O USO DO GEOGEBRA NA APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA ANALÍTICA NO ENSINO MÉDIO

USE OF GEOGEBRA IN THE LEARNING OF ANALYTICAL GEOMETRY IN SECONDARY SCHOOL

SILVA, Girleide Maria[1]
UTSUMI, Miriam Cardoso[2]

RESUMO

Neste artigo apresentamos o recorte de um estudo desenvolvido em nível de mestrado[3], que investigou em que medida o *software* GeoGebra contribuiu para a aprendizagem dos conteúdos de Geometria Analítica, ponto e reta. Participaram da pesquisa duas turmas do período diurno do 3º Ano do Ensino Médio, de uma escola pública da Grande São Paulo que foram submetidas a uma Sequência de Atividades que considerava os diferentes Registros de Representação Semiótica de Duval. A primeira turma (T1), trabalhou com atividades em abordagens instrucionista e construcionista utilizando o GeoGebra, enquanto a outra (T2), trabalhou as atividades em ambiente lápis e papel. Os dados foram obtidos a partir de um questionário sobre o perfil dos participantes, um Pré-Teste, Avaliação Intermediária e um Pós-Teste. Neste texto, discutimos os resultados da Avaliação Intermediária, na qual verificamos que nas questões que abordavam as habilidades de visualização (localize, identifique) e construção (trace, represente) a Turma 1 apresentou médias superiores as dos participantes da Turma 2, contudo nas questões que exigiam habilidade de cálculo, a Turma 2 obteve médias melhores. Desta forma, consideramos que o GeoGebra, contribuiu para a aprendizagem dos conteúdos de ponto e reta, favorecendo a representação dos objetos matemáticos em diferentes registros. Porém, acreditamos que ele deva ser associado à outras metodologias que deem conta da compreensão e apropriação da habilidade de cálculo pelos alunos, a qual apenas o uso do software não contribuiu para desenvolver.

Palavras-chave: Educação matemática. Registros de representação semiótica.

ABSTRACT

In this article we present an extract of a study developed at master level, which investigated to what extent the GeoGebra software program contributed to the learning of point and line of Analytical Geometry contentes. Two groups of the daytime period of the 3rd. year of High School of a public school in the Greater São Paulo joined the study. These groups were given a Sequence of Activities which covered different Duval Registers of Semiotic Representation. The first group (T1) worked with activities in instructionist and constructionist approaches using GeoGebra, whereas the other group (T2) performed the same activities in a "pencil and paper" environment. The data was obtained from a questionnaire about the participants' profile, as well as a Pre-Test, an Intermediate Evaluation and Post-Test. We could see that, for the questions involving viewing skills (Locate, Identify) and construction skills (Trace, Represent), Group 1 got higher scores than the participants of Group 2. However, Group 2 got better scores for questions requiring calculation skills. In this text, we will discuss the results of the Intermediate Evaluation. We consider that GeoGebra helps learning the contents of point and line, thus favoring the representation of mathematical objects in different registers. However we believe that GeoGebra should be associated to other methodologies that provide students with an understanding and appropriation of calculations skills, which the use of the software program alone did not help develop.

Keywords: Mathematics education. Registers of semiotic representation.

[1]Mestre em Educação pela Universidade Federal de São Carlos (UFSCAR), São Carlos, São Paulo, Brasil. Professora da Secretaria Estadual de Educação do Estado de São Paulo (SEE-SP), Taboão da Serra, São Paulo, Brasil. Endereço eletrônico: girleidedasilva@gmail.com.
[2]Doutora em Educação pela Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), Campinas, São Paulo, Brasil. Docente da Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), Campinas, São Paulo, Brasil. Endereço para correspondência: Faculdade de Educação (UNICAMP), Rua Bertrand Russell, 801, Cidade Universitária Zeferino Vaz, CEP 13083-865, Campinas, São Paulo, Brasil. Endereço eletrônico: mutsumi@unicamp.br.
[3] SILVA (2016).

1 INTRODUÇÃO

A sociedade em constante inovação tecnológica modifica-se proporcionalmente em progressões mais elevadas que o seu sistema educacional, o qual se transforma a passos mais lentos, principalmente no que diz respeito às suas práticas pedagógicas e seus recursos. Segundo Moran (2012, p. 8): "[...] a sociedade evolui mais do que a escola e, sem mudanças profundas, consistentes e constantes, não avançaremos rapidamente como nação."

A Educação Matemática também passa por transformações, pois se faz necessário adequar seu papel educacional à sociedade. Temos observado nas preconizações das Diretrizes Curriculares que há forte tendência para um ensino de Matemática voltado ao uso das Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC) e as Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação (TDIC), que possibilitam a diversificação de métodos de ensino, propondo uma aprendizagem mais dinâmica e almejando um ensino com índices menores de fracasso.

Moran (2012) alerta que com o avanço das tecnologias, uma escola sem conexão com o mundo virtual e as multimídias é uma escola incompleta. Tal alerta é consoante com a Lei de Diretrizes e Bases do Ensino Nacional – LDBEN 9394/96 que atribui ao Ensino Médio a orientação tecnológica básica, e em seu Art. 35 parágrafo IV entre outras finalidades destaca "a compreensão dos fundamentos científicos tecnológicos dos processos produtivos, relacionando a teoria com a prática, no ensino de cada disciplina", para que, ao finalizar o ciclo de três anos o aluno tenha "domínio dos princípios científicos e tecnológicos que presidem a produção moderna" (Art. 36).

Analogamente, o currículo do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2012, p.21-22) relaciona educação à tecnologia, enfatizando dois aspectos: a alfabetização tecnológica, pela qual se aprende a lidar com computadores entendendo que as tecnologias estão inseridas na cultura humana como parte das práticas sociais e produtivas e, estão ligadas diretamente aos "conhecimentos científicos, artísticos e linguísticos que os fundamentam"; e, o uso da tecnologia para relacionar o "currículo ao mundo da produção e serviços" por todas as áreas do conhecimento no Ensino Médio.

Dentre as tecnologias informáticas, os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática – PCN de Matemática (BRASIL, 1998), apontam o computador como recurso didático dinâmico que favorece o processo de ensino – aprendizagem possibilitando o desenvolvimento cognitivo do aluno.

O uso do computador no ensino pode auxiliar na construção do conhecimento de acordo com o ritmo de aprendizagem do aluno, além de propiciar a interação com seus colegas trocando experiências e aprendendo com seus próprios erros. Não basta, porém, apenas possuirmos recursos tecnológicos sem atrelarmos a estes, os objetivos e as metodologias, integrando as ferramentas multimídias ou computacionais para um fim didático, prático e facilitador do processo de ensino e aprendizagem.

O acesso a outros métodos e estratégias de ensino que vinculem o uso das tecnologias atuais aos conhecimentos específicos das disciplinas, garantem maior diversidade de recursos, promovendo possibilidades de ensino e consequentemente, ampliando o universo de alternativas para a aprendizagem, proporcionando ao aluno um ambiente mais atraente para obtenção de conhecimentos, seja pelo acréscimo de mais uma ferramenta facilitadora ao processo de ensino e aprendizagem, seja pela utilização na escola de instrumentos compatíveis com a realidade dessa geração de educandos.

Um dos aspectos que pode contribuir de forma positiva a uma transformação das práticas pedagógicas é a variedade de recursos educacionais que podem ser usados com o auxílio do computador.

Os *softwares*, por exemplo, na atualidade têm se destacado como ferramentas que podem contribuir para o processo de ensino e aprendizagem de Matemática e o GeoGebra é um dos *softwares* que vem sendo utilizado nesse processo por ser dinâmico, permitindo a exploração geométrica, gráfica e algébrica simultaneamente. Tal aspecto pode favorecer a compreensão dos conceitos matemáticos, visto que a representação de um objeto matemático em diferentes registros semióticos, segundo Duval (2013) é fundamental para a aprendizagem significativa em Matemática.

A semiótica possui como essência o estudo dos signos presentes nos tipos de atos de comunicação que são: símbolos, sons, gestos e regras com sinais convencionados como a escrita, por exemplo. Os signos são definidos por Santaella (1983) como tudo que nos faz lembrar de algo que é perceptível aos nossos sentidos e tem como função ou poder, representar ou substituir o objeto.

A representação de um objeto matemático por um signo é denominada de representação semiótica. As representações são essenciais para fins de comunicação e da atividade cognitiva do pensamento (DUVAL, 2013).

A teoria das representações semióticas de Duval trata principalmente das relações cognitivas que o aluno realiza ao ser apresentado às atividades matemáticas. Duval (2013) afirma que a qualidade da atividade cognitiva do pensamento matemático é a capacidade de transitar entre os registros de representação semiótica, realizando tratamentos (em um mesmo sistema de registro de representação) ou conversões (alternância entre diferentes tipos de registro).

Segundo Duval (2013) há quatro tipos de registros de representação semiótica, a saber: a língua natural, os sistemas de escritas, as figuras geométricas e os gráficos cartesianos. Esses tipos estão representados no Quadro 1.

Quadro 1: Classificação dos tipos de registros de representação semiótica

	REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA	REPRESENTAÇÃO NÃO DISCURSIVA
REGISTROS MULTIFUNCIONAIS	*Língua natural* Associações verbais (conceituais). Forma de raciocinar: argumentação a partir de observações, de crenças; dedução válida a partir de definição ou de teoremas.	*Figuras geométricas* planas ou em perspectivas (configurações em dimensão 0,1,2 ou 3). apreensão operatória e não somente perceptiva; construção com instrumentos.
REGISTROS MONOFUNCIONAIS:	*Sistemas de escritas* numéricas (binária, decimal, fracionária, ...) algébricas; simbólicas (línguas formais) Cálculo.	*Gráficos cartesianos* mudanças de sistema de coordenadas; interpolação, extrapolação.

Fonte: Duval (2013, p.14)

De acordo com o Quadro 1, observa-se que um objeto matemático poderá ser representado de forma diferenciada dependendo da sua necessidade ou uso, podendo ser registrado por representações linguísticas, escritas, geométricas ou gráficas.

Acreditamos que o GeoGebra pode contribuir para a apreensão de diferentes tipos de registro de um objeto matemático. Ele é um aplicativo gratuito que pode ser utilizado em ambiente escolar por todos os níveis de ensino (AGUIAR, 2011) e reúne recursos que permitem aplicações na Geometria, na Álgebra, na Probabilidade, na Estatística e no Cálculo em um sistema dinâmico, com visualizações simultâneas de um mesmo objeto. (SANTOS, 2011; MALTEMPI E FARIA, 2012)

Com relação a escolha de *softwares* educacionais, os PCNs (BRASIL, 1998) recomendam aos educadores que a sua utilização seja avaliada de acordo com os objetivos que pretendem atingir, podendo utilizar *softwares* que se prestam a um trabalho mais dirigido, como forma de testar conhecimentos num enfoque mais instrucionista ou aqueles que auxiliam na construção do conhecimento com uma abordagem construcionista. É possível ainda, alternar o ensino de matemática entre estas duas abordagens (instrucionista e construcionista) utilizando apenas um recurso tecnológico digital que permita tal aplicação, como o GeoGebra.

Com esse olhar buscamos por um conteúdo destinado ao 3º ano do Ensino Médio, de acordo com o currículo do estado de São Paulo, que possibilitasse o uso de diferentes registros, e que favorecesse a construção de atividades elaboradas com base na Teoria dos Registros de Representação Semiótica. Escolhemos então o conteúdo de Geometria Analítica.

Elaboramos uma sequência didática sobre Ponto e Reta, na qual integramos o uso do *software* GeoGebra ao conteúdo de Geometria Analítica, com a perspectiva de investigar em que medida este software contribui para a aprendizagem dos conteúdos ponto e reta.

2 MATERIAIS E MÉTODOS

Classificamos essa pesquisa como descritiva, quanto aos seus objetivos e como pesquisa de campo, quanto ao seu delineamento. Os instrumentos de coleta de dados foram administrados por técnicas padronizadas e obtidos no ambiente natural, na unidade escolar, onde os participantes estudavam, por meio de observações diretas da pesquisadora aos grupos estudados, com a aplicação do questionário e das atividades elaboradas pela pesquisadora.

Participaram deste estudo duas turmas do terceiro ano do Ensino Médio de uma escola da rede estadual de ensino do período matutino localizada na cidade de Taboão da Serra/SP.

Esclarecemos que ambas as turmas tiveram acesso ao *software* GeoGebra, contudo em momentos diferentes. A primeira turma (T1) utilizou o *software* durante a aplicação da sequência sobre Geometria Analítica, e a segunda turma (T2) utilizou o *software* após a coleta dos dados do estudo, ao final do ensino daqueles conteúdos. Enfatizamos que tanto a T1, quanto a T2 realizaram as mesmas atividades da Sequência, entretanto a T2 com materiais impressos, enquanto a T1 tinha também o apoio do *software* na sala de informática.

A pesquisa ocorreu com todos os alunos das duas turmas. Os participantes da pesquisa foram selecionados segundo dois critérios: a devolutiva do termo de consentimento livre e esclarecido assinado pelo responsável; e, terem participado das aulas entregando no mínimo dez das onze atividades da Sequência de Atividades (a sequência completa pode ser acessada em SILVA, 2016).

Com base nesses critérios tivemos 20 alunos participantes oriundos da Turma 1 e 16 da Turma 2. A escolha da Turma 1 para utilizar o GeoGebra durante o ensino dos conteúdos foi decidida ao acaso.

Os instrumentos utilizados foram: um questionário sobre o perfil do participante, um Pré-Teste, um Pós-Teste, cinco atividades da sequência, uma atividade avaliativa intermediária, uma atividade com exercícios do Caderno do Aluno e os protocolos das observações. Por questão de espaço, neste artigo apresentaremos os resultados gerais e nos focaremos principalmente nos dados da avaliação intermediária.

O Pré-Teste continha 10 questões. As duas primeiras, referiam-se a localização de pontos no plano cartesiano, a terceira tratava da distância entre pontos, a quarta e a quinta, do ponto médio. A mediana e o baricentro era o tema da sexta questão, já o alinhamento de três pontos era trabalhado na sétima e décima e a inclinação da reta na oitava e nona questões. Todas, com o objetivo de verificar quais habilidades os participantes já possuíam sobre o conteúdo, anteriormente à aplicação da sequência.

As questões do Pós-Teste eram semelhantes às questões do Pré-Teste quanto à quantidade e a apresentação dos conteúdos. A diferença ocorreu apenas em relação aos pontos localizados no plano cartesiano e aos valores dos pares ordenados, embora os números pertencessem ao mesmo conjunto numérico. As alterações nestes aspectos fizeram as respostas serem diferentes, mas a dinâmica das avaliações em relação ao texto e sua interpretação foram exatamente iguais.

Com relação às atividades 1, 2, 3, 4, 5 da sequência, a Atividade 1 era composta por sete questões, tinha como objetivos identificar pares ordenados representados no plano cartesiano e localizar coordenadas no plano com o gráfico cartesiano sobre o mapa da cidade de São Paulo, que se apresentava dividido por regiões: central, norte, sul, oeste e leste. A atividade integrou dados reais como nome de bairros e locais conhecidos na cidade pelo público em geral, com as representações de gráfico cartesiano.

A Atividade 2 tinha seis questões, sendo a primeira composta por doze pares de coordenadas para serem localizados no plano cartesiano e traçados seus respectivos segmentos. A segunda solicitava o cálculo da medida do segmento com a proposta de verificação dos resultados observando a distância entre os valores presentes nos eixos. Já as questões seguintes trataram dos segmentos verticais, horizontais e inclinados sugerindo que o participante observasse os valores das coordenadas e verificasse se havia relações entre os dados numéricos e a posição relativa do segmento. Havia também um espaço denominado “para refletir” sobre como associar o Teorema de Pitágoras aos cálculos da medida dos segmentos inclinados, não sendo uma questão em específico, mas um tópico introdutório para a próxima atividade da sequência.

A Atividade 3 iniciava com a relação entre a medida dos segmentos inclinados e o Teorema de Pitágoras, resultando na construção de um triângulo retângulo, no qual os catetos eram os segmentos verticais e ou horizontais e a hipotenusa, o segmento inclinado. A atividade foi totalizada em sete questões que solicitavam o cálculo da distância entre dois pontos por meio da Fórmula e do Teorema de Pitágoras.

A Atividade 4 possuía oito questões que tratavam do ponto médio, mediana e baricentro. Por meio de repetidas, porém, diversificadas localizações de segmentos no plano cartesiano e suas observações quanto à movimentação dos valores numéricos dos seus pontos extremos e do ponto médio, foi pedido para que o participante representasse de forma geométrica e buscasse uma forma para generalizar o cálculo do ponto médio. Ao ser identificada a forma genérica ou fórmula na sexta questão, havia a necessidade de calcular o ponto médio.

As duas últimas questões da Atividade solicitavam uma pesquisa para localizar a definição da mediana e do baricentro de um triângulo, a representação geométrica das medianas e do baricentro, além do cálculo do baricentro.

Finalmente a Atividade 5 era composta por quatro questões sobre o alinhamento de três pontos, com o objetivo de identificar por meio de representações distintas a existência de alinhamentos.

Além disso, a Sequência de Ensino utilizou recortes do Caderno do Aluno da SEE-SP que foram tratados na pesquisa como exercício, com o objetivo de promover questionamentos e inserir perguntas em um contexto que envolvesse todos os conteúdos pertinentes. Foram selecionadas duas questões: a primeira exigia a identificação de dois pares de coordenadas e solicitava que, por meio do cálculo algébrico, fosse representada a distância entre os dois pontos. A segunda questão solicitava a representação de pontos no sistema de coordenadas inclusive os pontos médios dos segmentos e a determinação das coordenadas destes pontos médios em pares ordenados.

A avaliação intermediária possuía cinco questões sobre localização, distância entre dois pontos, ponto médio, mediana e baricentro, todas dependendo da imagem de um mapa com os indicadores das estações do metrô sobre o plano cartesiano e da problematização. Havia também uma sexta questão que solicitava um *feedback* do participante sobre a aplicação da sequência: pontos positivos, negativos, sugestões e reclamações. Por questão de espaço, neste artigo apresentaremos os resultados gerais e nos focaremos principalmente nos dados da avaliação intermediária.

Utilizamos os recursos presentes da sala do Acessa Escola, que faz parte da estrutura arquitetônica da unidade escolar e a sala de aula comum. Devido à quantidade de computadores na sala do Acessa Escola, optamos por trabalhar em duplas com as duas turmas, tanto na sala do Acessa como na sala de aula.

Nosso interesse era verificar se o GeoGebra poderia contribuir para as aprendizagens dos alunos e o trabalho do professor. Em geral as aprendizagens são avaliadas em provas elaboradas interna ou externamente a escola, realizadas de forma individual e sem nenhuma consulta ou apoio a outros materiais. Mantivemos essas premissas na realização da pesquisa: as aulas da Sequência foram desenvolvidas em duplas nas duas turmas, as da T1 tiveram apoio do *software* e a forma de avaliar ambas as turmas seguiu o modo usual pelo qual os alunos são avaliados na escola.

Dessa forma, apenas as avaliações foram feitas individualmente e sem nenhum tipo de consulta ou utilização do *software*, uma vez que as cinco atividades e os exercícios foram instrumentos utilizados para trabalhar os conteúdos e as avaliações serviram para verificar se houve aprendizagem.

Nesta sequência priorizamos a competência leitora e escritora com atividades impressas ou em arquivos enviados via correio eletrônico da sala. Estes recursos foram escolhidos com o objetivo de introduzir a leitura e interpretação de textos nas aulas de matemática, com ênfase na capacidade de compreensão de mapas, de explicações para aplicação de fórmulas, de imagens que representam percursos e de definições para tomada de decisões na escolha de qual operação realizar. A capacidade de expressão ocorreu por intermédio das respostas dissertativas e dos questionamentos orais.

3 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Nesta seção apresentamos o perfil dos participantes, o desempenho das duas turmas nos instrumentos aplicados e analisamos mais detalhadamente a avaliação intermediária, que marcou o final do primeiro módulo em que foram desenvolvidos os conceitos de plano cartesiano, representações de pontos, segmentos de reta, distância entre dois pontos, ponto médio do segmento, mediana e baricentro de um triângulo.

3.1 Perfil dos participantes

As turmas eram homogêneas em relação ao gênero, os participantes tinham idade entre 16 e 17 anos e em geral moravam nas proximidades da unidade escolar, tendo estudado na mesma escola desde o início do segundo ciclo do Ensino Fundamental.

Aproximadamente 80% dos participantes possuíam computadores em suas residências, utilizando em sua maioria com frequência de uma a três vezes por semana para entretenimento, destacando-se em relação ao estudo e trabalho.

Os participantes afirmaram que a inserção de recursos tecnológicos digitais auxiliava satisfatoriamente em suas aprendizagens e que já haviam tido experiências na utilização destes recursos nas disciplinas das quatro áreas do conhecimento, a saber: Ciências da Natureza e Suas Tecnologias, Matemática e Suas Tecnologias, Linguagens, Códigos e Suas Tecnologias, Ciências Humanas e Suas Tecnologias, por meio de apresentações do *Power Point*, em videoconferências, em pesquisas e não conheciam o *software* GeoGebra.

3.2 Análise das avaliações

Devido às condições estruturais do lócus da pesquisa, trabalhamos com os participantes em duplas durante as atividades da sequência (AT1, AT2, AT3, AT4, AT5) e o Exercício do Caderno do Aluno (EX). Os instrumentos individuais verificadores de aprendizagem foram o Pré-Teste, a Avaliação Intermediária (AVI) e o Pós - Teste. Estes foram realizados sem consulta e nem interferência do professor da turma e da pesquisadora e a nota poderia variar de zero a dez em qualquer um deles

As médias, os valores mínimos e máximos e o desvio padrão (DP) obtidos nestes instrumentos constam na Tabela 1 de acordo com a ordem em que foram aplicados.

Tabela 1: Média das turmas por instrumento verificador de aprendizagem

Turma	Medida	Pré-teste	AVI	Pós-teste
1	Média	1,06	9,02	7,90
	DP	0,85	1,16	1,88
	Mínimos	0,00	6,00	3,66
	Máximos	2,50	10,00	9,75
2	Média	0,91	7,68	7,19
	DP	0,96	2,41	2,40
	Mínimos	0,00	0,00	1,66
	Máximos	2,82	10,00	9,50

Fonte: adaptado de Silva (2016, p. 146)

A Tabela 1 mostra que no Pré-Teste a diferença entre as turmas era de 0,15 pontos e no Pós-Teste, 0,71 pontos. Observa-se que a Turma 1, iniciou a sequência com pequena vantagem em relação ao número de acertos e esta vantagem foi aumentando, principalmente na Avaliação Intermediária onde a diferença chegou a 1,34 pontos. Os valores mínimos e máximos do Pós-Teste indicam que os participantes da Turma 1 apresentaram a menor e a maior nota da amostra.

Constatamos ainda por meio dessas médias, uma gradativa elevação do desempenho dos alunos nas avaliações o que sugere nível de aprendizagem com índices satisfatórios para as duas turmas.

As médias apresentadas no Pós-Teste confirmaram a atuação do GeoGebra como facilitador de aprendizagem nas habilidades relacionadas às questões que não necessitaram diretamente dos cálculos. Nas questões 3, 7 e 10 em que havia necessidade de realizar cálculos de distância entre dois pontos ou comprimento de segmentos, a Turma 2 obteve resultados melhores, como se observa na Tabela 2.

Tabela 2: Médias e desvio padrão das notas por turma e questões do Pós -Teste

Turma	Medida	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	GERAL
1	Média	0,95	0,95	0,72	1,00	0,91	0,92	0,63	0,64	0,68	0,53	7,90
	DP	0,17	0,13	0,26	0,00	0,21	0,20	0,39	0,37	0,36	0,42	1,88
2	Média	0,89	0,91	0,73	0,77	0,85	0,78	0,65	0,50	0,53	0,57	7,19
	DP	0,28	0,15	0,22	0,42	0,28	0,30	0,34	0,37	0,41	0,43	2,40
Geral	Média	0,92	0,93	0,73	0,89	0,88	0,86	0,64	0,58	0,62	0,54	7,58
	DP	0,22	0,13	0,24	0,29	0,24	0,25	0,36	0,37	0,38	0,42	2,12

Fonte: Silva (2016, p. 131)

Acreditamos que esses resultados possam ser explicados pelo fato de que como a Turma 1 teve acesso ao *software* que lhe apresentava as medidas dos comprimentos e distância, os alunos não encontraram dificuldades na realização dos cálculos, o que ocorreu apenas nas atividades de verificação. Já a Turma 2 foi necessário realizar todos os cálculos à mão, então puderam cometer erros e esclarecê-los nas aulas, antes das atividades de verificação.

A avaliação intermediária (AVI) trazia o seguinte contexto, no registro de representação semiótica "*língua natural*": "João e Pedro são amigos e utilizam o metrô de segunda a sexta-feira e se encontram na Avenida Paulista em frente à estação Trianon Masp. João utiliza a linha azul do metrô, saindo da estação Liberdade e faz baldeação na estação Paraíso seguindo pela linha verde, até a estação Trianon Masp. Já Pedro, sai da estação Consolação se dirigindo ao ponto de encontro. Considerando a Praça da Sé como marco zero e a unidade de medida em quilômetros (Km), observe a imagem e responda às questões..."

Utilizamos um contexto real, identificando as estações do metrô e parte do trajeto das linhas verde e azul (Figura 1) com os registros de representação semiótica *"figura geométrica"* e "*gráfico cartesiano",* de modo a apresentar ao participante uma problemática contextualizada.

Figura 1: Imagem das estações de metrô- Linhas Azul e Verde

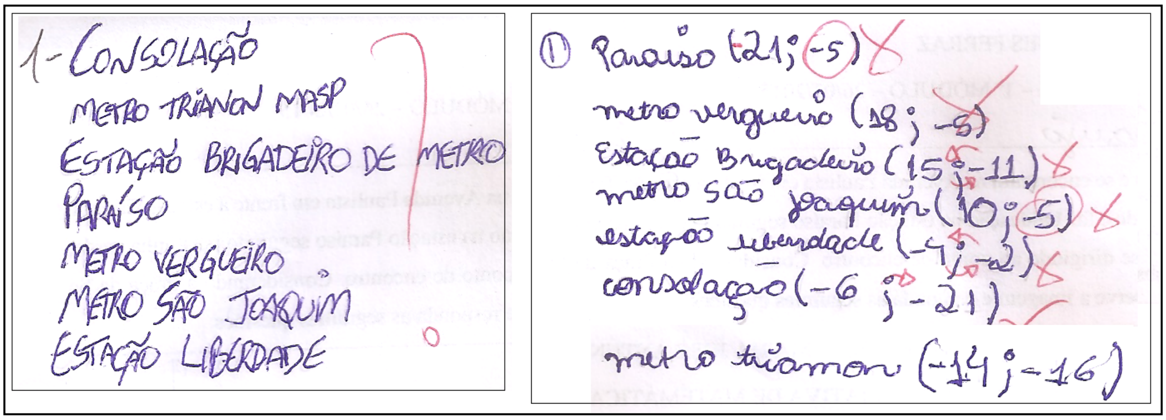
Fonte: Google Maps

Nessa situação, o participante precisava interpretar o enunciado (registro de representação "*língua natural*") reconhecendo os seus símbolos e partir do "*sistema gráfico cartesiano"* (no qual as estações eram apenas um ponto e o trajeto entre elas, segmentos) para o "*sistema de escritas"*, representando as estações em coordenadas, realizando, portanto, *conversões entre registros* (DUVAL, 2013). Ao calcular as medidas dos segmentos, as coordenadas do ponto médio e do baricentro, realizavam *tratamentos* entre registros (DUVAL, 2013), pois permaneciam em um mesmo tipo de registro de representação.

Desde o início da sequência, ao examinarmos qualitativamente os protocolos do pré-teste, observamos que ocorreram basicamente dois tipos de erros nas questões que solicitavam a representação dos pontos em coordenadas cartesianas e a escrita das coordenadas dos pontos: a inversão dos números correspondentes às ordenadas com as abcissas e a escrita das coordenadas com um único valor.

Ao analisarmos esse conceito na Avaliação Intermediária, constatamos que os participantes das Turmas 1 e 2, apresentaram melhoria nesse aspecto. Contudo a Figura 2 apresenta os extratos das respostas do participante 26 que escreveu apenas os nomes das estações e do participante 29 que escreveu as coordenadas de forma incorreta e/ou invertidas.

Figura 2: Resposta dos participantes 26 e 29 à Questão 1 da Avaliação Intermediária



Fonte: Protocolo dos participantes 26 e 29

Nesta questão era solicitada a *conversão* entre o registro *figura geométrica* e as coordenadas do registro *gráfico cartesiano*, ou seja, os participantes precisavam escrever as coordenadas dos pontos que representavam sete estações do metrô, a saber: Consolação, Trianon Masp, Brigadeiro, Paraíso, Vergueiro, São Joaquim e Liberdade. Após análise, observamos que 73,68% dos participantes da Turma 1 responderam à questão corretamente e 26,32%, responderam-na parcialmente correta. Já 50 % dos participantes da Turma 2 solucionaram a questão corretamente, 37,5% responderam parcialmente correto e 12,5% responderam errado.

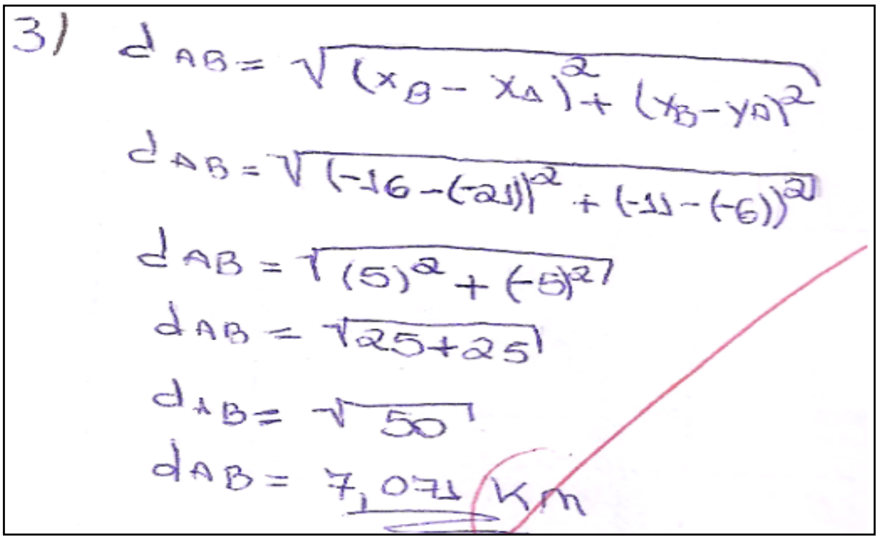
As respostas corretas para a questão 1 deveriam ser as seguintes: Consolação: (-21, -6); Trianon–Masp:(-10, -11); Brigadeiro:(-11, -15); Paraíso:(-5,-21); Vergueiro: (-5, -16) São Joaquim: (- 4, -10) e Liberdade: (-2, -4).

Na questão 2, solicitava-se o inverso: dadas as coordenadas do registro *gráfico cartesiano* o participante deveria realizar a *conversão* desse registro no de *figura geométrica*. O objetivo era localizar no plano cartesiano os pontos correspondentes às três estações de metrô, sendo Consolação: C(-21, -6), Paraíso: P(- 5, -21) e Liberdade: L(-2, -4). Na primeira turma, 94,74% realizaram corretamente a localização e 5,26% solucionaram parcialmente a questão. Para a Turma 2, os resultados foram de 87,50% de acertos, 6,25% de resoluções parcialmente certas e 6,25% com resolução totalmente errada.

Na situação da questão 3, os participantes deveriam verificar a distância do trajeto realizado por Pedro, que sai da estação Consolação para a estação Trianon - Masp, onde encontra com João. Para desenvolver esta questão, os participantes poderiam contar as unidades entre os pontos aplicando estes valores ao Teorema de Pitágoras ou a fórmula da distância entre dois pontos.

Constatamos que entre os 35 participantes presentes 8,57% não responderam à questão, 68,93% responderam por meio da fórmula da distância entre dois pontos, 14,28% solucionaram utilizando o módulo da diferença entre os valores finais e iniciais, finalizando com o Teorema de Pitágoras e 8,57% observaram as distâncias contando as unidades nos eixos e introduzindo estes valores no Teorema de Pitágoras. Tais realizações podem ser observadas nas Figuras 3, 4 e 5, que são extratos dos protocolos dos participantes 20, 15 e 36, respectivamente.

Figura 3: Resposta do participante 20 à Questão 3 da Avaliação Intermediária


3) $d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

$d_{AB} = \sqrt{(-16-(-21))^2 + (-11-(-6))^2}$

$d_{AB} = \sqrt{(5)^2 + (-5)^2}$

$d_{AB} = \sqrt{25+25}$

$d_{AB} = \sqrt{50}$

$d_{AB} = 7,071$ Km

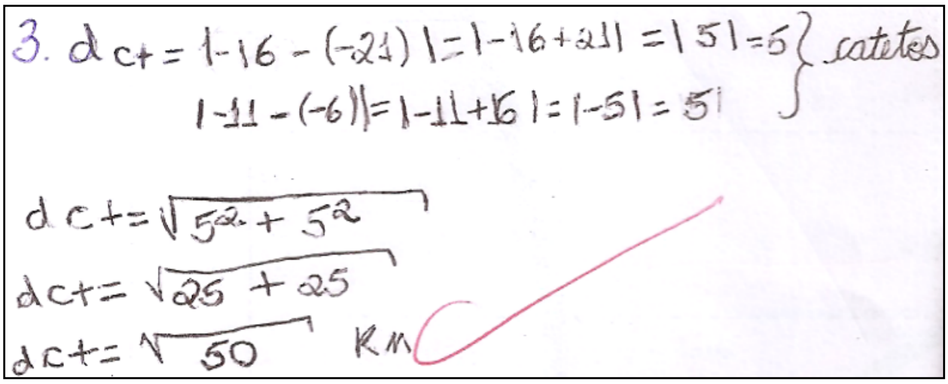
Fonte: Protocolo do participante 20

O participante 20 solucionou a questão por meio da fórmula da distância entre dois pontos, em que realiza uma *conversão* ao substituir a forma algébrica pelos valores correspondentes às abcissas e ordenadas dos pontos referentes às estações Consolação e Trianon- Masp. Após realizar vários *tratamentos*, consegue calcular a medida do trajeto realizado por Pedro.

Já o participante 15 utilizou parcialmente a mesma fórmula, conforme ilustra a Figura 4.

A resolução se deu por *tratamentos no sistema de escritas numérico*, sendo iniciada pelo módulo da diferença das abscissas e ordenadas dos pontos, que resultaram nos valores dos catetos, que foram usados na fórmula da distância.

Figura 4: Resposta do participante 15 à Questão 3 da Avaliação Intermediária


3. $d_{ct} = |-16-(-21)| = |-16+21| = |5| = 5$ catetos

$|-11-(-6)| = |-11+6| = |-5| = 5$

$d_{ct} = \sqrt{5^2 + 5^2}$

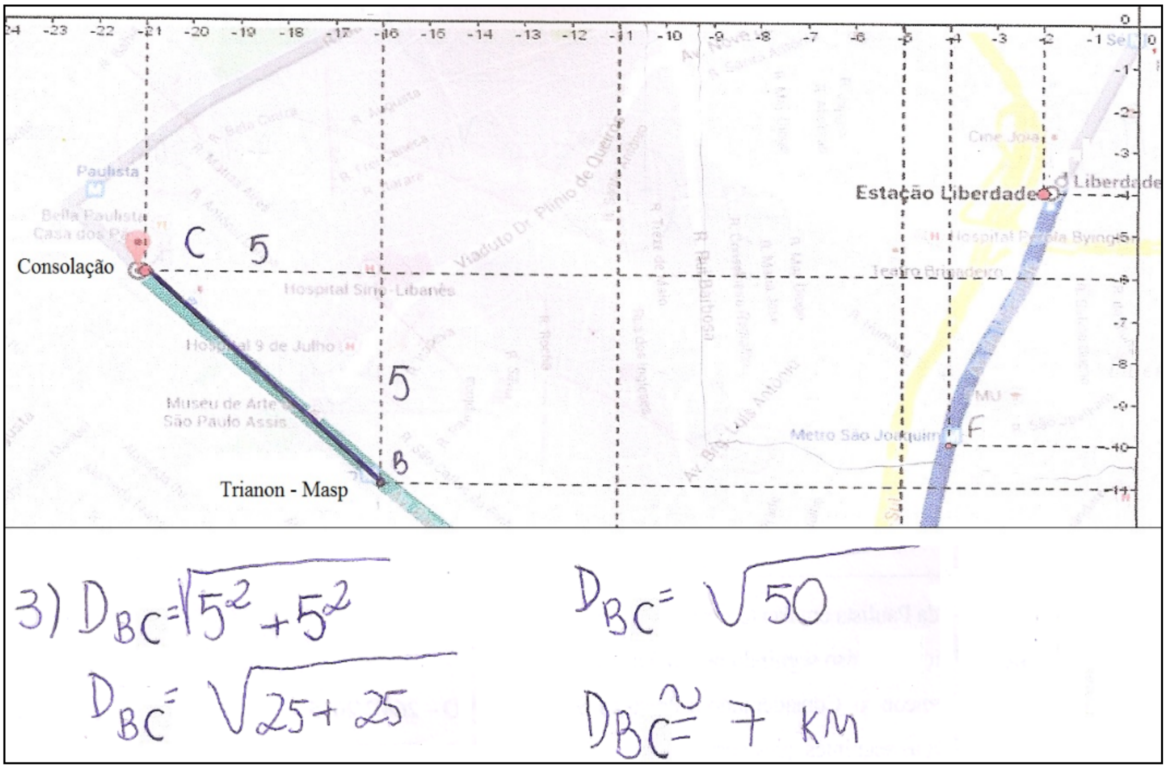
$d_{ct} = \sqrt{25 + 25}$

$d_{ct} = \sqrt{50}$ Km

Fonte: Protocolo do participante 15

O participante 36 observou a partir da imagem do mapa das estações do metrô que o trajeto realizado por Pedro era um segmento inclinado que sugeria a formação de um triângulo retângulo, e contando as unidades no próprio eixo, identificou os valores dos dois lados do triângulo e os chamou de catetos. A Figura 5 ilustra os dois tipos de registros utilizados pelo participante.

Figura 5: Resposta do participante 36 à Questão 3 da Avaliação Intermediária



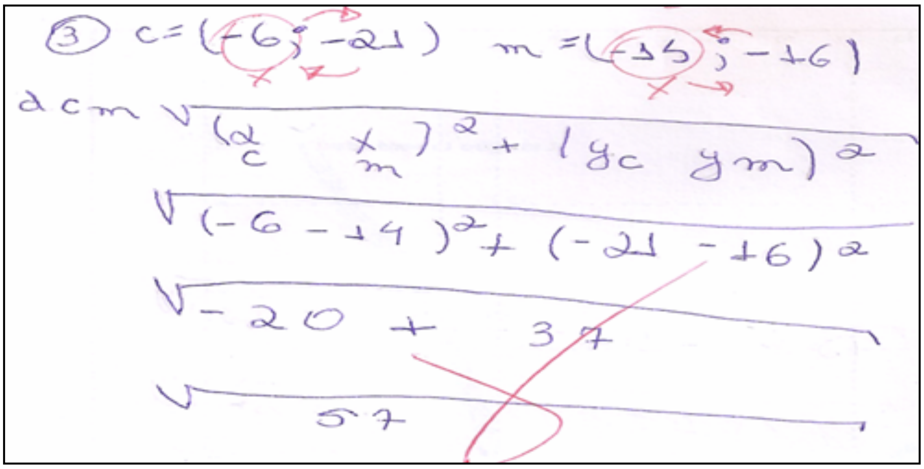
Fonte: Protocolo do participante 36

A Figura 6 apresenta a *conversão do sistema gráfico cartesiano para o sistema de escritas numérico.* Comparada às outras resoluções, esta necessitou de menos cálculos e integrou de forma mais evidente o conhecimento geométrico, na relação entre o triângulo retângulo, o Teorema de Pitágoras e os registros de representação *numérico* e *gráfico cartesiano*, incluindo *os tratamentos em registros de representação numérica* com potenciação, adição e radiciação.

Verificamos a compreensão de parte do processo do cálculo da medida do comprimento dos segmentos por alguns participantes, como o participante 29, que mesmo aplicando a fórmula da distância, por inverter os valores das coordenadas e escrever a fórmula incorretamente, como se observa na Figura 6, não obteve êxito no processo de resolução.

A habilidade de calcular as coordenadas do ponto médio e representá-las sobre o segmento era o objetivo da Questão 4. A resolução iniciava-se ao representar no plano cartesiano os segmentos de reta que compreendiam da estação Consolação à estação Paraíso (CP), da estação Paraíso à Liberdade (PL) e da estação Liberdade à Consolação (LC), determinando os seus respectivos pontos médios M, N e H. Nessa questão, os participantes da Turma 1 alcançaram 52,63% de acertos totais e 47,37% acertaram parcialmente. Na Turma 2, 37,50% conseguiram solucionar a questão corretamente, 56,25% solucionaram parcialmente e 6,25% não conseguiram solucionar. A porcentagem expressiva de acertos parciais ocorreu devido a não representação dos pontos médios sobre os segmentos, isto é devido ao insucesso em realizar a *conversão* do registro de representação *figura geométrica* para o registro *gráfico cartesiano*.

Figura 6: Resposta do participante 29 à Questão 3 da Avaliação Intermediária



Fonte: Protocolo do participante 29

Na Questão 5, era solicitado ao participante a construção de um triângulo com vértices nas estações Consolação, Paraíso e Liberdade, para calcular e localizar no plano as coordenadas do baricentro do triângulo, além de identificar se o baricentro se localizava próximo à Avenida Brigadeiro Luís Antônio. Após análise dos resultados, a Turma 1 apresentou 52,63% de acertos totais e 47,37% de acertos parciais. Já para a Turma 2, os resultados alcançados foram 37,5% de respostas corretas, 56,25% de respostas parcialmente corretas e 6,25% de respostas incorretas para a questão.

Os valores percentuais coincidiram com os dados da questão anterior, porque, os pontos médios M, N e H eram aqueles que deveriam ser utilizados para construção dos segmentos que determinavam o baricentro, como na questão 4 já haviam deixado de representar os pontos médios, na Questão 5, não conseguiram representar no plano cartesiano o baricentro do triângulo.

Confrontando os dados das questões por turma com base na Tabela 3, podemos afirmar que os objetivos e habilidades esperados para a Avaliação Intermediária foram atingidos satisfatoriamente, principalmente com a turma que fez uso do GeoGebra durante a aplicação da Sequência de Atividades. O campo visual e manipulável das ações entre as janelas do *software* nas construções dos pontos e segmentos parece ter favorecido a aprendizagem, fato que refletiu em maior número de acertos.

Tabela 3: Médias e desvio padrão das notas por turma e questões da Avaliação Intermediária.

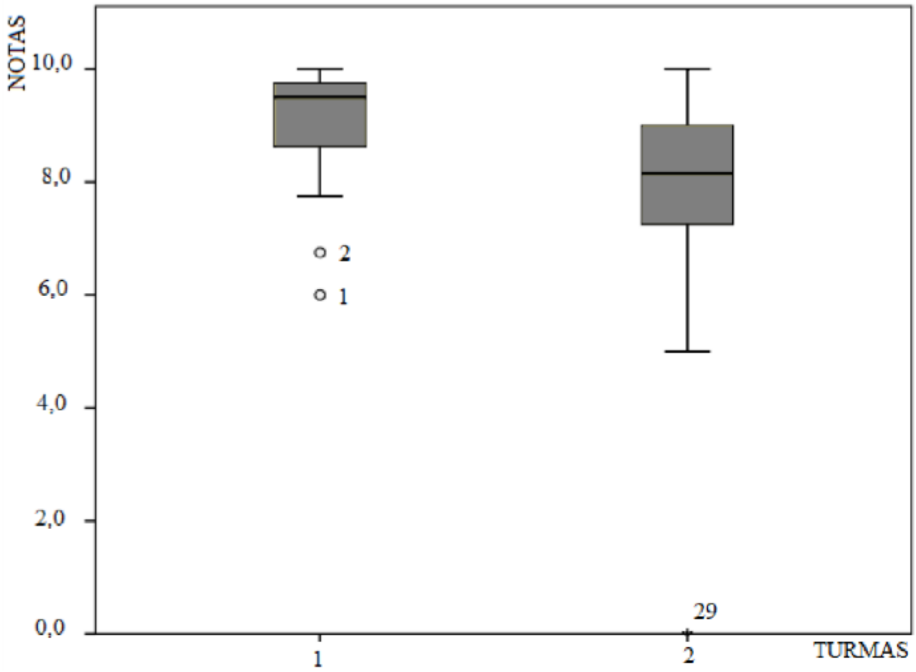
Turma	Medida	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	GERAL
1	Média	1,93	0,99	1,70	2,58	1,83	9,02
	DP	0,13	0,58	0,55	0,62	0,25	1,16
2	Média	1,64	0,92	1,36	2,31	1,45	7,68
	DP	0,66	0,25	0,79	0,85	0,63	2,41
Geral	Média	1,80	0,95	1,54	2,45	1,66	8,41
	DP	0,47	0,18	0,68	0,74	0,49	1,93

Fonte: Silva (2016, p. 119)

O desempenho das duas turmas por questões pode ser considerado bom. A Tabela 3 mostra média de 9,02 para a Turma 1 e 7,68 para Turma 2, uma diferença de 1,34 pontos percentuais.

Comparando as médias gerais das turmas na Avaliação Intermediária com as do Pré -Teste que eram de 1,06 para a Turma 1 e 0,91 para a Turma 2, verifica-se que houve crescimento de 7,96 para a Turma 1 e de 6,77 para a Turma 2. Julgamos que houve expressiva e satisfatória aprendizagem nas duas turmas. Dentre os participantes da Turma 1, três alunos obtiveram nota máxima (10), contribuindo para elevar a média das notas da turma, cuja variação pode-se observar melhor na Figura 7.

Figura 7: Box-plot da distribuição das notas da Avaliação Intermediária das duas Turmas



Fonte: Silva (2016, p. 119)

Como se observa na Figura 7, as notas da Turma 1 foram mais homogêneas, apenas os participantes 1 e 2 se diferenciaram do seu grupo, porque não realizou a questão 3 e teve nota parcial na questão 4 (participante 1) e conseguiu quase por unanimidade notas parciais em todas as questões, acertando totalmente apenas a questão 3 (participante 2). Na Turma 2, o *outlier* foi o participante 29 que não acertou questão alguma, embora tenha solucionado todas as questões, mas com coordenadas diferentes das que foram dadas.

As notas da Turma 1 na avaliação intermediária situaram-se entre 6 e 10 pontos. Já as notas da Turma 2, variaram entre 0 e 10 pontos. O que pode explicar a superioridade da Turma 1 nesta avaliação são as representações corretas das coordenadas cartesianas que eram a base para solucionar a avaliação. Inferimos que a visualização e a observação do comportamento das coordenadas ao movimentar os pontos sobre a malha quadriculada, proporcionada pelo *software* durante a sequência, foi um dos diferenciais para essa turma ter obtido resultados mais expressivos, corroborando os estudos de Santos (2011), Maltempi e Faria (2012) que apresentavam o *software* contribuindo para a apreensão de diferentes tipos de registro, graças ao seu sistema dinâmico, com visualizações simultâneas de um mesmo objeto matemático.

Finalmente, registramos que durante a aplicação da Sequência indagamos os participantes sobre o uso da ferramenta tecnológica e tivemos tanto participantes que foram favoráveis quanto participantes desfavoráveis a utilização do GeoGebra, ainda que em menor número, porque segundo eles, no vestibular ou outros exames de seleção não podem usar ferramentas tecnológicas para ajudar.

As aulas com método diferente das aplicadas pelo professor das turmas com o uso do *software* e as apenas com o recurso lápis e papel foram agradáveis de serem aplicadas e os participantes em geral gostaram da Sequência de Atividades.

A Turma 2 manifestou-se favorável às atividades da Sequência devido a atenção mais individualizada, com maior frequência de explicações às duplas. A Turma1 gostou da utilização do GeoGebra por proporcionar facilidade na realização das construções e ajudar na visualização possibilitando maior autonomia.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O momento histórico segundo Miskulin (2010) é favorável a mudanças por estarmos descontentes com os métodos comumente utilizados no ensino de Matemática que raramente contextualizam os conteúdos ou se utilizam de recursos tecnológicos digitais, ou ainda integrem conhecimentos formais e vivência prática, aproximando-se das relações cotidianas dos educandos com o meio sociocultural.

Os dados obtidos revelam que o GeoGebra influenciou positivamente na aprendizagem do conteúdo de Ponto e Reta, à medida que as habilidades requeriam visualização, construção, reconstrução, observação, comparação, mobilidade, autonomia, representações simultâneas, análises de resultados, reforços para definições ou verificação de soluções. Todavia, não observamos contribuições diretas nas que requeriam cálculos, sejam eles de quaisquer conteúdos trabalhados nas atividades.

A relação entre as janelas algébrica e geométrica do GeoGebra, favoreceu a transição entre os registros de representação semiótica (DUVAL, 2013). Representar os pontos como pares ordenados e localizá-los no plano, foi uma das principais dificuldades durante o desenvolvimento das atividades iniciais da sequência, sendo compreendida mais rapidamente pela Turma 1, o que facilitou o desenvolvimento das outras atividades por ser esta a base estrutural para o desenvolvimento de todo o conteúdo.

Outro favorecimento que a ferramenta proporcionou foi o deslocamento dos objetos na janela de visualização e a possibilidade de fazer e refazer as construções dispendendo menos tempo e com mais facilidade que nas construções com papel, lápis e régua.

De uma forma geral, verificamos que nas questões que tratavam das habilidades de visualização (localize e identifique) e nas relacionadas à construção (trace e represente), a Turma 1 apresentou média ligeiramente superior, e nas atividades que envolviam a habilidade de calcular, a Turma 2 obteve médias relativamente melhores. Assim, caracterizamos o *software* como um recurso favorável a aprendizagem por potencializar a representação dos objetos matemáticos em diferentes registros. Consideramos ainda que os educadores podem utilizá-lo de maneira mais adequada como um recurso agregado a outros em sua prática pedagógica.

Enfatizamos a necessidade de utilizar conjuntamente outros materiais e metodologias que contribuam para compreensão e apropriação da habilidade de cálculo pelos alunos, em situações, como as desta pesquisa, em que o uso do *software* não favoreceu o desenvolvimento de tal habilidade.

Embora consideremos que a aplicação da sequência tenha sido exitosa é importante destacar que os métodos de ensino no decorrer das aulas precisam ser alternados a fim de não se tonarem rotineiros.

REFERÊNCIAS

AGUIAR. A. L. Moodle e GeoGebra como apoio virtual ao ensino de Trigonometria segundo a nova Proposta Curricular do Estado de São Paulo. 2011. 153f. **Dissertação** (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Exatas)–Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2011. Disponível em: <http://www.bdtd.ufscar.br/htdocs/tedeSimplificado//tde_busca/arquivo.php?codArquivo=4631>. Acesso em: 15 jan. 2015.

BRASIL. Lei nº 9. 394, de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. **[Código civil]**. Brasília, DF, 20 de dez. de 1996. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/Leis/L9394.htm>. Acesso em: 15 out. 2014.

BRASIL. Secretária da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio**: matemática e suas tecnologias. Brasília: Mec./SEE, 1998.

DUVAL, R. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, S. D. A. (Org.). **Aprendizagem matemática registro da representação semiótica**. Campinas: Papirus, 2013. p. 11-33.

MACHADO, S. D. A. **Aprendizagem matemática registro da representação semiótica.** Campinas: Papirus, 2013.

MALTEMPI, M. V.; FARIA, R. W. S. Manipulação e análise de padrões fractais no processo de generalização de conteúdos matemáticos por meio do software GeoGebra. In: CONFERÊNCIA LATINO AMERICANA DE GEOGEBRA, 1., 2012, São Paulo. **Anais...** São Paulo, 2012. p.1-15. Disponível em: <http://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/article/view/8393 >. Acesso em: 25 maio 2014.

MORAN, J. M. **A educação que desejamos**: novos desafios e como chegar lá. Campinas: Papirus, 2012.

MISKULIN, R. G. S. As potencialidades didático-pedagógicas de um laboratório em educação matemática mediado pelas TICs na formação de professores. In: Organizadores X. (Org.). **O laboratório de ensino de matemática na formação de professores**. Campinas: Autores Associados, 2010. p. 153-178.

SANTAELLA, L. **O que é semiótica**. São Paulo: Brasiliense, 1983.

SANTOS, I. N. Explorando conceitos de geometria analítica plana utilizando tecnologias da informática e comunicação: uma ponte do ensino médio para o ensino superior construída na formação inicial de professores de matemática. 2011. 163f. **Dissertação** (Mestrado em Educação Matemática)–Instituto de Ciências Exatas e Biológicas, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2011. Disponível em: <http://www.ppgedmat.ufop.br/arquivos/dissertacoes_2011/Diss_Ivan_Nogueira_dos_Santos.pdf>. Acesso em: 10 abr. 2015.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação. **Currículo do Estado de São Paulo**: matemática e suas tecnologias. Coordenação de Maria Inês Finl e Nilson José Machado. 1. ed. atual. São Paulo, 2012. p. 72.

SILVA, G. M. Um estudo sobre o uso do GeoGebra na aprendizagem de geometria analítica no ensino médio. **Dissertação.** Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2016. Disponível em: <https://repositorio.ufscar.br/bitstream/handle/ufscar/8870/DissGMS.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em: 13 set. 2015.