,0)$ é um ponto crítico de f, primeiro é necessário fazer as derivadas parciais de f e então substituir as coordenadas dadas. Caso $f_x(0,0) = 0$ e $f_y(0,0) = 0$, ou se uma das derivadas parciais não estiver definida em $(0,0)$, esse será um ponto crítico de f. No caso, $f_x(x,y) = 3x^2 - 2x + 2y$ e $f_y(x,y) = 2x - 2y$. Substituindo o ponto dado nas derivadas parciais, temos: $f_x(0,0) = 0$ e $f_y(0,0) = 0$. Assim, a segunda afirmação é verdadeira. c) Verificaremos agora se a segunda afirmação é uma justificativa correta para a primeira. O fato de possuir derivadas parciais iguais a zero em determinado ponto, não garante que a função terá um máximo e um mínimo local nesse ponto. Assim, a segunda afirmação não justifica a primeira, donde conclui-se que a alternativa correta é a b).

Comentários: A questão apresentada enquadra-se no conteúdo previsto para a disciplina de Análise na USP sob o tópico "Demonstrações de alguns dos principais teoremas do Cálculo Diferencial e Integral". A resolução exige que o estudante tenha conhecimento de Teoremas e definições utilizados no cálculo, tais como, mínimo global, máximo global e ponto crítico, além de ter certa clareza sobre quais dessas definições e como podem ou não ser interligadas.

* * *

Questão 29**:** Considere a sequência numérica definida por $a_1 = \sqrt{a}$; $a_{n+1} = \sqrt{a + \sqrt{a_n}}$, para $n = 1, 2, 3, \ldots$ Usando o princípio de indução finita, mostre que $a_n < a$ para todo $n \geq 1$ e $a \geq 2$. Para isso, resolva o que se pede nos itens a seguir e transcreva suas respostas para o Caderno de Respostas, nos locais devidamente indicados. a) Escreva a hipótese e a tese da propriedade a ser demonstrada. b) Prove que $a(a-1) > 0$ para $a \geq 2$. c) Mostre que $\sqrt{a} < a$, para todo $a \geq 2$. d) Supondo que $a_n < a$, prove que $a_{n+1} < \sqrt{2a}$. e) Mostre que $a_{n+1} < a$. f) A partir dos passos anteriores, conclua a prova por indução.

Resolução: a) Hipótese: a sequência a_n, é definida por $a_1 = \sqrt{a}$ e $a_{n+1} = \sqrt{a + \sqrt{a_n}}$, para $n = 1, 2, 3, \ldots$, com $a \geq 2$. *Tese:* $a_n < a$ para todo $n \geq 1$. b) Consideremos que $a \geq 2$. Convenientemente, podemos adicionar -1 em ambos os lados da desigualdade sem perda de generalidade. Obteremos $a - 1 \geq 2 - 1$, ou seja, $a - 1 \geq 1$. Assim, $a - 1$ é positivo. Sabendo que $a - 1$ é positivo e, por hipótese, $a \geq 2$, o produto $a(a-1)$ resultará também em um número positivo. Portanto, $a(a-1) > 0$ para $a \geq 2$, conforme queríamos demonstrar. c) Considerando o resultado obtido no item anterior, temos que $a(a-1) > 0$ para $a \geq 2$. Realizando a distributiva na desigualdade demonstrada, temos: $a^2 - a > 0$. Adicionando a em ambos os lados da desigualdade, temos: $a^2 > a$. Utilizando a raiz quadrada dos dois lados da desigualdade, temos que $a > \sqrt{a}$ e, sem perda de generalidade, que $\sqrt{a} < a$ conforme queríamos demonstrar. d) Supondo que $a_n < a$, temos que $\sqrt{a_n} < \sqrt{a}$. Do item anterior, temos que $\sqrt{a} < a$ e, por transitividade, $\sqrt{a_n} < a$. Somando a em ambos os lados da desigualdade, temos $a + \sqrt{a_n} < a + a$, ou seja, $a + \sqrt{a_n} < 2a$. Novamente, aplicando a raiz nos dois lados da desigualdade, temos $\sqrt{a + \sqrt{a_n}} < \sqrt{2a}$. Mas, de acordo com a definição dada no enunciado, $\sqrt{a + \sqrt{a_n}} = a_{n+1}$, então $a_{n+1} < \sqrt{2a}$, conforme queríamos demonstrar. e) Por hipótese, temos que $a \geq 2$. Subtraindo 2 em ambos os lados da desigualdade, temos: $a - 2 \geq 2 - 2$, ou seja, $a - 2 \geq 0$. Multiplicando ambos os lados da desigualdade por a, temos: $a(a-2) \geq 0$, e assim, $a^2 - 2a \geq 0$. Adicionando $2a$ em ambos os lados da desigualdade, temos: $a^2 \geq 2a$, o que podemos transcrever, sem perda de generalidade, como $2a \leq a^2$. Aplicando a raiz quadrada dos dois lados da desigualdade, temos: $\sqrt{2a} \leq a$. Foi demonstrado no item d) que $a_{n+1} < \sqrt{2a}$, então, por transitividade, $a_{n+1} < \sqrt{2a} \leq a$, e portanto, $a_{n+1} < a$, conforme queríamos demonstrar. f) O que queremos demonstrar é a tese exposta no item a), com base na hipótese apontada no mesmo item. Para realizar a prova por indução há três passos: I. é necessário inicialmente verificar se a proposição em teste é válida para $n = 1$. Como demonstrada em c), é válida. II. Suporemos que a proposição é válida para um número n. III. É necessário verificar se a proposição é válida para $n + 1$. Como demonstrado nos itens d) e e), é válida. Logo, por indução, a propriedade é válida para qualquer natural, conforme queríamos demonstrar.

Comentários**:** A questão apresentada se enquadra no conteúdo previsto para a disciplina de Análise na USP sob o tópico “Sequências e séries numéricas”. A resolução exige que o estudante tenha conhecimento de sequências recorrentes, princípio da indução finita e propriedades dos números reais, como distributividade, multiplicidade, monotonicidade e transitividade.

6.2 Questões de Fundamentos de Análise no Enade de 2011

Questão 10**:** Sabe-se que, para todo número inteiro $n > 1$, tem-se $\frac{n\sqrt[n]{e}}{e} < \sqrt[n]{n!} < \frac{n\sqrt[n]{ne}}{e}$. Nesse caso, se $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = a$, então: a) $a = 0$. b) $a = \frac{1}{e}$. c) $\mathrm{a} = 1$. d) $a = e$. e) $a = +\infty$.

Resolução: O que se deseja calcular é $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$, dada a desigualdade $\frac{n\sqrt[n]{e}}{e} < \sqrt[n]{n!} < \frac{n\sqrt[n]{ne}}{e}$, para $n > 1$ como base. É necessário observar que a função cujo limite se deseja calcular não é igual a nenhum dos termos da inequação dada. Podemos, entretanto, multiplicar todos os termos por $1/n$ e assim, obter : $\frac{n\sqrt[n]{e}}{e.n} < \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} < \frac{n\sqrt[n]{ne}}{e.n}$. A desigualdade passa a ser: $\frac{\sqrt[n]{e}}{e} < \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} < \frac{\sqrt[n]{ne}}{e}$. Calculando o limite de $\frac{\sqrt[n]{e}}{e}$ quando $n \to +\infty$, temos: $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{e}}{e} = \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}}{e}$. Mas como $n \to +\infty$, $\frac{1}{n} \to 0$. Assim, $\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}}{e} = \lim_{n\to+\infty} \frac{e^0}{e} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{e} = \frac{1}{e}$. Por outro lado, calculando o limite de $\frac{\sqrt[n]{ne}}{e}$ quando $n \to +\infty$, temos: $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{ne}}{e} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{n}.\sqrt[n]{e}}{e}$ valendo-nos de propriedades de limites, sabemos que o limite dos produtos é o produto dos limites, então, teremos: $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n}. \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{e}}{e}$. Olhando separadamente para cada um dos limites, temos que o primeiro, $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n}$, resulta em $\lim_{n\to+\infty} n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} n^0 = \lim_{n\to+\infty} 1 = 1$, e o segundo, $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{e}}{e}$, já foi calculado e resulta em $\frac{1}{e}$. Desse modo, $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{ne}}{e} = 1.\frac{1}{e} = \frac{1}{e}$. Como os dois limites encontrados são iguais a $\frac{1}{e}$, pelo Teorema do confronto, $\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\frac{1}{e}$. Conclui-se, portanto, que a alternativa correta é a b).

Comentários: A questão apresentada se enquadra no conteúdo previsto para a disciplina de Análise na USP sob o tópico “Sequências e séries numéricas”. A resolução exige que o estudante tenha conhecimento de sequências numéricas, aplicação de propriedades de limites e teoremas importantes como o Teorema do Confronto. Noções básicas sobre exponenciação também são exigidas para a resolução do problema.

* * *

Questão 18**:** Duas grandezas x e y são ditas *comensuráveis* se existe um número racional q tal que a medida de x é igual a q vezes a medida de y. Com base nesse conceito, são grandezas comensuráveis: a) a aresta de um cubo de volume V e a aresta de um cubo de volume $2V$. b) a área e o perímetro de um círculo, quando o raio é um número racional. c) a área e o diâmetro de um círculo, quando o raio é um número racional. d) o comprimento e o diâmetro de uma circunferência. e) a diagonal e o lado de um quadrado.

Resolução: Para resolver essa questão, iremos testar cada uma das alternativas apresentadas e verificar se seus resultados são racionais. Ou seja, dadas duas medidas, verificaremos se a divisão da primeira pela segunda resulta em um racional. a) Chamemos de x a aresta do cubo de volume V e de y, a aresta do cubo de volume $2V$. Teremos os seguintes valores para os volumes: $V=x^3$ e $2V=y^3$. Entretanto, a relação que deve ser feita é entre as arestas. Encontraremos, então, os valores de x e y. Aplicando a raiz cúbica nos dois lados da igualdade para ambos os casos, temos: $\sqrt[3]{V}=\sqrt[3]{x^3}$ e $\sqrt[3]{2V}=\sqrt[3]{y^3}$, que resulta em: $\sqrt[3]{V}=x$ e $\sqrt[3]{2}.\sqrt[3]{V}=y$. Queremos saber se a razão entre x e y é racional, portanto: $\frac{x}{y}=\frac{\sqrt[3]{V}}{\sqrt[3]{2}.\sqrt[3]{V}}$. Concluiremos assim que $\frac{x}{y}=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, que é um número irracional. Portanto, a aresta de um cubo de volume V e a aresta de um cubo de volume $2V$ não são comensuráveis. b) A área A, de um círculo de raio R é πR^2, e seu perímetro P, é $2\pi R$. A razão entre essas duas grandezas é $\frac{A}{P}=\frac{\pi R^2}{2\pi R}$, que resulta em $\frac{R}{2}$. Como foi afirmado no enunciado que R é racional, $\frac{R}{2}$ é racional. Podemos concluir que a área e o perímetro de um círculo, quando o raio é um número racional são comensuráveis. c) A área de um círculo de raio R é πR^2, e seu diâmetro D, é $2R$. A razão entre essas duas grandezas é $\frac{A}{D}=\frac{\pi R^2}{2R}$, que resulta em $\frac{\pi R}{2}$. R é racional (por hipótese), enquanto π é um número irracional, assim, seu produto resulta em um número irracional, que dividido por 2, será ainda irracional. Podemos concluir que a área e o diâmetro de um círculo, quando o raio é um número racional não são comensuráveis. d) O comprimento C de uma circunferência de raio R é $2\pi R$, e seu diâmetro D, é $2R$. A razão entre essas duas grandezas é $\frac{C}{D}=\frac{2\pi R}{2R}$, que resulta em π, que é um número irracional. Podemos concluir que o comprimento e o diâmetro de uma circunferência não são comensuráveis. e) Seja l, o lado de um quadrado, temos, pelo Teorema de Pitágoras, que sua diagonal d é $l\sqrt{2}$. A razão entre essas duas grandezas é $\frac{d}{l}=\frac{l\sqrt{2}}{l}$, que resulta em $\sqrt{2}$, que é um número irracional. Podemos concluir, assim, que a diagonal e o lado de um quadrado não são comensuráveis. A resposta correta é a alternativa b).

Comentários: A questão apresentada enquadra-se no conteúdo previsto para a disciplina de Análise na USP sob o tópico “A construção de R e o axioma da completude”. A resolução exige que o estudante tenha conhecimento do conceito de comensurabilidade, e consequentemente certo domínio acerca de propriedades dos conjuntos dos números racionais e irracionais, além de conhecimentos básicos de geometria.

* * *

Questão discursiva 4: Considere a sequência numérica definida por $a_1 = a, a_{n+1} = \frac{4a_n}{2+a_n^2}$, para $n \geq 1$. Use o princípio de indução finita e mostre que $a_n < \sqrt{2}$, para todo número natural $n \geq 1$ e para $0 < a < \sqrt{2}$, seguindo os passos indicados nos itens a seguir: a) Escreva a hipótese e a tese da propriedade a ser demonstrada. b) Mostre que $s = \frac{4a}{2+a^2} > 0$, para todo $a > 0$. c) Prove que $s^2 < 2$, para todo $0 < a < \sqrt{2}$. d) Mostre que $0 < s < \sqrt{2}$. e) Suponha que $a_n < \sqrt{2}$ e prove que $a_{n+1} < \sqrt{2}$. f) Conclua a prova por indução.

Resolução: a) Hipótese: (a_n) é a sequência definida por: $a_1 = a, a_{n+1} = \frac{4a_n}{2+a_n^2}$, para $n \geq 1$, em que $0 < a_1 = a < \sqrt{2}$. *Tese:* $a_n < \sqrt{2}$, para todo número natural $n \geq 1$. b) Observando o denominador $2 + a^2$, podemos afirmar que ele será sempre positivo, dado que a^2 sempre será um número positivo e, adicionado a 2 que é positivo, resultará em um número também positivo. Observando, por outro lado, o numerador $4a$ e, considerando que $0 < a < \sqrt{2}$, por hipótese, podemos afirmar que ele sempre será positivo, dado que a é positivo e é multiplicado por 4, que também é positivo. Dessa forma, como a razão $\frac{4a}{2+a^2}$ será sempre positiva, pois é feita entre dois números positivos. *Portanto $s = \frac{4a}{2+a^2} > 0$, conforme queríamos demonstrar.* c) Temos que $s = \frac{4a}{2+a^2}$. Assim, $s^2 = \frac{(4a)^2}{(2+a^2)^2}$. Desenvolvendo a expressão, temos: $s^2 = \frac{16a^2}{4+4a^2+a^4}$. Queremos que mostrar que $\frac{16a^2}{4+4a^2+a^4} < 2$. Inicialmente, vamos supor que $s^2 > 2, para\ 0 < a < \sqrt{2}$. Isso equivale a dizer que $16a^2 > 2(4 + 4a^2 + a^4)$ ou seja, $8a^2 > 4 + 4a^2 + a^4$. Podemos reescrever a desigualdade, sem perda de generalidade, como $4 + 4a^2 + a^4 < 8a^2$, subtraindo $8a^2$ em ambos os lados da desigualdade, temos: $4 - 4a^2 + a^4 < 0$, que pode ser reescrito como $(2 - a^2)^2 < 0$, o que é absurdo. Suponhamos agora, que $s^2 = 2$. Desenvolvendo a equação de forma análoga à que foi feita com a inequação anterior, obteremos$(2 - a^2)^2 = 0$, o que também é absurdo, uma vez que $0 < a < \sqrt{2}$ e, o único valor de a que resultaria em zero, seria $\sqrt{2}$. Desse modo, a afirmação de que $s^2 < 2$ deve ser verdadeira. De fato, afirmar que $s^2 < 2$, equivale a dizer que $16a^2 < 2(4 + 4a^2 + a^4)$, ou seja, $8a^2 < 4 + 4a^2 + a^4$. Podemos reescrever a desigualdade, sem perda de generalidade, como $4 + 4a^2 + a^4 > 8a^2$, subtraindo $8a^2$ em ambos os lados da desigualdade, temos: $4 - 4a^2 + a^4 > 0$, que pode ser reescrito como $(2 - a^2)^2 > 0$, o que é sempre verdade, para qualquer valor de a. Desse modo, $\mathrm{s}^2 < 2$, para todo $0 < \mathrm{a} < \sqrt{2}$, conforme queríamos demonstrar. d) Provamos em b) que $\mathrm{s} > 0$, para todo $\mathrm{a} > 0$. Em c), provamos que prove que $\mathrm{s}^2 < 2$, para todo $0 < \mathrm{a} < \sqrt{2}$, o que equivale a dizer que $\mathrm{s} < \sqrt{2}$. De posse desses dois resultados, e do fato de que raiz quadrada é uma função crescente, concluímos que $0 < s < \sqrt{2}$, para todo $0 < \mathrm{a} < \sqrt{2}$, conforme queríamos demonstrar. e) Assumamos que $a_n < \sqrt{2}$ é verdade. Como demonstrado em d), $0 < s < \sqrt{2}$, então $a_{n+1} < \sqrt{2}$. f) O que queremos demonstrar é a tese exposta no item a), com base na hipótese apontada no mesmo item. Para realizar a prova por indução há três passos: I. é necessário inicialmente verificar se a proposição em teste é válida para $n = 1$. Por hipótese, $a_1 = a$ e $a < \sqrt{2}$, ou seja, a propriedade é válida para $n = 1$. II. Suporemos que a proposição é válida para um número n. III. É necessário verificar se a proposição é válida para $n + 1$. Como demonstrado no item e), é válida. Logo, por indução, a propriedade é válida para qualquer natural, conforme queríamos demonstrar.

Comentários: A questão apresentada enquadra-se no conteúdo previsto para a disciplina de Análise na USP sob o tópico “Sequências e séries numéricas”. A resolução exige que o estudante tenha conhecimentos acerca de sequências por recorrência, além do princípio da indução finita e realização de demonstrações por indução.

* * *

Questão discursiva 5**:** O Teorema do Valor Intermediário é uma proposição muito importante da análise matemática, com inúmeras aplicações teóricas e práticas. Uma demonstração analítica desse teorema foi feita pelo matemático Bernard Bolzano (1781 – 1848). Nesse contexto, faça o que se pede nos itens a seguir: a) Enuncie o Teorema do Valor Intermediário para funções reais de uma variável real. b) Resolva a seguinte situação-problema: o vencedor da corrida de São Silvestre-2010 foi o brasileiro Mailson Gomes dos Santos, que fez o percurso de 15 km em 44 min e 7 seg. Prove que, em pelo menos dois momentos distintos da corrida, a velocidade instantânea de Mailson era de 5 metros por segundo. c) Descreva uma situação real que pode ser modelada por meio de uma função contínua f, definida em um intervalo $[a,b]$, relacionando duas grandezas x e y, tal que existe $k \in (a,b)$ com $f(x) \neq f(k)$, para todo $x \in (a,b), x \neq k$. Justifique sua resposta.

Resolução: a) Se $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, então, para todo $f(a) < k < f(b)$, existe $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = k$. b) Inicialmente, converteremos para segundos o tempo gasto na prova pelo corredor: $(44 \times 60) + 7 = 2647$. Como a distância percorrida pelo corredor foi de $15\,km$, o que equivale a 15000 metros, sua velocidade média em m/s foi: $\frac{15000\,m}{2647\,s} = 5{,}67 m/s$. Admitiremos que no instante inicial $V(0)$, a velocidade do corredor era igual a 0, assim como no momento final $V(2647)$, dessa maneira, a função é definida no intervalo $[0, 2647]$ e $V(0) = V(2647) = 0$. Admitiremos também que a função é contínua no intervalo em que está definida. Desse modo, pode-se afirmar que existe ao menos um momento t_0 na prova em que a velocidade do corredor foi igual à sua velocidade média, ou seja, $V(t_0) = 5{,}67 m/s$. Temos então que $V(0) < 5 < V(t_0)$ e também que $V(2647) < 5 < V(t_0)$. Pelo Teorema do Valor Intermediário, temos então que em, pelo menos, dois instantes, $t_1 \in [0, t_0]$ e $t_2 \in [t_0, 2647]$, $V(t_1) = V(t_2) = 5$. c) Qualquer situação-problema modelada por uma função contínua em um intervalo $[a,b]$ que seja estritamente crescente ou decrescente, ou uma função em que $f(a) \neq f(b)$, atenderia a esse enunciado.

Comentários: a questão apresentada enquadra- se no conteúdo previsto para a disciplina de análise na USP sob o tópico “Demonstrações de alguns dos principais teoremas do Cálculo Diferencial e Integral”. A resolução exige que o estudante tenha conhecimentos acerca de funções contínuas e suas propriedades, especificamente o Teorema do Valor Intermediário, sabendo enunciá-lo e aplicá-lo.

6.3 Questões de Fundamentos de Análise no Enade de 2014

Questão 17**:** Considere $(x_n), n \in \mathbb{N}$, uma sequência de números reais positivos tal que $x_{n+1} = \frac{x_n}{n+1}$. Nesse caso, $\lim_{n \to +\infty} x_n$ é igual a: a) $+\infty$. b) 0. c) x_1. d) 1. e) e.

Resolução: Inicialmente, escreveremos os primeiros termos da sequência para observar a relação entre eles e localizar o termo geral: $x_1 = \frac{x_0}{1}$, $x_2 = \frac{x_1}{2} = \frac{x_0}{1.2}$, $x_3 = \frac{x_2}{3} = \frac{x_0/2}{3} = \frac{x_0}{1.2.3}$, $x_4 = \frac{x_3}{4} = \frac{x_0/6}{4} = \frac{x_0}{1.2.3.4}$,... $x_n = \frac{x_0}{n!}$. Por hipótese, x_0 é positivo e podemos observar que é constante. Assim, $\lim_{n \to \infty} x_n = \lim_{n \to \infty} \frac{x_0}{n!} = 0$. Portanto, a resposta correta é a alternativa b).

Comentários: A questão apresentada enquadra-se no conteúdo previsto para a disciplina de análise na USP sob o tópico "Sequências e séries numéricas". A resolução exige que o estudante tenha conhecimentos acerca de sequências e séries e limites.

* * *

Questão 22: Um dos problemas mais importantes estudados pelo cálculo diferencial e integral diz respeito à maximização e minimização de funções. Um desses problemas está relacionado à função cúbica definida por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, em que a, b, c e d são constantes reais, com $a \neq 0$. Acerca dessa cúbica, avalie as afirmações a seguir: I. A função f possui apenas um ponto de inflexão, independentemente dos valores de a, b, c e d. II. Se $b^2 - 3ac > 0$, então f possui um ponto de máximo local e um ponto de mínimo local. III. Se f possui um ponto de máximo local e um ponto de mínimo local, então a média aritmética das abscissas desses dois pontos extremos corresponde à abscissa do ponto de inflexão. É correto o que se afirma em: a) I, apenas. b) II, apenas. c) I e III, apenas. d) II e III, apenas. e) I, II e II.

Resolução: Avaliaremos cada uma das afirmações. I. Para verificar se um ponto p é um ponto de inflexão de f, precisamos testar se f apresenta concavidades voltadas para sentidos diferentes a partir de p. Ou seja, dado o intervalo $]a, b[$, contido no domínio da função, precisamos verificar se em $]a, p[$ e $]p, b[$ as concavidades da função voltam-se para sentidos opostos. Para fazer essa verificação, faremos a derivada de segunda ordem de f e, dado o intervalo que se deseja verificar, a depender se o resultado for maior ou menor do que zero, saberemos se a concavidade será para cima ou para baixo, respectivamente. Igualando a zero a segunda derivada, poderemos saber, ainda, qual é a abscissa do ponto de inflexão. Derivando $f(x)$, temos: $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$. Fazendo a segunda derivada: $f''(x) = 6ax + 2b$. Igualando a zero a segunda derivada: $6ax + 2b = 0$. A abscissa do ponto de inflexão será: $6ax = -2b \rightarrow x = -\frac{2b}{6a} \rightarrow x = -\frac{b}{3a}$. É necessário avaliar as situações para a positivo e negativo. Inicialmente, se $a > 0$, $f''(x) > 0$ no intervalo $]-\frac{b}{3a}, \infty[$ e $f''(x) < 0$ em $]-\infty, -\frac{b}{3a}[$, desse modo, a função terá concavidade para cima em $]-\frac{b}{3a}, \infty[$ e para baixo em $]-\infty, -\frac{b}{3a}[$. Assim, é possível afirmar que $-\frac{b}{3a}$ é o único ponto de inflexão de f, nesse caso. Por outro lado, caso $a < 0$, $f''(x) < 0$ no intervalo $]-\frac{b}{3a}, \infty[$ e $f''(x) > 0$ em $]-\infty, -\frac{b}{3a}[$, desse modo, a função terá concavidade para baixo em $]-\frac{b}{3a}, \infty[$ e para cima em $]-\infty, -\frac{b}{3a}[$. Assim, é possível afirmar que $-\frac{b}{3a}$ é o único ponto de inflexão de f também nesse caso. Portando, a afirmação I é verdadeira. II. Para determinar os pontos de máximo e mínimo local, é necessário voltar nossa atenção para a derivada de primeira ordem da função f. Caso a derivada de primeira ordem seja igual a zero em um ponto, e a de segunda ordem maior do que zero, neste mesmo ponto é um ponto de mínimo local. Por outro lado, caso a derivada de primeira ordem seja igual a zero no ponto, e a derivada de segunda ordem seja menor do que zero, é um ponto de máximo local. A derivada de primeira ordem de f é: $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$. Como dito, $f'(x)$ precisa ser igual a zero no ponto p, então: $3ax^2 + 2bx + c = 0$. De fato, considerando $f'(x) = 0$ como uma equação de segundo grau, caso $\Delta = 4b^2 - 4 \times 3a \times c$ seja maior do que zero, haverá duas raízes reais e distintas para ela, e podemos reescrever Δ da seguinte maneira: $\Delta = 4(b^2 - 3ac)$. Assim, como 4 é um número positivo, caso $b^2 - 3ac > 0$, Δ será maior do que zero e haverá duas raízes que podem ser expressas como: $x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-3ac}}{3a}$ e $x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-3ac}}{3a}$. A derivada de segunda ordem da função é: $f''(x) = 6ax + 2b$. Substituindo nela os pontos em que a derivada de primeira ordem será zero, teremos: $f''(x_1) = 6a\frac{-b+\sqrt{b^2-3ac}}{3a} + 2b \rightarrow f''(x_1) = 2\sqrt{b^2 - 3ac}$, que é sempre positivo. $f''(x_2) =$

$6a\frac{-b-\sqrt{b^2-3ac}}{3a}+2b \rightarrow f''(x_2)=-2\sqrt{b^2-3ac}$, que é sempre negativo. Desse modo, x_1 é ponto de mínimo da função e x_2 é ponto de máximo da função. Portanto, a afirmação II é verdadeira. III. As abscissas dos pontos mínimo e máximo locais foram encontrados no item anterior, assim, basta fazer a média aritmética entre eles: $\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{\frac{-b+\sqrt{b^2-3ac}}{3a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-3ac}}{3a}}{2} = \frac{\frac{-2b+}{3a}}{2}=-\frac{2b}{6a}=-\frac{b}{3a}$, que é exatamente o valor encontrado para o ponto de inflexão em I. Portanto, a afirmação III é verdadeira. Conclui-se, assim, que a alternativa correta é e).

Comentários: A questão apresentada enquadra-se no conteúdo previsto para a disciplina de análise na USP sob o tópico "Demonstrações de alguns dos principais teoremas do Cálculo Diferencial e Integral". A resolução exige que o estudante tenha conhecimentos acerca de funções, especificamente, sobre teoremas que tratam de máximos e mínimos e ponto de inflexão, conseguindo aplicar seus resultados para a resolução do problema. Também exige conhecimento em derivadas de primeira e segunda ordem.

6.4 Questões de Fundamentos de Análise no Enade de 2017

Questão 23**:** Considerando que um estudante esteja testando um software para calcular o valor da integral $\int_{-2}^{1}\left(\frac{1}{x^2}-5\right)dx$, avalie as asserções a seguir e a relação proposta entre elas: I. O resultado $\int_{-2}^{1}\left(\frac{1}{x^2}-5\right)dx=-\frac{33}{2}$, apresentado pelo software, está correto porque II. a primitiva da função $f(x)=\frac{1}{x^2}-5$ é a função $F(x)=-\frac{1}{x}-5x$ e, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, conclui-se que $\int_{-2}^{1}\left(\frac{1}{x^2}-5\right)dx=\left(-\frac{1}{x}-5x\right)\Big|_{-2}^{1}=\left(-\frac{1}{1}-5.1\right)-\left(-\frac{1}{(-2)}-5(-2)\right)=-\frac{33}{2}$. A respeito dessas asserções, assinale a opção correta: a) As asserções I e II são proporções verdadeiras, e a II é uma justificativa correta da I. b) As asserções I e II são proposições verdadeiras, mas a II não é uma justificativa correta da I. c) A asserção I é uma proposição verdadeira, e a II é uma proposição falsa. d) A asserção I é uma proposição falsa, e a II é uma proposição verdadeira. e) As asserções I e II são proposições falsas.

Resolução: Avaliaremos cada uma das afirmações. I. Inicialmente, observando a integral dada, é possível perceber que ela pode ser separada em duas outras integrais, a saber: $\int_{-2}^{1}\left(\frac{1}{x^2}\right)dx$ e $\int_{-2}^{1}(-5)dx$. A integral $\int_{-2}^{1}(-5)dx$ pode ser resolvida por substituição simples, pois não apresenta pontos críticos, o que não ocorre com $\int_{-2}^{1}\left(\frac{1}{x^2}\right)dx$. Dessa forma, ater-nos-emos a esta última. $\int_{-2}^{1}\left(\frac{1}{x^2}\right)dx$, tem um ponto de descontinuidade. De fato, x não pode assumir o valor zero, entretanto, a integral vai de -2 a 1, passando por esse valor. Será necessário trabalhar, portanto, com integrais impróprias: $\int_{-2}^{1}\left(\frac{1}{x^2}\right)dx=\lim_{b\to 0-}\int_{-2}^{b}\left(\frac{1}{x^2}\right)dx+\lim_{b\to 0+}\int_{b}^{1}\left(\frac{1}{x^2}\right)dx$, $\lim_{b\to 0-}\int_{-2}^{b}\left(\frac{1}{x^2}\right)dx=\lim_{b\to 0-}\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_{-2}^{b}=\infty$, e $\lim_{b\to 0+}\int_{b}^{1}\left(\frac{1}{x^2}\right)dx=\lim_{b\to 0+}\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_{b}^{1}=\infty$. Desse modo, a integral $\int_{-2}^{1}\left(\frac{1}{x^2}-5\right)dx$ diverge. Portanto, a afirmação I é falsa. II. O Teorema Fundamental do Cálculo somente se aplica a funções contínuas e, portanto, não pode ser aplicado a essa situação, dado que existe uma descontinuidade em $x=0$. Portanto, a afirmação II é falsa. A alternativa correta é e).

Comentários**:** A questão apresentada enquadra-se no conteúdo previsto para a disciplina de Análise na USP sob o tópico "Demonstrações de alguns dos principais teoremas do Cálculo

Diferencial e Integral". A resolução exige que o estudante tenha conhecimentos acerca de descontinuidade e o Teorema Fundamental do Cálculo, além de técnicas de integração com ênfase para integrais impróprias.

7 DISCUSSÕES

Algumas observações podem ser feitas acerca das avaliações do ENADE aplicadas até 2017. Inicialmente, é possível notar que, em todas as avaliações já aplicadas, há questões relacionadas ao tema "Demonstrações de alguns dos principais teoremas do Cálculo Diferencial e Integral". Isso pode ser considerado razoável, uma vez que a análise busca, dentre outras questões, trazer uma visão mais rigorosa sobre os resultados utilizados no cálculo. Observa-se também que existe preocupação em avaliar as capacidades dos alunos no que se refere a sequências e séries numéricas, pois questões acerca desse assunto figuram em três das quatro avaliações aplicadas.

Comparativamente ao quadro geral, é possível verificar que a maior ênfase nas avaliações é dada aos conteúdos de Fundamentos de Matemática, Fundamentos de Geometria e Cálculo Diferencial e Integral.

Ademais, é visível a diminuição no número de questões referentes a Análise Matemática nas últimas duas avaliações do ENADE aplicadas às licenciaturas em matemática, bem como a abrangência curta dos conteúdos propostos para essa disciplina. Dessa forma, pode-se considerar que as questões relacionadas ao Cálculo Diferencial e Integral incluem conteúdos que, antigamente, eram abordados nas disciplinas de análise (OTERO-GARCIA, 2011). O que difere, entretanto, é a abordagem menos analítica focada apenas na resolução do problema que é dada no cálculo. Seria o caso de se considerar os argumentos contrários à utilização do excessivo rigor na licenciatura e assumir que a visão aplicada no Cálculo é suficiente?

Otero-Garcia (2011) levanta diversos questionamentos acerca dos motivos que levam a disciplina de Análise a estar presente nos cursos de Licenciatura, dentre eles, se ela não serviria apenas como um filtro para apontar estudantes com potencial para seguir no Bacharelado. Entretanto, há de se considerar que muitos matemáticos defendem a obrigatoriedade da Análise mesmo para a modalidade de Licenciatura. Tanto os matemáticos quanto os educadores matemáticos consultados nas pesquisas de Moreira, Cury e Vianna (2005) e Moreira e Vianna (2016) apresentaram argumentos em defesa da obrigatoriedade da disciplina de Análise na licenciatura, afirmando que a Análise proporciona:

I. entendimento da Matemática, uma vez que desenvolve a maturidade intelectual e a "Cultura Matemática" explicando os "porquês" e dando segurança ao licenciando, distanciando o aluno de fórmulas e regras desconexas ao proporcionar uma visão integrada da Matemática e a compreensão da disciplina como instrumento para aplicação;
II. um contato com a matemática "superior", conhecimento acerca de demonstrações, a organização do conhecimento matemático;
III. fundamentação e aprofundamento do conhecimento estudado na educação básica, permitindo ao licenciando conhecer de modo mais abrangente o conteúdo que lecionará e, assim, estar apto inclusive a decidir que nível de aprofundamento dará a cada conteúdo.

Essa não é, necessariamente, a posição dos autores dos trabalhos citados e, a título de um contraponto, Elias e Sachs (2018), em uma discussão mais geral sobre a formação matemática do professor, defendem que a Matemática a ser trabalhada na formação inicial deve estar conectada aos saberes que efetivamente são mobilizados na prática docente.

É interessante verificar, também, que os conteúdos abordados e que enquadramos na área de interesse de Análise, seguindo o programa de curso da USP, são abordados também em cursos de Cálculo. Sequências e séries numéricas, questões relativas a números reais e demonstrações e utilização de teoremas interessantes para o Cálculo Diferencial e Integral estão presentes em obras que tratam especificamente de Cálculo e não, necessariamente, de Análise. Estaríamos caminhando para uma "algoritmização no ENADE", do mesmo modo como os cursos de Licenciatura caminharam para a "algoritmização da Análise Matemática"?

Como vimos, a visão predominante[5] entre matemáticos e os educadores matemáticos é de que há a necessidade da obrigatoriedade do curso de Análise para a Licenciatura, respeitados os conteúdos e bibliografias indicados por cada um. A questão que se coloca, entretanto, vai no sentido de analisar se, em um aspecto quantitativo, as avaliações oficiais aplicadas à licenciatura em matemática concederiam papel de importância a essa disciplina. Como frequentemente acontece ao se trabalhar com pesquisa, a resposta parece relativa. Fatores como o número limitado de questões reunido em cada avaliação e o caráter interdisciplinar das questões apresentadas devem ser considerados.

É possível perceber que o foco maior é dado para os procedimentos resolutivos das questões. A matemática como ferramenta. Embora o conhecimento formal e rigoroso auxilie no entendimento dos problemas apresentados, não é obrigatório, na maioria das vezes, que o estudante conheça a demonstração dos teoremas. Além disso, pode-se considerar que saber demonstrar não é condição necessária ou suficiente para garantir seu entendimento. Afinal, até que ponto os professores permitem a experimentação, a tentativa, a construção das demonstrações pelos estudantes? Em que medida essas demonstrações são apresentadas como algo definitivo ou que precisa ser reproduzido nas provas?

Respondendo à questão colocada neste trabalho, pode-se dizer que o nível de exigência em relação aos conteúdos de Análise Matemática no ENADE é baixo, se considerarmos que é dado foco no uso das ferramentas matemáticas em lugar de seu entendimento. Entretanto, ao considerar que o entendimento mais profundo possibilita maior facilidade de interpretação e, por assim dizer, maior "intimidade" do discente com os temas abordados, a Análise ainda tem papel importante a desempenhar nas avaliações nacionais de cursos de graduação.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Chegando à parte conclusiva de nosso trabalho, achamos relevante destacar que este, assim como qualquer trabalho científico, não buscou responder em absoluto às questões sobre as quais nos debruçamos. Ao contrário, por vezes os questionamentos levantados são em número maior do que aqueles que são respondidos, o que não nos causa surpresa, visto que a filosofia nos mostra que "as perguntas [...] são mais essenciais que as respostas e cada resposta transforma-se em uma nova pergunta" (JASPERS, 1971).

---

[5] Evidentemente que não há um consenso, haja vista que, até mesmo a presença nas licenciaturas do Cálculo Diferencial e Integral, não é um consenso. Gereti (2018), por exemplo, defende que não deveria haver essa disciplina nos cursos de licenciatura em Matemática.

Expusemos dados por meio de uma análise prioritariamente bibliográfica e buscamos fazer sobre eles nossas reflexões. O processo de quantificação das questões presentes no ENADE para as licenciaturas em matemática trouxe valores que, consideramos, mostram uma diminuição na abordagem da Análise Matemática, mas também podem ser utilizados para a realização de outras medições. Vemos este trabalho como uma oportunidade para que outros se desenvolvam nesse sentido, sendo possível realizar novas tabulações específicas de outras disciplinas e, assim, tirar novas conclusões. Os resultados obtidos podem, ainda, servir para mostrar quais assuntos, dentre os elencados, figuram com maior frequência no ENADE no que diz respeito à Análise Matemática.

Concluímos ressaltando que compreendemos que a análise produzida neste texto só permite uma avaliação evidentemente parcial do que se considera como nível de exigência. Nesse sentido, semelhantemente como se faz em áreas de pesquisa como a Didática da Matemática, podemos dizer que a nossa análise é *uma análise à priori do nível de exigência*. Além disso, não negamos que nossa escolha pela disciplina de Introdução à Análise da USP como referência para a tabulação não deixa de ser, em certa medida, arbitrária, uma vez que não é o currículo da USP que baliza o instrumento legal que institui as diretrizes para as licenciaturas e seus conteúdos obrigatórios. Entretanto, tratou-se apenas de uma escolha possível diante do quadro em que não conseguimos falar de “Análise Matemática” e sim de análises matemáticas, conforme justificamos antes. Nossa análise não se esgota, porém caso outros referenciais fossem usados que não os nossos, teríamos outra pesquisa que não a nossa. Por fim, as nossas análises de questões contemplam o enquadramento numa grade estipulada, porém não apresentam dados estatísticos das distribuições de respostas, nem analisam os erros cometidos e as possíveis justificativas para tanto. Todavia, considerando que a finalidade do processo avaliativo é identificar aspectos que precisam ser aperfeiçoados ou modificados nas instituições, essa análise poderia contribuir para tanto.

Esperamos, em oportunidades futuras, dar a esta pesquisa novas roupagens e novos focos, minimizar as fragilidades que apontamos (e as que não detectamos por ora), abranger outros tópicos pertinentes à análise, ao uso do rigor, e, desse modo, contribuir para o incremento da produção na área do Ensino de Análise Matemática.

REFERÊNCIAS

ÁVILA, G. O Ensino do Cálculo e da Análise. **Revista Matemática Universitária**, São Paulo, n.33, p. 83-95, dezembro de 2002.

BARONI, R. L. S.; OTERO-GARCIA, S. C. **Aspectos da História da Análise Matemática de Cauchy a Lebesgue**. 1. ed. São Paulo: Cultura Acadêmica, 2014.

BATARCE, M. S. **Um Contexto Histórico para Análise Matemática para uma Educação Matemática**. 2003. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2003.

BRASIL. Conselho Nacional de Educação/ Câmara da Educação Superior (CNE/CES), Ministério da Educação. Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura. **Parecer CNE/CES 1.302/2001**. Relator: Francisco César de Sá Barreto. Aprovado em 06 de novembro de 2001.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), Diretoria de Estatística e Avaliação da Educação Superior (DEAES), Ministério da Educação. **Exame Nacional de Desempenho dos Estudantes (ENADE 2005)**: Área Matemática. CESPE. Brasília: 2005.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), Ministério da Educação. **Exame Nacional de Desempenho dos Estudantes (ENADE 2008)**: prova de Matemática. SINAES. Brasília: 2008.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), Ministério da Educação. **Exame Nacional de Desempenho dos Estudantes (ENADE 2011)**: matemática. SINAES. Brasília: 2011.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), Ministério da Educação. **Exame Nacional de Desempenho dos Estudantes (ENADE 2014)**: Matemática Licenciatura. SINAES. Brasília: 2014.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), Ministério da Educação. **Exame Nacional de Desempenho dos Estudantes (ENADE 2017)**: Matemática Licenciatura. SINAES. Brasília: 2017.

BRITO, M. R. F. de; LIMANA, A. O modelo de avaliação dinâmica e o desenvolvimento de competências: algumas considerações a respeito do ENADE. **Avaliação**, Campinas, p. 9-32, 2005.

BRITO, M. R. F. de. ENADE 2005: perfil, desempenho e razão da opção dos estudantes pelas licenciaturas. **Avaliação: Revista da Avaliação da Educação Superior**, v. 12, n. 3, 2007.

BRITO, M. R. F. de. O SINAES e o ENADE: da concepção à implantação. **Avaliação: Revista da Avaliação da Educação Superior**, v. 13, n. 3, 2008.

CARDONA, A. V.; AZAMBUJA, C. R. J.; SANTOS, M, B. dos. (Org.). **ENADE Comentado 2008**: Matemática. EDIPUCRS. Porto Alegre, 2011.

CASTILHOS, M. B. M.; MÜLLER, T. J. (Org.). **ENADE Comentado:** matemática 2011. EDIPUCRS. Porto Alegre, 2014.

CIANI, A. B.; RIBEIRO, D. M.; JÚNIOR, M. A. G. Formação de Professores de Matemática: um ponto de vista de egressos. In: ENCONTRO GAÚCHO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9., 2006, Caxias do Sul. **Anais...**. Caxias do Sul: Universidade de Caxias do Sul, 2006.

DALFOVO, Michael Samir; LANA, Rogério Adilson; SILVEIRA, Amélia. Métodos quantitativos e qualitativos: um resgate teórico. **Revista Interdisciplinar Científica Aplicada**, v. 2, n. 3, p. 1-13, 2008.

DIAS SOBRINHO, J. Avaliação e transformações da educação superior brasileira (1995-2009): do Provão ao SINAES. **Avaliação: Revista da Avaliação da Educação Superior**, Sorocaba: v. 15, n. 1, 2010, p. 195-224.

ELIAS, H; SACHS, L. Um ensaio teórico sobre saber mais matemática para ensinar. **Perspectivas da Educação Matemática**, v. 11, n. 27, 2018, p. 955-977.

GRATTAN-GUINESS, Ivor. **The Development of the Foundations of Mathematical Analysis from Euler to Riemann**. Massachusetts: The Colonial Press Inc., 1970. Copyright by The Massachussetts Institute of Technology.

GERETI, L. C. V. D**elineando uma pesquisa: legitimidades para a disciplina de Cálculo na formação do professor de matemática**. 2018. (164f.). Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2018.

GOMES, D. O. **A disciplina de análise segundo licenciados e professores de matemática da educação básica**. 2013. 266f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2013.

GOMES, D. O.; OTERO-GARCIA, S. C.; SILVA, L. D.; BARONI, R. L. S. Quatro ou Mais Pontos de Vista sobre o Ensino de Análise Matemática. **Bolema**, Rio Claro, v. 29, n. 53, p. 1242-1267, 2015.

JASPERS, Karl. **Introdução ao pensamento filosófico**. São Paulo: Cultrix, 1971.

MARINHOS, A. F.; NEVES, R.. **Enade 2005 – matemática licenciatura: questões resolvidas**. Fundação Educacional Unificada Campograndense (FEUC), Faculdades Integradas Campo-grandenses (FIC). Coordenação de Matemática: 2011.

MARCONI, Marina de Andrade; LAKATOS, Eva Maria. **Técnicas de pesquisa**. 5. ed. São Paulo: Atlas, 2002.

MARTINÊS, P. T. **O papel da disciplina de análise segundo professores e coordenadores**. 2012. 117f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2012.

MISSE, B. H. L.; LAMMOGLIA, B. Uma Perspectiva Histórica do Conceito de Continuidade Matemática. **Hipátia** – Revista Brasileira de História, Educação e Matemática, v.5, n.1, 2020.

MOREIRA, P. C.; CURY, H. N.; VIANNA, C. R. Por que análise real na licenciatura? **Zetetiké**, Campinas, n.23, p.11-42, 2005.

MOREIRA, P. C.; VIANNA, C. R. Por Que Análise Real na Licenciatura? Um Paralelo entre as Visões de Educadores Matemáticos e de Matemáticos. **Boletim de Educação Matemática**, v. 30, n. 55, 2016.

OTERO-GARCIA, S. C. **Uma trajetória da disciplina de análise e um estado do conhecimento sobre seu ensino**. 2011. 2 v. 529 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2011.

OTERO-GARCIA, S. C. Disciplinas de Análise na História de seu Ensino: uma trajetória no curso de licenciatura em matemática da UNESP de Rio Claro. **História da Ciência e Ensino**, v. 7, p. 1-44, 2013.

OTERO-GARCIA, S. C.; BARONI, R. L. S.; MARTINÊS, P. T. Uma trajetória da disciplina de Análise e o seu papel para a formação do professor de matemática. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 15, n. 3, p. 692-917, 2013.

OTERO-GARCIA, S. C.; CAMMAROTA, G. Releituras de um Estado do Conhecimento do Ensino de Análise a partir da Noção de Cognição Inventiva. **Alexandria**, v.6, n.1, p. 235-250, 2013.

OTERO-GARCIA, S. C. Disciplinas de Análise na História de seu Ensino: uma trajetória no curso de licenciatura em matemática da USP de São Paulo. **História da Ciência e Ensino**, v. 11, p. 56-90, 2015a.

OTERO-GARCIA, S. C. **Integrale, Longueur, Aire de Henri Lebesgue**. 2015. 374f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2015b.

PASQUINI, R. C. G.. **Um Tratamento para os Números Reais via Medição de Segmentos**: uma Proposta, uma Investigação. 2007. 209 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2007.

PINTO, M. M. F. Discutindo a Transição dos Cálculos para a Análise Real. In: LAUDARES, J. B.; LACHINI, J. (Orgs.). **A Prática Educativa sob o Olhar de Professores de Cálculo**. Belo Horizonte: Fumarc, 2001. p. 123-145.

POLIDORI, M. M.; MARINHO-ARAUJO, C. M.; BARREYRO, G. B. SINAES: perspectivas e desafios na avaliação da educação superior brasileira. **Ensaio**: aval. Pol. Públ. Educ., Rio de Janeiro, v.14, n.53, p. 425-436, 2006.

REIS, F. S. **A Tensão entre Rigor e Intuição no Ensino de Cálculo e Análise: a visão de professores-pesquisadores e autores de livros didáticos**. 2001. 302f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2001.

SILVA, L. R. R. **Prof. J. O. Monteiro de Camargo e o Ensino de Cálculo Diferencial e Integral e de Análise na Universidade de São Paulo**. 2006. 233f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2006.

SILVA, L. D. **Conhecimentos presentes na disciplina de análise nos cursos de licenciatura em Matemática no Brasil**. 2015. 236f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2015.

VERHINE, R. E.; DANTAS, L. M. V.; SOARES, J. F. Do Provão ao ENADE: uma análise comparativa dos exames nacionais utilizados no Ensino Superior Brasileiro. **Ensaio**: aval. Pol. Públ. Educ., Rio de Janeiro, v.14, n.52, p. 291-310, 2006.

Submetido em fevereiro de 2019.
Aprovado em novembro de 2019.