# MODOS OUTROS DE EXPRESSÃO DOS CÁLCULOS DIFERENCIAL E INTEGRAL NOS RASTROS DE EUDOXO E ARQUIMEDES: POSSIBILIDADES E LIMITES PARA O ENSINO[1]

## MODOS OTROS DE EXPRESIÓN DE LOS CÁLCULOS DIFERENCIAL Y INTEGRAL EN LAS HUELLAS DE EUDOXO Y ARQUÍMEDES: POSIBILIDADES Y LIMITACIONES PARA LA ENSEÑAZA

GONDIM, Diego de Matos[2]

**RESUMO**

Neste artigo, pretendo apresentar modos outros de expressão dos Cálculos Diferencial e Integral tomando como referência as formas como Eudoxo e Arquimedes compreendiam os infinitésimos e de como essas formas podem ser pensadas como fundantes no que hoje se entende por Cálculo Diferencial e Integral. Para tanto, apresento os processos históricos pelos quais a sociedade foi atravessada do Renascimento à Ciência Moderna. Esta concisa apresentação vislumbra criar um território de desenvolvimento das ciências, sobretudo a Matemática e suas produções nos Cálculos Diferencial e Integral. Por fim, concluo este trabalho apresentando algumas justificativas de potencialidade e limitações do uso da História da Matemática como recurso didático para o ensino de Matemática, tomando em conta os rastros de expressões dos Cálculos Diferencial e Integral de Eudoxo e Arquimedes aqui apresentado.
**Palavras-chave:** Educação Matemática. História da Matemática como recurso didático. Ensino de Cálculo Diferencial e Integral.

**RESUMEN**

En este artículo, pretendo presentar modos otros de expresión de los Cálculos Diferencial e Integral tomando como referencia los modos como Eudoxo y Arquímedes comprendían los infinitos y de cómo esas formas pueden ser pensadas como fundantes en lo que hoy se entiende por Cálculo Diferencial e Integral. Para eso, presento los procesos históricos por los cuales la sociedad fue atravesada del Renacimiento a la Ciencia Moderna. Esta concisa presentación vislumbra crear un territorio de desarrollo de las ciencias, sobre todo de la Matemática y sus producciones en los Cálculos Diferencial e Integral. Por fin, concluyo este trabajo presentando algunas justificativas de las potencialidad y limitaciones del uso de la Historia de la Matemática como recurso didáctico para la enseñanza de Matemáticas tomando en cuenta los rastros de expresiones de los Cálculos Diferencial e Integral de Eudoxo y Arquímedes aquí presentado.
**Palabras-chave:** Educación Matemática. Historia de la Matemática como recurso didáctico. Ensañaza de Cálculo Diferencial y Integral.

## 1 INTRODUÇÃO

O estudo dos conceitos de limite, continuidade, derivada e integral deu-se historicamente de maneira inversa, ou seja, o Cálculo Integral desenvolveu-se primeiro que o Cálculo Diferencial, e, no século XVII, percebeu-se a relação que ambos possuíam devido à integração ser uma propriedade inversa da diferenciação (EVES, 2011). A integração, de acordo com Eves (2011), está intimamente ligada ao cálculo de áreas, volumes e comprimentos e, apesar de ser a relação inversa da integração, a diferenciação está ligada a problemas de tangentes de curvas, máximos e mínimos.

[1]Este artigo é parte da produção do Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) intitulado como "A História da Matemática como recurso didático para o ensino de Cálculo Diferencial e Integral".

[2]Discente do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Estadual Paulista "Júlio Mesquita Filho" (UNESP), Rio Claro, SP, Brasil. Endereço para correspondência: Av. 24 A, 1515, Bela Vista, Rio Claro, São Paulo, Brasil. Endereço eletrônico: gondiminit@hotmail.com.

No entanto, esse pensamento se deu devido a vários períodos históricos que remontam à Idade Média (entre os séculos V e XV) até o desenvolvimento da Ciência Moderna (século XVII). Dentre esses períodos históricos, destaca-se o Renascimento, ocorrido entre os séculos XIV e XVI. Esse período fez da Matemática Renascentista e da Matemática Moderna fiéis aliadas[3].

Neste artigo, será apresentado, de forma concisa, o movimento histórico do Renascimento para pensar suas contribuições (ou produções) junto ao surgimento da Ciência Moderna, na Matemática. Ressalto, no entanto, que muito poderia ser dito sobre este período. Porém, o objetivo do presente trabalho é apresentar algumas contribuições de Eudoxo e Arquimedes para as ciências, principalmente para a Matemática e, sobretudo, para os Cálculos Diferencial e Integral, a fim de abordá-las como possibilidades para o ensino do Cálculo Diferencial e Integral.

Desse modo, contextualizo os períodos históricos citados – não tendo como objetivo aprofundá-los – para apresentar algumas de suas contribuições na Matemática. As contribuições sobre os trabalhos de Newton e Leibniz para os Cálculos Diferencial e Integral é breve, pois se intenciona apresentar Eudoxo e Arquimedes e, sobretudo, algumas de suas contribuições, em destaque: o método de exaustão de Eudoxo e o método de Arquimedes para o cálculo de área. A apresentação dos métodos supracitados não tem a intenção de explorar todas as suas características, mas tão somente de apresentá-las como possibilidades para a introdução de ideias fundamentais no ensino de Cálculo Diferencial e Integral, a saber: infinitésimos, continuidade, limite, cálculo de áreas etc.

Por fim, é deixado como considerações que, apesar de não ser possível realizar aqui um estudo aprofundado dos métodos supracitados, os mesmos podem favorecer a produção de signos no processo de ensino de Cálculo Diferencial e Integral. Como justificativa, são apresentadas algumas possibilidades e limitações para o uso da História da Matemática como recurso didático. Destacam-se, para tanto, as possibilidades apresentadas por Miguel (1993): História-motivação; História-dialética; História-unificação.

## 2 O RENASCIMENTO E O SURGIMENTO DA CIÊNCIA MODERNA

Segundo Pedroso (2009, p.209), “[...] o renascimento foi caracterizado por profundas transformações ocorridas na vida e na visão de mundo do homem europeu”. Essas mudanças, citadas pelo autor, estão relacionadas com o desenvolvimento social, econômico, filosófico e cultural.

De acordo com o autor, “a verdade é que os homens estavam se relacionando dentro de novas coordenadas e a visão do mundo não mais poderia seguir a orientação teocêntrica [...]” (PEDROSO, 2009, p.209). Para Boyer (1981, p.197), essas transformações citadas por Pedroso (2009) estão intimamente relacionadas com a recuperação da Europa: no que tange ao “[...] do choque físico e espiritual da peste negra, e a impressão com tipos móveis tornava possível uma difusão muito maior do que em qualquer período anterior de obras eruditas”. Isso, segundo Eves (2011, p. 287), direcionou a civilização moderna a trilhar o caminho da modernidade, que, por sua vez, “[…] começou com uma renovação de interesse pela arte e pela ciência antigas”.

Cabe destacar que o desenvolvimento científico foi impulsionado, a partir do século XI, pela criação das primeiras universidades, como Bolonha (1088), Paris (1170), Cambridge (1209) e Oxford (1249). Além disso, influenciadas pelas escolas monásticas e episcopais após as reformas educativas de Carlos Magno no século VIII, essas universidades firmavam seus ensinamentos na

[3]Em Boyer (1971), Eves (2011), Gondim e Sapunaru (2016) é possível ter contato com esses desenvolvimentos de forma geral e local.

tradição clássica grega. Em outras palavras, os currículos eram alicerçados nas sete artes antigas, divididas pelo chamado *trivium* ou ensino literário (gramática, retórica e lógica), e pelo *quadrivium*, ensino científico (aritmética, geometria, música e astronomia). Nessa época, a gramática, a retórica e a lógica eram consideradas estudos elementares, enquanto a aritmética, a geometria, a música e a astronomia eram consideradas estudos avançados. Gottlieb (2007, p.424) destaca que, nessa época, "[...] a maior parte da literatura clássica, inclusive a romana, era completamente desconhecida, exceto de um escasso número de monges […]".

No entanto, em uma análise histórica, é possível perceber que o ensino, na maioria dos casos, era direcionado àqueles que ocupariam posições de destaque na igreja e no estado, pois as universidades seguiam uma espécie de lógica aristotélica. Porém, o período estava sendo marcado por diversas rupturas políticas e econômicas, o que fez com que esses currículos também fossem mudados. Por exemplo, o ensino de lógica, medicina e o *quadrivium* matemático passaram a fazer parte dos currículos. Um questionamento filosófico sobre este acontecimento, talvez, seria sobre a necessidade de tal mudança, conforme temos em *quê emergências estavam passando o conhecimento para que tais mudanças fossem necessárias?* Gottlieb (2007, p.429), ao falar sobre a inclusão da lógica na formação curricular, afirma que "[...] essa disciplina oferecia uma completa teoria da análise e do debate, que ia do sistema técnico de definição e classificação ao estudo dos ardis usados na discussão".

Ainda que os currículos fossem constituídos por fontes cristãs, a intensificação da tradução em latim e grego de obras como *Elementos*, de Euclides, a *Álgebra*, de Al-Khwarizmi, o *Almagesto*, de Ptolomeu e vários outros (EVES, 2011) começou a influenciar os currículos. Gottlieb (2007, p.425) destaca que, entre os séculos XIII e XIV, "[…] a influência de Aristóteles era, de fato, suprema. Seus conceitos e terminologia, tal como traduzidos para o latim, eram correntes na maioria dos debates acadêmicos". Desse modo, ainda que os currículos fossem notadamente influenciados pelos valores religiosos do cristianismo, nesta época ocorre a descentralização da visão cristã para uma visão mais racionalista.

Notadamente, o Renascimento estava em toda parte. De acordo com Pedroso (2009, p. 210), esses debates, essas investigações e esse novo modo de pensar da renascença "[...] ganharia contornos definidos com os trabalhos científicos de Leonardo da Vinci e de outros pensadores, a prenunciar a física de Galileu e Newton, desenvolvidas no século XVII". Além desses, Pedroso (2009) cita, por exemplo, a Teoria Heliocêntrica de Copérnico, as observações feitas por Tycho Brahe sobre os movimentos dos astros e a descoberta da lei gravitacional de Newton. Esse "[…] ímpeto dado à matemática no século XVII foi partilhado por todas as atividades intelectuais e se deveu, em grande parte, sem dúvida, aos avanços políticos, econômicos e sociais da época" (EVES, 2011, p.340).

### 2.1 Algumas contribuições na Matemática

Apesar desse fértil período da Renascença e da Revolução Industrial, que revolucionou o pensamento moderno, havendo grande desenvolvimento na Filosofia, Astronomia, Biologia e, sobretudo, na Matemática, como apresentado por Pedroso (2009), Eves (2011) e Gondim e Sapunaru (2016), os Cálculos Diferencial e Integral se tornaram o advento mais prodigioso do referido período.

O apogeu dessas áreas foi impulsionado pelos acontecimentos dos séculos XVI e XVII com as criações de cientistas como René Descartes, Pierre de Fermat, Blaise Pascal, Cavalieri, John Wallis, Isaac Barrow, entre outros. De acordo com Eves (2011), já existiam muitos resultados de natureza infinitesimal nesses séculos, mas era preciso sistematiza-los. Esse processo deu início ao que hoje é conhecido como Matemática Moderna e culminou com o estabelecimento dos Cálculos Diferencial e Integral nos trabalhos de Newton e Leibniz.

Segundo Pedroso (2009), a revalorização do homem – conhecido como pensamento antropocêntrico[4] – que, anteriormente era rejeitado pelo pensamento teocêntrico, tornou-se interesse das investigações científicas entre os séculos do Renascimento. Em suas palavras, "a verdade é que os homens estavam se relacionando dentro de novas coordenadas e a visão do mundo não mais poderia seguir a orientação teocêntrica, que prevalecera durante séculos na Idade Média" (PEDROSO, 2009, p. 2009). Essas investigações ganharam contornos em meados do século XVII nos modos em que diversos matemáticos expressavam os infinitesimais[5].

Newton nasceu em numa propriedade rural de Lincolnshire em Woolsthorpe – Inglaterra. Mais tarde foi estudar em Cambridge onde se tornou primeiramente bacharel e, em seguida, doutor. Na mesma universidade, foi substituto de seu amigo e mestre Isaac Barrow, em 1669, quando assumiu a cátedra de matemática. Não se pode negar que Barrow, amigo e mestre de Newton na universidade, teve papel muito importante na obra de Newton, o que leva alguns historiadores a fazer aproximações entre algumas de suas ideias como, por exemplo, "a ideia de curvas geradas pelo movimento de um ponto no espaço, conceito base que diferencia seu cálculo do de Leibniz, indica uma forte participação de Barrow na construção do cálculo de Newton" (GONDIM; SAPUNARU, 2016, p. 123).

Há relatos históricos que, no período compreendido entre 1665 e 1666, em virtude da peste bubônica, a Universidade de Cambridge fechou as portas e Newton refugiou-se em sua casa de campo onde desenvolveu algumas de suas ideias, como o Teorema do Binômio, o Método das Fluxões, as primeiras ideias sobre atração gravitacional e outras que podem ser vistas, resumidamente, em Pedroso (2009) e, de forma mais aprofundada, em Gondim e Sapunaru (2016).

Segundo Eves (2011), suas pesquisas em óptica tiveram tanta repercussão que incitou discussões e veementes ataques de outros cientistas. Isso levou Newton a jurar que jamais publicaria suas pesquisas em óptica. Por essa razão, somente em 1742 foi publicada sua obra *Methodus fluxionum et serierum infinitorum – O método de fluxões e séries infinitas* – escrita em 1671, onde eram apresentados o método das fluxões que, segundo Pedroso (2009) estavam ligados a estudos feitos por Wallis sobre séries infinitas. Outra importante obra de Newton para o Cálculo Diferencial e Integral, citada por Boyer (1974), Pedroso (2009) e Eves (2011) é o *Tractus de Quadratura Curvarum – Um tratado sobre a quadratura de curvas* – onde foram feitas abordagens da derivada.

Já o alemão Leibniz, nascido em Leipzig, conhecido por seu interesse em história, teologia, linguística, biologia, geologia, matemática, entre outros saberes, de acordo com Pedroso (2009, p. 277), foi à procura de um método universal para que "[...] pudesse obter conhecimentos, fazer invenções e compreender a unidade essencial do universo". Essa procura direcionou-o à elaboração do cálculo no período de 1673 a 1676, em Paris, sob a influência pessoal de Huygens, presidente da *Real Sociedade Francesa de Ciência*.

Huygens apresenta a Leibniz diversas obras, dentre elas *A Geometria de Descartes* e muito do que Fermat vinha produzindo. No entanto, cabe ressaltar que, além dessas obras, Leibniz teve contato com muitas outras produções de diversos pensadores daquela época, a saber: Cavaliere,

[4] Em linhas gerais, o antropocentrismo entende que o homem é o centro de todas as coisas, ou seja, o universo existe para a satisfação humana.
[5] Em Gondim e Sapunaru (2016) o leitor pode ter contato com essas outras expressões dos infinitesimais em diversos atores, como Descartes, Fermat, Pascoal, Hudde, Sluse e outros.

Pascal, van Haurent.[6] Pedroso (2009, p.278) pressupõe que Leibniz se lança a esses estudos, impulsionado por Huygens, porque havia rumores de que Newton possuía o método para solucionar problemas que explicasse ou compreendesse àquela unidade essencial do universo.

Devido a isso, Leibniz intencionava tornar seus cálculos mais acessíveis e, então, criou diversos símbolos e abordou suas ideias através de uma interpretação geométrica, diferentemente de Newton, que abordou suas ideias sob uma interpretação cinemática. Além disso, a critério de curiosidade, Leibniz criou vários símbolos muito conhecidos e utilizados hoje no ensino de Cálculo Diferencial e Integral nas universidades, como – *summa* – conhecido hoje como integral e, também, e usados no processo de diferenciação.

Apesar de não ser o objetivo direto deste artigo, cabe ressaltar que, aqui, o leitor pode perceber que, junto a diversos historiadores da matemática – como Howard Eves, Carl Boyer e outros – é possível afirmar que a discussão de quem foi o inventor do Cálculo Diferencial e Integral – se Leibniz, Newton ou os dois – trata-se de uma discussão infrutífera para a história e filosofia das ciências. Gondim e Sapunaru (2016), por exemplo, apesar de não voltarem à baixa Idade Média, produzem diversos modos-outros de expressão de personagens da história da matemática que atravessam os cálculos de Leibniz e Newton, como Fermat, Descartes, Hudde, Sluse, Mercator, Pascal, Cavalieri, Barrow, Wallis e outros. Devido a isso, os autores chamam de *Cálculos Diferencial e Integral*, assumindo os diversos modos de expressá-los.[7]

Não acreditando na possibilidade de apenas um inventor do Cálculo Diferencial e Integral, mas na produção de Cálculos Diferencial e Integral, este artigo se lança à aventura de trazer um pouco de modos outros de expressões dos cálculos em alguns rastros de Eudoxo e Arquimedes, mais especificamente no Método de Exaustão de Eudoxo e no Método de Cálculo de Áreas de Arquimedes. Segundo Brolezzi (1996, p.28), essa escolha se justifica quando se entende que "[...] o surgimento do Cálculo no século XVII está em plena conexão com a busca de meios de simplificar os métodos gregos, como o método da exaustão".

No entanto, é preciso antes ressaltar que não se trata de um estudo aprofundado de todas as produções de Eudoxo e Arquimedes – o que não seria exequível em um artigo – mas, como já declarado no título, apenas alguns rastros para apresentar possibilidades de introduzir noções do Cálculo Diferencial e Integral como infinito, limite, continuidade e etc. Porém, antes disso, segue uma história concisa das personagens supracitadas.

## 2.2 Eudoxo de Cnido (408 – 355 a.C.)

De acordo com Pedroso (2009), Eudoxo foi aluno do pitagórico Arquitas quando viajou para Tarento, atual Itália, e, em sua visita a Atenas, acredita-se que estudou com Platão. Atualmente, é considerado um dos maiores matemáticos do período helênico[8]. Cabe ressaltar que, além de ter sido matemático, Eudoxo foi também astrônomo e físico. (PEDROSO, 2009, p.92).

Pedroso (2009) acredita que Eudoxo ficou famoso por realizar diversas contribuições na ciência, sobretudo quando defendeu a ética baseada na noção de prazer. Em Matemática,

[6]Em Gondim e Sapunaru (2016) há uma apresentação muito dedicada ao modo como a produção do Cálculo de Leibniz estava atravessada por estes autores; é possível encontrar como, por exemplo, Leibniz compõe sua compreensão sobre os infinitésimos junto ao método de sobreposição para os indivisíveis de Cavaliere.

[7]Além disso, cabe ressaltar que os conceitos abordados por Newton e principalmente por Leibniz foram, mais tarde, muito importantes para matemáticos como Jakob Bernoulli (1654-1705), Johann Bernoulli (1667-1748), Euler (1707–1783) e outros matemáticos que – em seus trabalhos – deram continuidade ao processo de tornar os cálculos mais acessíveis e palatáveis (PEDROSO, 2009).

[8]De acordo como Eves (2011), o período helênico ou *Era Helenística* foi caracterizado como *oikoumene* (semelhante ao grego) que visava o ideal de Alexandre, ou seja, a difusão da cultura grega nos territórios conquistados. Nesse período, a Filosofia a História, a Ciência e a Matemática provaram seu primeiro desenvolvimento.

desenvolveu a conhecida teoria das proporções, desenvolveu um estudo a respeito da divisão áurea – seus estudos possibilitaram-no alcançar importantes resultados na geometria dos sólidos. Além dessas contribuições, Eudoxo resolveu a teoria das proporções entre quatro grandezas apresentadas no quinto livro dos *Elementos* de Euclides[9]. (PEDROSO, 2009).

Quando voltou para Cnido, Eudoxo ocupou um importante cargo legislativo, tornou-se professor de Teologia, Astronomia e Meteorologia, escreveu vários livros e influenciou diversos cientistas que se tornaram seus discípulos, como os irmãos Manaecmus e Teaetetus (BOYER, 1974). Segundo Boyer (1974, p.69), "Eudoxo deve ser lembrado na História da Matemática, não só pelo seu trabalho, mas também pelo de seus discípulos".

De acordo com Boyer (1974) e Pedroso (2009), Eudoxo realizou outras importantes contribuições para a Matemática ao relacionar diretamente sua Teoria das Proporções, que mais tarde é utilizado por Arquimedes, para provar áreas e volumes de figuras curvilíneas (PEDROSO, 2009). Boyer (1974) até acredita que, por motivo dessas contribuições, Eudoxo poderia ser concebido como o provável originador do Cálculo Integral.

Como já se pode notar, Eudoxo – mesmo desconhecendo os infinitésimos – realizou diversas contribuições para o que hoje é chamado de Cálculo Diferencial e Integral. Dentre essas contribuições, destacam-se o Método de Exaustão, que se relaciona de forma muito próxima ao que conhecemos por limite.

Segundo Boyer (1974), a proposição, chamada de propriedade de exaustão, base do método de exaustão de Eudoxo, era expressa da seguinte maneira:

> Se de uma grandeza qualquer subtrairmos uma parte não menor que sua metade e do resto novamente subtrair-se não menos que a metade e se esse processo de subtração é continuado, finalmente restará uma grandeza menor que qualquer grandeza de mesma espécie. (BOYER, 1974, p. 67).

Antônio Carlos Brolezzi afirma que, para isto, Eudoxo

> propôs então uma outra definição de proporção, de caráter mais geral, permitindo que os quatro termos da proporção fossem todos grandezas geométricas, evitando por completo qualquer extensão à ideia pitagórica de número. Desse modo, Eudoxo constrói um instrumento útil que podia ser manuseado sem haver misturas entre números e grandezas geométricas, isto é, sem ferir o modo de pensar grego. (BROLEZZI, 1997, p. 26).

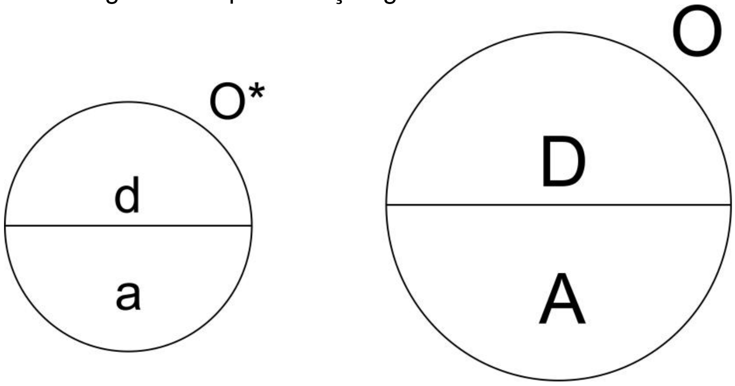
Essa definição de proporção, para Brolezzi (1996), pode ser muito bem relacionada à noção de limite utilizando um procedimento geométrico, ou seja, demonstrando a proporção entre as áreas e os diâmetros. Desse modo, considerando duas circunferências $O$ e $O^*$, tal que $O$ possui área $A$ e diâmetro $D$ e $O^*$possui área $a$ e diâmetro $d$, é possível obter a seguinte proporção:

$$a{:}A :: d^2{:}D^2$$ [10]

[9]Em Pedroso (2009, p. 92-93) essa ideia de proporcionalidade está apresentada, resumidamente, da seguinte forma: supõe-se que $A$ e $B$ sejam grandezas de mesma espécie e que $C$ e $D$ também o sejam, é possível dizer que $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$? Para Eudoxo, $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$ sempre que, tomando um $m$ e $n$ inteiros positivos quaisquer, $ma < nb$. Então $mc < nd$; se $ma = nb$, então $mc = nd$; se $ma > nb$, então $mc > nd$.

[10]O símbolo :: na linguagem matemática atual significa igual ou (=) e o símbolo : significa razão, ou seja, a está para A ou (a/A).

Figura 1: Representação geométrica de O e O^*



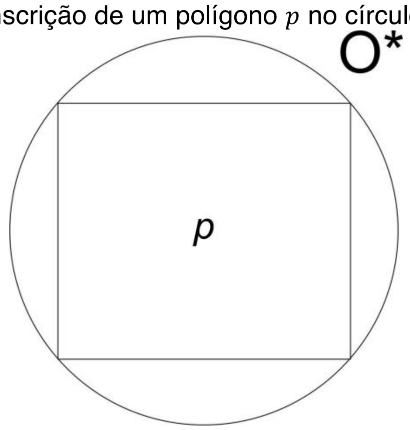

Fonte: Adaptação do autor na figura de Brolezzi (1996)

Segundo Boyer (1997), para demonstrar essa proporção é preciso mostrar que $\frac{a}{A} < \frac{d^2}{D^2}$ e que $\frac{a}{A} > \frac{d^2}{D^2}$ são possibilidade falsas, ou seja, é preciso utilizar o que se conhece na Matemática como demonstração por absurdo.

Usando a demonstração por absurdo e dizendo que esta proporção não funciona deste modo dir-se-ia que haveria outra área $a'$ onde $a' : A :: d^2 : D^2$. No entanto, "[...] se $a'$ for *menor* que $a$, então no círculo de área $a$ podemos inscrever um polígono de área $p$ tal que $p$ seja *maior* que $a'$ e *menor* que $a$" (BROLEZZI, 1996, p.27).

Para ilustrar esse processo, suponha que o polígono de área $p$ seja um quadrado, como mostra a figura 2.

Figura 2: Inscrição de um polígono $p$ no círculo de área $a$



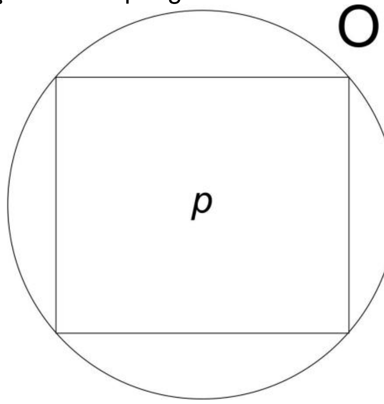

Fonte: Gondim (2014)

Boyer (1974) destaca que seja a grandeza prefixada $a - a'$ então $\varepsilon > 0$.

No círculo $O^*$ foi inscrito um polígono de área $P$ com o mesmo número de lados do polígono de área $p$, onde são consideradas as áreas fora dos polígonos, mas dentro do círculo, conforme Figura 1; ou seja, se $P$ é a área de um polígono semelhante inscrito no círculo $O$, então sabemos que $p : P :: d^2 : D^2 :: a' : A$.

No entanto, se $p > a'$, então $P > A$. Logo, isso nos leva a um absurdo, pois o polígono está inscrito no círculo e não pode ter área maior que ele. Essa demonstração pode ser utilizada para mostrar também que a suposição $a' > a$ também é um absurdo, o que significa dizer que a única possibilidade verdadeira é $a : A :: d^2 : D^2$ (BROLEZZI, 1996).

Figura 3: Inscrição de um polígono $P$ no círculo de área $A$




Fonte: Gondim (2014)

É possível notar aqui, pelo método de exaustão, que, ainda que o polígono não coincida com a circunferência, pode-se ter uma diferença tão pequena quanto se queira quando se aumenta o número de lados do polígono inscrito. Essa noção, intuitivamente, relaciona-se com a ideia de limites.

Segundo Brolezzi (1996, p.27), ao considerar as áreas dos polígonos inscritos como uma "[...] sequência infinita $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n, \dots$, teríamos um limite $C$ tal que, dado qualquer número positivo $\varepsilon$, podemos encontrar um outro inteiro positivo $N$, tal que para $n > N$". Com isso, é possível demonstrar que:

$$|C - Pn| < \varepsilon$$

Segundo Brolezzi (2006, p.28), os limites são trabalhados de forma mecânica, ou seja, ao ensinar "[...] limites não se faz uso de noções intuitivas de área, [...] que ilustrem o que está acontecendo em cada passo." Nesse aspecto, pode-se perceber a História da Matemática como instrumento de justificação dos porquês, como apresenta Miguel (1993), e de intuição.

## 2. 3 Arquimedes de Siracusa (287 – 212 a.C.)

Passando de Eudoxo a Arquimedes, em seu livro *Episódios da História antiga da Matemática*, datado de 2013, o historiador da Universidade de Yale, Asger Aaboe, ao falar de Arquimedes, inicia com a fala de Plutarco, dizendo:

> Não é possível encontrar em toda a geometria problemas mais difíceis e complicados, ou explicações mais simples e lúcidas. Alguns atribuem isso à sua genialidade; enquanto outros acham que foram produzidos por esforço e trabalho incríveis, embora aparentemente sejam resultados fáceis e obtidos sem esforço (AABOE, 2013, p.89).[11]

Essa genialidade e esforço realçados no texto de Plutarco fazem de Arquimedes um dos principais pensadores da Antiguidade Clássica[12]. Talvez seja pelas suas engenhosas máquinas bélicas ou pelos seus trabalhos na Matemática, na Física, na Astronomia e na Engenharia que Arquimedes se torna "o maior sábio da Antiguidade e um dos mais famosos de toda a história da ciência [...]" (PEDROSO, 2009, p.119).

[11] De acordo com Aaboe (2013), Plutarco viveu na metade do século I d.C. e escreveu esse trecho no seu livro *Vidas Ilustres*.

[12] Ocorreu, aproximadamente, do século VIII a.C. até século V d.C.

De acordo com Eves (2011), provavelmente Arquimedes tenha estudado na Universidade de Alexandria, pois Cônon, Dositeo e Eratóstenes[13] compunham seu quadro de amigos. No entanto, a sua fama não se deu apenas pelo fato de relacionar-se com grandes cientistas de Alexandria, mas também e principalmente pela sua genialidade e contribuições nas ciências. Segundo Pedroso (2009, p.119), Arquimedes "enriqueceu a geometria euclidiana, [...], introduziu importantes progressos na álgebra, lançou os fundamentos da mecânica e até prenunciou o Cálculo Diferencial e Integral".

Aaboe (2013) menciona que essas contribuições matemáticas citadas por Pedroso (2009) se deram em diversos trabalhos que, provavelmente, em ordem cronológica, são: "Sobre o Equilíbrio das Figuras Planas, I"; "A Quadratura da Parábola"; "Sobre o Equilíbrio das Figuras Planas II"; "Sobre a Esfera e o Cilindro"; "Sobre as espirais"; "Sobre os Cones e os Esferóides"; "Sobre os Corpos Flutuantes I, II"; "A Medida de um Cilindro"; "O Contador dos Grãos de Areia". Para Eves (2011, p.194), esses trabalhos são "[...] obras-primas de exposição matemática e lembram, consideravelmente, artigos de revistas especializadas modernas". Ao continuar sua explanação, conclui que a matemática arquimediana é provavelmente "[...] a mais notável das contribuições feitas à matemática por [e que] esses tratados se traduzam no desenvolvimento inicial de alguns métodos do cálculo integral" (EVES, 2011, p. 194).

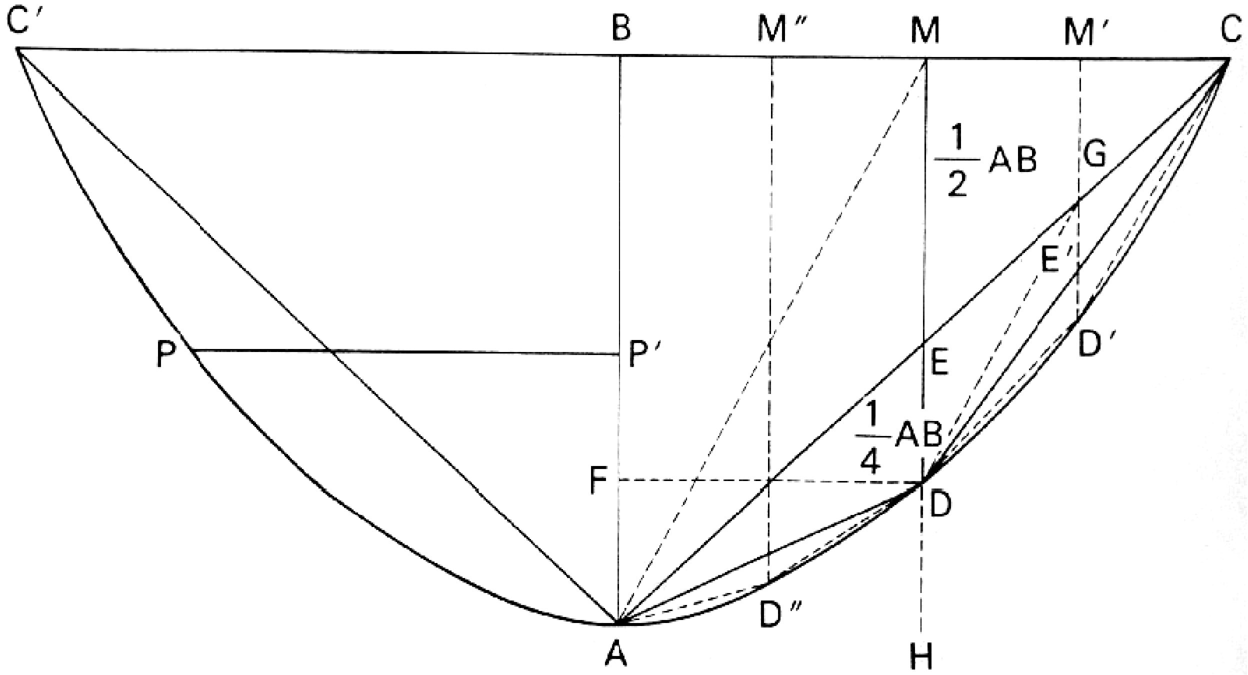
Nos livros *Sobre o Equilíbrio das Figuras Planas*, encontra-se a demonstração da Lei das Alavancas em simples teoremas, que posteriormente é utilizada para encontrar o centro de gravidade de várias lâminas. No livro *Corpos Flutuantes I*, Arquimedes justifica a Lei da Flutuação. No entanto, segundo Aaboe (2013, p.96) "[...] os livros de Arquimedes estão devotados à matemática pura", principalmente os que envolvem os Cálculos Diferencial e Integral. Por exemplo, em seu livro *Sobre a Esfera e o Cilindro*, Arquimedes demonstra que "[...] o volume de uma esfera é dois terços do volume do cilindro circunscrito, enquanto que a área da sua superfície é igual à área de quatro círculos máximos" (AABOE, 2013, p.97). Já nos livros *A Medida de um Círculo*, *A quadratura da Parábola* e *Sobre os Espirais*, vê-se uma dedicação à geometria plana, buscando demonstrar o que hoje conhecemos por π, o Método de Exaustão (cálculo integral) e *espiral de Arquimedes*, respectivamente (AABOE, 2013).

Arquimedes utilizou-se do Método de Exaustão de Eudoxo para encontrar a quadratura da parábola, hoje conhecido como Cálculo Integral, no qual, segundo Pedroso (2009, p.122), ele descobre que a "[...] área de um segmento parabólico é $\frac{4}{3}$ da área do triângulo inscrito de mesma base e altura".

Nesse processo, segundo Pedroso (2009), Arquimedes supôs que uma porção de parábola determinada por $CC'$, que possui o eixo $AB$ perpendicular, tal que $AP'$ seja proporcional a $(PP')^2$. Segundo Pedroso (2009, p.122), "Arquimedes mostrou que essa porção de parábola é $\frac{4}{3}$ da área do triângulo $C'AC$, o que equivale a dizer que a área limitada por $AB$, $BC$, e a parábola é $\frac{4}{3}$ da área do triângulo " Isso pode ser observado na Figura 4.

[13]De acordo com Eves (2011), Cônon e Dositeo eram sucessores de Euclides, enquanto que Eratóstenes era bibliotecário da Universidade.

Figura 4: Parábola determinada por CC'




Fonte: Pedroso (2009, p.122).

Arquimedes somou a área dos triângulos $ADC$ e $ABC$, onde $D$ é o ponto de uma das paralelas de $AB$, onde $M$ é ponto médio de $BC$. Nesse processo, mostra-se que $ADC = \frac{1}{4}ABC$. Em continuidade ao processo, foram construídas paralelas a $AB$ por $M'$ e $M''$, que são pontos médios de $D'$ e $D''$, respectivamente, o que levou Arquimedes a mostrar que:

$$AD''D + DD' = \frac{1}{4}ADC = \frac{1}{4^2}ABC$$

Realizando esse processo por exaustão, de acordo com Pedroso (2009), é possível concluir que a área parabólica é dada aproximadamente por:

$$ABC + \frac{1}{4}ABC + \frac{1}{4^2}ABC + \cdots + \frac{1}{4^n}ABC$$

Aaboe (2013) menciona que esse tipo de problema está relacionado com o que é chamado de integração, e acredita que a "utilidade de tais raciocínios está ligada ao processo de intuição que, posteriormente, favorece no processo de generalizações". Em suas próprias palavras:

> [...] estudo da Matemática grega mostra como as ideias originais do cálculo têm início em considerações que envolvem tanto noções de grandezas discretas quanto de grandezas contínuas, servindo ambas para se chegar aos resultados do Cálculo [...] (BROLEZZI, 1996, p.29).

## 3 PARA FINALIZAR

Tomando em conta esses modos outros de expressão dos Cálculos Diferencial e Integral, junto a Pedroso (2009), Eves (2011), Boyer (1974), Gondim e Sapunaru (2016) e, sobretudo Brolezzi (1996; 1999), acredita-se que os rastros de Eudoxo e Arquimedes podem potencializar os processos pelos quais perpassam o ensino de Cálculo Diferencial e Integral nas nossas instituições de ensino superior, pois, tomando essas ideias iniciais do pensamento grego para o Cálculo Diferencial e Integral – ou os outros modos de expressão dos cálculos – Brolezzi (1999) acredita que é possível ensiná-lo apropriando-se da História da Matemática, uma vez que, para o pesquisador, através dos problemas fundantes dos cálculos, é possível encaminhar os estudantes à intuição dos conceitos atuais.

Ao propor discussões sobre os limites e as possibilidades da História da Matemática como recurso didático, Fauvel e Maanen (2002) declara que o ICMI (Comissão Internacional de Instrução Matemática)[14], em seu contexto mais amplo, propõem uma importante problemática sobre os limites e as possibilidades da História da Matemática como recurso didático. Essas discussões foram publicadas na obra *História na Educação Matemática: o estudo ICMI*[15], na qual pesquisadores como Fauvel, Maanem, Menghini, Grunet, Rogers, Philippou, Christou, Bussi, Sierpinska e outros procuraram apresentar as discussões a respeito da inserção da História da Matemática em sala de aula. Além disso, a obra buscou apresentar o desenvolvimento da História da Matemática como campo de pesquisa em vários países como Argentina, Áustria, Brasil, China, Israel, Itália, França e outros. Nas discussões realizadas pelos pesquisadores supracitados, são apresentadas possibilidades e limitações do uso pedagógico da História da Matemática.

Em se tratando das possibilidades do uso da História da Matemática como recurso didático, dentre as apresentadas por Miguel (1993) em sua tese[16], destacam-se as que assumem que i) a História é uma fonte de motivação para o ensino e aprendizagem de Matemática; ii) a História é um instrumento de promoção do pensamento independente e crítico; iii) a História é um instrumento unificador dos vários campos da Matemática. Esses potenciais da História da Matemática como instrumento pedagógico são caracterizados, respectivamente, por Miguel (1993) como História – Motivação, História – Dialética e História – Unificação.

### 3.1 História – motivação

Pesquisadores como Tzanakis e Arcavi (2002), Barbin (2002) e Miguel (1993) defendem que a História da Matemática é uma “fonte de motivação”, pois “[...] a matemática exige o pensamento e a seriedade, enquanto que a história alivia a tensão e conforta [...]” (MIGUEL, 1993, p. 64). Esse caráter “aliviador” de tensões é considerado por Miguel (1997) como uma ação “motivadora”, ou seja, a História da Matemática nos “[...] encoraja a pensar em matemática como um processo contínuo de reflexão e de melhoria ao longo do tempo, e não como uma estrutura definida composta de verdades irrefutáveis e imutáveis” (BARBIN et al., 2002, p. 64, tradução nossa).

Essa motivação acontece quando a História da Matemática é “vista como contraponto momentâneo necessário aos momentos formais do ensino, que exigiria grande dose de concentração e esforço por parte do aprendiz” (MIGUEL, 1997, p. 75). De acordo com Simons (1923 apud MIGUEL, 1993, p. 62), a “História da Matemática e as recreações despertam e mantêm o interesse pela matéria” e “[...] suplanta o puro efeito de motivação que toda história bem contada e interessante pode causar” (BROLEZZI, 1991, p. 104). No entanto, “pode-se acrescentar que o interesse provocado pelo uso da história vai além de seu ser apenas um fator de motivação” (BARBIN et al., 2002, p. 69).

### 3.2 História – dialética

Além de seu caráter motivador, Miguel (1993) acredita que a História da Matemática pode levar o aluno a desvencilhar-se de um pensamento “mecânico”, “dependente” e “acrítico”, pois ela “[...]

---

[14]Trecho original: [International Comission Mathematical Instrucion].
[15]Trecho original: [History in Mathematics Education: the ICMI Study].
[16]Miguel (1993) apresenta outras possibilidades do uso da História da Matemática como recurso didático que, por questões de contexto, foram omitidas neste artigo.

excita a curiosidade dos alunos e incentiva-os a *questionar*" (BARBIN et al., 2002, p. 67, tradução nossa). É nessa possibilidade questionadora e dialética da História da Matemática que, segundo Barbinet al. (2002), o aluno começa a intuir significados e adquire o que Miguel (1993) caracteriza como pensamento "independente" e "crítico".

Nesse processo de intuição para o aprendiz, a "Matemática se torna viva, ela não é mais um objeto rígido. É o objeto da investigação, controvérsia, contém erros e usa métodos de tentativa e erro" (BARBIN et al., 2002, p. 67), ou seja, dialético.

De acordo com Miguel (1997, p. 85), o senso comum pedagógico é desvencilhado quando acreditamos que a formação de "[...] cidadãos com base na construção de um pensamento independente exige uma concepção [...] pedagógica do conhecimento matemático que ultrapasse os aspectos meramente lógicos e epistemológicos [...]", e – nessa construção do pensamento crítico, investigativo e independente – Barbinet al. (2002) acredita que o aluno se torna um ator de seus próprios métodos, seguindo o caminho da intuição.

### 3.3 História – unificação

Para Miguel (1997) e Fauvel e Maanen (2002), a História da Matemática está intrinsecamente ligada a outros campos do saber, seja a Física, a Astronomia, a Biologia, a Química e outras.

Segundo Miguel (1997), a história como possibilita uma conexão e uma interconexão da Matemática com todas as áreas do conhecimento. Em outras palavras, o autor defende que "apenas a história [...] poderia fornecer uma perspectiva globalizadora da matemática [...]" (MIGUEL, 1997, P. 85). Apesar de ser uma opinião radical, Demattê (2004, p. 218, tradução nossa) realça que "a História da Matemática contribui para caracterizar a matemática que, ensinada [...] como uma orientação humanista, uma vez que pode *atravessar* as disciplinas através da exploração dos seus objetivos comuns". De acordo com Baroni e Bianchi (2007), essa característica da História da Matemática como instrumento de unificação, em suas palavras possibilita um "elo entre a Matemática e outros sujeitos: a Matemática com outras disciplinas, a interdisciplinaridade [...]" (BARONI; BIANCHI (2007, p. 32), e, sobretudo, o contato dos alunos com problemas, textos, pesquisas orientadas historicamente podem direcionar os alunos a discussões que, consequentemente, "podem desenvolver melhor o seu lado pessoal" (BARONI; BIANCHI, 2007, p. 32). Ou seja, para esses pesquisadores, ensinar matemática utilizando este instrumento pedagógico pode contribuir para oportunizar aos alunos à compreensão do desenvolvimento matemático, bem como um desenvolvimento *sócio-político-cultural*.

### 3.4 Limitações do uso da História da Matemática como recurso didático

Apesar das possibilidades mencionadas, existem diversas opiniões que apontam obstáculos para utilizar a História da Matemática como recurso didático. No congresso *History and Pedagogy of Mathematics*, Siu (2006) apresentou uma pesquisa em que foram entrevistados 360 professores de Matemática de 41 escolas em Hong Kong.

Após diversas conversas com professores de diferentes escolas sobre a avaliação do valor da História da Matemática e de sua utilização em suas salas de aula – lista dezesseis limites ou fatores desfavoráveis para o uso da História da Matemática no ensino. Dentre eles, destacam-se: "Eu não tenho tempo para isso em sala de aula!"; "Os alunos consideram como história e eles odeiam aula de história!"; "Isso não é matemática!"; "Os alunos consideram tão chato quanto os próprios assuntos de matemática!"; "Há uma falta de formação de professores em História da Matemática!" e "Há uma falta de recursos materiais nele!". No artigo apresentado por Siu (2006), percebe-se que há grande preocupação, dos professores pesquisados, com a classificação dos alunos em atividades avaliativas. Os professores também consideram o uso da história uma proposta pedagógica difícil e desafiadora devido à sua falta de formação.

Corroborando com os argumentos apresentados por Siu (2006), Tzanakis e Arcavi (2002) e Baroni e Bianchi (2007) destacam que alguns educadores têm dificuldades ao utilizar a História como recurso didático, pois não encontram uma literatura adequada e que nem sempre a História tem um caráter motivador, pois existem alunos que não possuem interesse por História e, consequentemente, acarretará num desinteresse pela Matemática (BAGNI, 2002).

No entanto, Baroni e Bianchi (2007, p. 36) acreditam que, "do ponto de vista pedagógico, a forma mais interessante e eficiente da inserção da História da Matemática [...] seja sua presença dentro do contexto, como parte integrante do conteúdo.". Para realizar essa inserção, "[...] exige vontade, material apropriado e coragem" (Ibid., 2007, p. 36), pois a História "[...] quando devidamente reconstituída e organicamente articulada – pode e deve desempenhar um papel subsidiário em educação Matemática" (MIGUEL, 1993, p. 107).

Diante destas colocações, pode-se tomar em conta que os modos outros de expressão dos cálculos diferencial e integral oferecem possibilidades e limitações no processo de ensino. No entanto, fica claro que se pode afirmar que **esses** pontos da História da Matemática podem possibilitar ao aluno pensar nos processos de rupturas de determinados discursos matemáticos e nas transformações pelos quais tais ideias passaram até chegarmos aos conceitos hoje abordados nos livros didáticos. Ou seja, o estudo histórico parece favorecer uma análise mais próxima aos conceitos e, sobretudo, mais íntima com as ideias deixadas nos rastros dos matemáticos envolvidos na invenção dos Cálculos Diferencial e Integral. O método de exaustão de Eudoxo e o cálculo de áreas de Arquimedes, aqui apresentados, parecem oferecer essas potencialidades destacadas pelos pesquisadores. No entanto, também podem limitá-las se se tomar em conta as outras variantes aqui apresentadas.

## REFERÊNCIAS


AABOE, A. **Episódios da história antiga da matemática**. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

BAGNI, G. T. Difficulties with series in history and in the classroom. In: **History in mathematics education**: the ICMI study. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002. p. 82-86.

BARBIN, E. et al. Integrating history: research perspectives. In: **History in mathematics education**: the ICMI study. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002. p. 63-70.

BARONI, R. L. S.; BIANCHI, M. I. Z. (Org.). **História da matemática em livros didáticos**. Rio Claro: SBHMat, 2007.

BOYER, C. **História da matemática**. Tradução de Elza F. Gomide, São Paulo: Edgard Blücher; EDUSP, 1974.

BROLEZZI, A. C. **A tensão entre o discreto e o contínuo na história da matemática e no ensino de matemática**. 1996. 95 f. Tese (Doutorado em Educação)–Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1996.

BROLEZZI, A. C. Raízes do cálculo na Grécia Antiga. **Revista Pesquisa e Pós-Graduação**, Ouro Preto, ano 1, v. 1, n. 1, p. 38-41, jan./jun. 1999.

DEMATTÊ, A. A questionnaire for discussing the "strong" role of the history of mathematics in the classroom. In: INTERNATIONAL STUDY GROUP ON THE RELATIONS BETWEEN THE HISTORY AND PEDAGOGY OF MATHEMATICS & FOURTH EUROPEAN SUMMER UNIVERSITY HISTORY AND EPISTEMOLOGY IN MATHEMATICS EDUCATION, 4., 2004, Uppsala. **Anais...** Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/271215291>. Acesso em: 22 abr. 2014.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Tradução de Hygino H.

Domingues. Campinas, SP: Ed. da UNICAMP, 2011.

FAUVEL, J.; MAANEN, J. V. **History in mathematics education**: the ICMI study. Dordrecht. Kluwer Academic Publishers, 2002. Embora

GONDIM, D. M. **A história da matemática como recurso didático para o ensino de cálculo diferencial e integral**. 2014. 82f. Trabalho de Conclusão de Curso–Instituto Federal de Minas Gerais, São João Evangelista, 2014.

GONDIM, D. M.; SAPUNARU, R. A. **Os atores (des)conhecidos dos cálculos**. Porto Alegre, RS: Fi, 2016.

GOTTLIEB, A. **O sonho da razão**: uma história da filosofia ocidental da Grécia ao Renascimento. Rio de Janeiro: DIFEL, 2007.

MIGUEL, A. **Três estudos sobre a história e educação matemática**. 1993. 361f. Tese (Doutorado em Educação)–Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1993. Disponível em: <http://www.bibliotecadigital.unicamp.br/document/?code=vtls000069861>. Acesso em: 22 abr. 2014.

MIGUEL, A. As potencialidades da história da matemática em questão: argumentos reforçadores e questionadores. **Revista de Educação Matemática**: Zetetiké, Campinas, v. 5 n. 8, p. 73-89, jul./dez., 1997.

MOREY, B. Fontes históricas nas salas de aula de matemática: o que dizem os estudos internacionais. **Revista Brasileira de História da Matemática**, v. 13, n. 26, p. 73-83, abr. 2013. Disponível em: <http://www.rbhm.org.br/vo13-no26.html>. Acesso em: 10 mar. 2014.

PEDROSO, H. A. **História da matemática**. São Paulo: [s.l.], 2009.