OS TRIKERNELS DE STRATONOVICH E DE BEREZIN PARA J=1 E J=3/2

THE STRATONOVICH AND BEREZIN TRIKERNEL FOR J=1 AND J=3/2

HARB, Nazira H.[1]

RESUMO

Os produtos twisted estudados nesse artigo são induzidos pela correspondência padrão de Stratonovich e a de Berezin, respectivamente, e, que num certo limite assintótico x $n=2j\to\infty$, definem deformações estritas da álgebra de Poisson de S^2, de acordo com Rios e Straume (2014). Para cada um desses dois produtos, denotados por $\star_1^n$ e $\star_{\vec{b}}^n$, respectivamente, seu trikernel integral é denotado por $\mathbb{L}_1^j$ e $\mathbb{L}_{\vec{b}}^j$. Nosso objetivo é mostrar outras fórmulas para o Trikernels de Stratonovich e de Berezin, pois a formulação existente, e que pode ser vista em Rios e Straume (2014), é bastante complexa para ser trabalhada e até mesmo para interpretarmos quais qualidades e propriedades ela apresenta. A formulação que propomos dependerá de produtos internos e determinantes, facilitando assim a manipulação em outros trabalhos, além da extração de qualidades e propriedades que serão descritas nesse artigo.

Palavras-chaves: Geometria simplética. Mecânica quântica. Produto twisted. Trikernel integral.

ABSTRACT

The twisted products studied in this article are the ones obtained via the standard Stratonovich-Weyl and the standard Berezin symbol correspondences, respectively, which in a certain asymptotic limit $2j=n\to\infty$ define strict deformation quantizations of S^2 i.e. strict deformations of the Poisson algebra of S^2, according to Rios and Straume (2014). For each one of these two products on $Poly_{\mathbb{C}}(S^2)_{\leq n}$, denoted by $\star_1^n$ and $\star_{\vec{b}}^n$ respectively, its integral trikernel is denoted by $\mathbb{L}_1^j$ and $\mathbb{L}_{\vec{b}}^j$ respectively. Our goal in this article is to show other formulae to both trikernels of Stratonovich and Berezin, because such formulae which can be seen in Rios e Straume (2014) is a little complicated to work and understand their properties. The formulation we propouse depends on inner products and determinants, making it easier to work and extract properties and qualities which will be shown in this article, how we mention.

Keywords: Simplectis geometry. Quantum mechanics. Twisted product. Integral trikernel.

1 INTRODUÇÃO

Este artigo versa sobre os produtos de Stratonovich, e de Berezin, de funções na esfera S^2. Cada um deles é definido através de uma correspondência de símbolos que consiste em uma aplicação linear bijetiva entre operadores lineares num espaço de Hilbert complexo de dimensão $n+1$, ou seja, matrizes complexas $(n+1)\times(n+1)$, e polinômios complexos de grau próprio $\leq n$ definidos na 2-esfera, $Poly_{\mathbb{C}}(S^2)_{\leq n}$, satisfazendo algumas propriedades básicas, como equivariância pela ação do grupo de rotações $SO(3)$, preservação das estruturas reais e normalização como afirmam Rios e Straume (2014).

Geralmente, toda correspondência define um produto associativo mas não comutativo em $Poly_{\mathbb{C}}(S^2)_{\leq n}$ induzido do produto de operadores, chamado de produto twisted em $Poly_{\mathbb{C}}(S^2)_{\leq n}$. Cada um destes produtos twisted, por sua vez, pode ser escrito na forma integral

[1] Doutora em Matemática pela Universidade de São Paulo (USP), São Carlos, São Paulo, Brasil. Docente na Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), Londrina, Paraná, Brasil. Endereço para correspondência: Av. dos Pioneiros, 3131, CEP: 86036-370, Londrina, Paraná, Brasil. Endereço eletrônico: naziraharb@utfpr.edu.br.

$$f \star g(\mathrm{n}) = \int_{S^2\times S^2} f(\mathrm{n}_1)g(\mathrm{n}_2)\mathbb{L}(\mathrm{n}_1,\mathrm{n}_2,\mathrm{n})d\mathrm{n}_1 d\mathrm{n}_2,$$

em que $f,g \in Poly_{\mathbb{C}}(S^2)_{\leq n}$, $\mathrm{n}_1,\mathrm{n}_2,\mathrm{n} \in S^2$. Em tal representação integral, todas as propriedades do produto twisted são convertidas em propriedades do trikernel integral

$$\mathbb{L}: S^2\times S^2\times S^2 \to \mathbb{C}.$$

Os produtos twisted estudados são os induzidos pela correspondência padrão de Stratonovich e de Berezin, que em um certo limite assintótico, $2j=n\to\infty$, definem deformações estritas da álgebra de Poisson de S^2, de acordo com Rios e Straume (2014). Para cada um desses dois produtos, denotados por $\star_1^n$ e $\star_{\vec{b}}^n$, seu trikernel integral é denotado por $\mathbb{L}_1^j$ e $\mathbb{L}_{\vec{b}}^j$, respectivamente.

O que apresentaremos então são fórmulas mais tratáveis para $\mathbb{L}_1^j$ e $\mathbb{L}_{\vec{b}}^j$ nos casos de número de spin $j=1/2$ (visto primeiramente em (STRATONOVICH(1957)), 1, 3/2, 2, tais fórmulas são escritas em termos de funções de dois e de três pontos, invariantes por $SO(3)$, como produtos escalares e determinantes.

2 OS TRIKERNELS DE STRATONOVICH E DE BEREZIN

O objetivo desta seção é exibir uma fórmula fechada, que dependa de expressões invariantes por rotações, ou seja, que dependa de produtos internos e determinantes para o trikernel de Stratonovich e de Berezin, no caso geral de $n=2j$. Como veremos adiante, produtos de funções na esfera, induzidos pelo produto de matrizes (operadores), podem ser escritos na forma integral

$$f \star^n g = \int\int_{S^2\times S^2} fgL^j,$$

em que $L^j: S^2\times S^2\times S^2 \to \mathbb{C}$ é o trikernel integral que define o produto $\star$.

Conforme exposto em Rios e Straume (2014) e resumido adiante, há várias escolhas possíveis para L^j, mas duas se destacam: o trikernel padrão de Stratonovich-Weyl e o trikernel padrão de Berezin.

No artigo de Várilly e Gracia-Bondía (1989), é apresentada, como um exemplo, a fórmula recursiva para o trikernel de Stratonovich-Weyl:

$$L^{1/2}(n_1,n_2,n_3) = \frac{1}{4}(1+3(<n_1,n_2>+<n_2,n_3>+<n_1,n_3>)+3\sqrt{3}i[n_1,n_2,n_3]),$$

em que $<,>$ é o produto interno em $\mathbb{R}^3$ e $[\bullet,\bullet,\bullet]$ é o determinante da matriz 3×3, constituída dos vetores n,m,k. Contudo, não há, na literatura, outros exemplos calculados.

Além de calcular os exemplos $j=1,3/2$ e 2 para o trikernel de Stratonovich e de Berezin, cogitou-se a hipótese de haver uma fórmula fechada válida para todo j. Porém, como veremos nessa seção, não foi possível obter tal qualidade de fórmula. Todavia, essa nova expressão, para valores mais baixos de j, ficou em função de produtos internos e determinantes, como queríamos a princípio.

A seguir apresentaremos, baseados no livro de Pedro P. Rios e Eldar Straume (2014), toda a nomenclatura, definições e operadores citados acima com suas fórmulas. Para, na sequência, explorarmos o objetivo principal.

3 CORRESPONDÊNCIA DE SÍMBOLOS PARA SISTEMAS DE SPIN

As definições e o contexto apresentados a seguir são baseados no livro *Symbol correspondence for spin systems* de Rios e Straume (2014) e no artigo de Varilly e Gracia-Bondía (1989), pois são trabalhos que apresentam o tema de forma mais clara, diferentemente do artigo de Stratonovich (1957), que foi o precursor desse assunto.

Na formulação comum da mecânica quântica, o j-spin é representado por operadores atuando num espaço vetorial $\mathbb{C}^{2j+1}$, em que $j \in \{1/2, 1, 3/2, \ldots\}$. Uma base ortonormal é dada por autovetores $|jm>$, em que

$$J^2 |jm>= j(j+1)|jm> \text{ e } J_3 |jm>= m|jm>,$$

colocando a constante de Planck $\hbar = 1$.

C^{2j+1} carrega uma representação irredutível π_j de $SU(2)$ cujos elementos matriciais são convencionalmente dados por

$$D^j_{mn}(g) := < jm|\pi_j(g)|jm>.$$

O espaço de fase é a esfera S^2 equipada com a forma simplética $SU(2)$-invariante $sin\varphi d\varphi \wedge d\vartheta$. Esse fato familiar pode ser visto como aplicação do teorema Kostant-Kirilov-Souriau para o grupo $SU(2)$, pois suas órbitas coadjuntas são esferas e $SU(2)$ atua em cada órbita por rotações da esfera.

Denotamos pontos da esfera por $n = (\varphi, \vartheta)$ em cordenadas esféricas; em que $dn := sin\varphi d\varphi \wedge d\vartheta$ é a medida de área da superfície. Elementos de $SU(2)$ serão genericamente denotados por g e a ação natural de $SU(2)$ em S^2 será denotada por $g \cdot n$, efetivamente uma ação de $SO(3)$. Se f é uma função na esfera, f^g é dada por $f^g(n) := f(g^{-1} \cdot n)$. A medida de Haar dg sobre $SU(2)$ é normalizada de maneira que $\int_{SU(2)} dg = 1$. Para mais fatos e detalhes sobre momento angular spin em mecânica quântica, indicamos Biedenharn e Louck (1981).

* * *

Definição: um sistema quântico j-spin é um espaço de Hilbert $H_j \simeq \mathbb{C}^{n+1}$ munido de uma representação unitária irredutível

$$\pi_j : SU(2) \to G \subset U(2j+1),$$

em que $n = 2j$, G denota a imagem de $SU(2)$ que, por usa vez, é isomorfa a $SU(2)$ ou $SO(3)$ dependendo se j for semi-inteiro ou inteiro.

Definição: uma correspondência de símbolos para um sistema quântico j-spin $\mathcal{H}_j \simeq \mathbb{C}^{n+1}$, em que n=2j, é uma regra que associa a cada operador $P \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_j)$ uma função suave W_P sobre o espaço fase com as seguintes propriedades:

(i) Linearidade: A aplicação $P \to W_P$ é linear e injetiva;

(ii) Equivariância: $W_{P^g} = (W_P)^g$, para $g \in SU(2)$;

(iii) Realidade: $\overline{W^j_{P^*}(n)=W^j_P(n)}$;

(iv) Normalização: $\frac{1}{4\pi}\int_{S^2} W^j_P dS = \frac{1}{n+1}Tr(P)$.

***

Dessa maneira, caracterizamos uma família de aplicações de correspondência de símbolos, que será sobrejetora ao restringirmos o contradomínio desta:

$$W^j : B(H_j) \simeq M_{\mathbb{C}}(n+1) \to Poly^m_{\mathbb{C}}(S^2) \subset C^{\infty}_{\mathbb{C}}(S^2)$$

$$P \mapsto W^j_P$$

em que $Poly^m_{\mathbb{C}}$ é o conjunto dos polinômios de grau menor ou igual a m e W^j associa cada operador P a seu símbolo W^j_P. Assumimos que os símbolos W^j_P são funções polinomiais.

Notamos que por (i) e (ii) resulta que W^j é um G-isomorfismo e (iii) assegura que W^j respeita a estrutura real. Portanto, pelo seguinte teorema[2], W^j é representado pela $(n+1)$-upla real, $(c_0, c_1, \cdots, c_n)$, com cada $c_l \neq 0$.

* * *

Teorema: cada G-aplicação $\mathbb{R}$ -linear que leva matrizes hermitianas em polinômios reais pode ser identificada como uma única $(n+1)$-upla

$$(c_0, c_1, \cdots, c_n) \in \mathbb{R}^{n+1} .$$

Em particular, essa upla corresponde a um G-isomorfismo

$$\begin{array}{ccc} H(n+1) & \simeq & Poly_{\mathbb{R}}(S^2)_{\leq n} \\ \cap & & \cap \\ M_C(n+1) & \simeq & Poly_{\mathbb{C}}(S^2)_{\leq n} \end{array}$$

se e somente se cada $c_i \neq 0$.

* * *

Observamos que o símbolo W^j_I do operador identidade I é uma função constante, digamos, c_0 . Junto à condição (iv), implica que $c_0 = 1$. Nesse sentido, podemos identificar cada símbolo W^j com sua n-upla:

$$W^j \leftrightarrow (c_1, \cdots, c_n) \in (R^*)^n ,$$

em que $R^* = R - \{0\}$.

Junto aos axiomas acima podemos impor mais um:

(v) Isometria: $< W^j_P, W^j_Q > = < P, Q >_j$

[2] Para demonstração ver Pedro e Straume (2014).

como uma condição de "normalização métrica" em que o lado direito da equação acima é o produto interno normalizado de Hilbert-Schmidt de dois operadores, dado por

$$<P,Q>_j = \frac{1}{n+1} <P,Q> = \frac{1}{n+1} Tr(P^* Q)$$

$n=2j$ e o lado esquerdo é o produto interno em L^2 de duas funções, dada por

$$<W_P^j, W_Q^j> = \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} \overline{W_P^j(n)} W_Q^j(n) dS$$

Portanto a condição (iv) é apenas um caso especial de (v), ou seja, (iv) pode ser apresentada como, $<1, W_P^j> = <I,P>_j$.

O primeiro a investigar a correspondência de símbolos para sistemas de spin foi Berezin (1975). Sua correspondência satisfaz os axiomas (i)-(iv), mas não o axioma (v). Várilly e Gracia-Bondía (1989) foram os primeiros a estudar sistematicamente o tipo de correspondência $P \leftrightarrow W_P$ que satisfaz todos os cinco axiomas, como introduzido anteriormente por Stratonovich (1957), generalizando para sistemas j-spin a correspondência de Weyl.

* * *

Definição: uma correspondência de Stratonovich-Weyl é uma correspondência de símbolos que satisfaz também o axioma (v).

4 CORRESPONDÊNCIA DE SÍMBOLOS VIA OPERADOR KERNEL, O OPERADOR KERNEL DE STRATONOVICH-WEYL E O OPERADOR KERNEL DE BEREZIN.

Seguindo a ideia de Várilly e Garcia-Bondía (1989), temos que, por linearidade:

$$W_P(n) = tr(P\Delta^j(n))$$

em que Δ^j é um operador sobre S^2, o qual chamamos de operador Kernel de Stratonovich Weyl. Agora, a propriedade de tracialidade nos fornece que

$$P = \frac{2j+1}{4\pi} \int_{S^2} W_P(n) \Delta^j(n) dn.$$

Em outras palavras, a correspondência direta e inversa, $P \rightleftarrows W_P$, devem ser implementada pelo mesmo operador kernel. E, de fato, tal operador existe.

A construção de uma aplicação de símbolo W^j, em termos de um operador kernel, exigirá algumas particularidades. De forma geral, vamos chamar esse operador de K, sendo $K \in M_{\mathbb{C}}(n+1)$, que fornecerá uma função em S^2. Sendo $n_0 = (0,0,1)$, n=2j, $K(n_0) = K$ e $K(n) = K(gn_0) = K^g$ para $n = gn_0$, temos a relação[3] dada pela proposição seguinte.

***

Proposição: para cada correspondência de símbolo W existe um único operador $K \in M_{\mathbb{C}}(n+1)$ tal que

$$W_P^j(gn_0) = Tr(PK^g),$$

[3] Encontra-se em Pedro e Straume (2014).

ou, equivalentemente,

$$W_P^j(n) = Tr(PK(n)) .$$

Teremos que, além disso, K será uma matriz diagonal de traço igual a 1.

Demonstração: O funcional linear

$$\hat{W} : M_{\mathbb{C}}(n+1) \to \mathbb{C}, \ P \mapsto \hat{W}(P) = W_P(n_0)$$

é representado por algum K de maneira que $\hat{W}(P) = Tr(PK)$. Portanto, tomando g=1, temos $W_P\left(n_0\right) = Tr\left(PK\right)$. E generalizando,

$$W_P(g^{-1}n_0) = (W_P)^g(n_0) = W_{P^g}(n_0) = Tr(P^g K) = Tr(PK^{g^{-1}}).$$

Por outro lado, para $g \in U(1)$, temos $Tr(PKg) = Tr(PK)$, para todo P. Consequentemente, $K^g = K$, isto é, K é fixado por $U(1)$ e por isso, $K = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{n+1})$. Escolhendo P os elementos da base de $M_{\mathbb{C}}(n+1), E_{kk}$, obtemos $\lambda_k = W_P(n_0)$ é um número real, devido à condição de realidade, (ii). Finalmente, pela condição de normalização, (iii), $W_I = 1$ e portanto, $Tr\left(K\right) = 1$.

* * *

Agora estamos aptos a apresentar a definição seguinte.

* * *

Definição: um operador kernel $K \in M_{\mathbb{C}}(n+1)$ é uma matriz diagonal com a propriedade de uma aplicação de símbolos dada por

$$W_P^j(gn_0) = Tr(PK^g),$$

é uma correspondência de símbolos.

* * *

Em vista do que apresentamos acima, K possui uma decomposição ortogonal

$$K = \frac{1}{n+1} I + K_1 + K_2 + \ldots + K_n,$$

em que para $l \geq 1$, K_l é uma matriz diagonal, real e de traço nulo, ou seja, $K_l = k_l \ e\left(l,0\right)$, onde $k_l \neq 0$ e

$$e(l,0) = \frac{(-1)^l}{l!}\sqrt{2l+1}\sqrt{\frac{(n-l)!}{(n+l+1)!}}\sum_{k=0}^{l}(-1)^k \begin{pmatrix} l \\ k \end{pmatrix} J_-^{l-k} J_+^l J_-^k,$$

em que

$$J_- = J_+^t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \sqrt{n.1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{(n-1).2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \sqrt{2.(n-1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \sqrt{1.n} & 0 \end{bmatrix}.$$

* * *

Proposição: existe uma bijeção entre correspondência de símbolos e matrizes reais diagonais em $M_C(n+1)$ do tipo

$$K=\frac{1}{n+1}I+\sum_{l=1}^{n}c_l\sqrt{\frac{2l+1}{n+1}}e(l,0), c_l\in\mathbb{R}\neq 0,$$

e, ainda, para toda correspondência de símbolos de Stratonovich-Weyl, $c_l=\pm 1$ para todo l.

Demonstração: Ver Pedro e Straume (2014).

Definição: Os números reais não nulos $c_1,c_2,\ldots,c_n$ são denominados números característicos do operador kernel K.

Definição: A única correspondência positiva de símbolos de Stratonovich-Weyl (para a qual todos os números característicos são iguais a 1, isto é, $c_l=1$), é chamada de correspondência de símbolos de Stratonovich-Weyl padrão e denotada por:

$$W_1^j : B(H_j)\simeq M_{\mathbb{C}}(n+1)\to Poly_{\mathbb{C}}(S^2)_{n\leq}\subset C_{\mathbb{C}}^{\infty}(S^2).$$

O operador kernel K, neste caso, é denotado por K_1 ou por Δ como em Várilly e Gracia-Bondía (1989).

* * *

Vamos, agora, destacar a correspondência de símbolos que originalmente foi definida por Berezin.

* * *

Definição: A correspondência de símbolos de Berezin é uma correspondência cujo operador kernel K é um operador projeção Π.

* * *

Como o traço de um operador projeção é seu rank, segue que Π deve ser uma matriz $\Pi_k=E_{kk}$ para $1\leq k\leq n+1=2j+1$, ou seja, $\Pi_k=(-1)^{k+1}\sum_{l=0}^{n}C_{m,-m,0}^{j,j,l}e(l,0)$, em que $m=j-k+1$ e cada coeficiente de Clebsch-Gordan deve ser não nulo.

* * *

Definição: A correspondência de símbolos obtida via operador projeção Π_1 é chamado de símbolo de Berezin padrão.

* * *

Assim como definimos uma correspondência de símbolos via um kernel para o caso Stratonovich, podemos fazer o mesmo para Berezin da seguinte maneira: definimos uma aplicação B que associa a cada operador $Q\in M_{\mathbb{C}}(n+1)$ a função B_Q sobre a esfera S^2,

$$B_Q(gn_0)=Tr(Q\Pi_1^g),\quad g\in SU(2),$$

em que $n_0=(0,0,1)\in S^2$ e Π_1 é o operador projeção

$$\Pi_1=diag(1,0,0,\cdots,0).$$

* * *

Definição: A aplicação B é a correspondência de símbolos de Berezin padrão.

* * *

Os números característicos para a correspondência de símbolos de Berezin padrão são os números característicos da aplicação de símbolos cujo operador kernel é o operador projeção Π_1. Portanto, para cada $n=2j$ existe uma n-upla $\vec{b}$ de n números característicos possivelmente dependendo de n. Denotaremos esses números por b_l^n, em que

$$\vec{b}=(b_1^n,b_2^n,\cdots,b_l^n,\cdots,b_n^n).$$

Esses números são expressos da seguinte maneira:

$$b_l^n=\sqrt{\frac{n+1}{2l+1}}<\Pi_1,e^j(l,0)>=\sqrt{\frac{n+1}{2l+1}}e^j(l,0)_{1,1},$$

em que $e^j(l,0)_{1,1}$ denota a primeira entrada da matriz diagonal $e^j(l,0)=e(l,0)$.

A forma explícita dos números característicos b_l^n da correspondência de símbolos padrão de Berezin é dada por:

$$b_l^n=\sqrt{\frac{n(n-1)\ldots(n-l+1)}{(n+2)(n+3)\ldots(n+l+1)}}=\sqrt{\frac{\begin{pmatrix} n \\ l \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} n+l+1 \\ l \end{pmatrix}}}=\frac{n!\sqrt{n+1}}{\sqrt{(n+l+1)!(n-l)!}}.$$

Observamos que essa fórmula é obtida a partir de

$$b_l^n=\sqrt{\frac{n+1}{2l+1}}C_{j,-j,0}^{j,j,l}.$$

Mas há uma outra demonstração de como encontrar esses b_l^n bastante interessante que pode ser vista no Apêndice 7.4 de Pedro e Straume (2014).

5 PRODUTO TWISTED NA ESFERA

Dada uma correspondência de símbolos, definimos:

$$W_A\star W_B=W_{AB},$$

para quaisquer operadores A e B. Dada a correspondência de Stratonovich Weyl, para um particular j, notamos que:

$$W_{AB}=Tr(\Delta^j(n)AB)=(\frac{2j+1}{4\pi})^2Tr(\Delta^j(n)\int_{S^2}\Delta^j(m)W_A(m)dm\int_{S^2}\Delta^j(k)W_B(k)dk).$$

Portanto, a definição apropriada para o produto twisted de duas funções g e f em $\mathfrak{H}_{2j}$ [4], é dado por:

$$(f\star_1 g)(n):=\int_{S^2}\int_{S^2}L_1^j(n,m,k)f(m)g(k)dmdk,$$

---

[4] Espaço de Hilbert dos harmônicos esféricos cuja base ortonormal é $\{Y_l^m:0\le l\le 2j,-l\le m\le l\}$.

em que o trikernel L_1^j é apenas

$$L_1^j(n,m,k)=(\frac{2j+1}{4\pi})^2 tr(\Delta^j(n)\Delta^j(m)\Delta^j(k)).$$

Da condição de $\Delta^j(g\cdot n)=\pi_j(g)\Delta^j(n)\pi_j(g)^{-1}$ e da fórmula acima temos que

$$L_1^j(g\cdot n,g\cdot m,g\cdot k)=L^j(n,m,k)\ ,$$

para $g\in SU(2)$, o que implica que o produto twisted é equivariante, ou seja,

$$(f\star_1 h)^g=f^g\star_1 h^g$$

para todo $g\in SU(2)$.

A fórmula acima nos diz que o trikernel é uma função rotacionalmente invariante nas suas entradas vetoriais. De acordo com o teorema de Weyl (1946), dependerá apenas da combinação de permutação de produtos escalares e de determinante. Por exemplo, para j=1/2 temos

$$L_1^{1/2}(n,m,k)=\frac{1}{4}(1+3(<n,m>+<m,k>+<k,n>)+3\sqrt{3}i[n,m,k]).$$

A partir dessa ideia, procuramos encontrar uma fórmula geral, que representasse o trikernel de Stratonovich (e de Berezin, posteriormente). Fórmula essa que dependeria de produtos internos e determinantes, como Weyl afirmou.

Formalizando o contexto acima, temos a definição seguinte para correspondência de símbolos em geral.

* * *

Definição: para uma dada correspondência de símbolos

$$W^j:B(H_j)\simeq M_{\mathbb{C}}(n+1)\to Poly_{\mathbb{C}}(S^2)\subset C^\infty_{\mathbb{C}}(S^2),$$

que associa cada operador P ao símbolo W_P^j, o produto twisted $\star$ que é a operação binária sobre símbolos

$$\star: W^j(\mathcal{B}(\mathcal{H}_j))\times W^j(\mathcal{B}(\mathcal{H}_j))\to W^j(\mathcal{B}(\mathcal{H}_j))\simeq Poly_{\mathbb{C}}(S^2)$$

induzida pelo produto de operadores dada por

$$W_{PQ}^j=W_P^j\star W_Q^j.$$

* * *

Sejam $g\in SO(3)$ e $f_1,f_2,f_3\in W^j(B(H_j))\simeq Poly_C(S^2)\subset C_C^\infty(S^2)$, temos que a álgebra de símbolos definida por qualquer produto twisted satisfaz as seguintes propriedades:

(i) $SO(3)$ - equivariante: $(f_1\star f_2)^g=f_1^g\star f_2^g$;

(ii) associativa: $(f_1\star f_2)\star f_3=f_1\star(f_2\star f_3)$;

(iii) unital: $1\star f=f\star 1=f$;

(iv) estrela álgebra: $\overline{f_1\star f_2}=\overline{f_2}\star\overline{f_1}$.

Em vista da definição acima, podemos usar o postulado de normalização da definição de correspondência de símbolos para definir um produto interno induzido no espaço de símbolos:

$$<W_P^j, W_Q^j>_\star := \frac{1}{4\pi}\int_{S^2}\overline{W_P^j}\star W_Q^j dS.$$

Com isso podemos escrever o postulado de isometria (tracionalidade) como

(v) Isometria: $<W_P^j, W_Q^j> = <W_P^j, W_Q^j>_\star$.

De fato, por um lado temos

$$<W_P^j, W_Q^j> = <P,Q>_j = \frac{1}{n+1}Tr(P^*Q)$$

e, por outro,

$$<W_P^j, W_Q^j>_\star = \frac{1}{4\pi}\int_{S^2}\overline{W_P^j}\star W_Q^j dS = \frac{1}{4\pi}\int_{S^2}W_{P^*}^j\star W_Q^j dS = \frac{1}{4\pi}\int_{S^2}W_{P^*Q}^j dS = \frac{1}{n+1}Tr(P^*Q).$$

* * *

Definição: O produto twisted obtido via correspondência de Stratonovich-Weyl é chamado de produto twisted padrão de símbolos e é denotado por $\star_1^n$ ou simplesmente por $\star_1$.

* * *

Portanto, para $f,g \in W_1^j(\mathcal{B}(\mathcal{H}_j)) = W^j(\mathcal{B}(\mathcal{H}_j)) \simeq Poly_C(S^2)_{\leq n} \subset C_{\mathbb{C}}^\infty(S^2)$,

$$\star_1 = \star_1^n : (f,g) \mapsto f\star_1^n g \in W^j(\mathcal{B}(\mathcal{H}_j)) \simeq Poly_C(S^2)_{\leq n} \subset C_{\mathbb{C}}^\infty(S^2).$$

E, finalmente, antes de introduzir o trikernel de Stratonovich, exibiremos a representação integral do produto twisted. O produto twisted de símbolos esféricos pode ser escrito na forma:

$$f\star g(n) = \int_{S^2}\int_{S^2} f(n_1)g(n_2)L(n_1,n_2,n)dn_1dn_2.$$

A forma integral para o produto twisted nos permite uma definição direta e geral desse produto de símbolos arbitrários $f,g \in Poly_C(S^2)_{\leq n}$ sem necessidade de decompô-los na base de harmônicos esféricos. Em tal representação integral todas as propriedades do produto twisted são encontrados no trikernel integral

$$L : S^2\times S^2\times S^2 \to \mathbb{C}.$$

Nos casos estudados nesse artigo, temos que $L = L_1^j$ ou $L_{\vec{b}}^j$.

Para a correspondência de símbolo de Stratonovich-Weyl, W_1^j, temos a definição que se segue.

* * *

Definição: Sejam $f,g \in C_{\mathbb{C}}^\infty(S^2)$ tais que $f = W_1^j(F)$, $g = W_1^j(G)$, para $F,G \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_j)$ onde W_1^j é determinado pelo operador kernel K_1^j com todos os números característicos $c_l = 1$, para $0 \leq l \leq n = 2j$, na equação $K = \frac{1}{n+1}I + \sum_{l=1}^{n} c_l\sqrt{\frac{2l+1}{n+1}}e(l,0)$. Logo,

$$f *_1^n g(n) = \int_{S^2\times S^2} f(n_1)g(n_2)\mathbb{L}_1^j(n_1,n_2,n)dn_1dn_2,$$

em que

$$\mathbb{L}_1^j(n_1,n_2,n)=(\frac{2j+1}{4\pi})^2\mathrm{Tr}(K_1^j(n_1)K_1^j(n_2)K_1^j(n))$$

é o trikernel de Stratonovich.

* * *

O Trikernel de Stratonovich também pode ser reescrito da seguinte maneira:

$$\mathbb{L}_1^j(n_1,n_2,n)=\sum_{l_k,m_k}(-1)^{2j}\sqrt{(2j+1)(2l_1+1)(2l_2+1)(2l+1)}\begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l \\ m_1 & m_2 & -m \end{bmatrix}[j]\overline{Y_{l_1}^{m_1}}(n_1)\overline{Y_{l_2}^{m_2}}(n_2)\overline{Y_l^m}(n)$$

em que a soma em l_k e m_k satisfaz: $0\le l_k\le n=2j, -l_k\le m_k\le l_k$, $\Delta(l_1,l_2,l_3)=1$, $m_1+m_2+m_3=0$ e

$$\begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l \\ m_1 & m_2 & -m \end{bmatrix}[j]=\begin{Bmatrix} l_1 & l_2 & l \\ j & j & j \end{Bmatrix}\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l \\ -m_1 & -m_2 & m \end{pmatrix}$$

é o produto do 6j-símbolo pelo 3j-símbolo, respectivamente.

Teorema: O Trikernel de Stratonovich é simétrico, ou seja:

$$\mathbb{L}_1^j(n_1,n_2,n_3)=\mathbb{L}_1^j(n_3,n_1,n_2)=\mathbb{L}_1^j(n_2,n_3,n_1).$$

Demonstração: Essa simetria é obtida graças à simetria de $\begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l \\ m_1 & m_2 & -m \end{bmatrix}[j]$.

Teorema: O Trikernel de Stratonovich satisfaz as seguintes propriedades:

(i) $L_1^j(n_1,n_2,n)=L_1^j(gn_1,gn_2,gn),\quad g\in SU(2)$;

(ii) $\int_{S^2}L_1^j(n_1,n_2,n)L_1^j(n,n_3,n_4)dn=\int_{S^2}L_1^j(n_1,n,n_4)L_1^j(n_2,n_3,n)dn.$

(iii) $\int_{S^2}L_1^j(n_1,n_2,n)dn_1=R^j(n_2,n)$, $\int_{S^2}L_1^j(n_1,n_2,n)dn_2=R^j(n_1,n),$ onde $R^j(n_2,n)\in Poly_{\mathbb{C}}(S^2)$ é o kernel de reprodução da álgebra polinomial truncada $Poly_{\mathbb{C}}(S^2)$, caracterizado por $\int_{S^2}R^j(n_2,n)f(n_2)dn_2=f(n)$, para toda $f\in Poly_{\mathbb{C}}(S^2)$;

(iv) $L_1^j(n_2,n_1,n)=\overline{L_1^j(n_1,n_2,n)}.$

Demonstração:

(i) De fato,

$$L_1^j(gn_1,gn_2,gn)=\left(\frac{2j+1}{4\pi}\right)^2Tr(K_1^j(gn_1)K_1^j(gn_2)K_1^j(gn))$$

$$=\left(\frac{2j+1}{4\pi}\right)^2Tr((\pi_j(g)K_1^j(n_1)\pi_j^{-1}(g))(\pi_j(g)K_1^j(n_2)\pi_j^{-1}(g))(\pi_j(g)K_1^j(n)\pi_j^{-1}(g)))$$

$$=\left(\frac{2j+1}{4\pi}\right)^2Tr(K_1^j(n_1)K_1^j(n_2)K_1^j(n))=L_1^j(n_1,n_2,n).$$

(ii) Sejam $f,g,h\in Poly_{\mathbb{C}}(S^2)$, temos que o produto twisted é associativo, ou seja, $(f\star g)\star h=f\star(g\star h)$, logo, por um lado,

$$(f\star g)\star h(n_4)=\int_{S^2}\int_{S^2}(f\star g)(n)h(n_3)L_1^j(n,n_3,n_4)dndn_3$$

$$=\int_{S^2}\int_{S^2}\left(\int_{S^2}\int_{S^2}f(n_1)g(n_2)L_1^j(n_1,n_2,n)dn_1dn_2\right)h(n_3)L_1^j(n,n_3,n_4)dndn_3$$

$$=\int_{S^2}\int_{S^2}L_1^j(n_1,n_2,n)\int_{S^2}\int_{S^2}L_1^j(n,n_3,n_4)f(n_1)g(n_2)h(n_3)dn_1dn_2dndn_3$$

e por outro,

$$f\star(g\star h)(n_4)=\int_{S^2}\int_{S^2}f(n_1)(g\star h)(n)L_1^j(n_1,n,n_4)dn_1dn$$

$$=\int_{S^2}\int_{S^2}L_1^j(n_2,n_3,n)\int_{S^2}\int_{S^2}L_1^j(n_1,n,n_4)f(n_1)g(n_2)h(n_3)dn_2dn_3dn_1dn\ .$$

(iii) Essa afirmação segue de:

$$f(n)=(f\star 1)(n)=\int_{S^2}\int_{S^2}f(n_1)L_1^j(n_1,n_2,n)dn_1dn_2\,,$$

e

$$f(n)=(1\star f)(n)=\int_{S^2}\int_{S^2}f(n_2)L_1^j(n_1,n_2,n)dn_1dn_2.$$

(iv) Como

$$\overline{L_1^j(n_1,n_2,n)}=\left(\frac{2j+1}{4\pi}\right)^2\overline{Tr(K_1^j(n_1)K_1^j(n_2)K_1^j(n))}$$

$$=\left(\frac{2j+1}{4\pi}\right)^2Tr((K_1^j(n_1)K_1^j)^*(n_2)K_1^j(n))=\left(\frac{2j+1}{4\pi}\right)^2Tr(K_1^j(n_2)K_1^j(n_1)K_1^j(n))=L_1^j(n_2,n_1,n).$$

* * *

Observamos que, para definir o trikernel de Stratonovich e explicitar suas propriedades, começamos com o símbolo de Stratonovich-Weyl W_1^j. Faremos o mesmo agora para definir o trikernel de Berezin.

Considerando B a correspondência de símbolo de Berezin padrão. Como essa correspondência de símbolo não é simétrica, existem dois produtos internos naturais $SU(2)-$ invariante sobre o espaço de símbolos $Poly_{\mathbb{C}}^m(S^2)$:

- o produto usual L^2 sobre $C_{\mathbb{C}}^\infty(S^2)\supset Poly_{\mathbb{C}}(S^2)$:

$$<f_1,f_2>=\frac{1}{4\pi}\int_{S^2}\overline{f_1}f_2dS=\frac{1}{4\pi}\int_{S^2}\overline{f_1}(n)f_2(n)dn.$$

- o produto interno induzido sobre $Poly_{\mathbb{C}}(S^2)\subset C_{\mathbb{C}}^\infty(S^2)$:

$$<f_1,f_2>_{\star_b^n}=\frac{1}{4\pi}f_1\star_b^n f_2dS=\frac{1}{4\pi}\int_{S^2}f_1(n)\star_b^n f_2(n)dn.$$

Podemos agora definir um trikernel integral, baseando-nos nesses dois produtos internos, cujo nome é trikernel de Berezin L_b^j, definido por:

$$f_1\star_b^n f_2(n)=\int\int_{S^2\times S^2}f_1(n_1)f_2(n_2)L_b^j(n_1,n_2,n)dn_1dn_2.$$

* * *

Definição: Definimos o trikernel de Berezin, adicionando na fórmula de Stratonovich os números característicos da correspondência de símbolos padrão de Berezin,

$$\sqrt{\frac{\binom{n+l_1+1}{l_1}\binom{n+l_2+1}{l_2}\binom{n}{l_3}}{\binom{n}{l_1}\binom{n}{l_2}\binom{n+l_3+1}{l_3}}}.$$

Obtemos:

$$L_{\bar{b}}^{j}(n_1,n_2,n)=\sum_{l_k,m_k}\frac{(-1)^n\sqrt{(2j+1)(2l_1+1)(2l_2+1)(2l+1)}}{(4\pi)^2}\begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l \\ m_1 & m_2 & -m \end{bmatrix}[j]$$

$$\sqrt{\frac{\binom{n+l_1+1}{l_1}\binom{n+l_2+1}{l_2}\binom{n}{l_3}}{\binom{n}{l_1}\binom{n}{l_2}\binom{n+l_3+1}{l_3}}}\,\overline{Y_{l_1}^{m_1}}(n_1)\overline{Y_{l_2}^{m_2}}(n_2)\overline{Y_l^{m}}(n)\,,$$

em que

$$\begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l \\ m_1 & m_2 & -m \end{bmatrix}[j]=\begin{Bmatrix} l_1 & l_2 & l \\ j & j & j \end{Bmatrix}\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l \\ -m_1 & -m_2 & m \end{pmatrix}.$$

* * *

Observamos que já o Trikernel de Berezin, $L_{\bar{b}}^{j}$ não possui a propriedade de simetria como o Trikernel de Stratonovich, mas ele satisfaz todas as propriedades enunciadas para o trikernel de Stratonovich.

6 CÁLCULOS EXPLÍCITOS PARA O TRIKERNEL DE STRATONOVICH E DE BEREZIN

O objetivo desta seção é encontrar fórmulas explícitas para o trikernel de Stratonovich e de Berezin. Para tal, vamos primeiramente obter uma fórmula alternativa que dependa apenas de produtos internos e determinantes que são funções $SO(3)$-invariantes. É o teorema cuja demonstração se encontra em Weyl (1946), que nos permite chegar a essa formulação.

* * *

Teorema: Toda função de três pontos na esfera S^2, $SO(3)$-invariante, representada por vetores unitários n_1,n_2,n, no espaço tri-dimensional euclidiano, pode ser expressada como uma função de três produtos internos

$$\langle n_1,n_2\rangle,\langle n_1,n_3\rangle,\langle n_2,n\rangle,$$

junto com o determinante

$$[n_1,n_2,n_3]=det(n_1,n_2,n).$$

Teorema: Sejam $n_1, n_2, n_0 \in S^2$, $0 \leq l_k \leq 2j$ e cada tripla (l_1, l_2, l_3) satisfazendo a propriedade triangular e $-l_k \leq m_k \leq l_k$ para $k = 1,2,3.$. E seja

$$A = A(n_1, n_2, n_0) = <n_1, n_2> - <n_0, n_1><n_0, n_2>, \quad B = B(n_1, n_2, n_0) = det[n_1, n_2, n_0],$$

denotamos:

$$\mathcal{L}_{l_1, l_2, l_3}(n_1 n_2, n_0) = \sqrt{(2l_1+1)(2l_2+1)(2l_3+1)}(\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^0_{l_1}(z_1) P^0_{l_2}(z_2)$$

$$+ \sum_{m=1}^{min(l_1, l_2)} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m & -m & 0 \end{pmatrix} \sqrt{\frac{(l_1-m)!(l_2-m)!}{(l_1+m)!(l_2+m)!}} P^m_{l_1}(z_1) P^m_{l_2}(z_2)(-1)^m[(A-iB)^m + (-1)^{l_1+l_2+l_3}(A+iB)^m]).$$

Então,

$$\mathbb{L}^j_1(n_1, n_2, n_0) = \frac{(-1)^{2j}\sqrt{2j+1}}{(4\pi)^2} \sum_{l_k} \begin{Bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ j & j & j \end{Bmatrix} \mathcal{L}_{l_1, l_2, l_3}.$$

Demonstração: Como o trikernel de Stratonovich é invariante por rotação, usaremos o ponto inicial $n_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $n_2 = (x_2, y_2, z_2)$ e $n_0 = (0,0,1)$. E depois, generalizaremos para qualquer ponto da esfera, considerando que qualquer ponto da esfera pode ser obtido por uma rotação de n_0. Iniciaremos a demonstração com o somatório em $-l_k \leq m_k \leq l_k$:

$$\sum_{m_k} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ -m_1 & -m_2 & m_3 \end{pmatrix} . \overline{Y^{m_1}_{l_1}}(n_1) . \overline{Y^{-m_1}_{l_2}}(n_2) . \overline{Y^{m_3}_{l_3}}(n_0)$$

Usaremos que:

(i) $Y^0_l(0, \phi) = \sqrt{2l+1}$;

(ii) $m_1 + m_2 = 0$ [5];

(iii) $Y^m_l(\varphi, \theta) = (-1)^m \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} . \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P^m_l(cos\varphi) e^{im\theta}$;

(iv) Das coordenadas esféricas: $x = cos(\theta)sen(\varphi), y = sen(\theta)sen(\varphi), z = cos(\varphi),$

obtemos que

$$e^{im\theta} = \frac{(x+iy)^m}{(1-z^2)^{m/2}},$$

pois $x + iy = sen(\varphi)(cos(\theta) + isen(\theta)) = (1-z^2)^{1/2} e^{i\theta}$.

Segue:

$$\sum_{m_k} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ -m_1 & m_1 & 0 \end{pmatrix} \overline{Y^{m_1}_{l_1}}\, \overline{Y^{-m_1}_{l_2}} \sqrt{(2l_3+1)} = \sum_{max(-l_1, -l_2) \leq m_1 \leq min(l_1, l_2)} \sqrt{2l_3+1} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ -m_1 & m_1 & 0 \end{pmatrix} \overline{Y^{m_1}_{l_1}}\, \overline{Y^{-m_1}_{l_2}}$$

[5] Tomamos $m_3 = 0$, pois $n_0 = (0,0,1)$ implica $(0, \theta)$.

$$=\sqrt{2l_3+1}\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.\overline{Y_{l_1}^{0}}(n_1).\overline{Y_{l_2}^{0}}(n_2)+\sum_{m_1=max(-l_1,-l_2)}^{-1}\sqrt{2l_3+1}\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ -m_1 & m_1 & 0 \end{pmatrix}.\overline{Y_{l_1}^{m_1}}(n_1).\overline{Y_{l_2}^{-m_1}}(n_2)$$

$$+\sum_{m_1=1}^{min(l_1,l_2)}\sqrt{2l_3+1}\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ -m_1 & m_1 & 0 \end{pmatrix}.\overline{Y_{l_1}^{m_1}}(n_1).\overline{Y_{l_2}^{-m_1}}(n_2)$$

$$=\sqrt{(2l_1+1)(2l_2+1)(2l_3+1)}\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P_{l_1}^{0}(z_1)P_{l_2}^{0}(z_2)$$

$$+\sum_{m=1}^{-max(-l_1,-l_2)}\sqrt{2l_3+1}\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m & -m & 0 \end{pmatrix}.\overline{Y_{l_1}^{-m}}(n_1).\overline{Y_{l_2}^{m}}(n_2)$$

$$+\sum_{m=1}^{min(l_1,l_2)}\sqrt{2l_3+1}\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ -m_1 & m_1 & 0 \end{pmatrix}.\overline{Y_{l_1}^{m_1}}(n_1).\overline{Y_{l_2}^{-m_1}}(n_2)$$

$$=\sqrt{(2l_1+1)(2l_2+1)(2l_3+1)}\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P_{l_1}^{0}(z_1)P_{l_2}^{0}(z_2)$$

$$+\sum_{m=1}^{min(l_1,l_2)}\sqrt{2l_3+1}(-1)^m\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m & -m & 0 \end{pmatrix}\{Y_{l_1}^{m}(n_1).\overline{Y_{l_2}^{m}}(n_2)+(-1)^{l_1+l_2+l_3}\overline{Y_{l_1}^{m}}(n_1).Y_{l_2}^{m}(n_2)\}=$$

$$=\sqrt{(2l_1+1)(2l_2+1)(2l_3+1)}\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P_{l_1}^{0}(z_1)P_{l_2}^{0}(z_2)+\sum_{m=1}^{min(l_1,l_2)}\sqrt{2l_3+1}(-1)^m\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m & -m & 0 \end{pmatrix}$$

$$\{\sqrt{2l_1+1}\sqrt{\frac{(l_1-m)!}{(l_1+m)!}}P_{l_1}^{m}(z_1)\frac{(x_1+iy_1)^m}{(1-z_1^2)^{m/2}}\sqrt{2l_2+1}\sqrt{\frac{(l_2-m)!}{(l_2+m)!}}P_{l_2}^{m}(z_2)\frac{(x_2-iy_2)^m}{(1-z_2^2)^{m/2}}$$

$$+(-1)^{l_1+l_2+l_3}\sqrt{2l_1+1}\sqrt{\frac{(l_1-m)!}{(l_1+m)!}}P_{l_1}^{m}(z_1)\frac{(x_1-iy_1)^m}{(1-z_1^2)^{m/2}}\sqrt{2l_2+1}\sqrt{\frac{(l_2-m)!}{(l_2+m)!}}P_{l_2}^{m}(z_2)\frac{(x_2+iy_2)^m}{(1-z_2^2)^{m/2}}\}$$

$$=\sqrt{(2l_1+1)(2l_2+1)(2l_3+1)}\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P_{l_1}^{0}(z_1)P_{l_2}^{0}(z_2)$$

$$+\sum_{m=1}^{min(l_1,l_2)}\sqrt{(2l_1+1)(2l_2+1)(2l_3+1)}(-1)^m\sqrt{\frac{(l_1-m)!(l_2-m)!}{(l_1+m)!(l_2+m)!}}\frac{P_{l_1}^{m}(z_1)P_{l_2}^{m}(z_2)}{(1-z_1^2)^{m/2}(1-z_2^2)^{m/2}}\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m & -m & 0 \end{pmatrix}$$

$$\{(x_1+iy_1)^{m_1}(x_2+iy_2)^{m_1}+(-1)^{l_1+l_2+l_3}(x_1-iy_1)^{m_1}(x_2+iy_2)^{m_1}\}$$

Analisando essa última parcela separadamente, obtemos:

$$\{((x_1+iy_1)(x_2+iy_2))^m+(-1)^{l_1+l_2+l_3}((x_1-iy_1)(x_2+iy_2))^m\}$$

e

$$=\{(x_1x_2+y_1y_2-i(x_1y_2-x_2y_1))^m+(-1)^{l_1+l_2+l_3}(x_1x_2+y_1y_2+i(x_1y_2-x_2y_1))^m\},$$

E, assim, denotado por

$$A=A(n_1,n_2,n_0)=<n_1,n_2>-<n_0,n_1><n_0,n_2>=x_1x_2+y_1y_2$$

$$B=B(n_1,n_2,n_0)=det[n_1,n_2,n_0]=x_1y_2-x_2y_1.$$

Finalmente, concluímos que o somatório em m_k fica da seguinte maneira:

$$\sqrt{(2l_1+1)(2l_2+1)(2l_3+1)}\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P_{l_1}^0(z_1)P_{l_2}^0(z_2)$$

$$+\sqrt{(2l_1+1)(2l_2+1)(2l_3+1)}\sum_{m=1}^{min(l_1,l_2)}(-1)^m\sqrt{\frac{(l_1-m)!(l_2-m)!}{(l_1+m)!(l_2+m)!}}$$

$$\frac{P_{l_1}^m(z_1)P_{l_2}^m(z_2)}{(1-z_1^2)^{m/2}(1-z_2^2)^{m/2}}\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m & -m & 0 \end{pmatrix}[(A-iB)^m+(-1)^{l_1+l_2+l_3}(A+iB)^m].$$

* * *

Uma observação interessante desse trikernel é que podemos decompor a soma $\mathcal{L}_{l_1,l_2,l_3}(n_1,n_2,n_0)$ em duas partes, aquela em que $l_1+l_2+l_3=par$ e aquela em que

$$\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=0,\quad se\quad l_1+l_2+l_3=\text{ímpar}.$$

Segue:

- $l_1+l_2+l_3=par$

$$\mathcal{L}_{l_1,l_2,l_3}(n_1,n_2,n_0)=\sqrt{(2l_1+1)(2l_2+1)(2l_3+1)}\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P_{l_1}^0(z_1)P_{l_2}^0(z_2)$$

$$+\sum_{m=1}^{min(l_1,l_2)}\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m & -m & 0 \end{pmatrix}\sqrt{\frac{(l_1-m)!(l_2-m)!}{(l_1+m)!(l_2+m)!}}P_{l_1}^m(z_1)P_{l_2}^m(z_2)2(-1)^m[\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\begin{pmatrix} m \\ 2k \end{pmatrix}A^{m-2k}B^{2k}]).$$

- $l_1+l_2+l_3=\text{ímpar}$

$$\mathcal{L}_{l_1,l_2,l_3}(n_1,n_2,n_0)=2i\sqrt{(2l_1+1)(2l_2+1)(2l_3+1)}\sum_{m=1}^{min(l_1,l_2)}\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m & -m & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sqrt{\frac{(l_1-m)!(l_2-m)!}{(l_1+m)!(l_2+m)!}}P_{l_1}^m(z_1)P_{l_2}^m(z_2)(-1)^m[\sum_{k=0}^{m}(-1)^{k+1}\begin{pmatrix} m \\ 2k+1 \end{pmatrix}A^{m-(2k+1)}B^{2k+1}]$$

Observamos que é na soma ímpar que obtemos a parte imaginária.

Analogamente, o Trikernel de Berezin ficará com a formulação que se segue.

* * *

Teorema: Sejam $n_1,n_2,n_0\in S^2$, $0\leq l_k\leq 2j$ e cada tripla (l_1,l_2,l_3) satisfazendo a propriedade triangular e $-l_k\leq m_k\leq l_k$ para $k=1,2,3$. E seja

$$A=A(n_1,n_2,n_0)=<n_1,n_2>-<n_0,n_1><n_0,n_2>,B=B(n_1,n_2,n_0)=det[n_1,n_2,n_0],$$

denotamos:

$$\mathcal{L}_{l_1,l_2,l_3}(n_1n_2,n_0)=\sqrt{(2l_1+1)(2l_2+1)(2l_3+1)}(\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P_{l_1}^0(z_1)P_{l_2}^0(z_2)$$

$$+\sum_{m=1}^{min(l_1,l_2)}\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m & -m & 0 \end{pmatrix}\sqrt{\frac{(l_1-m)!(l_2-m)!}{(l_1+m)!(l_2+m)!}}P_{l_1}^m(z_1)P_{l_2}^m(z_2)(-1)^m[(A-iB)^m+(-1)^{l_1+l_2+l_3}(A+iB)^m]).$$

Então, obtemos para o trikernel de Berezin,

$$\mathbb{L}_{\vec{b}}^j(n_1,n_2,n_0)=\frac{(-1)^{2j}\sqrt{2j+1}}{(4\pi)^2}\sum_{l_k}\sqrt{\frac{\begin{pmatrix} n+l_1+1 \\ l_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n+l_2+1 \\ l_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n \\ l_3 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} n \\ l_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n \\ l_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n+l_3+1 \\ l_3 \end{pmatrix}}}\begin{Bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ j & j & j \end{Bmatrix}\mathcal{L}_{l_1,l_2,l_3}.$$

* * *

Basta trocarmos n_0 por n para generalizar ambos os resultados para um ponto n qualquer na esfera S^2, ficando $\mathbb{L}_{\vec{b}}^j(n_1,n_2,n)$ e $\mathbb{L}_1^j(n_1,n_2,n)$.

7 CÁLCULOS EXPLÍCITOS[6] PARA J=1/2, 1, 3/2

Vamos explicitar os exemplos de j citados nesta seção; lembrando que as triplas (l_1,l_2,l_3) devem satisfazer a desigualdade triangular $|l_1-l_2|\le l_3\le l_1+l_2$. E ainda,

$$A=<n_1,n_2>-<n_0,n_1><n_0,n_2>$$

e

$$B=det(n_1,n_2,n_0)=[n_1,n_2,n_0].$$

- Caso j=1/2

Como $0\le l_k\le 2j=1$, temos as seguintes triplas (0,0,0), (0,1,1), (1,0,1), (1,1,1).

$$\mathcal{L}_{0,0,0}(n_1,n_2,n_0)=1,\ \mathcal{L}_{1,1,0}(n_1,n_2,n_0)=-\sqrt{3}<n_1,n_2>,$$

a partir disso obtemos $\mathcal{L}_{1,0,1}(n_1,n_2,n_0)$ e $\mathcal{L}_{0,1,1}(n_1,n_2,n_0)$, usando ciclicidade.

$$\mathcal{L}_{1,1,1}(n_1,n_2,n_0)=\frac{3}{\sqrt{2}}iB.$$

Agora somando em l_k,

$$L_1^{1/2}(n_1,n_2,n_0)=\frac{1}{(4\pi)^2}\{1+3(<n_1,n_2>+<n_1,n_0>+<n_2,n_0>)+i3\sqrt{3}B\}.$$

$$L_{\vec{b}}^{1/2}(n_1,n_2,n_0)=\frac{1}{(4\pi)^2}\{1+3<n_1,n_2>+<n_1,n_0>+<n_2,n_0>)+i\sqrt{3}B\}.$$

- Caso j=1

[6] O cálculo para j=2 pode ser visto em Harb (2014).

Como $0 \leq l_k \leq 2j$, $l_k \in \{0,1,2\}$. Teremos as seguintes triplas: (0,0,0), (0,1,1), (1,0,1), (1,1,0), (1,1,1), (1,1,2), (1,2,1), (1,2,2), (0,2,2), (2,0,2), (2,1,1), (2,1,2), (2,2,0), (2,2,1), (2,2,2). Primeiramente faremos o cálculo de $\mathcal{L}_{l_1,l_2,l_3}(n_1,n_2,n_0)$, como acima, para depois calcular o operador.

$$\mathcal{L}_{0,0,0}(n_1,n_2,n_0)=1\ ,\ \mathcal{L}_{1,1,0}(n_1,n_2,n_0)=-\sqrt{3}<n_1,n_2>\ ,\ \mathcal{L}_{1,1,1}(n_1,n_2,n_0)=\frac{3}{\sqrt{2}}iB$$

$$\mathcal{L}_{1,1,2}(n_1,n_2,n_0)=\frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}(3<n_0,n_1><n_0,n_2>-<n_1,n_2>)\ ,\ \mathcal{L}_{1,2,2}(n_1,n_2,n_0)=-\frac{15\sqrt{2}}{2\sqrt{5}}iB<n_0,n_1>$$

$$\mathcal{L}_{0,2,2}(n_1,n_2,n_0)=\frac{\sqrt{5}}{2}(3<n_0,n_2>^2-1)\ ,\ \mathcal{L}_{2,2,2}(n_1,n_2,n_0)=-\frac{5\sqrt{2}}{4\sqrt{7}}(9B^2+3R-5)\ .$$

Somando em l_k na soma do trikernel de Stratonovich obtemos:

$$L_1^1(n_1,n_2,n_0)=\frac{1}{(4\pi)^2}\{1+3P+\frac{15}{2}(R-1)+\frac{9\sqrt{2}}{4}iB(1+5P)++\frac{3\sqrt{10}}{8}(3P^2-3R-2P)$$

$$-\frac{5\sqrt{10}}{8}(9B^2-5+3R)\}.$$

E para Berezin:

$$L_b^1(n_1,n_2,n_0)=\frac{1}{(4\pi)^2}(1+\frac{11\sqrt{5}}{4\sqrt{3}}-\frac{6}{\sqrt{3}}+P+<n_1,n_2>+\frac{3}{2\sqrt{5}}<n_0,n_1><n_0,n_2>$$

$$+\frac{3\sqrt{2}}{2}<n_1,n_2><n_0,n_1>-\frac{1}{2\sqrt{15}}<n_1,n_2>-\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}(<n_0,n_1>-<n_0,n_2>)+\frac{3}{2}iBP$$

$$+6iB<n_0,n_2>+\frac{3}{2\sqrt{3}}(<n_0,n_2>^2+<n_0,n_1>^2)+\frac{15}{\sqrt{3}}<n_1,n_2>^2-\frac{15\sqrt{5}}{4\sqrt{3}}B^2-\frac{9\sqrt{5}}{4\sqrt{3}}R)\ .$$

Em que, para facilitar a notação e o excesso, denotamos:

$$P=<n_0,n_1>+<n_0,n_2>+<n_1,n_2> \text{ e } R=<n_0,n_1>^2+<n_0,n_2>^2+<n_1,n_2>^2\ .$$

- Caso j=3/2

Como $0 \leq l_k \leq 2j,\ l_k \in \{0,1,2,3\}$. Teremos as seguintes triplas: (0,0,0), (0,1,1), (1,0,1), (1,1,0), (1,1,1), (1,1,2), (1,2,1), (1,2,2), (0,2,2), (2,0,2), (2,1,1), (2,1,2), (2,2,0), (2,2,1), (2,2,2), (0,3,3), (1,2,3), (1,3,2), (1,3,3), (2,1,3), (2,2,3), (2,3,1), (2,3,2), (2,3,3), (3,0,3), (3,1,2), (3,1,3), (3,2,1), (3,2,2), (3,2,3), (3,3,0), (3,3,1), (3,3,2), (3,3,3).

Observemos que além das triplas que apareceram no caso j=1, apareceram algumas a mais. Logo, ao calcular os $\mathcal{L}_{l_1,l_2,l_3}$, para esse caso, basta calcular para essas triplas faltantes. É o que fizemos:

$$\mathcal{L}_{0,3,3}(n_1,n_2,n_0)=-\frac{7}{2\sqrt{7}}(5<n_0,n_2>^3-3<n_0,n_2>)\ ,$$

por ciclicidade achamos $\mathcal{L}_{3,0,3}(n_1,n_2,n_0)$ e $\mathcal{L}_{3,3,0}(n_1,n_2,n_0)$.

$$\mathcal{L}_{1,3,3}(n_1,n_2,n_0)=\frac{-21}{4\sqrt{7}}iB(1-5<n_0,n_2>^2)\ ,$$

por ciclicidade achamos $\mathcal{L}_{3,1,3}(n_1,n_2,n_0)$ e $\mathcal{L}_{3,3,1}(n_1,n_2,n_0)$.

$$\mathcal{L}_{1,2,3}(n_1,n_2,n_0)=-\frac{15}{2}<n_0,n_1><n_0,n_2>^2+\frac{3}{2}<n_0,n_1>+3<n_0,n_2><n_1,n_2>$$

por ciclicidade obtemos todas as outras combinações $\mathcal{L}_{3,1,2}(n_1,n_2,n_0),\mathcal{L}_{2,3,1}(n_1,n_2,n_0)$, $\mathcal{L}_{2,1,3}(n_1,n_2,n_0),\mathcal{L}_{3,2,1}(n_1,n_2,n_0)$ e $\mathcal{L}_{1,3,2}(n_1,n_2,n_0)$.

$$\mathcal{L}_{2,2,3}(n_1,n_2,n_0)=15\sqrt{\frac{2}{5}}iB(2<n_0,n_1><n_0,n_2>-<n_1,n_2>)\ ,$$

por ciclicidade obtemos $\mathcal{L}_{3,2,2}(n_1,n_2,n_0)$ e $\mathcal{L}_{2,3,2}(n_1,n_2,n_0)$.

$$\mathcal{L}_{2,3,3}(n_1,n_2,n_0)=\frac{7}{4\sqrt{21}}(-10<n_0,n_2>^3-15<n_0,n_1>^2<n_0,n_2>-15<n_0,n_2><n_1,n_2>^2$$

$$+6<n_0,n_2>-3<n_0,n_1><n_1,n_2>+45<n_0,n_1><n_0,n_2>^2<n_1,n_2>+15B^2<n_0,n_2>)\ ,$$

por ciclicidade obtemos $\mathcal{L}_{3,2,3}(n_1,n_2,n_0)$ e $\mathcal{L}_{3,3,2}(n_1,n_2,n_0)$.

$$\mathcal{L}_{3,3,3}(n_1,n_2,n_0)=\frac{35}{4\sqrt{7}}(-3R-5B^2+21/5).$$

Reunindo tudo no somatório em l_k obtemos, para Stratonovich:

$$L_1^{3/2}(n_0,n_1,n_2)=\frac{1}{(4\pi)^2}\{\frac{5}{2}+\frac{3}{20}(P-11R-25B^2P+P^2-15PR)+P^3-3B^2+\frac{5}{2}S+$$

$$+\frac{1}{8}\sqrt{\frac{3}{35}}(87-90R-100B^2)-\frac{iB}{2\sqrt{5}}(7-6P-30P^2+30R-\frac{15}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}R)\}$$

E para Berezin:

$$L_b^{3/2}(n_0,n_1,n_2)=\frac{1}{(4\pi)^2}(\frac{5}{2}-P-\frac{2}{3}<n_1,n_2>-\frac{1}{\sqrt{3}}iB(1+6<n_0,n_2>)+\frac{3}{\sqrt{3}}iBP+\frac{2}{5}\sqrt{\frac{2}{3}}<n_1,n_2>$$

$$-3\sqrt{\frac{10}{3}}(<n_0,n_1>+<n_0,n_2>)-2\frac{\sqrt{5}}{5}<n_0,n_1><n_0,n_2>+9\sqrt{\frac{10}{3}}<n_1,n_2><n_0,n_1>$$

$$-6<n_1,n_2>^2-\frac{3}{2}R-\frac{5}{2}S+90<n_1,n_2>^3+\frac{3}{2}P-54<n_1,n_2>$$

$$+\frac{1}{5}\sqrt{\frac{5}{21}}(21P+12<n_0,n_1>+12<n_0,n_2>+42<n_0,n_1><n_0,n_2>$$

$$+63<n_1,n_2><n_0,n_2>+63<n_1,n_2><n_0,n_1>-\frac{15}{2}<n_0,n_1><n_0,n_2>^2$$

$$-\frac{15}{2}<n_0,n_2><n_0,n_1>^2-\frac{105}{2}<n_1,n_2><n_0,n_1>^2-\frac{105}{2}<n_1,n_2><n_0,n_2>^2$$

$$-\frac{315}{2}<n_0,n_2><n_1,n_2>^2-\frac{315}{2}<n_0,n_1><n_1,n_2>^2)$$

$$+\frac{3}{\sqrt{3}}iB(22+\frac{1}{\sqrt{5}}-5<n_0,n_2>^2-\frac{5}{\sqrt{5}}<n_0,n_1>^2-15<n_1,n_2>^2)$$

$$-\frac{6}{\sqrt{7}}iB(-7P+6<n_1,n_2>+2<n_0,n_1><n_0,n_2>+14<n_0,n_1><n_1,n_2>$$

$$+14<n_0,n_2><n_1,n_2>)+\frac{\sqrt{5}}{20}(-10S-15<n_0,n_1>^2<n_0,n_2>$$

$$-15<n_1,n_2>^2<n_0,n_1>-15<n_0,n_2><n_1,n_2>^2-15<n_0,n_1><n_0,n_2>^2+6<n_0,n_2>$$

$$+6<n_0,n_1>-3<n_0,n_1><n_1,n_2>-3<n_0,n_2><n_1,n_2>$$

$$+45<n_0,n_1><n_0,n_2>^2<n_1,n_2>+15B^2P\quad +45<n_1,n_2><n_0,n_1>^2<n_{01},n_2>$$

$$-60<n_1,n_2>^3+90B^2<n_1,n_2>7(-15<n_0,n_2>^2<n_1,n_2>$$

$$-15<n_0,n_1>^2<n_1,n_2>+6<n_1,n_2>-3<n_0,n_2><n_1,n_0>+45<n_0,n_2><n_1,n_2>^2<n_0,n_1>))$$

$$-\frac{5}{4}\sqrt{\frac{3}{2}}(-3R-5B^3+21/5)),$$

em que P e R como no caso j=1 e $S=<n_0,n_1>^3+<n_0,n_2>^3+<n_1,n_2>^3$.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Em Harb (2014) foi feito o próximo cálculo para j=2, aumentando o número de parcelas e de cálculos significativamente, por isso, o exposto neste artigo foi até j=3/2, dando uma boa ideia do que se segue.

O que se desejava era uma formulação para poder fazer um estudo assintótico desses produtos, porém os resultados dos cálculos (feitos à mão e com auxílio do software Wolfram Mathematica) mostraram que essa formulação ideal pode estar mais longe e necessitar de, talvez, uma programação matemática.

REFERÊNCIAS

ARFKEN, G. **Mathematical methodos for physicists**. Cambridge, Massachusetts: Academic Press, 1985. m

BEREZIN, F. A. General concept of quantization. **Commun. Math. Phys**., n. 40, p. 153-174,1975.

BEREZIN, F. A. Quantization. **Math**. **USSR Izvest**., n. 8, p. 1109-1163, 1974.

BEREZIN, F. A. Quantization in complex symmetric spaces. **Math. USSR Izvest**., n. 9, p. 341-379, 1975.

BIEDENHARN, L. C.; LOUCK, J. D. **Angular momentum in quantum physics**: theory and application. Boston, USA: Addison-Wesley Publishing Company, 1981.

EDMONDS, A. R. **Angular momentum in quantum mechanics**. Princenton, New Jersey: Princenton University Press, 1960.

HARB, N. H. **Sobre os Trikernels de Stratonovich e de Berezin de símbolos na esfera.** Tese (Doutorado). 2014. Disponível em: <http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/55/55135/tde-06062014-094208/pt-br.php>. Acesso em: 06 jun. 2014.

RIOS, P. de M.; STRAUME, E. **Symbol correspondence, for spin systems.** 1st ed. Heidelberg, Germany: Springer, 2014.

STRATONOVICH, R. L. On distributions in representations space. **Soviet Physics Jetp**, v.4, n. 6, p. 891-898, 1957.

VÁRILLY, J. C.; GRACIA-BONDÍA, J. M. The moyal representation for spin. **Annals of physics**, v. 190, p. 107-148, 1989.

VARSHALOVICH, D. A.; MOSKALEV, A. N.; KHERSONSKII, V. K. **Quantum theory of angular momentum:** irreducible tensors, spherical harmonics, vector coupling coefficients, 3nj symbols. Singapore: World Scientific, 1988.

WEYL, H. **The classical groups, their invariants and representation.** Princeton, New Jersey: Princeton Univ. Press, 1946.