INVARIANTES OPERATÓRIOS E NÍVEIS DE GENERALIDADE MANIFESTADOS POR ESTUDANTES DOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL[1]

OPERATORY INVARIANTS AND LEVELS OF GENERALITY MANIFESTED BY STUDENTS OF THE EARLY YEARS OF ELEMENTARY SCHOOL

BONI, Keila Tatiana[2]
SAVIOLI, Ângela Marta Pereira das Dores[3]

RESUMO

Considerando que o pensamento aritmético e o pensamento algébrico estão associados, este artigo apresenta uma análise de invariantes operatórios e níveis de generalidade manifestados por estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental em procedimentos de cálculos aritméticos ao se envolverem com uma tarefa considerada como potencialmente algébrica. A fundamentação teórica pautou-se em pressupostos da Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 1996; 1997; 2009; 2017) e de Níveis de Generalidade (RADFORD, 2006). As informações submetidas a procedimentos analíticos foram coletadas a partir da áudio-gravação da experiência, diários de campo e registros escritos dos estudantes participantes. A partir de manifestações dos estudantes em seus procedimentos de cálculos e linguagem natural oral, conclui-se que eles apresentaram indícios de invariantes operatórios do tipo teoremas-em-ação e se encontravam em um nível de transição entre generalidade aritmética e generalidade algébrica.

Palavras-chave: Educação Matemática. Pensamento Algébrico. Invariantes Operatórios. Generalização.

ABSTRACT

Considering that arithmetic has an algebraic character, this article presents an analysis of operative invariants and levels of generality manifested by students of the 5th grade of elementary school in arithmetic calculation procedures when they are involved with a task considered as potentially algebraic. The theoretical foundation was based on the assumptions of the Theory of Conceptual Fields (VERGNAUD, 1996; 1997; 2009; 2017) and Levels of Generality (RADFORD, 2006). The information submitted to analytical procedures was collected from the audio-recording of the experience, field diaries and written records of the participating students. From the students' statements in their calculation procedures and oral natural language, it was concluded that they presented indications of operative invariants of the theorem-in-action type and were at a level of transition between arithmetic generality and algebraic generality.

Keywords: Mathematics Education. Algebraic Thinking. Invariants Operative. Generalization.

1 INTRODUÇÃO

Este artigo relata resultados de uma pesquisa que teve por objetivo investigar invariantes operatórios e níveis de generalidade manifestados por estudantes do 5º ano do Ensino

[1] Este artigo é resultado da pesquisa de mestrado de um dos autores (BONI, 2014), que contou com o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) – Programa Observatório da Educação.
[2] Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL), Londrina, PR. Doutoranda em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL), Londrina, PR. Endereço eletrônico: keilaboni@hotmail.com.
[3] Doutora em Matemática pela Universidade de São Paulo (USP), São Paulo, SP. Docente do Programa em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina (UEL), Londrina, PR. Endereço eletrônico: angelamarta@uel.br.

Fundamental em seus procedimentos de cálculos aritméticos[4] ao se envolverem com uma tarefa considerada como potencialmente algébrica.

O contexto da investigação se deu em uma escola municipal de Apucarana – PR, que era participante do Projeto Educação Matemática de Professores que Ensinam Matemática, promovido pela Universidade Estadual de Londrina (UEL) e pelo Programa Observatório da Educação. Durante contato com professoras dessa escola que lecionam a disciplina de Matemática, perceberam-se algumas dúvidas e dificuldades em conduzirem seus alunos à aprendizagem nessa disciplina com compreensão de procedimentos de cálculos aritméticos.

Vários autores (BLANTON; KAPUT, 2005; KIERAN, 2004; PIMENTEL; VALE, 2009; entre outros) defendem a ideia de o pensamento algébrico começar a ser trabalhado mais cedo, já nos anos iniciais, integrado ao desenvolvimento do pensamento aritmético. Outros autores (MESTRE; OLIVEIRA, 2012; PIMENTEL; VALE, 2009; FUJII; STEPHENS, 2008; entre outros) defendem, ainda, que a aritmética possui um caráter potencialmente algébrico, uma vez que conceitos aritméticos podem ser generalizados.

Nessa perspectiva, foi proposta a seis estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental uma tarefa considerada como potencialmente algébrica, tendo em vista investigar nos procedimentos de cálculos aritméticos, por eles manifestados, indícios de invariantes operatórios do tipo teoremas-em-ação, por meio dos quais buscou-se inferir os níveis de generalidade em que tais estudantes se encontravam.

2 PRESSUPOSTOS TEÓRICOS: DA ARITMÉTICA À ÁLGEBRA

Com o objetivo de investigar invariantes operatórios e níveis de generalidades de estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental, nos baseamos, sobretudo, em três estudos: na Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 1996, 1997, 2009), no caráter potencialmente algébrico da aritmética, focando na aritmética generalizada (BLANTON; KAPUT, 2005), e nos Níveis de Generalidade (RADFORD, 2006).

Na Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud são evidenciados elementos que auxiliam na compreensão do processo de aprendizagem de conceitos. Essa teoria está pautada na construção conceitual, ou seja, aborda a respeito das rupturas e filiações na formação do conhecimento, não apenas matemático, mas de diversas áreas.

De acordo com Vergnaud (1996), a formação de um conceito depende de um conjunto de: a) situações que são referentes a um mesmo conceito; b) invariantes operatórios, que podem ser identificados e utilizados pelos estudantes ao se envolverem com situações, constituindo, assim, o significado do conceito; c) formas linguísticas e não linguísticas para representar simbolicamente um conceito, constituindo, assim, o significante do conceito.

Na investigação realizada, uma tarefa foi proposta a estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental, configurando o que Vergnaud (1996) chama de *situação*. Para o autor, uma situação é entendida como o contexto no qual o estudante está inserido e pode ser classificada em dois tipos: para a qual o estudante possui um repertório de esquemas eficientes para tratar uma situação familiar e para a qual ele não possui esquemas eficientes, sendo necessário que faça a mobilização de diversos esquemas ou, até mesmo, construa outros novos, sendo este

[4] Consideramos como procedimentos de cálculos aritméticos os processos e as maneiras pelas quais os estudantes buscam solucionar problemas matemáticos, recorrendo a conhecimentos aritméticos.

último tipo essencial para o chamado processo de conceitualização. Entende-se *esquema* como a "organização invariante do comportamento para uma determinada classe de situação" (VERGNAUD, 1997, p. 12). De acordo com esse autor, são nos esquemas que devem ser pesquisados os elementos cognitivos que fazem com que a ação do sujeito seja operatória.

Os esquemas são constituídos por conhecimentos, denominados por Vergnaud (1996) como *conhecimentos-em-ação* ou *invariantes operatórios*, sendo estes constituídos por *conceitos-em-ação* e *teoremas-em-ação*. O teorema-em-ação corresponde a uma proposição que é tida como verdadeira sobre o real, enquanto que o conceito-em-ação corresponde a um objeto, um predicado, ou ainda, a uma categoria de pensamento que é tida como relevante ou pertinente para determinada situação.

Para diferenciar teorema-em-ação de conceito-em-ação, consideremos a expressão algébrica $(\mathrm{x}+\mathrm{y})^2=\mathrm{x}^2+2\mathrm{xy}+\mathrm{y}^2$, utilizada por um estudante dos anos finais do Ensino Fundamental em suas resoluções. Tal expressão, manifestada nas ações do estudante, durante tratamento de diversas situações de uma mesma classe, se constitui como uma proposição ou um teorema-em-ação tido como verdadeiro para quaisquer valores de x e de y pertencentes ao conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$). Nesse caso, os sinais das operações e as variáveis x e y, de maneira isolada, são conceitos que não podem ser considerados como verdadeiros ou falsos, mas apenas como pertinentes ou não para a situação.

Na Teoria dos Campos Conceituais defende-se que há um "relacionamento entre o conhecimento implícito presente no raciocínio aritmético das crianças e o conhecimento explícito, requerido para se entender o uso da álgebra" (COMÉRIO, 2007, p. 38). Nesse direcionamento, inferimos que, de certa forma, Vergnaud chegou a delinear algo de inerente entre o movimento da aritmética para a álgebra.

É a respeito da identificação de regularidades e relações em objetos matemáticos que encontramos estudos que defendem o caráter potencialmente algébrico da aritmética e, consequentemente, a abordagem do pensamento algébrico mais cedo, já nos anos iniciais do Ensino Fundamental, integrado ao ensino de conceitos aritméticos.

Tal abordagem nos anos iniciais compreende

> [...] o desenvolvimento de formas de pensar no âmbito das atividades para as quais a linguagem simbólica pode ser usada como uma ferramenta, mas que não são exclusivas para álgebra e com as quais podem se envolver sem usar qualquer linguagem simbólica, tais como analisar relações entre quantidades, observar a estrutura, estudar variações, generalizar, resolver problemas, modelar, justificar, provar e prever (KIERAN, 2004, p. 149, tradução nossa).

A partir do que expõe Kieran, as autoras Pimentel & Vale (2009) e Mestre & Oliveira (2012) defendem que a base do desenvolvimento do pensamento algébrico é a capacidade de generalização, o que pode começar a ser desenvolvida a partir da aritmética. Em concordância com essa defesa, Fujii e Stephens (2008) abordam sobre o *pensamento quase-variável,* que diz respeito a expressões numéricas generalizáveis, ou seja, que revelam a relação matemática subjacente que é satisfeita independentemente dos números considerados, permitindo a evidenciação e discussão da generalização algébrica antes do conhecimento da representação simbólica. Nesses tipos de expressões, é possível explorar os padrões de variação que podem ser representados por expressões algébricas como, por exemplo, a expressão numérica $10-15+15=10$ que, mais tarde, poderá ser representada de maneira geral como $\mathrm{x}-\mathrm{y}+\mathrm{y}=\mathrm{x}$.

Nesse mesmo direcionamento, Blanton e Kaput (2005) apresentam a *aritmética generalizada* como aquela que permite aos estudantes evidenciarem relações, regularidades e propriedades nas operações e nos sistemas numéricos de objetos particulares, bem como perceberem que tais características são invariantes, sendo possível generalizar essa apreensão a outros objetos matemáticos.

Contudo, Radford (2006), ainda que concorde com a ideia de que há algo inerentemente aritmético na álgebra, assim como existe algo inerentemente algébrico na aritmética, adverte que nem toda generalização pode ser classificada como aritmética ou algébrica, assim como existem níveis diferentes de generalização. No quadro 1 apresentamos os níveis de generalidade elencados por Radford (2006), os quais podem ser atingidos e manifestados por estudantes durante envolvimento com situações matemáticas.

Quadro 1: Níveis de generalidade

Indução Ingênua	Generalização			
Adivinhação (tentativa e erro)	Aritmética	Algébrica		
		Factual	Contextual	Simbólica

Fonte: Radford (2006, p. 15, tradução nossa)

A *indução ingênua* corresponde a estratégias de tentativa e erro e de adivinhação, portanto não é considerada como um tipo de generalização que pode acarretar no desenvolvimento do pensamento algébrico, pois tais estratégias não são pautadas na percepção de características comuns em objetos matemáticos.

A *generalização aritmética* é diferente da algébrica porque nesta é preciso que algo comum seja notado em objetos matemáticos, que esse algo comum seja generalizado e que essa generalização seja cristalizada em um esquema. Contudo, essa última característica não é evidenciada na *generalização aritmética.*

Quanto à *generalização algébrica*, esta é dividida em *factual, contextual e simbólica*, que correspondem a diferentes níveis de complexidade que são atingidos conforme ocorrências de contrações semióticas[5]. Na *factual*, os mecanismos de percepção de regularidades envolvem coordenação rítmica de recursos semióticos e a indeterminação permanece implícita. Na *contextual*, há a exclusão de vários meios semióticos, que são compensados por uma concentração de significados em um número reduzido de símbolos, tornando a indeterminação explícita, em geral, por meio de palavras. Já na *simbólica*, a indeterminação é explicitada por meio de símbolos (linguagem algébrica).

3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

O contexto da investigação foi uma escola municipal de Apucarana – PR, que era integrante de um projeto do Programa Observatório da Educação.

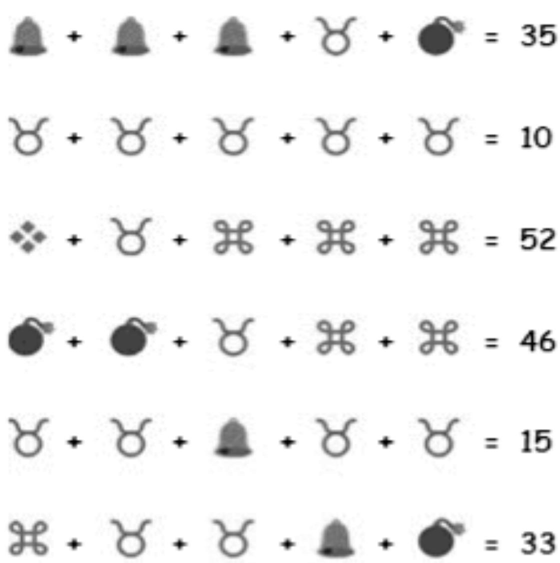
[5] Segundo Radford (2006), o processo de produção de sentido dos estudantes ao se envolverem com tarefas matemáticas ocorre por meio de diversificados meios semióticos de objetivação (símbolos, gestos, gráficos, fórmulas, tabelas, desenhos, etc.), que vão sendo contraídos à medida que níveis mais profundos de generalidade vão sendo atingidos, uma vez que os significados vão sendo concentrados. É essa minimização de meios semióticos que Radford (2006) chama de *contração semiótica*.

Tendo em vista constituir os participantes de pesquisa, foi solicitado para a professora de uma turma de 5º ano, que selecionasse seis estudantes, os quais foram organizados em díades. O critério adotado para selecioná-los, segundo a professora, foi a facilidade para se expressarem oralmente. A fim de garantir o anonimato dos seis estudantes que participaram da pesquisa[6], eles serão referidos como E1, E2, ..., E6, e as díades formadas por D1, D2 e D3. Destacamos a opção em organizar os estudantes em díades ao considerarmos algumas das ideias vygotskianas que embasaram a Teoria dos Campos Conceituais, que são elas a relevância atribuída à linguagem natural e à interação social para o processo de aprendizagem.

Aos estudantes foi aplicado um total de sete tarefas, porém, neste texto, apresentaremos apenas uma delas. Os motivos que nos levaram a optar pela apresentação dessa única tarefa foram: i) o espaço de que dispomos para apresentação da pesquisa realizada, sendo necessário delimitar essa apresentação; ii) porque consideramos que a apresentação dessa única tarefa seria o suficiente para elucidarmos como atendemos aos objetivos pretendidos para a pesquisa.

A tarefa (Figura 1) aplicada aos estudantes, e que selecionamos para apresentação no presente trabalho, encontra-se em um livro didático do 8º ano (ANDRINI; VASCONCELLOS, 2012), em um capítulo que aborda cálculo algébrico. Na tarefa proposta há seis equações. No 8º ano, os estudantes, em geral, já tiveram contato com símbolos alfanuméricos para representar as incógnitas, ao contrário dos estudantes do 5º ano, etapa escolar em que se encontram os participantes da pesquisa.

Figura 1: Tarefa proposta às díades. Comando da questão: quanto vale cada um dos desenhos dessas somas? Explique como pensou.



Fonte: Andrini e Vasconcellos (2012, p. 73)

Tendo proposto a tarefa para cada díade de estudantes, estes tiveram que conversar entre si buscando compreendê-la, bem como delimitar estratégias de resolução. Durante todo esse processo, que durou 50 minutos, suas conversas foram registradas pelo gravador de voz e, quando conversavam muito baixo entre si ou apresentavam resolução de maneira escrita sem mencionar em

[6] As abordagens e os instrumentos metodológicos utilizados obedeceram aos procedimentos éticos estabelecidos para a pesquisa científica em Ciências Humanas.

linguagem natural e oral como a obtiveram, a testemunha que acompanhava a díade questionava-os e anotava informações que julgava pertinentes para a pesquisa em seu diário de campo.

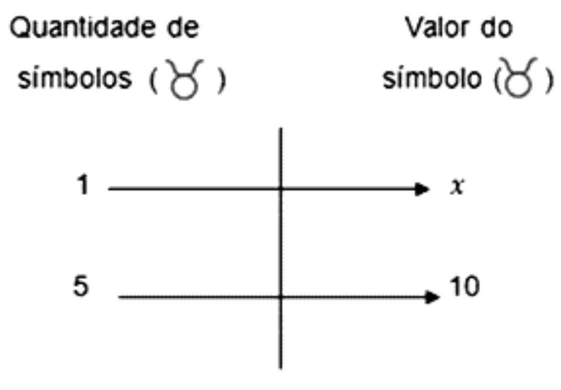
As testemunhas eram dois estudantes de mestrado, participantes do projeto do Programa Observatório da Educação, que auxiliaram os pesquisadores no momento de coleta de informações. A presença das testemunhas se fez necessária para conduzir os estudantes a explicitarem oralmente os procedimentos que adotaram para solucionar a tarefa proposta. Vale ressaltar que em nenhum momento as tarefas foram explicadas para os estudantes, o que caracterizaria uma intervenção direta das testemunhas.

Nesse sentido, consideramos a tarefa proposta com o que Vergnaud denomina de *situação*, pois, para solucioná-la, o estudante “não dispõe de todas as competências necessárias, o que o obriga a um tempo de reflexão, a hesitações, a tentativas abortadas, conduzindo-o quer ao êxito, quer ao fracasso” (VERGNAUD, 1996, p. 156).

4 ANÁLISE DOS DADOS

As díades D1 e D3, compostas pelos estudantes E1 e E2 e pelos estudantes E5 e E6, respectivamente, manifestaram estratégias de resolução semelhantes: iniciaram pela segunda equação da tarefa, justificando que nesta havia apenas figuras iguais. Para resolver essa equação, cada díade operou no campo multiplicativo, utilizando a ideia de razão (do princípio multiplicativo), a partir de um esquema que representa a correspondência entre duas espécies de quantidades. Na figura 2 apresentamos, como exemplo, o esquema da díade D1, que foi acompanhado, durante a realização da tarefa proposta, pela testemunha T1.

Figura 2: Esquema da díade D1 para a segunda equação da tarefa. Transcrição de gravações de voz (linguagem natural de D1): E1: O segundo é mais fácil, então a gente vai fazer primeiro. T1: Por que é mais fácil? E1: Porque todos os desenhos são os mesmos. T1: E o que vocês vão fazer? E1: 10 vezes… é 10 dividido por 5.



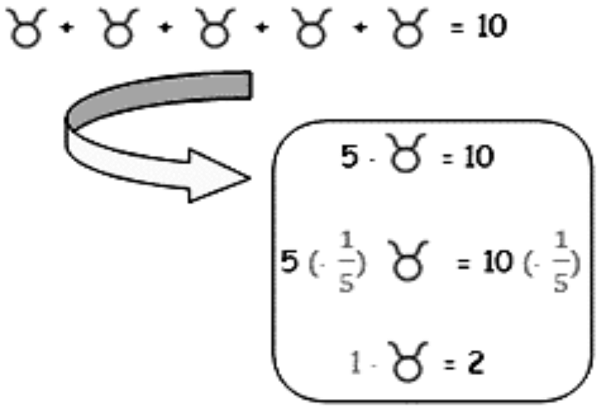
Fonte: autoras

Para construir os possíveis esquemas de resolução para cada díade e para cada equação da tarefa, buscamos compreender seus tratamentos, ou seja, os procedimentos de cálculos aritméticos manifestados pelos estudantes. Por meio do esboço desses esquemas e tratamentos é que inferimos invariantes operatórios, do tipo *teoremas-em-ação*.

Tal inferência fundamenta-se em características de aritmética generalizada (BLANTON; KAPUT, 2005), que correspondem: à exploração de propriedades das operações com números inteiros (comutatividade, associatividade, elemento neutro, entre outros); à exploração do sinal de igualdade como expressão de uma relação entre quantidades; ao tratamento algébrico de número, utilizando-o como incógnita e considerando que símbolos iguais correspondem a valores iguais, mesmo em expressões diferentes; e à resolução de sentenças com números desconhecidos em equações, envolvendo mais de uma incógnita ou a mesma incógnita repetida algumas vezes.

A título de exemplo, para a segunda equação o tratamento que esboçamos, de acordo com a interpretação que realizamos a partir de manifestações das díades D1 e D3, é apresentado na Figura 3.

Figura 3: Tratamento das díades D1 e D3 para a segunda equação da tarefa



Fonte: autoras

Por meio desse esboço pudemos inferir as seguintes características: a) o reconhecimento da adição reiterada, ou seja, soma de n parcelas iguais, como uma multiplicação do fator que se repete n vezes; b) a utilização do inverso multiplicativo de 5; e c) o elemento neutro da multiplicação.

A primeira característica está relacionada ao reconhecimento de que a soma de cinco símbolos iguais equivale a uma multiplicação de cinco vezes esse símbolo que se repete. A segunda foi inferida a partir da manifestação dos estudantes sobre a relação existente entre os cinco símbolos iguais com o valor dez, tendo manifestado que tal relação pode ser descoberta por meio de uma divisão. A terceira característica está atrelada à explicitação da relação evidenciada na segunda unidade de análise: um único símbolo equivale a dois, ou seja, a relação é que dez representa o dobro de cinco.

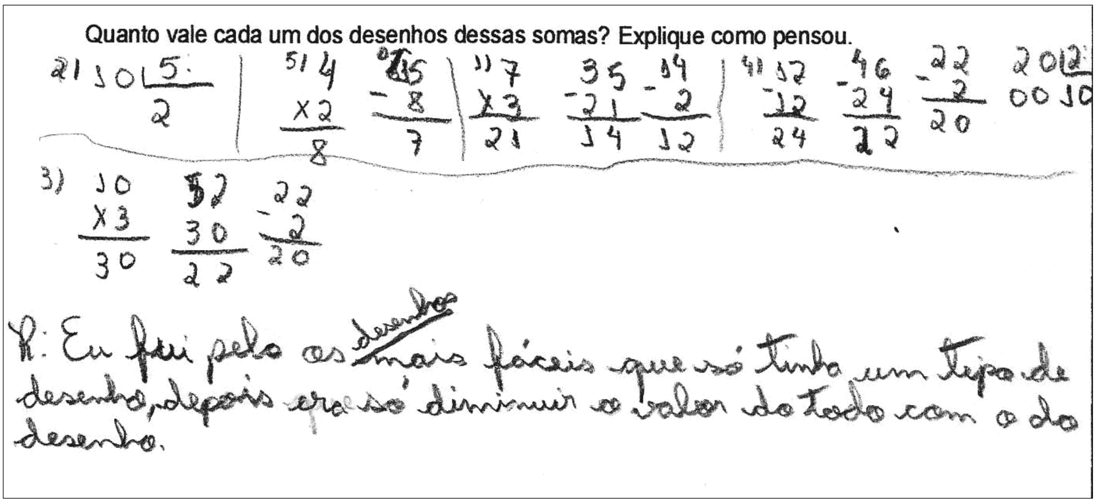
Vale ressaltar que em nenhum momento afirma-se que as características que inferidas são manifestadas pelos estudantes de maneira consciente. As interpretações e inferências são pautadas em analogias entre a maneira como os estudantes lidaram com a tarefa e com a maneira que esta poderia ter sido resolvida por uma pessoa que tem conhecimento a respeito de propriedades dos números e operações e de equações do primeiro grau.

Assim, evidencia-se que para determinar o valor do símbolo ♉, a díade D1 evocou um esquema cujo tratamento é análogo ao de uma equação do primeiro grau do tipo ax=b, porém, sem expressar simbolicamente.

Vale destacar que embora as díades D1 e D3 tenham apresentado oralmente tratamento para a segunda equação, em seguida ambas apresentaram registros com cálculos aritméticos (figura 4).

As manifestações em linguagem natural oral e os registros escritos apresentados pelos estudantes das díades D1 e D3, não apenas para essa segunda equação da tarefa, mas para todas as demais, evidencia o caráter potencialmente algébrico da aritmética o qual dificilmente poderia ter sido entendido apenas pelo registro escrito, mas que pôde ser explicitado por meio da linguagem natural oral, o que nos confirma a essencialidade desta representação semiótica[7] para a exteriorização de indícios da matemática dos estudantes.

Figura 4: Registro do estudante E1



Fonte: autoras

Quanto à resolução das demais equações, tanto D1 quanto D3 operaram sobre aquelas que, sucessivamente, continham menor quantidade de símbolos desconhecidos. Dessa forma, a ordem das equações em que operaram foi: a segunda, a quinta, a primeira, a quarta e a terceira. A sexta expressão não foi utilizada pela díade D1, uma vez que já haviam determinado o valor de todos os símbolos por meio das equações resolvidas. A díade D3, ao invés de utilizar a quarta expressão, utilizou a sexta, tendo sido a quarta expressão resolvida apenas para confirmar os resultados obtidos.

Para exemplificar, na figura 5 apresentamos o tratamento da díade D1 que esboçamos para a quarta expressão da tarefa proposta.

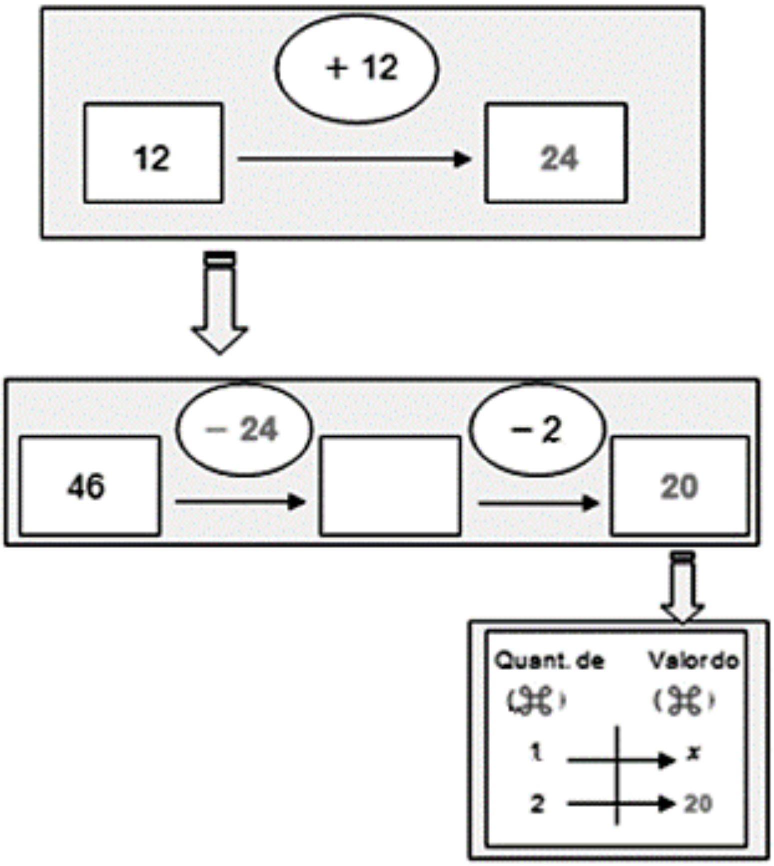
De acordo com o esboço apresentado, que representa o tratamento da díade D1 ao operarem sobre a quarta expressão (conforme ilustra a figura 5), tendo em vista obter o valor do símbolo ⌘, a díade D1 fez uso de um processo misto, envolvendo relações aditivas e multiplicativas. A partir do que manifestaram oralmente, infere-se a formação sucessiva de três esquemas, os quais são destacados dentro de um quadro preenchido na cor cinza e com flechas preenchidas dessa mesma cor que indicam a ordem em que foram desenvolvidos esses esquemas. Dentro de cada um desses esquemas, evidenciamos valores em negrito sublinhados, pois são valores que correspondem a resultados naturais de cálculos de números que se tornaram valores que constituíram *cálculos relacionais*[8] (VERGNAUD, 2009) em outro esquema.

No primeiro esquema a díade D1 operou no campo aditivo, transformando uma medida inicial em uma final (cálculo numérico), sendo esta correspondente ao valor das duas bombinhas. Na sequência, o resultado da soma das duas bombinhas (24) tornou-se um número relacional (-24) que foi subtraído do resultado total apresentado na quarta equação (46). Do resultado obtido, subtraiu-se o valor de um símbolo ♉ (−2).

---

[7] Representações semióticas “são produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representação, os quais têm suas dificuldades próprias de significado e de funcionamento” (DUVAL, 2012, p. 269).
[8] Segundo Vergnaud (2009), os cálculos relacionais são aqueles que envolvem operações de pensamento necessárias para compreender os relacionamentos envolvidos na operação.

Figura 5: Esquema da díade D1 para a quarta equação da tarefa. Transcrições de gravações de voz (linguagem natural de D1): E1: E agora vamos fazer… E2: A última. E1: Não, a linha quatro. T1: Dá para fazer qualquer uma das duas? E1: Dá, porque aqui o que sobrar... o resultado tem que dividir por dois, daí dá para descobrir. Mas a última tem mais desenhos do que aqui. E2: É, então, é melhor fazer a quarta. E1: Tem que fazer 12 mais 12... Agora, a gente faz o 24... é o 46 menos o 24. Dá 22. Agora a gente faz 22 menos o 2. E2: Agora a gente tem que fazer 20 dividido por 2. E vai dar 10.



Fonte: autoras

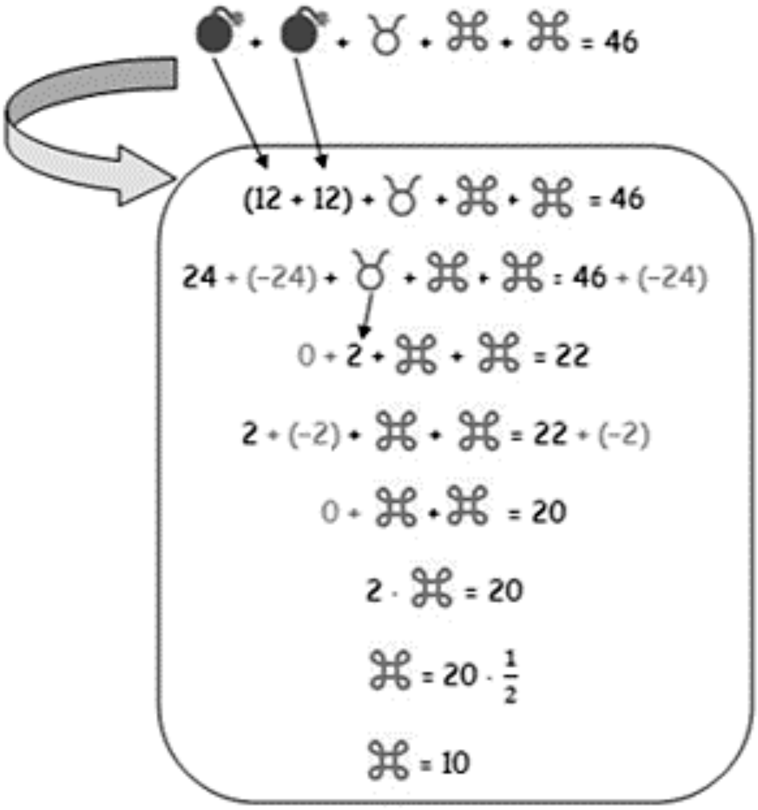
Assim, sucessivamente, duas transformações foram realizadas: uma sobre a medida inicial, obtendo uma intermediária, e uma sobre esta, obtendo uma medida final. Na sequência, o resultado obtido correspondia a dois símbolos ⌘. Logo, a díade D1 operou no campo multiplicativo ao realizar um isomorfismo de medidas, em que se conhecendo o valor de dois símbolos ⌘, obtiveram o valor desse símbolo unitário a partir de uma divisão.

Para melhor compreensão do tratamento manifestado pela díade D1 para a quarta expressão, esboçamos o esquema representado na figura 6.

Percebe-se a partir da figura 6 um processo análogo ao tratamento de uma equação do primeiro grau do tipo $ax + b = c$. Quanto às características identificadas: *adição pelo elemento oposto* no segundo e no quarto passo do tratamento que esboçamos (–24 e –2), *elemento neutro da adição* no terceiro e no quinto passo, *adição reiterada como multiplicação* na passagem do quinto para o sexto passo e utilização do *inverso multiplicativo* de 2 no sétimo passo.

Quanto à díade D2, composta pelos estudantes E3 e E4, assim como D1 e D3, iniciou a operação na segunda equação. Porém, pela fala de E4 "*Porque somando a segunda fileira dá pra ver que é dois cada um, porque são cinco desenhos e o resultado é 10*", inferimos que houve a explicitação de um valor que pôde ser resgatado da memória, o que nos levou a considerar que os estudantes da díade D2 não consideraram o sinal de igualdade (=) como uma relação entre quantidades, mas como indicador do resultado de operações, o que foi verificado, do mesmo modo, no tratamento das demais equações da tarefa.

Figura 6: Tratamento da díade D1 para a quarta equação da tarefa



Fonte: autoras

Em seguida, diferente do que fizeram as díades D1 e D3, a díade D2 não operou com as equações que, sucessivamente, continham menor quantidade de símbolos desconhecidos (com exceção de que iniciaram pela segunda equação), mas iniciaram suas operações na ordem em que cada equação é apresentada na tarefa.

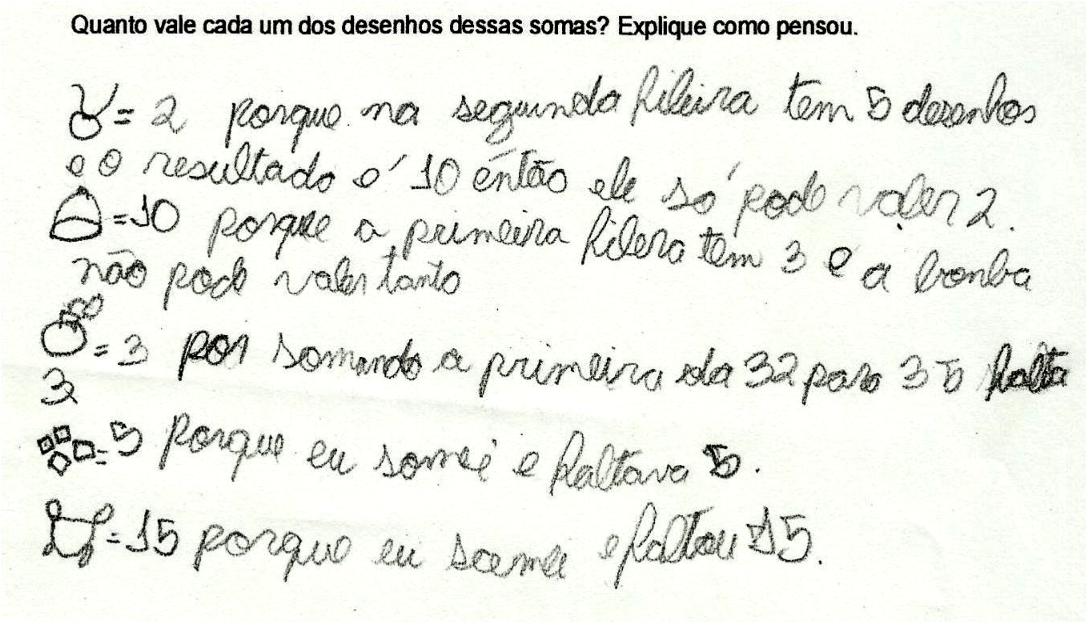
Assim, após realizarem a operação na segunda equação, o próximo passo foi operar na primeira, fazendo uso da estratégia de tentativa e erro (pois há dois símbolos desconhecidos), o que podemos evidenciar no registro escrito dos estudantes da díade D2 (figura 7).

Diante do exposto, que nos auxiliou no esboço de esquemas, evidenciamos a característica: *reconhecem que equações do primeiro grau só são possíveis de serem resolvidas quando envolvem apenas uma incógnita*, uma vez que reconheceram que nessa situação existem vários resultados possíveis, pois duas incógnitas são desconhecidas.

Além disso, apesar da estratégia de tentativa e erro, inferimos, por meio dessa resolução, indícios de características algébricas, pois a díade D2 manifestou um pensamento considerado como *pensamento quase-variável* (FUJII; STEPHENS, 2008), conforme ilustra a figura 8.

Conforme ilustrado na figura 8, os estudantes da díade D2 atribuíram um valor arbitrário para os símbolos iguais (sinos) e, tendo obtido o resultado de uma soma parcial, os estudantes determinaram o valor que acrescido a essa soma resultaria em trinta e cinco. Por exemplo: $5 + 5 + 5 + 2 + ? = 35$.

Figura 7: Registo do estudante E4. Transcrições de gravações de voz (linguagem natural de D2): E4: Esse daqui é 10, eu acho. E3: É, eu também acho. E4: E esse daqui deve valer 3, porque 30, 32, 35. [A bomba] não vai valer tanto assim, porque se for cinco, aqui vai dar 17 e aqui vai dar... um monte. E3: Vai ter que dar 18! T2: Qual vocês fizeram agora? E4: Esse. Nós achamos que é 10. T2: Vocês acham que é? Será que não tem outro jeito de saber se é 10 mesmo ou não? E3: Tem como valer 12 esse sino aqui. Ah, tem um monte de jeito!


Quanto vale cada um dos desenhos dessas somas? Explique como pensou.

= 2 porque na segunda fileira tem 5 desenhos e o resultado é 10 então ele só pode valer 2.

=10 porque a primeira fileira tem 3 e a bomba não pode valer tanto

= 3 por somando a primeira da 32 para 35 falta 3

= 5 porque eu somei e faltava 5.

=15 porque eu somei e faltou 15.

Fonte: autoras

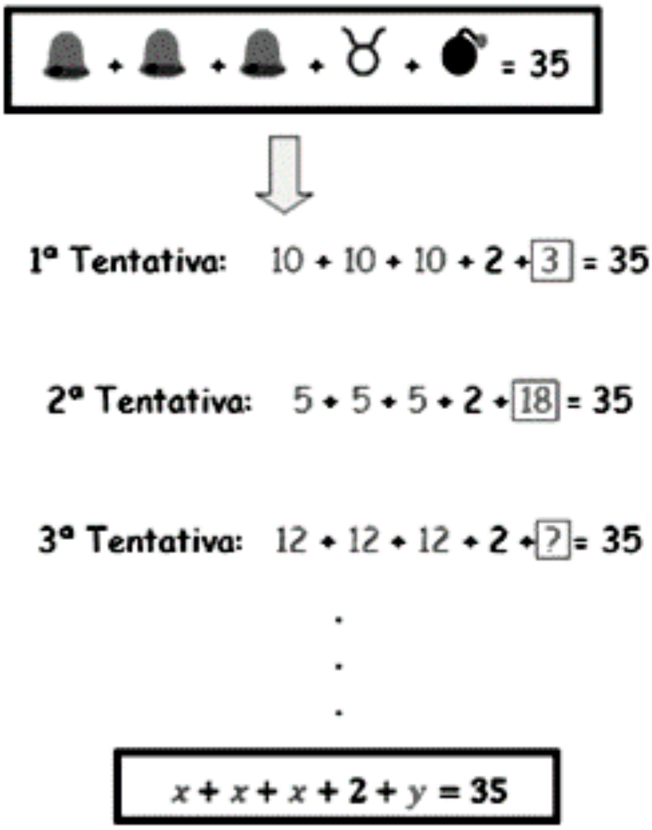
Assim, evidenciamos regularidades e generalizações, pois: a) *consideram que símbolos iguais correspondem a valores iguais em uma mesma equação* (sinos); b) *consideram o sinal de "=" como representante de uma relação entre quantidades* ao atribuírem valores arbitrários aos símbolos desconhecidos, tendo em vista a obtenção do valor trinta e cinco, reconhecendo, inclusive, que existem valores que não podem ser atribuídos porque a bombinha ("*Não vai valer tanto assim*", fala de E4); e c) *reconhecem que equações do primeiro grau só são possíveis de serem resolvidas quando envolvem apenas uma incógnita*, uma vez que percebem, pela estratégia de tentativa e erro, que existem diversos valores que podem ser atribuídos aos símbolos sino e bombinha de modo a obter o valor trinta e cinco.

As próximas operações da díade D2 envolveram a sexta, a terceira e a quarta equações. Contudo, chegaram a um determinado ponto em que perceberam que a estratégia de tentativa e erro era equivocada para resolver a tarefa proposta, desistindo de finalizá-la.

Diante do que expusemos até então, podemos sintetizar que o processo analítico ocorreu a partir do esboço de esquemas e de tratamentos de cada equação da tarefa e de cada díade, os quais são oriundos de interpretações realizadas sobre o *corpus* da pesquisa (gravações de voz, diários de campo e registros dos estudantes), por meio dos quais inferimos invariantes operatórios nos pautando em estudos a respeito de aritmética generalizada. Nesse processo, destacamos cinco características (quadro 2).

Vale destacar que as características elencadas são inferências dos pesquisadores a partir das manifestações dos estudantes, uma vez que boa parte dos invariantes operatórios são implícitos, subjacentes à ação do sujeito, sendo possível ao observador externo ter acesso, apenas, a indícios. Além disso, apesar da referência às propriedades de operações que, em geral não são estudadas na etapa escolar em que a pesquisa foi realizada, várias dessas propriedades "são utilizadas espontaneamente por alguns alunos sem que estas nunca lhes tenham sido ensinadas [...]. São tipicamente os teoremas-em-ação" (VERGNAUD, 2017, p. 41).

Figura 8 : Tratamento da díade D2 para a primeira equação da tarefa



Fonte: autoras

As características que elencamos a partir da exploração e primeiras interpretações foram organizadas em duas categorias: Invariantes Operatórios (*IO*) e Níveis de Generalidade (*NG*).

I) Categoria *IO* (*Invariantes Operatórios*): esta categoria compreende as características relacionadas aos números, operações e procedimentos de cálculos aritméticos em geral, que foram manifestados constantemente pelos estudantes e que, por isso, podem ser considerados como invariantes operatórios do tipo *teorema-em-ação*, teoremas esses que não necessariamente são os científicos, mas podem ser teoremas equivocados que os estudantes utilizaram durante envolvimento com a tarefa, considerando-o como verdadeiro para aquela situação. Nesse sentido, consideramos que esta categoria compreende *todas as características* que foram elencadas.

II) Categoria *NG* (*Níveis de Generalidade*): nesta categoria são compreendidas as características relacionadas aos números, operações e procedimentos de cálculos aritméticos em geral, que foram manifestados pelos estudantes por diferentes meios semióticos, permitindo inferir o nível de generalidade em que cada estudante se encontrava durante envolvimento com a tarefa. Esta categoria compreende quatro subcategorias: *indução ingênua*; *generalidade aritmética*; *transição entre generalidade aritmética e generalidade algébrica*; *e generalidade algébrica factual*.

Na figura 9 evidenciamos que as características elencadas representavam *teoremas-em-ação*, ou seja, poderiam ser todas consideradas como invariantes operatórios (Categoria IO).

Ainda, por meio da análise destes invariantes operatórios e da maneira e frequência com que estes foram utilizados, foi possível inferir a respeito do nível de generalidade em que se encontrava cada díade de estudantes durante seu envolvimento com a tarefa (subcategorias da Categoria NG).

Quadro 2: Síntese das características

CARACTERÍSTICAS
I) Utilizam a adição de *n* parcelas iguais (adição reiterada), sem manifestar estabelecimento de correspondência entre esta e uma multiplicação do fator que se repete *n* vezes.
II) Utilizam o elemento oposto de *n* na adição para balancear equações do primeiro grau quando a incógnita é somada por *n*.
III) Utilizam o elemento neutro da adição (0), obtido após aplicação do elemento oposto de *n* em ambos os lados da igualdade.
IV) Consideram que símbolos iguais correspondem a valores iguais em uma mesma equação.
V) Reconhecem que equações do primeiro grau só são possíveis de serem resolvidas quando envolvem apenas uma incógnita.

Fonte: autoras

Com referência a esse último aspecto, inferimos que as díades D1 e D3, que apresentaram procedimentos análogos de resolução da tarefa, manifestaram transitarem da generalização aritmética para a generalização algébrica em nível elementar, operando, no máximo, em nível *factual* durante a tarefa proposta.

Quanto à díade D2, ao considerarmos que estes estudantes recorreram diversas vezes à atribuição de valores para símbolos por meio da estratégia de tentativa e erro, podemos inferir que eles manifestaram o nível de indução ingênua (RARDFORD, 2006).

Todavia, inferimos também que a díade D2 manifestou, durante envolvimento com a tarefa proposta, um nível de generalidade superior: a generalidade aritmética. Assim justificamos por várias características (BLANTON; KAPUT, 2005) manifestadas: exploração de algumas propriedades e relações de números naturais (realização de sobre contagens por meio de múltiplos); exploração de algumas propriedades e relações de operações com números naturais (associatividade); e tratamento algébrico dos símbolos envolvidos nas equações da tarefa proposta (pensamento quase-variável).

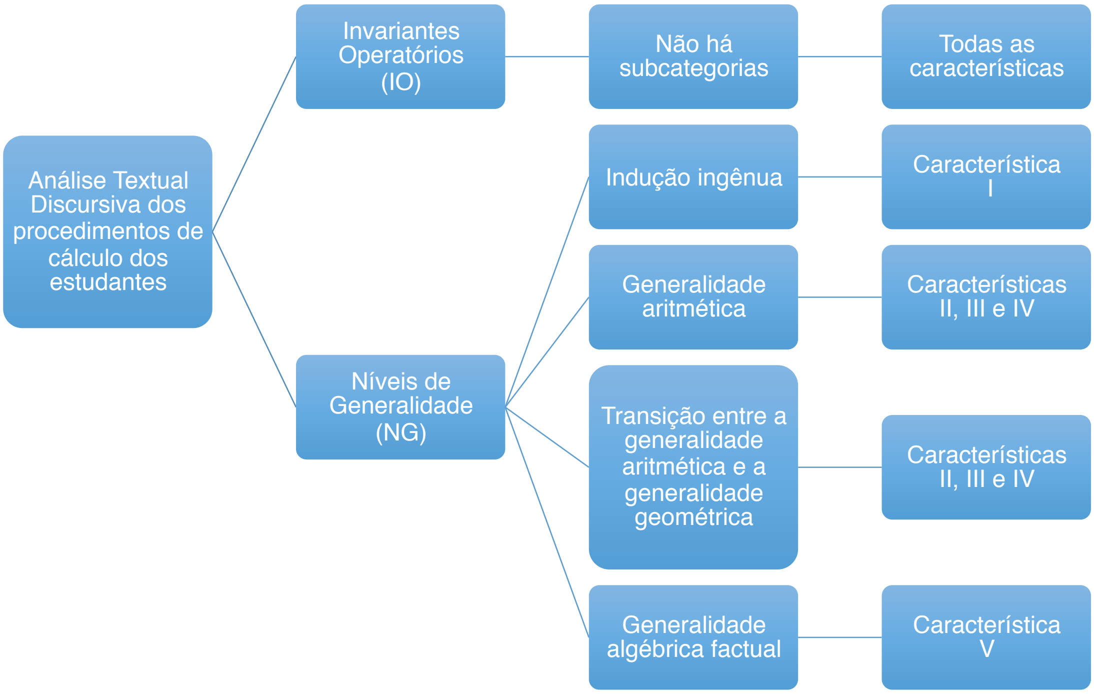
Constata-se que, apesar das diferenças entre níveis de generalidade, as díades D1, D2 e D3 manifestaram um aspecto em comum: todas apresentaram a característica IV que permitiu manifestar o nível de generalidade aritmética e a transição entre este nível e o algébrico.

Além disso, evidenciam-se características que estão contidas, simultaneamente, em duas subcategorias: na subcategoria generalidade aritmética e na subcategoria transição entre generalidade aritmética e generalidade algébrica.

Destaca-se a ocorrência de características repetidas nas subcategorias generalidade aritmética e transição entre generalidade aritmética e generalidade algébrica por dois motivos:

porque nestas é que foi evidenciado o maior número de características e, segundo, porque são nessas duas subcategorias que se concentram características comuns entre as díades D1, D2 e D3.

Figura 9: Categorias, subcategorias e características



Fonte: autoras

Entende-se que as repetições ocorreram por não ser possível afirmar se o estudante manifestou generalizações exclusivamente para as equações da tarefa aplicada, ou se, para outra tarefa semelhante, evidenciaria as mesmas manifestações. Assim, pondera-se que os estudantes podem se encontrar em um nível de transição entre generalizações ou ainda se encontrar em determinado nível de generalização inferior.

Portanto, comparando essas observações deduziu-se que, apesar das particularidades de cada díade, é possível perceber a manifestação de invariantes operatórios a partir das características evidenciadas e que indicam que as díades, possivelmente, podem se encontrar em um momento de transição entre generalidade aritmética e algébrica (de acordo com o que as díades manifestaram a partir do envolvimento com a tarefa proposta).

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Retomando o objetivo da pesquisa – *investigar invariantes operatórios e níveis de generalidade manifestados por estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental em seus procedimentos de cálculos aritméticos durante envolvimento com uma tarefa que consideramos como potencialmente algébrica* –, concluímos que os participantes da pesquisa foram capazes de se envolver com tarefas potencialmente algébricas utilizando procedimentos de cálculos aritméticos, sendo que nestes é possível evidenciar a mobilização de esquemas e, portanto, identificar invariantes operatórios do tipo *teoremas-em-ação*, que explicitam aspectos de nível de generalidade atingidos por cada díade de estudantes.

Nessa perspectiva, conclui-se que os estudantes da pesquisa manifestaram indícios de estarem em um nível de transição entre generalidade aritmética e generalidade algébrica. Tal conclusão está pautada na evidenciação de características invariantes relacionadas aos números e às operações envolvidas na tarefa proposta. Vale ressaltar que as inferências dizem respeito às manifestações para a tarefa aplicada, no entanto, seria necessária a aplicação de outras atividades para que fosse possível generalizar tais inferências.

É esse processo de evidenciação, manifestado pelos estudantes em seus procedimentos de cálculos aritméticos e por meio de representações semióticas, sobretudo, por meio da linguagem natural oral, que consideramos como *generalização*, a qual pode atingir diversos níveis, do mais elementar ao mais abstrato.

Assim, defendemos que propor situações envolvendo tarefas potencialmente algébricas em sala de aula pode contribuir para que o professor dos anos iniciais do Ensino Fundamental repense sua prática, considerando a possibilidade e relevância de desenvolver o pensamento algébrico mais cedo, a partir da valorização de cálculos aritméticos manifestados pelos estudantes, contribuindo para a aprendizagem em álgebra. Além de repensar a prática, é preciso que os professores que ensinam matemática nos anos iniciais sejam capacitados para desenvolver um trabalho em sala de aula que vise o desenvolvimento do pensamento algébrico dos estudantes, sobretudo daqueles que apresentam dificuldades de aprendizagem em Matemática.

Ainda, os resultados da presente pesquisa contribuem com a Educação Matemática nos anos iniciais no que tange à valorização da interação social entre os estudantes, bem como da linguagem natural oral, como meio profícuo para a manifestação da "matemática dos estudantes". Tal manifestação é essencial para que o professor possa inferir o nível de desenvolvimento matemático dos estudantes.

REFERÊNCIAS

ANDRINI, A.; VASCONCELLOS, M. J. **Praticando matemática**: edição renovada. 3. ed. São Paulo: Editora do Brasil, 2012. 58 p.

BLANTON, M. L.; KAPUT, J. Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. **Journal of Research in Mathematics Education**, v. 36, n. 5, p. 412-446, 2005.

COMÉRIO, M. S. **Interação social e solução de problemas aritméticos nas séries iniciais do ensino fundamental**. 2007. 257 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP. 2007.

DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Tradução de Méricles Thadeu Moretti. **Revemat**, v. 7, n. 2, p. 266-297, 2012.

FUJII, T.; STEPHENS, M. Using number sentences to introduce the idea of variable. In: GREENES, Carole; RUBENSTEIN, Rheta (Eds.). **Algebra and algebraic thinking in school mathematics – seventieth yearbook**. Reston: NCTM, p. 127-140, 2008.

KIERAN, C. Algebraic thinking in the early grades: What is it? **The Mathematics Educator**, v. 8, n. 1, p. 139-151, 2004.

MESTRE, C.; OLIVEIRA, H. A mobilização da capacidade de generalização através da exploração de estratégias de cálculo: um estudo com alunos do 4º ano. **Revista Interacções**, Lisboa, n. 20, p. 9-36, 2012.

PIMENTEL, T.; VALE, I. A descoberta de padrões no desenvolvimento do cálculo mental: uma experiência com professores do 1º ciclo. In: ENCONTRO DE INVESTIGAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 19, 2009, Vila Real, Portugal. **Anais**... Vila Real, Portugal: SPCE, 2009.

RADFORD, L. Algebraic thinking and the generalization of patterns: A semiotic perspective. In: ALATORRE, S.; CORTINA, J.; SÁIZ, M.; MÉNDEZ, A. (Eds.). ANNUAL MEETING OF THE NORTH AMERICAN CHAPTER OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF

MATHEMATICS EDUCATION, 28, 2006, Mérida, Yucatán, México. **Proceedings...** Mérida, Yucatán, México: UPN, 2006. v. 1, p. 2-21.

VERGNAUD, G. A teoria dos campos conceituais. In: BRUN, Jean. **Didática das matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. 280 p.

VERGNAUD, G. The nature of mathematical concepts. In: Nunes, T.; Bryant, P. (Ed.).

Learning and teaching mathematics: an international perspective. Hove, UK: Psychology Press, 1997, p. 5-28.

VERGNAUD, G. **A criança, a matemática e a realidade**: problemas do ensino da matemática na escola elementar. Tradução de Maria Lucia Faria Moro. Curitiba: Editora da UFPR, 2009. 322 p.

VERGNAUD, G. O que é aprender? Por que Teoria dos Campos Conceituais? In: GROSSI, E. P. (Org.). **O que é aprender? O iceberg da conceitualização Teoria dos Campos Conceituais TCC**. Porto Alegre: GEEMPA, 2017. p. 15-53.