

O NÚMERO DE EULER: CONTRIBUIÇÕES E POSSIBILIDADES PARA A ESCOLARIDADE BÁSICA

EULER'S NUMBER: CONTRIBUTIONS AND POSSIBILITIES FOR BASIC SCHOOLING

POMMER, Wagner Marcelo¹

RESUMO

Na escolaridade básica, o momento de introdução dos números irracionais – um tema teórico – revela uma série de obstáculos de ordem epistemológica e didática, principalmente situados numa exposição oposta ao modo pragmático, tal como é realizado o desenvolvimento dos números racionais. Dentre os poucos números irracionais usualmente trabalhados no currículo de Matemática Elementar, o presente texto se propôs a apontar e discutir referenciais que permitam a abordagem significativa do número de Euler na escolaridade básica. O referencial teórico se situa no entendimento do processo de transposição didática, conforme Chevallard, Bosch e Gascón (2001), que permite compreender o conjunto das transformações que sofre certo saber científico, para se constituir em objeto de ensino compreensível ao aprendiz. Como metodologia recorreremos à epistemologia do conhecimento matemático dos números reais para levantar mecanismos de ordem didática com relação ao número de Euler. Nossas análises apontam para a epistemologia presente no par exato/aproximado, associado à ideia de infinito, que podem intercambiar com aspectos da problematização, do conhecimento como rede de significados (Machado, 2001) e o uso das fontes computacionais como portadores de um espaço de significação para a abordagem do número de Euler no ensino básico.

Palavras-chave: Números Irracionais. Número de Euler. Transposição Didática. Aproximação.

ABSTRACT

At basic education, the moment of introduction of irrational numbers - a theoretical theme - reveals a series of epistemological and didactic obstacles, mainly situated in an exposition opposite to the pragmatic way, so is the development of rational numbers is carried out. Among the few irrational numbers usually worked at the Elementary Mathematics curriculum, the present text proposed to point out and discuss references that allow a significant approach to Euler's number at basic schooling. The theoretical reference is situated in the understanding of the process of didactic transposition, according to Chevallard, Bosch and Gascón (2001), that allows to understand the set of transformations that suffers a certain scientific knowledge, in order to constitute an object of education comprehensible to the learner. As methodology, we used the epistemology of the real numbers' mathematical knowledge to raise mechanisms of didactic order in relation to the Euler's number. Our analyzes point to the epistemology present in the exact/approximate pair, associated with the idea of infinity, which can be interchanged with aspects of problematization, knowledge as a meaning network (Machado, 2001) and the use of computational sources as a space of significance for approaching Euler's number at elementary education.

Keywords: Irrational numbers. Euler's number. Didactic transposition. Approximation.

1 INTRODUÇÃO

Os números representam um campo de importância tanto em Matemática como nas várias ciências. Na Matemática Elementar, a grande maioria dos números reais é do tipo irracional. Porém, no ensino fundamental e médio, onde se predomina o contexto dos números reais, Leviathan (2004) destaca que os números inteiros e racionais são estudados cuidadosamente, por diversos anos, mas os números irracionais são tratados de modo reduzido e simplificado.

¹ Doutor em Educação pela Universidade de São Paulo (FEUSP), São Paulo, Brasil. Docente da Universidade Federal de São Paulo (UNIFESP-Diadema), Departamento de Ciências Exatas e da Terra (DCET), Brasil. Endereço eletrônico: wagner.pommer@unifesp.br.

O ensino de Matemática, ao privilegiar o estudo pormenorizado dos números inteiros e racionais, faz uma escolha que não revela a importância dos números irracionais:

Há muito se sabe, no entanto, que a maioria absoluta, a quase totalidade dos números reais existentes é constituída por números irracionais. Os outros, os racionais, constituem uma ínfima minoria, a despeito de o homem comum não ter contato senão com uns poucos números irracionais, ao longo da vida (MACHADO, 1990, p. 43-44).

Pesquisadores como Fischbein, Jehian e Cohen (1995), Soares, Ferreira e Moreira (1999), Rezende (2003), Zazkis e Sirotic (2004), Boff (2006), Sirotic e Zazkis (2007), Costa (2009), López (2010), Silva (2011) e Martins (2014) relatam a pouca ênfase dada ao ensino dos irracionais e também os escassos estudos e pesquisas acadêmicas focando explicitamente a conceituação de números irracionais, se considerarmos a inerente e complexa problemática da aprendizagem do referido assunto durante a escolaridade básica².

O relativo esquecimento dos números irracionais na Matemática Elementar tem, como principal motivo, que “[...] a matemática da escola básica é essencialmente concebida como um conjunto de aplicação de técnicas” (FISCHBEIN; JEHIAM; COHEN, 1995, p. 29, tradução nossa).

Para se fazer um trabalho de compreensão com relação ao entendimento dos diversos tipos de sistemas numéricos:

[...] os conceitos de números naturais, racionais, irracionais e reais deveriam ser explicitamente e sistematicamente ensinados. Mas não estamos nos referindo somente aos conhecimentos técnicos, definições e procedimentos operativos. Também consideramos que a resolução de problemas propicia aflorar o pensamento intuitivo, sem o qual a Matemática se torna um mero esqueleto (FISCHBEIN; JEHIAM; COHEN, 1995, p. 43, tradução nossa).

Há outra ressalva. Dentre a diversa tipologia dos números irracionais, os documentos oficiais como os Parâmetros Curriculares Nacionais, descritos em Brasil (1997; 1998) e a Proposta Curricular, conforme São Paulo (2008), observam que é necessário o estudo do número Pi (π), de grande importância científica e do trabalho com as raízes enésimas irracionais.

A pesquisa com livros didáticos do Ensino Médio em autores como Silva (2011) e Pommer (2012) destaca que predomina a exploração de exemplos prototípicos, como as raízes enésimas irracionais, especialmente se focando na $\sqrt{2}$ e também no número irracional π .

Nesse contexto, Rezende (2003) aponta que o universo numérico apresentado aos nossos estudantes pelos manuais escolares se restringe aos números racionais acrescido de um conjunto enumerável de pouquíssimos números irracionais notáveis.

Os documentos oficiais, como os PCN, Brasil (1997; 1998) e a Proposta Curricular, descrita em São Paulo (2008), há indicação para se trabalhar os números irracionais em relação com situações que envolvem medições, com o uso de estimativas e cálculos aproximados, de acordo com a situação ou necessidade e, ainda, em conexão com a geometria.

Frente a esses indicadores, o estudo do número de Euler pode se constituir em alternativa para se explorar os números irracionais. Silva (2011) e Pommer (2012) apontam que o número de Euler, em alguns dos livros analisados, é brevemente citado no tema dos logaritmos, como uma possível base, denominando-se tais logaritmos de naturais, sem nenhum trabalho

² Estamos a considerar a escolaridade básica inserida nos pressupostos da Lei de Diretrizes e Bases da Educação, lei n. 9394, descrita em Brasil (1996), onde o ensino regular é composto pela educação infantil, o ensino fundamental e o ensino médio. Os artigos 21 e 22 desta lei expõem que o objetivo da Educação Básica é assegurar a todos os brasileiros a formação comum indispensável para o exercício da cidadania e fornecer-lhes os meios para progredir no trabalho e em estudos posteriores.

conceitual e procedimental. Geralmente, a referida menção ocorre como um comentário para ilustrar que existem diferentes Sistemas de Logaritmos. Assim, o número de Euler é apresentado como um pequeno acréscimo de informação, sendo um número irracional aproximado por 2,718281, que pode ser obtido utilizando-se uma calculadora eletrônica. Mas por qual motivo esse logaritmo com base dada pelo número de Euler se denomina natural? E por que apresenta o valor aproximado de 2,718281? Isto não é explicado nos livros didáticos da escolaridade básica.

Constatando-se a falta de material de pesquisa para esclarecer e introduzir o que representa o número de Euler, de modo a fazer sentido aos alunos da escolaridade básica, fica em aberto uma possibilidade e uma necessidade: discutir esse assunto, que está no contexto da Matemática Elementar, aliando-os à realidade e aos contextos didáticos e educativos da escolaridade básica.

Em essência, os números irracionais e, em particular, o número de Euler, representam uma ideia matemática sofisticada, não trivial e pouco intuitiva, dificultando a abordagem desse assunto em sala de aula. Esta intrínseca característica teórica remete a uma necessária busca de recursos, de ordem didática e epistemológica, para discutir a problemática de introduzir esse campo numérico, de modo significativo, no ensino básico.

Nesse entorno, colocamos a questão de base que pretendemos explorar: quais os referenciais que poderiam nortear a apresentação e o desenvolvimento do número de Euler no ensino de Matemática Elementar?

2 OS REFERENCIAIS TEÓRICOS

Diversos autores como Lima (1983) e Iezzi (2006) apontam que a apresentação usual do número de Euler se inicia pela definição $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Nesse formato, após a exposição da definição, é costume seguir um trabalho de desenvolvimento fundamentado na exposição através da escrita algébrica, própria do saber matemático, com as devidas demonstrações e exposições de teoremas e axiomas. Complementa esta abordagem a citação de alguns exemplos prototípicos, em que os limites recaem em uma potência na qual a base é o número de Euler e o expoente é um número inteiro ou racional.

Esta apresentação usual de definir um objeto do saber, inicialmente, faz parte da vertente axiomática da Matemática. Mas será a exposição axiomática do saber matemático a que melhor potencializa a construção de conhecimentos dos alunos da escolaridade básica?

Para Copi (1973), no caso da apresentação do infinito, do número de Euler ou número de ouro, é usual o ensino recorrer ao símbolo estipulado ou sobre aquilo que o símbolo designa para introduzir o objeto matemático.

Vianna e Cury (2001) esclarecem que, ao invés de se optar por uma determinada definição matemática logo no início da apresentação dos temas, seria também importante observar se ela está bem construída ou se há outras possibilidades para elaborá-la. Essa observação reforça a hipótese “[...] que, didaticamente, não se deveria começar a trabalhar um conceito mediante a sua definição” (VIANNA; CURY, 2001, p. 32), principalmente se estivermos nos situando na escolaridade básica, onde a meta não é, necessariamente, preparar um futuro matemático.

Para entender os motivos das escolhas que o saber acaba se instaurando nas instituições onde circula – universidades, artigos, teses, livros, comunicações, dentre outros – passamos a discutir seu entorno.

Em particular, o conhecimento matemático envolvendo os números irracionais, adquirido através dos embates efetivados no percurso histórico e sistematizado pela comunidade de

matemáticos, sofreu uma transposição didática³ para ser ensinado em sala de aula. Além do conhecimento em si, para se efetivar esta tarefa são necessários referenciais que permitam orientar e fundamentar o modo como pode ocorrer tal tratamento.

Para entender os motivos que fazem esta abordagem dificultar o entendimento de alunos, na Matemática Elementar, inicialmente fazemos referência ao conceito de transposição didática, conforme exposto em Chevallard (1999).

Chevallard (1999) propõe a Teoria Antropológica do Didático, que estuda as relações que acontecem entre sujeito-instituição-saber (aluno-professor-saber), concebido por Brousseau (1986) como o Sistema Didático (ou Triângulo Didático).

O termo antropologia, segundo Ferreira (2003), significa o estudo científico com relação ao ser humano ou a designação a várias ciências cujas metas são a descrição e a análise do ser humano com base nas características da disciplina em questão. No caso de Chevallard (1999), a proposta é que a matemática estuda o homem frente ao saber matemático, no Sistema Didático. Assim, “[...] a Teoria Antropológica do Didático situa a atividade matemática, e em consequência o estudo da matemática dentro do conjunto de atividades humanas e de instituições sociais” (CHEVALLARD, 1999, p. 1).

No Triângulo Didático, o saber é um elemento mediador do processo de ensino e aprendizagem. Chevallard, Bosch e Gascón (2001) apontam que a interação no sistema de ensino se situa no sistema didático *stricto sensu*, que comporta três elementos – o aluno, o professor e o saber – partes constitutivas de uma relação dinâmica e complexa – a relação didática – que leva em consideração as interações entre professor e alunos (elementos humanos), mediadas pelo saber, elemento não humano que é fundamental para a forma como as relações no sistema didático se estabelecem.

Chevallard (1999) acrescenta que a obra matemática não surge gratuitamente, mas sim como resposta a uma questão ou necessidade, embora essas possam ser esquecidas com o passar dos anos. Porém, o autor coloca que a obra matemática está sempre aberta e inacabada, posto que evolui de acordo com as mudanças presentes no desenvolvimento e amadurecimento das sociedades.

O autor aponta que um saber que é produzido por uma determinada instituição, como, por exemplo, um grupo de pesquisadores, pode vir a ser utilizado em alguma outra instituição. Algumas vezes, o sistema de ensino incorpora um saber que, para ser viabilizado, deve sofrer algum tipo de transformação, de modo a se adaptar as condições do novo meio. Esse fenômeno é denominado de transposição didática.

Para Chevallard (1999), a transposição ocorre em três etapas. Na primeira etapa, o pesquisador deverá organizar, despersonalizar, ordenar os resultados e ligá-lo a outros saberes, para torná-los passíveis de serem transmitidos de modo generalizado. É o saber científico, que pode ser desenvolvido na academia e é encontrado em textos técnicos e científicos, mas esse saber não se encontra disponível para a maior parte das pessoas.

Para ser viabilizado no sistema de ensino, o saber sábio ou científico deve ser remodelado segundo parâmetros didáticos. Esta situação corresponde à segunda etapa de transposição, em que um objeto de saber pode se converter em objeto a ensinar (ou saber escolar). Para isto, uma instituição denominada Noosfera, da qual participam matemáticos e professores conceituados, autores de livros, especialistas em educação e políticos, se encarregam da análise e pertinência

³ Segundo Chevallard, Bosch e Gascón (2001), transposição didática é o conjunto das transformações que sofre um saber científico, para se constituir em objeto de ensino compreensível ao aprendiz.

da manipulação de um objeto de saber em objeto a ensinar: “Que uma obra seja ou não ensinada na escola é o resultado de decisões tomadas pelos homens ao longo da história” (CHEVALLARD; BOSCH; GASCÓN, 2001, p. 117).

Na terceira etapa da transposição didática temos o professor como ator fundamental, pois esse tem a função de traduzir o objeto a ensinar em objeto de ensino, por meio de uma prática educativa baseada em situações de ensino ou de aprendizagem, de modo a ser viável colocar o aluno em ação e, preferivelmente, possibilitar que o mesmo construa seu conhecimento matemático. Para Brousseau (1986), o trabalho do professor envolve uma simulação da descoberta do saber, um autêntico processo de autoria, que está diretamente ligado às relações do Sistema Didático *stricto sensu*: aluno-saber-professor.

Para Brousseau (1986), o trabalho do professor é então, inverso ao do pesquisador matemático, ou seja, deve buscar a (re)contextualização, personalizá-lo e sincretizá-lo com outros saberes. O professor deve estimular e situar o aluno em uma simulação do trabalho científico, de modo com que esse construa o conhecimento.

O professor pode buscar várias fontes de referência, para ampliar seu horizonte de possibilidade de transposição didática. Para isto, o trabalho do professor é o de ponderar qual o contexto dos conceitos e a evolução das ideias matemáticas, seja pela reflexão e análise das possibilidades oriundas da construção histórica do saber, para que assim possa reorganizá-la em uma prática educativa, porém sem perder a essência do objeto de conhecimento.

Nesse ponto, voltamos à nossa crítica em relação à apresentação usual do número de Euler, dada por $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Esse tipo de abordagem pertence à primeira etapa da transposição didática, pois é um tratamento realizado por matemáticos e cientistas para expor e comunicar um assunto de modo a se priorizar a consistência, a completude e a independência dos axiomas⁴.

Entretanto, quando estamos a pensar na exposição escolar do tema do número de Euler no ensino básico necessitamos reavaliar qual o tipo de apresentação poderia se adequar aos contextos e restrições desta faixa de ensino.

Um primeiro empecilho à utilização desta definição é que o conceito de limite e de infinito não fazem parte, explicitamente, do currículo da escola básica. Aliás, não são conceitos triviais e a escolha inicial em se apelar para a notação sem um maior aprofundamento do tema acrescenta mais um obstáculo. Esta escolha usual não contribui para a exposição de tal abordagem para alunos da escolaridade básica, faixa de ensino que não tem a intenção de formar matemáticos, mas essencialmente preparar o indivíduo para o exercício da cidadania e do trabalho (BRASIL, 1997; 1998).

Do modo como está registrada nos livros de referência do saber científico, a definição de Euler necessita da tradução do professor. Mas, ao invés de apresentar a definição no início da exposição, fica a questão: é possível realizar um trabalho didático para construir a ideia do conceito do número de Euler sem a utilização do registro formal algébrico de limite e de infinito?

3 O CONTEXTO HISTÓRICO DO SURGIMENTO DO NÚMERO DE EULER

A História da Matemática é um importante recurso para se verificar a gênese dos objetos matemáticos, situando o caminho que o saber foi concebido historicamente, o que pode contribuir para a transposição didática.

⁴ Em termos lógicos, o sistema axiomático é um tipo de teoria dedutiva, construída a partir de termos iniciais (postulados ou axiomas) e desenvolvida por meio de certas regras. Uma abordagem axiomática é consistente quando não existe contradição entre uma proposição e a respectiva negação. Uma teoria axiomática é completa se cada proposição puder ser deduzida a P (isto também vale para a negação de P).

Segundo Maor (2008), o número de Euler era conhecido, de modo implícito e não intencional, pelos antigos povos mesopotâmios e egípcios, por meio de situações de ordem prática, antes de qualquer estudo ou intenção teórica.

Depois de um grande lapso de tempo, Maor (2008) destaca que o número de Euler surge no estudo desenvolvido por Napier, de forma indireta, em 1618, com relação à descoberta dos logaritmos. Historicamente, esse tema emergiu da necessidade de uma ferramenta para agilizar cálculos na astronomia. Os logaritmos, “[...] que inicialmente eram instrumentos fundamentais para a simplificação de cálculos, hoje não se destinam precipuamente a isso, sendo imprescindíveis no estudo das grandezas que variam exponencialmente” (SÃO PAULO, 2008, p. 50).

Porém, a ideia básica de Napier é muito importante para se compreender a natureza do número de Euler. Napier queria escrever qualquer número como uma potência de algum número fixo, que posteriormente foi denominado de base. Desse modo, multiplicar/dividir dois números de grande ordem seria equivalente a somar/subtrair os expoentes das potências correspondentes.

De modo simplificado, considerando-se números de pequena ordem, poderíamos fazer uso de uma tabela para as potências de 2 (quadro 1). Se desejássemos multiplicar 64 por 512, sem o uso de calculadora eletrônica, trocamos 64 por 2^6 e 512 por 2^9 . Daí: $64 \cdot 512 = 2^6 \cdot 2^9 = 2^{15}$, pela propriedade de soma dos expoentes de uma potência qualquer. Pelo quadro 1, o resultado da potência 2^{15} é 32768.

Quadro 1: Potências inteiras de 2.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2^n	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192	16384	32768

Fonte: o autor

Atualmente não se faz mais assim, pois existem calculadoras ou computadores. Na época de Napier existiam tabelas compiladas para ajudar os cálculos dos astrônomos. Então, ele produziu uma tabela que completava os espaços entre as potências de expoente inteiro, de modo a ampliar o alcance e velocidade dos cálculos.

Por exemplo, para multiplicar 3 por 5, Napier recorria a uma tabela na qual se observava que o número 2,322 era o expoente da potência de base 2 que resultava 5, ou seja, $2^{2,322} = 5$. Do mesmo modo ele poderia obter $2^{1,585} = 3$. Assim, $3 \cdot 5 = 2^{1,585} \cdot 2^{2,322} = 2^{3,907}$, e, retornando à tabela, era possível ler diretamente que o resultado era 15.

Para completar os inúmeros espaços entre as potências de números inteiros, Napier fez uma escolha, utilizando o número $1 - 10^{-7} = 0.9999999$. Essa ideia de utilizar um fator próximo a 1 é a que permite entender a essência do número de Euler.

A compilação de tais tabelas exigiu muito tempo e dedicação, mas que, ao final, ajudou os cálculos computacionais dos astrônomos, os usuários da ciência daquele momento histórico. Na época de Napier, Briggs propôs melhorias no trabalho de Napier, apresentando uma aproximação numérica para o logaritmo de e na base dez, mas não fez referência ao significado desse resultado.

Em 1668, Mercator, no livro *Logarithmotechnia*, utilizou a nomenclatura logaritmo natural, porém o número de Euler ainda era uma referência implícita ao desenvolvimento dos logaritmos. Napier definiu os logaritmos através da expressão $N = 10^7 \cdot (1 - 10^{-7})^L$, sendo N um número real qualquer e L o respectivo logaritmo.

Ao se reescrever esta expressão como sendo $N = 10^7 \cdot [(1 - 10^{-7})^{10^7}]^{\frac{L}{10^7}}$, a expressão entre colchetes, dada por $[(1 - 10^{-7})^{10^7}]$, se aproxima da ideia do número de Euler, se

estendermos o valor de 10^7 como sendo um número real 'n' que pode ser aumentado indefinidamente, ou seja, levado ao infinito, na forma potencial. Desse modo, a expressão $[(1 - 10^{-7})^{10^7}]$ pode ser substituída por $[(1 - \frac{1}{n})^n]$, e levada ao infinito, acabaria surgindo a definição usual do inverso do número de Euler, ou seja, $e^{-1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - \frac{1}{n})^n$.

O'Connor e Robertson (2001) ressaltam que o trabalho com logaritmos, realizado por Napier e Briggs, quase reconheceu explicitamente o número de Euler, mas que não o fizeram. Entretanto, a primeira apresentação explícita do número de Euler foi realizada em problemas que envolviam investimentos com juros compostos.

Após meio século, o número de Euler é estudado pelo advento do Cálculo Diferencial e Integral, a partir do século XVII. Nesse momento, o número de Euler tornou-se importante e surgiu em diversas áreas do conhecimento, como a Biologia, a Economia, as Engenharias e a Física, dentre outros contextos do conhecimento, o que derivou a nomenclatura base natural dos logaritmos.

4 O NÚMERO DE EULER E O PAR EXATO/APROXIMADO

Há vários modos de se introduzir o número de Euler na escolaridade básica, sem partir da definição matemática, mas por meio da problematização e exposição do conhecimento em rede de significações (MACHADO, 2001).

Segundo Machado (2001), os significados são construídos através de um feixe de relações. Para compreender algo é necessário apreender a significação das relações desse objeto com outras coisas. Nessa perspectiva, conhecer é como:

[...] enredar, tecer significações, partilhar significados. Os significados, por sua vez, são construídos por meio de relações estabelecidas entre os objetos, as noções, os conceitos. Um significado é como um feixe de relações. O significado de algo é construído falando-se sobre o tema, estabelecendo conexões pertinentes, às vezes insuspeitadas, entre diversos temas. Os feixes de relações, por sua vez, articulam-se em uma grande teia de significações e o conhecimento é uma teia desse tipo (MACHADO, 2001, p. 4).

Para rastrear as relações envolvendo o número de Euler, recorremos a Maor (2008), autor que destaca indícios que os antigos babilônios haviam se aproximado do tema em aplicações financeiras. Independentemente da questão da veracidade histórica, podemos fazer uso didático de um problema encontrado numa tábua de argila dos antigos babilônios, datada de cerca de 1700 a.C.: "Quanto tempo levará para uma soma de dinheiro dobrar se for investida a uma taxa de 20 por cento de juros compostos anualmente?" (MAOR, 2008, p. 41).

Em linguagem matemática atual, ao final de cada ano, o capital inicial deverá ser multiplicado por um fator 1,2. Assim, em t anos, o capital será crescido de um fator $1,2^x$. Como o problema solicita em quanto tempo o capital dobra, isto significa resolver a equação exponencial $1,2^x = 2$.

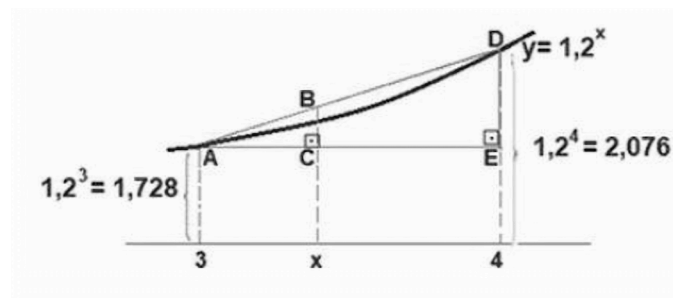
A resposta a essa questão recai em um número irracional. Na época dos antigos babilônios, tal problema foi resolvido por meio da aproximação de um número irracional para um número racional, um importante fundamento a ser trabalhado em diferentes contextos da escolaridade básica. Atualmente sabemos que a representação decimal dos números irracionais é infinita e não periódica, um conceito de natureza teórica. Porém, o único modo de se ter acesso a um número irracional no mundo real se faz por meio de aproximações sucessivas por meio de números racionais.

Assim, uma primeira aproximação pode ser feita por meio de um intervalo de números inteiros. Em três anos o capital terá sido acrescido de $1,2^3 = 1,728$, e em quatro anos tal valor passa a ser $1,2^4 = 2,076$. Assim, o tempo estimado se encontra no intervalo: $3 \text{ anos} < x < 4 \text{ anos}$.

Mas sempre podemos melhorar essa aproximação. Para Beskin (1987), uma aproximação é uma operação que remete à possibilidade de substituir um objeto por outro do mesmo tipo, mais simples e suficientemente próximo do primeiro. Para esse autor, se remetermos ao âmbito dos números irracionais, uma boa aproximação é aquela que o número racional escolhido possa ser sempre substituído por outro mais conveniente, de acordo com o desejo ou necessidade do contexto de dada realidade a ser estudada.

Nesse sentido, Maor (2008) coloca que o antigo povo babilônico utilizava um meio de aproximação: a interpolação linear. Esse processo consiste em estabelecer uma relação de proporcionalidade direta, de modo a substituir o arco da função (no caso a função exponencial $y = 1,2^x$) por um segmento de reta. Na Figura 1, observa-se um arco da função $y = 1,2^x$, em que para $x_1 = 3$ tem-se $y_1 = 1,2^3 \cong 1,728$ e para $x_2 = 4$ se obtém $y_2 = 1,2^4 \cong 2,076$.

Figura 1: O processo de interpolação linear



Fonte: o autor

Pela Figura 1, pode-se perceber que os triângulos retângulos ADE e ABC são semelhantes, o que permite a proporção direta:

$$\frac{BC}{AC} = \frac{DE}{AE} \Rightarrow \frac{1,2^x - 1,2^3}{x - 3} = \frac{1,2^4 - 1,2^3}{4 - 3}$$

Fazendo-se $1,2^x = 2$, tem-se:

$$\frac{2 - 1,728}{x - 3} = \frac{2,076 - 1,728}{4 - 3} \Leftrightarrow x - 3 = 0,7816 \text{ ano} \Leftrightarrow x \cong 3 \text{ anos } 9 \text{ meses } 11 \text{ dias}.$$

Esse valor encontrado pelo método babilônico da interpolação linear é bem próximo do valor exato, obtido pela técnica da logaritmização atual, que descrevemos a seguir:

$$1,2^x = 2 \Rightarrow \ln 1,2^x = \ln 2 \Rightarrow x \cdot \ln 1,2 = \ln 2 \Rightarrow x = \frac{\ln 2}{\ln 1,2} = 3,8018 \text{ anos} \cong 3 \text{ anos } 9 \text{ meses } 18 \text{ dias}.$$

O procedimento da interpolação linear representa uma estratégia inicial para a resolução do problema proposto, permitindo contrapor a aproximação e o uso da estimativa com o valor exato.

Outro aspecto importante da rede de significados que se pode formar remete ao cálculo envolvendo juros compostos, onde o valor futuro (VF) ou Montante (S) pode ser expresso em relação ao capital inicial (P) ou valor presente (VP), aplicado a uma taxa de juros compostos (i), durante uma unidade de tempo (t) é dada por: $VF = VP \cdot (1 + i)^t$.

Porém, a taxa de juros não é geralmente dada no mesmo período que o tempo t de aplicação. Para equalizar o intervalo de tempo, digamos em n períodos, encontramos um divisor

de ambos os valores, de modo que a taxa de juros fica: $\frac{i}{n}$ e o tempo de aplicação $n.t$. Assim, de modo mais geral: $VF = VP \cdot \left(1 + \frac{i}{n}\right)^{n.t}$.

A história da Matemática Financeira, exposta em Rosetti Jr. e Schimiguel (2011), aponta que era extremamente usual, em tempos remotos, ser cobrada uma taxa de juros anual de 100%. Maor (2008) destaca que o caso de um capital $P = 1$, aplicado a juros compostos de 100% ao ano, ao ser subdividido em intervalos cada vez maiores se aproxima de certo limite, de valor aproximadamente 2,718, ou, de modo mais exato, corresponde ao número de Euler. Assim, a origem do número e acabou se conectando a “[...] um problema mundano: o modo como o dinheiro aumenta com o passar do tempo” (MAOR, 2008, p. 13).

Por meio dessa associação de um caso particular da aplicação dos juros compostos a um contexto da Matemática Financeira, o número de Euler pode ser introduzido por meio da problematização envolvendo uma narrativa e o uso de planilhas eletrônicas, recursos didáticos essenciais que permitem estabelecer uma ponte essencial entre o aproximado e o exato.

Suponha que um banqueiro empreste 1 real a juros de 100% ao ano para certa pessoa. Ao final de um ano, a pessoa encontra o banqueiro, devolvendo $1 + 1 = 2$ reais, algo que esse último considera injusto. O banqueiro, então, divide o ano em dois semestres, mostrando que a pessoa deveria pagar, depois de seis meses, a quantia de $1 + 50\%$ de $1 = R\$ 1\frac{1}{2}$. Em mais um semestre, os juros se comporiam em: $1\frac{1}{2} + 50\%$ de $1\frac{1}{2} = R\$ 2,25$.

Porém, o banqueiro continua argumentando que, se o ano fosse subdividido em 4 trimestres, teríamos que a pessoa deveria, ao final do ano, o valor de 2,44 reais, conforme o Quadro 2.

Quadro 2: Cálculo do banqueiro supondo a correção trimestral dos juros

Período	Montante (Reais)
1º trimestre	$1 + 25\% = 1,25$.
2º trimestre	$1,25 + 25\% \text{ de } 1,25 = 1,25 \cdot 1,25 = 1,25^2 = 1,5625$
3º trimestre	$1,5625 + 25\% \text{ de } 1,5625 = 1,5625 \cdot 1,25 = 1,25^3 = 1,953125$
4º trimestre	$1,953125 + 25\% \text{ de } 1,953125 = 1,25^4 = 2,4414063$

Fonte: o autor

Continuando a especulação, o banqueiro propõe que a correção poderia ser mensal, o que remete ao Quadro 3.

Quadro 3: Cálculo do banqueiro para a aplicação de 1 real, a 100% ao ano, com correção mensal dos juros

Período	Montante (Reais)
1º mês	$1 + 8,33\% = 1,083$
2º mês	$1,083 + 8,33\% \text{ de } 1,083 = 1,083 \cdot 1,083 = 1,17289$
3º mês	$1,172889 + 8,33\% \text{ de } 1,172889 = 1,083^2 \cdot 1,083 = 1,083^3 = 1,27024$
⋮	⋮
12º mês	$1,083^{12} = 2,6034$

Fonte: o autor

Assim, a uma taxa de $100/360 = 0,278\%$ ao dia, o devedor teria que pagar $1,00278^{360}$, ou seja, 2,7166825 reais. Desse modo, a $\frac{100}{360 \cdot 24} = 0,011574\%$ a hora, teríamos que a pessoa, ao final de um ano, deveria pagar: $1,00011574^{360 \cdot 24} = 1,00011574^{8640} = 2,7181236$ reais. Se

considerarmos a taxa por minuto, teríamos $\frac{100}{60.24.60} = 0,00019290$ ao minuto, o que resulta numa dívida de: $1,000001929^{518400} = 2,7182618$ reais.

Podemos representar um gráfico cartesiano do valor obtido por cada aproximação e o número de subdivisões efetivadas no período de 1 ano (quadro 4).

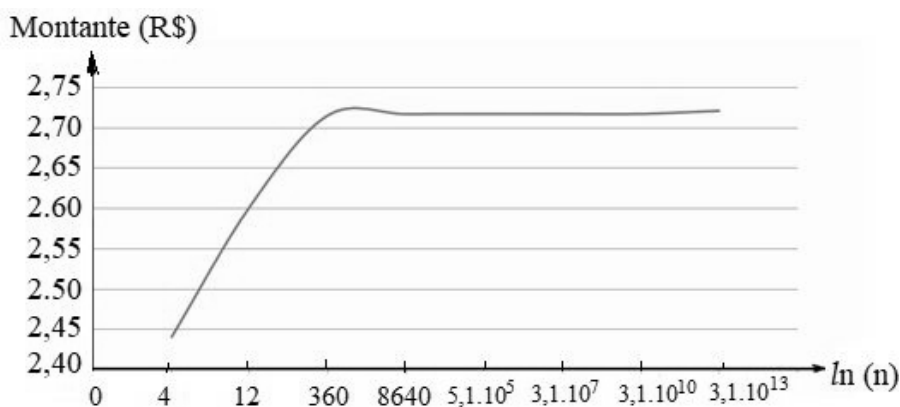
Quadro 4: Síntese dos cálculos do banqueiro em função da divisão em n períodos

Período	Montante (Reais)
4 trimestres	2,4414063
12 meses	2,6034
360 dias	2,7166825
8.640 horas	2,7181236
518.400 minutos	2,7182618
31.104 000 segundos	2,718281795
31.104.000.000 s (milésimos de segundo)	2,718288311
31.104.000.000.000 s (milionésimos de segundo)	2,722196066

Fonte: o autor

Plotando esses dados do quadro 4 no plano cartesiano, em uma planilha Excel (2007), obtivemos a Figura 2.

Figura 2: Representação cartesiana dos cálculos do banqueiro



Fonte: o autor

Na quadro 4 e na figura 2, observa-se que cada vez que a divisão de tempo aumenta (quando o tempo de composição dos juros tende a zero) o resultado da dívida parece convergir para certo número. Para verificar essa hipótese, podemos incrementar os intervalos, conforme o quadro 5.

Porém, verifica-se que para valores cada vez maiores a função começa a tender para o valor 1, que também pode ser visualizado na Figura 3.

Machado (1990) aponta o desconhecimento da gênese e significado dos símbolos que se apresentam no teclado das calculadoras, tal como o número π e o número de Euler, dentre outros. No nosso caso, podemos rapidamente ilustrar como acessar o valor aproximado do número de Euler, simplesmente por apertar as teclas ' e^x ' e '1', recurso que permite perceber que a tabela apresenta uma boa tendência até cerca da ordem de $1,0.10^{13}$, em notação científica. A partir desse valor os resultados tendem erroneamente para 1. Então fica a questão: por que os resultados da planilha eletrônica não sintonizam com o resultado direto da leitura imediata na calculadora eletrônica?

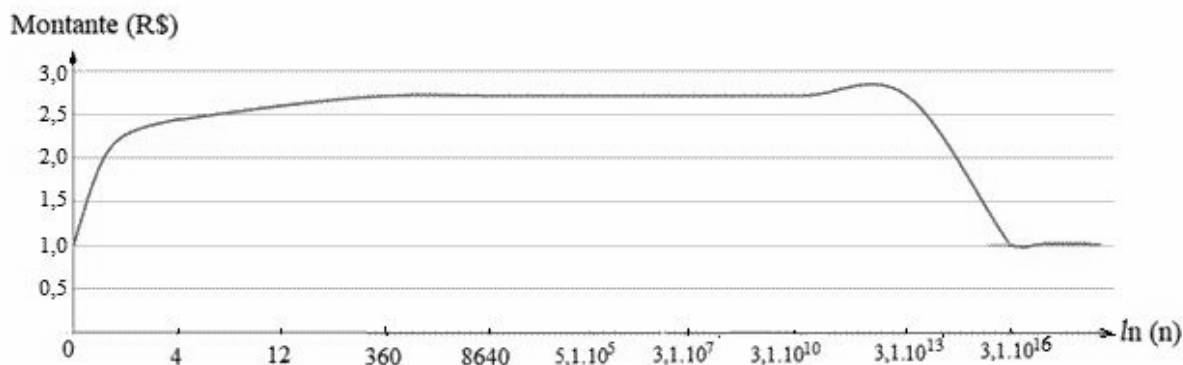
Quadro 5: Síntese dos cálculos do banqueiro em função da divisão em 'n' períodos

Período	Montante (Reais)
4 trimestres	2,4414063
12 meses	2,6034
360 dias	2,7166825
8.640 horas	2,7181236
518.400 minutos	2,7182618
31.104 000 segundos	2,718281795
31.104.000.000 s (milésimos de segundo)	2,718288311
31.104.000.000.000 s (milionésimos de segundo)	2,722196066
31.104.000.000.000.000 s (bilionésimos de segundo)	1
31.104.000.000.000.000.000 s (trilionésimos de segundo)	1

Fonte: o autor

A resposta a essa questão remete à essência das máquinas que apoiam os cálculos da planilha eletrônica. Augusto (2009) já alertava sobre o cuidado de conhecer as limitações de recursos eletrônicos como a calculadora e os computadores. Isto remete a um problema conceitual dos meios para se obter resultados aproximados na Matemática, o que situa a capacidade finita de caracteres no armazenamento das operações elementares das memórias desses recursos.

Figura 3: : Representação cartesiana dos cálculos do banqueiro no intervalo \mathbb{R}^+



Fonte: o autor

Nesse sentido, Machado (1990) e Bonomi (2008) relembram que a memória das máquinas é finita, correspondendo matematicamente a determinado número de casas decimais. Ainda, os autores ponderam que devem ser disponibilizadas situações onde surja esse problema da limitação do mostrador das calculadoras eletrônicas e da memória, de modo a ser possível repensar e introduzir aspectos conceituais na Matemática.

No presente caso da planilha eletrônica, podemos observar que esse meio realiza uma disponibilização de números na representação decimal, por aproximação, no âmbito dos números racionais, o que permite uma porta de acesso para continuar a investigação inicial da natureza dos números irracionais, um tema de natureza teórica.

5 O NÚMERO DE EULER E A EXPANSÃO BINOMIAL DA FUNÇÃO $y = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Para se proceder a uma investigação do problema da limitação das memórias de recursos eletrônicos, podemos propor a construção do gráfico da função $y = f(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Essa função decorre do 'Problema do banqueiro' anteriormente discutido, pois ao fazermos $P = 1$, $r = 1$ e $t = 1$, e trocando-se S por y em $S = P \cdot \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{n \cdot t}$ surge a expressão $y = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Vale apontar um destaque histórico relatado por O'Connor e Robertson (2001), que atribuem a Jacob Bernoulli, em 1683, a utilização da expressão $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, com n tendendo ao infinito. O referido matemático, ao se utilizar da expansão binomial, encontrou uma primeira aproximação do número de Euler no intervalo $[2; 3]$.

Um recurso disponível para se desenvolver teoricamente essa expressão é utilizar a expansão binomial, desenvolvida inicialmente por Newton e que constitui um tema da escolaridade básica. A expressão é dada por:

$$(a + b)^n = \binom{n}{0} a^n \cdot b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} \cdot b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} \cdot b^2 + \binom{n}{3} a^{n-3} \cdot b^3 + \dots + \binom{n}{n} a^0 \cdot b^n$$

Aplicando para o caso $a = 1$ e $b = \frac{1}{n}$, tem-se:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \binom{n}{0} 1^n \cdot \frac{1^0}{n} + \binom{n}{1} 1^{n-1} \cdot \frac{1^1}{n} + \binom{n}{2} 1^{n-2} \cdot \frac{1^2}{n} + \binom{n}{3} 1^{n-3} \cdot \frac{1^3}{n} + \dots + \binom{n}{n} 1^0 \cdot \frac{1^n}{n}$$

Resolvendo-se os números binomiais, tem-se:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 1 + n \cdot \binom{1}{n} + \frac{n \cdot (n-1)}{2!} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{3!} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{n}\right)^n \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \cdot \frac{n \cdot (n-1)}{n^2} + \frac{1}{3!} \cdot \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{n^3} + \dots + \left(\frac{1}{n}\right)^n \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} + \frac{1}{3!} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{(n-2)}{n} + \dots + \left(\frac{1}{n}\right)^n \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \cdot \frac{n-1}{n} + \frac{1}{3!} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{(n-2)}{n} + \dots + \left(\frac{1}{n}\right)^n \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n}\right)^n \end{aligned}$$

Assim, para n aumentando indefinidamente, ou seja, para n tendendo ao infinito:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} \cdot (1 - 0) + \frac{1}{3!} \cdot (1 - 0) \cdot (1 - 0) + \dots = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$$

O resultado da expansão binomial é uma expressão, uma definição do número de Euler, por meio de uma série infinita convergente⁵. O tema 'séries' é importante assunto a ser abordado na escolaridade básica dentro dos temas do currículo de matemática, porém raramente é apresentado.

Acreditamos que esse tipo de abordagem inicial, considerando um problema prático por meio da matemática financeira, permite a introdução do número de Euler de modo a superar o obstáculo didático de se considerar erroneamente o infinito como um número grande. Para um estudante da escolaridade básica a observação ingênua da:

⁵ Numa linguagem matemática mais voltada ao cálculo, quando n tende a infinito, $\frac{1}{n}$ tende a zero. Daí, podemos escrever: $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2,718281828 \dots$, tal qual se encontra nos livros de referência do saber sábio.

[...] expressão $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ para valores grandes de n deve parecer de fato intrigante. Suponha que se consideremos apenas a expressão dentro dos parênteses, $1 + \frac{1}{n}$ à medida que n aumenta, $\frac{1}{n}$ fica cada vez mais próximo de 0 e assim $1 + \frac{1}{n}$ fica cada vez mais próximo de 1, embora seja sempre maior do que 1. Assim, podemos ser tentados a concluir que para um valor grande de n 'realmente grande' a expressão $1 + \frac{1}{n}$ pode ser substituída por 1 (MAOR, 2008, p. 47).

Interessante que esse tipo de obstáculo didático apresenta similaridade com o que ocasionou o erro das memórias eletrônicas: ao se aumentar o número n , o processo de cálculo computacional acaba tornando a base exatamente igual a 1, um tipo de erro de truncamento que acaba no falso resultado da tabela 03 quando n tende ao infinito e a expressão $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ acaba resultando 1.

Para se verificar a convergência do número de Euler inicialmente determinamos um limite inferior:

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots,$$

o que implica $e > 2$.

Para determinar se existe um limite superior para o número de Euler, tem-se que:

$$\frac{1}{n!} = \frac{1}{1.2.3.4. \dots .n} = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \dots \cdot \frac{1}{n} < 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \dots$$

Na P.G. acima, de infinitas parcelas, primeiro termo $\frac{1}{2}$ e razão $\frac{1}{2}$, no intervalo para $-1 < q < 1$:

$$\text{Soma} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \dots = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1.$$

Daí:

$$e < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \dots = 1 + 1 + 1 = 3 \Rightarrow e < 3$$

Assim, o número de Euler é convergente e fica limitado pela desigualdade $2 < e < 3$.

Retomando a definição $e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$, observamos que essa expressão permite se determinar o número de Euler, um número irracional, a partir de infinitas parcelas compostas de números racionais, se constituindo em um imbricamento entre esses dois conjuntos.

Outra possibilidade de se trabalhar com a definição de número de Euler dada pela série convergente exposta acima se faz com relação à exploração do par exato e aproximado. Nesse sentido, consideremos os intervalos denominados encaixantes dados por $I_1 = [2; 3]$; $I_2 = \left[\frac{5}{2!}; \frac{6}{2!}\right]$; $I_3 = \left[\frac{16}{3!}; \frac{17}{3!}\right]$; $I_4 = \left[\frac{65}{4!}; \frac{66}{4!}\right]$, ou, de modo geral: o intervalo $I_n = [a_n; A_n]$. Cada termo desse intervalo é dado por $a_n = \frac{p}{q!}$, obtido por truncamento da série e , ainda, $A_n = \frac{p+1}{q!}$.

Assim, podemos obter os intervalos encaixantes. Inicialmente, fazemos $n = 1$, obtendo-se $a_1 = 1 + 1 = 2$, que representa o 1º truncamento da série, o que decorre $A_1 = 3$ e, assim, tem-se o primeiro intervalo $I_1 = [2; 3]$. Os outros intervalos encaixantes estão indicados no quadro 6.

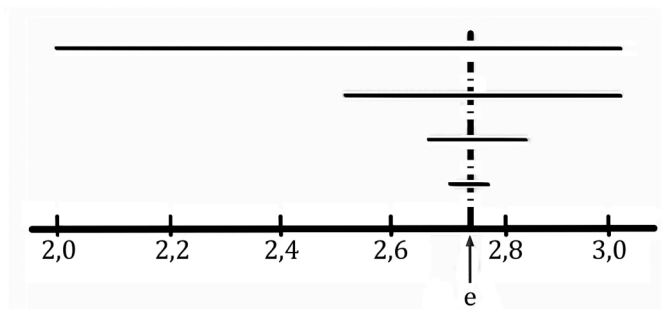
Tabela 4: Obtenção dos primeiros intervalos encaixantes

$n = 1$	$a_1 = 1 + 1 = 2$	$A_1 = 3$	$I_1 = [2; 3]$
$n = 2$	$a_2 = 1 + 1 + \frac{1}{2!} = \frac{2 + 2 + 1}{2!} = \frac{5}{2!}$	$A_2 = \frac{5 + 1}{2!} = \frac{6}{2!}$	$I_2 = \left[\frac{5}{2!}; \frac{6}{2!} \right]$
$n = 3$	$a_3 = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} = \frac{6 + 6 + 3 + 1}{3!} = \frac{16}{3!}$	$A_3 = \frac{16 + 1}{3!} = \frac{17}{3!}$	$I_3 = \left[\frac{16}{3!}; \frac{17}{3!} \right]$
$n = 4$	$a_4 = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} = \frac{65}{4!}$	$A_4 = \frac{66}{4!}$	$I_4 = \left[\frac{65}{4!}; \frac{66}{4!} \right]$

Fonte: o autor

Ainda o valor do número de Euler corresponde à intersecção dos infinitos intervalos I_n , ou seja: $\cap I_n = \{e\}$. Geometricamente, isto pode ser visualizado, na Figura 4.

Figura 4: Representação geométrica de e



Fonte: o autor

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Apresentamos várias possibilidades de abordagem do número de Euler, sem necessariamente partir de certa definição matemática, mas percorrendo um caminho para construir o conhecimento relativo a tal conceito, por meio de diversos recursos didáticos e trilhando o viés epistemológico da área da Matemática, principalmente situados na transposição didática. Nesse mote, o número de Euler, um assunto comum de se apresentar em cursos envolvendo o Cálculo Diferencial e Integral, pode ser desenvolvido na escolaridade básica, em um modo de transposição do objeto de saber convertido em objeto a ensinar.

A escolha do percurso de transposição recaiu na problematização inicial, pela escolha de uma situação comum da Matemática Financeira, uma área que está atualmente desenvolvendo pesquisas com mais ênfase na área do ensino. O cálculo de uma situação particular, juros a 100% ao ano, capitalizados em prazos cada vez menores, possibilitou o estabelecimento de uma percepção que o resultado parecia tender para algum número, fato já percebido e comentado em autores como Maor (2008), em meados do século XVI.

Nesse percurso, saímos de uma situação real para abstrair uma expressão, a função $y = \left(x + \frac{1}{n}\right)^n$, tendo como recurso a aproximação por meio de planilha eletrônica. Vale destacar nos PCN, Brasil (1998), a importância do uso de calculadoras e planilhas eletrônicas como instrumentos motivadores para a construção do conhecimento, pois permitem cálculos mais

rápidos, possibilitando modo mais eficiente em determinadas tarefas e investigações, abrindo um leque para a construção de significados de certos temas.

No presente caso do número de Euler, o cálculo por meio de planilhas auxiliou na compreensão do papel das aproximações, como uma ferramenta inicial para se observar o comportamento da função $y = \left(x + \frac{1}{n}\right)^n$, mas quando n cresce indefinidamente, as planilhas revelam um erro de truncamento, que poderia se constituir como um obstáculo didático.

Assim, a motivação da planilha eletrônica revelou as limitações do instrumento computacional, o que fez requerer um estudo mais teórico, envolvendo a expansão binomial. Seu desenvolvimento permitiu a obtenção de uma definição do número de Euler em termos de uma série infinita e convergente, que possibilitou determinar intervalos de convergência para situar visualmente a ideia do número de Euler como a intersecção dos infinitos intervalos encaixantes.

Pode-se provar a irracionalidade do número de Euler utilizando argumentos presentes no currículo da escolaridade básica: desigualdades numéricas envolvendo frações, fatorial; sequências; progressão geométrica e manipulações algébricas.

O uso da aproximação de um número irracional, por meio dos números racionais, permitiu a contraposição com o exato e com o modo de administrar as provas, as demonstrações e os recursos didáticos, favorecendo a compreensão do tema do número de Euler na escolaridade básica.

Em síntese, encaminhamos algumas possibilidades didáticas considerando a problematização, o uso de recursos computacionais, o conhecimento como rede, que compõem um amálgama para a administração da tensão inerente ao par aproximado/exato, de modo a compor um espaço de significação para a exploração do número de Euler.

REFERÊNCIAS

- AUGUSTO, A. **Esses engenheiros fantásticos e suas calculadoras maravilhosas**. 2007. Disponível em: <http://alvaroaugusto.blogspot.com/2007/02/esses-engenheiros-fantsticos-e-suas.html>. Acesso em: 18 jan. 2009.
- BESKIN, N. M. **Frações Contínuas**. Trad. Pedro Lima. Moscou: Editora Mir, 1987.
- BOFF, D. S. **A construção dos números reais na escola básica**. 2006, 253 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2006.
- BONOMI, M. C. **Os números irracionais e as calculadoras**. São Paulo: SEMA/USP, 2008.
- BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília: SEMT/MEC. 1997.
- BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: 3º e 4º ciclos do Ensino Fundamental: Matemática**. Brasília: MEC/SEF. 1998.
- BROUSSEAU, G. Fundamentos y Metodos de la Didáctica de las Matemáticas. **Recherches en Didactique de mathématiques**, v. 7, n. 2, p. 33-115, 1986.
- CHEVALLARD, Y. El Análisis de las prácticas docentes em la teoria antropológica de lo didáctico. **Recherches em Didactique des mathématiques**, v. 19, n. 2, p. 221-266, 1999.
- CHEVALLARD, Y.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. **Estudar Matemáticas: o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem**. Trad. Daisy Vaz de Moraes. Porto Alegre: ArtMed, 2001.
- COPI, I. M. **Introducción a la logica**. 13. ed. Buenos Aires: Eudeba, 1973.
- COSTA, L. V. C. **Números Reais no Ensino Fundamental: alguns obstáculos epistemológicos**. 2009, 377 p. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade de São Paulo, São Paulo, 2009.

FERREIRA, A. B. H. **Dicionário da língua portuguesa**. 3. ed. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 2003. CD-ROM

FISCHBEIN, E.; JEHIAM, R.; COHEN, D. The Concept of Irrational Numbers in High-School Students and Prospective Teachers. **Educational Studies in Mathematics**, v. 29, n. 1, p. 29-44., jul. 1995. Disponível em: www.jstor.org/stable/3482830. Acesso em: 12 dez. 2011.

IEZZI, G. et al. **Fundamentos da Matemática Elementar**. São Paulo: Atual, 2006.

LEVIATHAN, T. Introducing real numbers: when and how? In: INTERNATIONAL CONGRESS ON MATHEMATICAL EDUCATION, 10., 2004, Copenhagen. **Proceedings...** Copenhagen, 2004, p. 1-13.

LIMA, E. L. Conceitos e Controvérsias. **Revista do Professor de Matemática**. v. 2, p. 6-12, 1983.

LÓPEZ, F. V. El numero de Euler (e): sus aplicaciones y didáctica. **Reflexiones y Experiencias Innovadoras en el Aula**, n. 21, p. 1-11, jun. 2010.

MACHADO, N. J. A Universidade e a organização do conhecimento: a rede, o tácito, a dádiva. **Estudos Avançados**, São Paulo, v. 15, n. 42, p. 333-351, 2001.

MACHADO, N. J. **Matemática e Língua Materna**. São Paulo: Editora Cortez, 1990.

MAOR, E. **e: a história de um número**. 5. ed. Trad. Jorge Calife. Rio de Janeiro: Editora Record, 2008.

MARTINS, M. C. A versatilidade do número de Neper!. **Correio dos Açores**, p. 16, 24 abr. 2014.

O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. **The number e**. [S.l.: s.n.]. Setembro, 2001. Disponível em: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/e.html>. Acesso em: 19 out. 2009.

PAIS, L. C. Transposição Didática. In: MACHADO, S. D. A. (Org.). **Educação Matemática: uma introdução**. São Paulo: EDUC, 2002. p. 13-41.

POMMER, W. M. **A Construção de significados dos Números Irracionais no ensino básico**: uma proposta de abordagem envolvendo os eixos constituintes dos Números Reais. 2012. 235 p. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade de São Paulo, São Paulo, 2012.

REZENDE, W. M. **O ensino de Cálculo: dificuldades de natureza epistemológica**. 2003. 450 p. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003.

ROSETTI JR., R.; SCHIMIGUEL, J. História do dinheiro, matemática financeira e a educação matemática. **Revista Gestão Universitária**, v. 256, p. 1-3, 2011.

SÃO PAULO. **Proposta Curricular do Estado de São Paulo: Matemática/ Ensino Fundamental (ciclo II) e Médio**. São Paulo: SEE, 2008.

SILVA, A. L. V. **Números reais no Ensino Médio**: identificando e analisando imagens conceituais. 2011. 333 p. Tese (Doutorado em Educação) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2011.

SIROTIC, N.; ZAZKIS, R. Irrational numbers: the gap between formal and intuitive knowledge. **Educational Studies in Mathematics**, v. 65, p. 49-76, mai. 2007.

SOARES, E. F., FERREIRA, M. C. C.; MOREIRA, P. C. Números Reais: concepções dos Licenciandos e Formação Matemática na Licenciatura. **Zetetiké**, v. 7, n. 12, p. 95-117, jul./dez. 1999.

VIANNA, C. R.; CURY, H. N. Ângulos: uma "História" escolar. **Revista História & Educação Matemática**, v. 1, n. 1, p. 23-37, jan./jun., 2001.

ZAZKIS, R.; SIROTIC, N. Making sense of irrational numbers: focusing on representation. In: CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS, 28., 2004, Bergen. **Proceedings...** Bergen, 2004, v. 4 p. 497-504. Disponível em: http://www.emis.de/proceedings/PME28/RR/RR082_Zazkis.pdf. Acesso em: 08 ago. 2011.