O QUINTO POSTULADO DE EUCLIDES COMO HISTÓRIA DE PROBLEMAS[1]

EUCLID'S FIFTH POSTULATE LIKE PROBLEMATIC HISTORY

SACHS, Línlya[2]

RESUMO

Neste artigo, temos como propósito apresentar uma reconstrução histórica feita com fins historiográficos do surgimento das geometrias não euclidianas como resultado das discussões em torno do quinto postulado de Euclides. Para isso, recorremos à história de problemas, por entendermos que ela se adequa ao tema em questão e ao propósito historiográfico. Utilizamos fontes historiográficas, traduções e edições de fontes primárias, textos matemáticos posteriores ao período histórico e textos filosóficos. Apresentamos a reconstrução histórica em três partes, que retratam fases no desenvolvimento do problema e das tentativas de solucioná-lo. A primeira contextualiza a escrita do livro *Os Elementos*, por Euclides, e as questões iniciais em torno do quinto postulado – como, por exemplo, outras formas de enunciá-lo. A segunda apresenta as tentativas de prova do quinto postulado, em períodos e locais diversos e por que elas não foram bem-sucedidas. A terceira e última parte mostra o surgimento das geometrias não euclidianas a partir das discussões anteriores.

Palavras-chave: Educação Matemática. Reconstrução histórica. Historiografia. Geometrias não euclidianas. Quinto postulado.

ABSTRACT

This paper aims to show a historical reconstruction, for historiographical purposes, of the appearing of the non-Euclidian geometries, involving the Euclid's fifth postulate. We employ the problematic histories to do this, because we understand it is appropriate to topic and to historiographical purpose. We use historiographical sources, translations and editions of primary sources, later mathematical texts to the historical period and philosophical texts. The historical reconstruction is divided in three parts, which show the phases in the problem development and the attempts to solve it. The first one contextualize the writing of the book The Elements by Euclid and initial questions around the fifth postulate – as, for example, other forms of state it. The second one shows the successful and unsuccessful attempts to prove the fifth postulate, in different places and periods and why they are unsuccessful. The third one presents the appearing of the non-Euclidian geometries from previous discussions.

Keywords: Mathematics Education. Historical Reconstruction. Historiography. Non-Euclidian Geometries. Fifth Postulate.

1 INTRODUÇÃO

> Quando lerem a obra de um historiador, prestem atentamente atenção à sua voz. Se não ouvirem nada, é porque são surdos ou porque o vosso historiador é um perfeito maçante. Não, na verdade, os fatos não se assemelham aos peixes expostos na banca do comerciante. Assemelham-se aos peixes que nadam no oceano imenso e muitas vezes inacessível; o que o historiador apanhará depende em parte do acaso, mas sobretudo da região do oceano que tiver escolhido para a sua pesca e da isca de que se serve. Estes três fatores são, evidentemente, determinados pelo tipo de peixes que se propões apanhar. Em geral, o historiador

[1] Este trabalho é decorrente da pesquisa de mestrado da autora (BARBOSA, 2011).

[2] Doutora em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista (UNESP), Rio Claro, São Paulo, Brasil. Docente na Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), Cornélio Procópio, Paraná, Brasil. Endereço para correspondência: Avenida Alberto Carazzai, 1640, CEP 86300-000, Cornélio Procópio, Paraná, Brasil. Endereço eletrônico: linlyasachs@yahoo.com.br.

> obterá o tipo de fatos que deseja encontrar. História significa interpretação (CARR, 1962, apud SCHAFF, 1996, p. 235).

A metáfora acima reflete o entendimento que temos de que a história é uma atividade humana interpretativa. Não há história por si, livre de interpretações, de escolhas, de relações e de objetivos, como se ela existisse antes da atividade humana; aquele que constrói a história – e ela é construída –, necessariamente, faz suas interpretações e relações, realiza escolhas e tem seus objetivos, assim como carrega consigo suas teorias e sofre influências do meio em que vive.

O que nos propomos a fazer aqui é uma reconstrução histórica sobre o quinto postulado de Euclides – e assim a chamamos, "reconstrução", pois valemo-nos de construções históricas já realizadas – e, como toda (re)construção histórica, temos objetivos específicos e esclarecemos a seguir. Antes, gostaríamos de destacar dois objetivos distintos e representativos em (re)construções históricas no âmbito da Educação Matemática, abordados por Barbosa e Silva (2013): o objetivo historiográfico e o objetivo pedagógico.

Enquanto uma (re)construção histórica com objetivo historiográfico visa à constituição de uma história para o registro de fatos e do estabelecimento de relações entre eles, a (re)construção histórica com objetivo pedagógico tem fins de ensino, de aprendizagem e de formação humana. Neste caso, Miguel e Miorim (2005) diferenciam, ainda, argumentos de caráter ético, que são aqueles que propõem que a história contribua para a construção de valores e atitudes na formação integral do cidadão, dos argumentos de caráter epistemológico, que focalizam o conhecimento (no caso, matemático) propriamente dito, sendo a história potencial para sua compreensão.

Neste artigo, temos objetivo especificamente historiográfico. Porém, entendemos que uma (re)construção com objetivo historiográfico pode ser pedagogicamente útil, apesar de não ser uma "história pedagogicamente vetorizada" (MIGUEL; MIORIM, 2005).

Nesse sentido, alguns pesquisadores indicam que professores que querem utilizar uma abordagem histórica em suas aulas reclamam da ausência de materiais nos quais possam se basear. Siu (2006), por exemplo, mostra que 64% de 608 professores entrevistados concordam que há a ausência de material para que incrementem historicamente suas aulas de matemática. Situação semelhante é relatada por Martins (2007), que indica que a maior dificuldade encontrada por 88 professores (nesse caso, de Física) entrevistados para o trabalho com história e filosofia da ciência é a falta de material adequado.

Assim, neste artigo, temos como propósito apresentar uma reconstrução histórica feita por nós, com fins historiográficos, do surgimento das geometrias não euclidianas como resultado das discussões em torno do quinto postulado de Euclides.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICO-METODOLÓGICA

Para fazermos a reconstrução histórica pretendida, optamos aqui pela abordagem da *história de problemas*, proposta por Mayr (1998). Entendemos que esse tipo de historiografia, em comparação com outras quatro apresentadas pelo autor, é a mais adequada aos nossos objetivos.

Mayr (1998) identificou algumas regularidades na escrita da história das ciências e isso o levou a agrupar esses modos de escrita em cinco tipos: história lexicográfica; história cronológica; história biográfica; história cultural e sociológica; e história de problemas.

A *história lexicográfica* é, essencialmente, descritiva e busca responder questões como "o quê?", "quando?" e "onde?" – o que dá um caráter superficial, pontual e fragmentado à reconstrução histórica. A *história cronológica* foca em períodos e nos acontecimentos lá situados. Um exemplo de obra historiográfica da história da matemática com esse aspecto é o livro *Introdução à História da Matemática*, de Eves (1995). Um ponto fraco desse tipo é não abarcar a longevidade dos problemas, como é o caso que apresentamos neste artigo: o quinto postulado de Euclides caracteriza-se como um problema que durou mais de 2000 anos, como veremos na seção seguinte. A *história biográfica* apresenta o desenvolvimento das ciências a partir de personagens, isto é, da vida de pessoas. Obviamente, a ciência é uma atividade humana e as pessoas envolvidas têm importância fundamental nos resultados alcançados; porém, nortear-se pela questão "quem?" pode ofuscar questões contextuais e reforçar a construção de mitos e gênios nas ciências. A *história cultural e sociológica* situa a ciência em seu meio cultural, social, econômico, político e intelectual, o que, por um lado, contribui para a compreensão de relações entre os acontecimentos, sem isolar a ciência de seu entorno, por outro lado, dificulta a atividade do historiador, que deve, nesse caso, vincular a atividade científica a aspectos externos muito diversificados. Para exemplificar essa dificuldade, Mayr (1998) faz perguntas que, nessa perspectiva, seriam respondidas pelos historiadores: Por que os gregos tinham interesse em questões científicas? Qual o efeito do protestantismo na ciência? Entendemos que as relações existem e devem ser explicitadas, contudo sublinhamos a imensa dificuldade em estabelecê-las. Por fim, a *história de problemas* parte de problemas científicos, de questões relativas a métodos que podem ser empregados e ferramentas conceituais e intelectuais disponíveis para a resolução do problema, além de considerar tentativas bem-sucedidas e fracassadas, situando-as no contexto social e intelectual.

O surgimento das geometrias não euclidianas, antecedido pela tentativa de demonstração do quinto postulado de Euclides, adequa-se à proposta de historiografia da história de problemas, por ser, justamente, um problema. Foi um problema matemático que mobilizou muitas pessoas em busca de soluções, com abordagens distintas, dependendo da atividade de outros matemáticos, das condições filosóficas, das influências de fatores externos à matemática – como a religião, em especial na Idade Média, e as condições econômicas que permitiam que alguns se dedicassem prioritariamente a atividades intelectuais na Grécia Antiga.

Assim, a abordagem que utilizamos na reconstrução histórica buscará situar o problema em seu meio e considerar tentativas que não solucionaram o problema – e por que não –, mas que se relacionam com outras e com aquelas que solucionaram.

Utilizamos, principalmente, fontes historiográficas para a nossa reconstrução, como textos de história da matemática (BARKER, 1969; CHABERT, 1997; KATZ, 1998; STRUIK, 1992; D'AMBROSIO, 1996; EVES, 1995; JAOUICHE, 1986; TRUDEAU, 1987; BONOLA, 1955; NOBRE, 2009; ROSENFELD, 1988; SMITH, 1958); mas, também, utilizamos textos matemáticos, sejam traduções e edições de fontes primárias (EUCLIDES, 2009; HEATH, 1968; EINSTEIN, 2005) ou obras mais recentes, que abordam, matematicamente, essas questões (WOLFE, 1945; GREENBERG, 2001; ARCARI, 2008). Apoiamo-nos, ainda, em textos filosóficos, que fundamentaram parte de nossas análises na reconstrução histórica (BARKER, 1969; KUHN, 1988; CARNAP, 1995; CROWE, 1975; CORRY, 1996).

Nossa posição relativa à constituição da história considera a importância do historiador, não apenas como aquele que "relata" os fatos históricos, mas aquele que os constrói. Schaff (1996) diferencia dois tipos de entendimentos sobre fatos históricos: (i) como ponto da partida, em que existem fatos "brutos" e o historiador parte deles para fazer seu trabalho – a história; e (ii) como consequência, em que o historiador parte de suas teorias para escrever a história e, assim, constitui os fatos históricos. Assumimos o segundo posicionamento. Nas palavras do autor, "não há portanto 'fatos brutos': estes, por definição, não podem existir. Os fatos com que lidamos na ciência, e mesmo em geral no conhecimento, trazem sempre a marca do sujeito" (SCHAFF, 1996, p. 228).

Esse autor também afirma que não há acontecimentos que se destacam por si só, "a 'importância', o 'significado' de um acontecimento é uma qualificação valorizante que precisa da existência não só do objeto valorizado, mas também do sujeito valorizador" (SCHAFF, 1996, p. 234). Porém, como ele reforça, isso não significa que essa escolha seja arbitrária, ou seja, que o historiador pode tornar *qualquer* fato um fato histórico. Esse tipo de atividade, de constituição da história, não é arbitrário, pois, primeiro, os acontecimentos são objetivos, segundo, porque o historiador tem mãos atadas pela teoria e, terceiro, porque o historiador está condicionado socialmente pelos interesses de sua época, de sua classe social etc.

Com essa compreensão da história, fundamentamo-nos teoricamente e metodologicamente para a reconstrução histórica do quinto postulado de Euclides, como história de problemas.

3 O QUINTO POSTULADO COMO HISTÓRIA DE PROBLEMAS

A reconstrução histórica que fizemos em torno do problema do quinto postulado de Euclides pode ser dividida em três partes e foi assim que organizamos o texto: Euclides e *Os Elementos*; Tentativas de prova do quinto postulado; e Geometrias não euclidianas. Antes de ser uma divisão cronológica, apesar de refletir as questões temporais, retrata uma divisão de fases no desenvolvimento do problema e das tentativas de solucioná-lo. Apresentamos a seguir essa reconstrução, como uma história de problemas.

3.1 Euclides e *Os Elementos*

A obra *Os Elementos* é atribuída a Euclides, mas pouco se sabe sobre ele. Há três grandes hipóteses sobre sua autoria, apresentadas por Nobre (2009): Euclides vivera entre os anos aproximados de 325 a.C. e 265 a.C., na Alexandria, e fora realmente quem escrevera essa obra e outros trabalhos; Euclides fora o líder de um grupo de matemáticos de Alexandria e juntos escreveram vários trabalhos, mas assinavam em seu nome; as obras atribuídas a Euclides foram escritas por um grupo de matemáticos que adotara o nome de Euclides em referência a Euclides de Megara, que vivera cerca de cem anos antes. "Acontece com Euclides o mesmo que com outros matemáticos da Grécia Antiga: restam-nos apenas macérrimas informações sobre a vida e a personalidade do homem" (BICUDO, 2009, p. 41).

Seguindo a primeira dessas hipóteses, como indica Brito (1995, p. 34), acredita-se que Euclides tenha sido um funcionário do Museu, uma instituição subsidiada pelo Estado onde deveria ser organizado todo o conhecimento científico existente nessa fase alexandrina da cultura grega[3]. Por isto, a obra *Os Elementos* ser composta de compilações de trabalhos de outros autores anteriores a Euclides. Essa obra ainda foi por muito tempo um modelo do que o pensamento científico deveria ser (BARKER, 1969, p. 28).

Da mesma forma, não se sabe ao certo o que pertencia de fato ao original de *Os Elementos*, já que não existe nenhum texto original da obra. Existem apenas os manuscritos em

[3] Alexandria, cidade do Egito, nessa época, era uma cidade cosmopolita habitada tanto por egípcios quanto por gregos (BRITO, 1995, p. 33).

grego, latim e árabe que chegaram à Europa no século XII. Por isto, não se sabe o que pertencia ao original e o que pertencia aos vários comentaristas, tradutores e copistas (CHABERT, 1997, p. 287). De qualquer maneira, a importância dessa obra é indiscutível: apenas a Bíblia tem mais edições no mundo ocidental que *Os Elementos* (KATZ, 1998, p. 59) e, antes da imprensa, cópias manuscritas dominavam o ensino de geometria (STRUIK, 1992, p. 90).

De todo modo, essa obra foi escrita em um momento peculiar da história da Grécia: depois do fim da Guerra do Peloponeso (431-404 a.C.) marcado pela queda de Atenas na sua disputa com Esparta. Nesse novo período, houve um aumento da desigualdade econômica entre os gregos: as classes sociais mais altas acumulavam riquezas, enquanto crescia a miséria e a insegurança dos pobres. Estes eram responsáveis por todo trabalho manual e sustentavam a ociosidade de seus dirigentes, que podiam, dessa forma, dedicar-se aos estudos da filosofia (STRUIK, 1992, p. 83).

O primeiro dos treze livros de *Os Elementos* contém 23 definições, 5 postulados e 9 noções comuns[4]. São os postulados:

> 1. Fique postulado traçar uma reta a partir de todo ponto até todo ponto. 2. Também prolongar uma reta limitada, continuamente, sobre uma reta. 3. E, como todo centro e distância, descrever um círculo. 4. E serem iguais entre si todos os ângulos retos. 5. E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontram-se no lado no qual estão os menores que dois retos (EUCLIDES, 2009, p.98).

O quinto postulado, também conhecido como o postulado das paralelas, parece ter sido evitado por Euclides: Proclo (século V), grande comentarista de *Os Elementos*, notou que as primeiras 28 proposições – das 465 de todos os livros da obra – são demonstradas sem que ele fosse citado, sendo que muitas dessas proposições seriam muito mais facilmente demonstradas se utilizado o quinto postulado (MORENO; BROMBERG, 1987 apud BRITO, 1995).

O quinto postulado de Euclides é muitas vezes enunciado de outra forma: para toda reta l e todo ponto P fora de l, pode-se traçar uma única reta paralela a l que passe por P. Este é o chamado postulado de Playfair, pois, de acordo com Greenberg (2001, p. 19), apareceu dessa forma em um trabalho de John Playfair em 1795, apesar de já ter aparecido, muito antes, nos trabalhos de Proclo.

Não há problema em enunciar assim o quinto postulado de Euclides, pois ele e o postulado de Playfair são logicamente equivalentes, ou seja, de um infere-se outro. Vejamos a demonstração da equivalência, apresentada por Arcari (2008), utilizando os outros quatro postulados e as proposições que seguem desses quatro (as 28 primeiras de *Os Elementos*). Enunciaremos estes no momento que for necessário durante a demonstração. Para facilitar, indicaremos por $P5$ o postulado enunciado em *Os Elementos* e por $P5'$ o postulado de Playfair.

* * *

Demonstração da equivalência de $P5$ e $P5'$:

[4] Na edição *Os Elementos* (EUCLIDES, 2009) aqui utilizada usa-se o termo *postulado* para afirmações referentes à geometria que são aceitas sem demonstração e *noções comuns* para outras afirmações que são aceitas sem demonstração, não especificamente referentes à geometria. O mesmo acontece na edição inglesa (HEATH, 1968). Porém, dentre as inúmeras edições da obra, há muitas que, ao invés de *noções comuns*, utilizam o termo *axioma* para as afirmações aceitas sem demonstração que não se referem à geometria em particular. Aqui utilizaremos os termos *postulado* e *axioma* como sinônimos, sendo as afirmações (específicas ou não à geometria) aceitas sem demonstração.

$P5$: Caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontram-se no lado no qual estão os menores que dois retos.

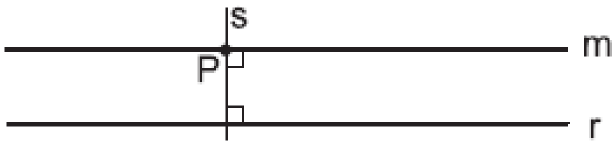
$P5'$: Para toda reta l e todo ponto P fora de l, pode-se traçar uma única reta paralela a l que passe por P.

I. $P5 \Rightarrow P5'$.

Seja P um ponto e r uma reta tal que $P \notin r$.

Tracemos uma perpendicular s a r passando por P e, então, uma perpendicular m a s, também passando por P.

Figura 1: Equivalência de $P5$ e $P5'$

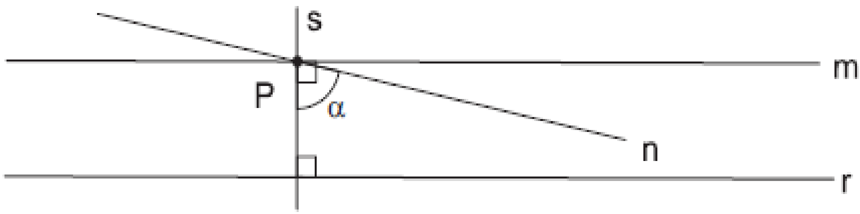


Fonte: Arcari (2008, p. 22)

Pela proposição I.28 (Caso uma reta, caindo sobre duas retas faça o ângulo exterior igual ao interior e oposto no mesmo lado, ou os interiores e no mesmo lado iguais a dois retos, as retas serão paralelas entre si)[5], temos m paralela a r e isso prova a existência da paralela m.

Quanto à unicidade, suponhamos que exista n paralela a r passando por P e n diferente de m e seja α o ângulo formado entre as retas n e s.

Figura 2: Equivalência de $P5$ e $P5'$



Fonte: Arcari (2008, p. 22)

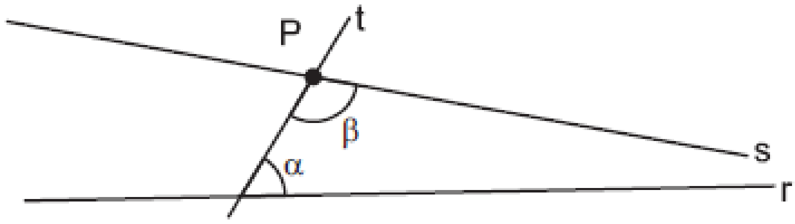
Logo, $\alpha + 90° \neq 180°$. Sem perda de generalidade, suponhamos que $\alpha + 90° < 180°$. Por $P5$, temos que n e r se encontram, o que contradiz a hipótese de que n seja paralela a r. Concluímos, então, que m e n não podem ser distintas. Portanto, m é única.

II. $P5' \Rightarrow P5$.

Sejam as retas r e s cortadas por uma reta t, de tal modo que os ângulos colaterais internos, α e β, sejam somados menores que dois retos e seja P o ponto de intersecção entre as retas s e t.

[5] Proposição 28, do Livro I, de Euclides (2009, p. 119).

Figura 3: Equivalência de $P5$ e $P5'$

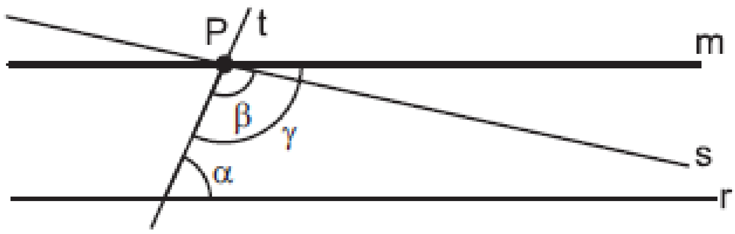


Fonte: ARCARI (2008, p. 22)

Devemos mostrar que r e s se encontram.

Consideremos uma reta m passando por P tal que os ângulos colaterais internos, α e γ, sejam somados iguais a dois retos, isto é, $\alpha + \gamma = 180°$.

Figura 4: Equivalência de $P5$ e $P5'$



Fonte: ARCARI (2008, p. 23)

Pela proposição I.28, temos m paralela a r. Suponhamos que s também seja paralela a r e seja β o ângulo formado entre as retas s e t. Por $P5'$, temos a unicidade da paralela, ou seja:

$$m = s \Longrightarrow \gamma = \beta \Longrightarrow \alpha + \gamma = \alpha + \beta.$$

Porém, isso contradiz a hipótese que $\alpha + \beta < 180°$. Concluímos, então, que s não é paralela a r.

Portanto, de I e II, $P5 \Leftrightarrow P5'$.

* * *

Desde os tempos de Euclides, inúmeras foram as tentativas de provar o quinto postulado, transformando-o assim em uma proposição. Apresentaremos aqui algumas dessas tentativas de prova, seguindo uma ordem cronológica. Não por isso essa reconstrução historiográfica tomaria a forma de história cronológica (MAYR, 1998), visto que este será o critério de organização a ser aqui utilizado e não uma história com questões norteadoras do tipo daquelas da história cronológica.

3.2 Tentativas de prova do quinto postulado

A Idade Média foi marcada pelo objetivo, como aponta D'Ambrosio (1996, p. 40), de construir as bases filosóficas do cristianismo e, assim, a matemática abstrata e filosófica pouco poderia contribuir para tal fim. Para a criação da doutrina cristã, foram fundados os mosteiros – como alternativa às academias gregas – onde não havia espaço para o estudo da matemática, pelo menos a matemática grega.

De acordo com Nascimento Junior (2003), havia ainda pensadores neoplatônicos que faziam sobreviver o pensamento grego na Idade Média, mas sempre sob a proteção da Igreja. Dentre eles, estão os comentaristas. O comentário era na Idade Média o modo que se abordava e se ensinava uma obra: "um comentário ou exposição do pensamento de algum autor era um dos métodos básicos de ensino nas escolas medievais" (BICUDO, 2009, p. 63). Um importante comentarista de Euclides foi Proclo, que, como indica Eves (1995), viveu entre os anos de 410 e 485 e apontou *Os Elementos* como uma verdadeira base filosófica, em contraposição ao cristianismo. Nessa direção, Bicudo (2009, p. 70) diz que, para Proclo, a natureza do mundo espiritual é o reflexo da matemática e que pode ser compreendida por meio do estudo das figuras geométricas. Outro neoplatônico que se destaca, Beda, viveu entre os anos de 673 e 735 e, entre outros trabalhos, traduziu parte de *Os Elementos*, o que não teve grande repercussão (D'AMBROSIO, 1996).

É interessante notar por que as tentativas de se provar o quinto postulado de Euclides falharam. Em geral, elas se utilizavam de argumentos equivalentes ao próprio quinto postulado, tornando as provas inválidas. Apresentaremos brevemente aqui algumas tentativas de prova, seguindo a ordem cronológica dos fatos.

Proclo é um dos que tenta provar o postulado das paralelas. Para provar que "caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontram-se no lado no qual estão os menores que dois retos" (EUCLIDES, 2009, p. 98), isto é, o quinto postulado, Proclo dividiu a demonstração em duas partes. Primeiro tenta provar que se uma reta corta uma de duas paralelas, então ela cortará a outra, para depois tentar provar o quinto postulado (HEATH, 1968).

* * *

I. Se uma reta corta uma de duas paralelas, então ela cortará a outra.

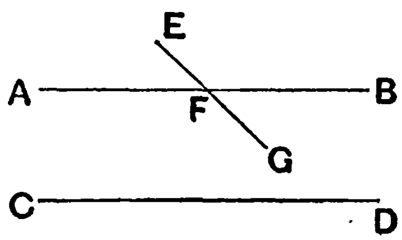
II. Caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontram-se no lado no qual estão os menores que dois retos.

Demonstração:

I. Sejam AB e CD retas paralelas e seja EFG a reta tal que corte AB.

EFG cortará a reta CD também, pois as retas BF e FG, ambas passando pelo ponto F, quando produzidas indefinidamente têm uma distância maior que qualquer magnitude, inclusive que o intervalo entre as retas paralelas. Como as retas BF e FG se distanciam uma da outra mais que a distância entre as paralelas, então FG cortará CD.

Figura 5: Demonstração de Proclo



Fonte: Heath (1968, p. 207)

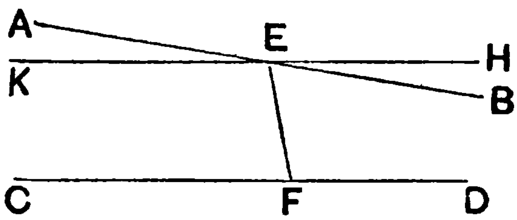
II. Sejam AB e CD duas linhas retas e seja EF a reta que cai sobre elas fazendo os ângulos BEF e DFE, que juntos são menores que dois ângulos retos. Quero provar que as retas AB e CD se encontrarão no lado em que os ângulos são menores que dois ângulos retos.

Como os ângulos BEF e DFE são juntos menores que dois retos, seja o ângulo HEB igual ao que falta para que BEF e DFE sejam iguais a dois retos e seja produzida a reta HE passando por K.

Como EF passa por KH e por CD fazendo os ângulos interiores HEF e DFE juntos iguais a dois retos, estas retas HK e CD são paralelas.

Além disto, como AB corta KH, também cortará CD (pelo que mostramos em I). Portanto, AB e CD se encontrarão no lado em que os ângulos formados são menores que dois retos. Desta forma, está demonstrado.

Figura 6: Demonstração de Proclo



Fonte: HEATH (1968, p. 208)

* * *

Porém, há um argumento na parte I que não está provado: duas retas distintas que passam por um ponto, quando produzidas indefinidamente têm uma distância maior que qualquer magnitude. Segundo Heath (1968), essa tentativa de prova foi criticada, pois, da mesma forma que não se pode assumir que duas linhas que continuamente se aproximam uma da outra se encontrarão, não se pode assumir que duas linhas que continuamente divergem terão uma distância maior que qualquer distância atribuída.

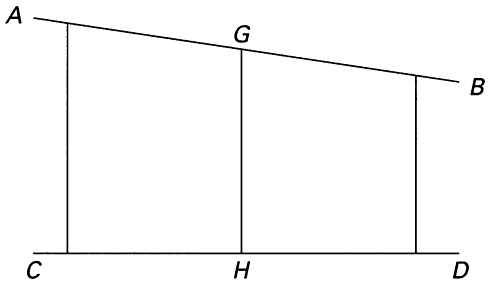
O século VII é marcado pelo advento do islamismo no mundo árabe e pelo fim da hegemonia grega. A partir de então, como mostra Silva (2010), foram fundadas escolas e universidades – como a Casa da Sabedoria (*Bait al-hikma)* – e, dessa forma, reuniram-se sábios e eruditos que se dedicavam ao estudo, entre outras coisas, da matemática. O árabe passa a ser a língua oficial – ao invés do grego ou do latim – e obras importantes foram traduzidas do grego para o árabe, entre elas *Os Elementos*.

Dois matemáticos do mundo árabe merecem destaque nas tentativas de prova do quinto postulado: Omar al-Khayyam (1048-1131) e Nasir ad-Din al-Tusi (1201-1274).

Al-Khayyam não tinha dúvida sobre a demonstrabilidade do quinto postulado. Para ele, o quinto postulado ainda não estava provado por dois motivos principais: os antigos o consideravam tão evidente e, por isto, omitiam a demonstração e os modernos – como os matemáticos árabes al-Hazin e an-Nayziri – falharam nas suas tentativas de prova, pois deixaram de levar em conta certas premissas fundamentais (JAOUICHE, 1986, p. 87). Ele criou, então, oito novas proposições para provar o postulado das paralelas. Uma delas dizia que se um quadrilátero simétrico possui dois ângulos retos, então os outros dois são também ângulos retos. O problema estava justamente nesta proposição: equivalente ao quinto postulado (CHABERT, 1997). Esse quadrilátero foi o ponto de partida para os estudos de Saccheri, no início do século XVIII.

Nasir ad-Din, da cidade de Tus, publicou em 1250 sua tentativa de prova do quinto postulado no livro intitulado "Discussão que elimina dúvidas sobre as linhas paralelas". Ele considerou o mesmo quadrilátero de al-Khayyam. Em um manuscrito datado de 1298 (provavelmente escrito pelo seu filho), há um novo argumento, porém também equivalente ao quinto postulado: se uma linha GH é perpendicular a CD em H e oblíqua a AB em G, então as perpendiculares são maiores do que GH do lado em que GH faz um ângulo obtuso com AB e menores do outro lado (KATZ, 1998, p. 271).

Figura 7: Demonstração de Nasir ad-Din



Fonte: Katz (1998, p. 271)

A transição entre a Idade Média e a Idade Moderna no mundo ocidental é marcada por profundas transformações na economia, na cultura, nas relações com a religião, com a ciência. É o chamado Renascimento. Surgem, paralelas às universidades, academias destinadas, entre outras coisas, à recuperação de obras gregas e romanas (D'AMBROSIO, 1996, p. 47). Para Chabert (1997), os primeiros comentaristas europeus na geometria na época do Renascimento, como Clavius, Cataldi, Borelli e Vitale, não trouxeram nada novo de fato aos resultados gregos. Apenas o britânico John Wallis (1616-1703) produziu realmente uma contribuição original. Wallis propôs um novo postulado, aparentemente mais plausível, para realizar a prova do quinto postulado de Euclides: dado um triângulo ABC e um segmento de reta DE, existe um triângulo DEF tal que ABC e DEF são semelhantes. Para a infelicidade de Wallis, este é mais um argumento equivalente ao quinto postulado (CHABERT, 1997).

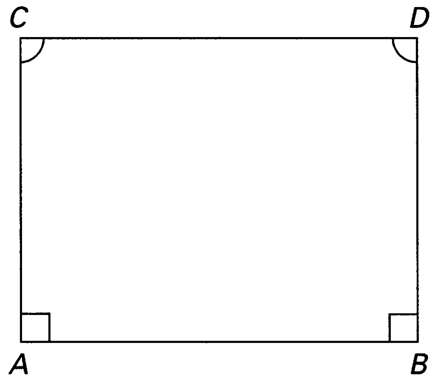
Giovanni Girolamo Saccheri (1667-1733) foi um padre jesuíta e lógico italiano. Um pouco antes de morrer, publicou o livro *Euclides ab omni naevo vindicatus*[6], que não foi muito reconhecido até um século e meio depois, quando o matemático italiano Eugenio Beltrami o redescobriu (GREENBERG, 2001, p. 154).

Diferente das tentativas anteriores de mostrar que o quinto postulado de Euclides era, na verdade, um teorema, Saccheri não tentou demonstrá-lo diretamente. Ele propôs uma prova usando a redução ao absurdo: assumia a negação do postulado das paralelas e tentava chegar a uma contradição[7]. Para isso, utilizou a hipótese (já utilizada por Omar al-Khayyam e por Nasir ad-Din al-Tusi) de que se um quadrilátero simétrico possui dois ângulos retos, os outros dois são iguais entre si. Há, portanto, três possibilidades para estes ângulos chamados por ele de ângulos de topo: I. ambos serem ângulos retos; II ambos serem ângulos obtusos; III. ambos serem ângulos agudos.

[6] Euclides livre de toda mácula

[7] Partindo de uma hipótese Φ, deriva-se uma contradição, podendo, então, descartar a hipótese e inferir não Φ.

Figura 8: Quadrilátero de Saccheri



Fonte: Katz(1998, p. 624).

Saccheri, em sua prova, admitia que apenas uma dessas possibilidades devesse ser correta. Para provar que a primeira opção era a verdadeira, Saccheri admitia, de início, que ela era falsa (de acordo com a redução ao absurdo) e, então, tentava provar que as outras duas eram falsas. Caso chegasse a uma conclusão como esta – que as três possibilidades eram falsas – teria chegado ao absurdo e, portanto, inferiria o contrário de sua hipótese inicial. Assim, provaria que os ângulos de topo eram ambos retos; logo, estaria provado o quinto postulado.

A hipótese dos ângulos obtusos ele afirmava ser falsa, pois contradizia o segundo postulado de Euclides e, por consequência, o Teorema de Saccheri-Legendre (que diz que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é menor ou igual a 180º). Mas não conseguiu encontrar contradição na hipótese dos ângulos agudos, apenas resultados estranhos. Disse, então, que a hipótese do ângulo agudo era falsa porque era repugnante à natureza da linha reta. Tentava assim chegar à conclusão de que a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é igual a quatro ângulos retos, o que equivale ao quinto postulado (GREENBERG, 2001, p. 155). Sem notar, Saccheri obteve as consequências de uma geometria que negasse o quinto postulado sem, contudo, ser inconsistente.

Adrien-Marie Legendre (1752-1833) propôs várias provas para o quinto postulado de Euclides. Lobachevsky estudou essas tentativas de prova e elas foram o que, talvez, finalmente o convenceu da realidade da geometria não euclidiana (CHABERT, 1997). Em uma das provas, Legendre concluiu que a soma dos três ângulos internos de um triângulo é igual a dois ângulos retos. Há, porém, um argumento em sua prova que não está demonstrado: por um ponto qualquer situado no interior de um ângulo pode-se desenhar uma reta que corta os dois lados do ângulo. E esse também é um argumento equivalente ao quinto postulado (CHABERT, 1997). Por isso, a prova de Legendre não é válida.

Essas são algumas tentativas de prova do quinto postulado de *Os Elementos*. Muitas outras não foram aqui apresentadas, como as de an-Nayziri, no século IX, Clairaut e Lambert, no século XVIII, Taurinus e Bolyai, no século XIX.

3.3 Geometrias não euclidianas

Muitas vezes, algo interessante ocorre na ciência: quando o momento histórico é favorável para uma nova ideia se manifestar, essa nova ideia pode ocorrer a várias pessoas mais ou menos ao mesmo tempo. Foi isso que aconteceu no século XIX, com o surgimento das geometrias não euclidianas (GREENBERG, 2001, p. 177). Notou-se que o quinto postulado de Euclides, além de não poder ser provado – de fato tratava-se de um postulado –, poderia ser negado, sem que contradições ocorressem. Três matemáticos merecem grande destaque nesse episódio: Nikolai Ivanovich Lobachevsky (1792-1856), János Bolyai (1802-1860) e Carl Friedrich Gauss (1777-1855).

Este momento histórico favorável relaciona a geometria com outras ciências, com a lógica, por exemplo. O desenvolvimento da lógica simbólica (ou moderna) foi fundamental para a possibilidade de desenvolvimento das geometrias não euclidianas.

A lógica aristotélica (ou antiga) estava em consonância com o raciocínio de Kant (1958), que relacionava o conhecimento geométrico com a intuição. Isso significa que certos postulados e certos argumentos podiam ser autoevidentes, ou seja, não podiam ser provados, mas a intuição bastava para serem aceitos como verdades. Já na lógica simbólica, desenvolvida nos séculos XVIII e XIX, não existem evidências intuitivas: axiomas são aceitos (por conveniência) simplesmente; não tratam da verdade. De acordo com Einstein (2005, p. 665), "o progresso alcançado pela axiomática consiste em ter separado claramente aquilo que é lógico-formal daquilo que constitui o seu conteúdo objetivo ou intuitivo".

Além disso, Carnap (1995, p. 127) afirma que, sem uma lógica suficientemente poderosa para estabelecer regras estritamente lógicas para demonstrações geométricas, as falhas nas tentativas de prova do quinto postulado eram muito difíceis de serem detectadas. Havia sempre algum apelo a uma premissa apoiada na intuição e não decorrente dos outros postulados. Muitas vezes, essa premissa tratava justamente de algo equivalente ao próprio quinto postulado, como mostramos aqui.

Com o desenvolvimento da lógica simbólica, muda-se o conceito de axioma (ou postulado). Deixa de ser a verdade indemonstrável e passa a ser a definição daquilo que é aceito. Deixa de fazer sentido, então, tentar demonstrar algo que é tomado como axioma. Desta forma, abre-se a possibilidade para a geometria não baseada na intuição, mas baseada em axiomas.

Um matemático alemão, Abraham Gotthelf Kästner (1719-1800), esteve muito envolvido nos estudos que culminaram no surgimento das geometrias não euclidianas. Orientou a tese de doutorado de Georg Simon Klügel, em que ele examina 28 tentativas de prova do quinto postulado, indicando a deficiência de cada uma delas e sugerindo, por fim, que se tratava mesmo de um postulado, isto é, indemonstrável (TRUDEAU, 1987). Kästner também foi orientador de Gauss, professor de Farkas[8] Bolyai (pai de János Bolyai) e professor do professor de Lobachevsky (NOBRE, 2004).

Com relação ao momento favorável ao desenvolvimento das geometrias não euclidianas, podemos citar uma frase dita por Farkas Bolyai: "Muitas coisas têm uma época na qual elas são descobertas em vários lugares ao mesmo tempo, assim como as violetas aparecem por todos os lados na primavera" (BONOLA, 1955, p. 99).

O matemático russo Lobachevsky, desde os anos de 1820, estava convicto da possibilidade de uma geometria sem que o quinto postulado fosse afirmado. Em 1829 publicou seu trabalho – o primeiro publicado – sobre a geometria não euclidiana, *Sobre os princípios da geometria*, inicialmente chamada de geometria imaginária. O nome de *geometria imaginária* indica a relação feita por Lobachevsky entre a geometria imaginária e a geometria euclidiana como similar à relação entre os números imaginários (ou complexos) e os números reais (ROSENFELD, 1988, p. 207).

[8] Em alemão muitas vezes referido como Wolfgang (SMITH, 1958, p.528).

Antes disso, em 1826, em uma palestra na Universidade de Kazan ele fez a primeira proclamação pública sobre essa nova geometria com uma palestra intitulada *Uma breve exposição dos princípios da Geometria incluindo uma demonstração rigorosa do teorema das paralelas*. Este título continha certa ironia com relação à demonstração rigorosa. Ele dizia que baseado em dados experimentais seria impossível determinar qual geometria, a euclidiana ou a imaginária, seria a que melhor descreveria o mundo real.

Lobachevsky afirmava que a soma dos ângulos internos de um triângulo retilíneo era sempre menor ou igual a π: quando igual a π, tratava-se da geometria de uso comum e quando menor que π, era a geometria imaginária. Ele mostrou que nenhuma contradição advém da possibilidade da soma ser menor que π, ao contrário de Saccheri, que, ao se deparar com essa possibilidade, disse que isso seria repugnante à natureza da linha reta e, então, assumiu que a soma deveria ser igual a π.

Para Lobachevsky, a geometria não estaria relacionada com a ideia de intuição de Kant (1958), mas com convenções e com resultados lógico-formais. Isso fica evidente em sua palestra de 1826 quando diz que os conceitos da geometria devem ser aprendidos pelos sentidos e que não devemos acreditar nos conceitos inatos, ou seja, aqueles baseados na intuição (ROSENFELD, 1988).

O trabalho de Lobachevsky, porém, não foi bem aceito pelos acadêmicos. Em 1832, então reitor da Universidade de Kazan, enviou seu artigo para revisão da Academia de Petersburgo, que ignorou as questões geométricas ali presentes e afirmou que esse não era um artigo digno de atenção. No ano de 1834, jornais literários de Petersburgo publicaram textos insultando o trabalho de Lobachevsky. Diziam que ele era o insolente de falsas invenções e que o título de seu artigo, ao invés de *Sobre os princípios da geometria*, deveria ser *Uma sátira na geometria* ou *Uma caricatura da geometria*. Acredita-se que esses textos publicados nos jornais tenham sido escritos por alunos do revisor da Academia de Petersburgo, Ostrogradsky, que desprezou o pedido de revisão feito por Lobachevsky dois anos antes (ROSENFELD, 1988, p. 208-209).

Apesar das críticas, ele continuou seu trabalho e escreveu diversos artigos sobre a geometria imaginária, a saber, *Geometria Imaginária* em 1835, *Aplicações da Geometria Imaginária a certas integrais* em 1836, *Novos princípios da geometria com uma completa teoria das paralelas* entre os anos de 1835 e 1838, *Pesquisas geométricas sobre a teoria das retas paralelas* em 1840 e *Pangeometria* em 1855. Este último título, como indica Rosenfeld (1988, p. 210), mostra a sua concepção de geometria universal que inclui a geometria euclidiana como sendo um caso especial.

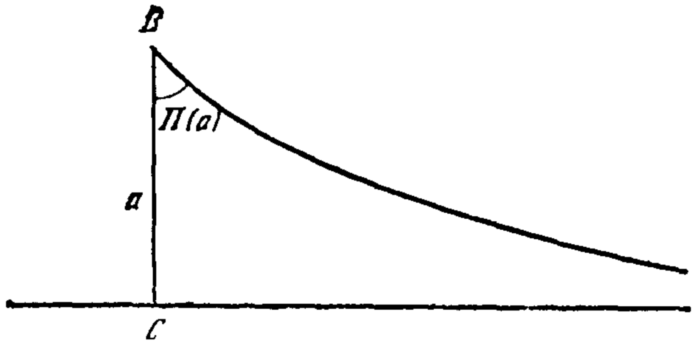
Lobachevsky propôs uma geometria hiperbólica, em que o postulado das paralelas fosse substituído por: para toda reta l e todo ponto P fora de l, há pelo menos duas paralelas distintas a l que passam por P. O nome de geometria hiperbólica foi dado futuramente pelo matemático Felix Klein em 1871, pois, de acordo com a etimologia, a palavra hipérbole está relacionada a excesso e, nesta geometria, o número de paralelas a uma reta dada passando por um ponto excede o número (um) da geometria euclidiana (TRUDEAU, 1987, p. 159).

Entre as bases de sua geometria imaginária, Lobachevsky definiu o ângulo de paralelismo. Isso porque em um plano, na geometria hiperbólica, todas as retas que saem de um ponto, com relação a outra reta, podem ser divididas em duas classes, as que a cortam e as que não a cortam. As retas que estão no limite entre uma classe e outra são chamadas *paralelas* à reta dada.

Notemos que o fato de uma reta não cruzar outra, nesta terminologia, não indica que sejam paralelas; as paralelas são aquelas que formam o ângulo de paralelismo com a perpendicular à reta dada, ou seja, as retas que estão no limite entre as que cruzam a reta dada e as que não cruzam. Como mostra Greenberg (2001, p. 200), outras nomenclaturas são usadas para essas retas que não cruzam a reta dada: por exemplo, “ultraparalelas”, “hiperparalelas” e “superparalelas”, para aquelas que possuem um ângulo maior que o de paralelismo; e “paralelas assintóticas”, para aquelas que formam o ângulo de paralelismo. Optamos aqui por usar a palavra “paralela” nos dois sentidos, isto é, para todas as retas que não cortam a reta dada.

Assim, dada uma reta, traçava-se uma perpendicular de tamanho a, passando pelo ponto C (pertencente à reta inicial) e por um outro ponto, B. Em B, passava uma paralela à reta inicial. O ângulo entre a perpendicular e a paralela foi chamado de ângulo de paralelismo. No caso da geometria euclidiana, esse ângulo era sempre $\frac{\pi}{2}$, enquanto na geometria imaginária, esse ângulo dependia de a, isto é, era uma função de a, que inicialmente Lobachevsky denotou por $F(a)$ e, posteriormente, por $\pi(a)$.

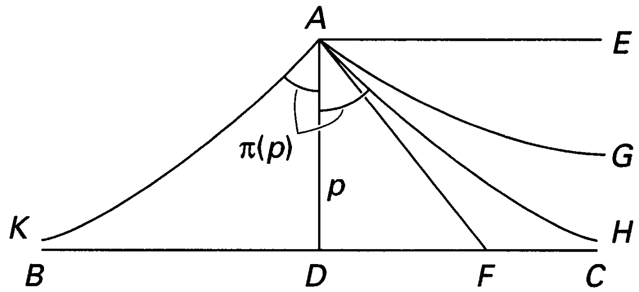
Figura 9: Ângulo de paralelismo



Fonte: Rosenfeld (1988, p. 221)

Assim, na figura 10, AH é uma paralela à BC, pois dada a distância de A a D, p, tem-se $\pi(p)$ como o ângulo de paralelismo. No plano hiperbólico, então, as retas AE e AG não cortam a reta BC, mas formam com AD ângulos maiores que o de paralelismo, ou seja, na terminologia de Lobachevsky não são paralelas à reta BC, assim como a reta AF, que não é paralela à reta BC por cruzar com ela. A reta AH se encontra no limite entre as retas que cortam e as que não cortam a reta BC e, portanto, é paralela à reta BC. Da mesma forma, do outro lado da perpendicular AD, tem-se AK como paralela à BC devido ao seu ângulo de paralelismo $\pi(p)$.

Figura 10: Ângulo de paralelismo



Fonte: Katz (1998, p. 775)

Tem-se, então, $\lim_{a\to 0} \pi(a) = \frac{\pi}{2}$ e $\lim_{a\to\infty} \pi(a) = 0$. Isso quer dizer que, quanto menor o valor de a, mais próximo se está da geometria euclidiana, isto é, quando as distâncias são pequenas, o plano hiperbólico se assemelha muito ao euclidiano. Lobachevsky mostrou, ainda, que, para todo ângulo A, há um valor a, tal que $A = \pi(a)$ (ROSENFELD, 1988, p. 221).

Importantes consequências são decorrentes do axioma hiperbólico: I. Para toda reta l e todo ponto P fora de l, há infinitas paralelas a l que passam por P; II. Retângulos não existem – a existência de retângulos implica no postulado das paralelas de Hilbert (Para toda reta l e todo ponto P fora de l, há no máximo uma reta m que passa por P, tal que m é paralela a l.); III. Na geometria hiperbólica, todos os triângulos têm a soma dos ângulos internos menor que 180º; IV. Por consequência, na geometria hiperbólica, todos os quadriláteros convexos têm a soma dos ângulos internos menor que 360º; V. Não existem triângulos semelhantes não congruentes, ou seja, é impossível ampliar ou reduzir um triângulo sem distorção; VI. O ângulo determina o tamanho do lado de um triângulo.

O matemático húngaro János Bolyai desenvolveu seu interesse por geometria por influência de seu pai, o matemático Farkas Bolyai. O pai tentou exaustivamente provar o postulado das paralelas sem sucesso, como diz em carta ao filho:

> Eu acreditei que sacrificaria a mim mesmo por causa da verdade. Eu estava pronto para me tornar um mártir que removeria a falha da geometria e a devolveria purificada à humanidade. [...] Minhas criações foram melhores que as de outros e ainda assim não alcancei completa satisfação... (GREENBERG, 2001, p. 161-162).

Porém, o filho János teve uma ideia completamente nova e falou sobre isso em 1823 em uma carta ao pai, dizendo que planejava publicar seu trabalho sobre as paralelas assim que o terminasse. Naquele momento, o que ele poderia dizer é que, do nada, havia criado um estranho novo universo!

Em 1832 escreveu um apêndice de 26 páginas ao livro do pai *Tentamen*, intitulado *Apêndice contendo a absoluta verdade científica do espaço, independente da veracidade ou falsidade do XI axioma de Euclides*[9] *(que nunca poderá ser decidido* a priori*)*. Bolyai apresenta, então, um sistema geométrico baseado no oposto da hipótese de Euclides, o postulado das paralelas, denominado *sistema S*. O sistema geométrico conhecido como geometria euclidiana, ele denomina *sistema* Σ. O que Bolyai chama de verdade científica absoluta do espaço, em seu título, refere-se ao sistema geométrico absoluto, que, para ele, inclui ambos sistemas, *S* e Σ.

Farkas Bolyai mandou, ansioso pela resposta e sem o consentimento do filho, uma cópia desse apêndice para seu amigo, o matemático Carl Friedrich Gauss. Ambos trocavam frequentemente correspondências e, inclusive, quando Farkas acreditou ter provado o postulado das paralelas, enviou a demonstração para Gauss que, por sua vez, mostrou a ele a falha que cometera. Gauss respondeu à correspondência em que Farkas mostrava o trabalho do filho, dizendo que não poderia elogiar o trabalho de János, pois estaria elogiando a si mesmo, já que o caminho que János havia tomado e os resultados aos quais havia chegado coincidiam quase exatamente com suas próprias reflexões que ocupavam sua mente há 35 anos (GREENBERG, 2001, p. 178).

János Bolyai ficou profundamente desapontado com a resposta e com o fato de Gauss estar, segundo ele, tentando se apropriar de suas ideias e, depois disso, não publicou mais nada de suas pesquisas. Em 1848, recebeu a informação de que outro matemático, Lobachevsky, havia chegado a resultados semelhantes a ele. Depois de uma análise cuidadosa das publicações,

[9] Refere-se ao postulado das paralelas de Euclides, apresentado aqui como o quinto postulado.

János se sentiu instigado a competir com Lobachevsky e, então, retomou intensamente seus estudos que culminariam em uma grande obra sobre o assunto que, contudo, nunca foi terminada (WOLFE, 1945, p.53).

O notório matemático Carl Friedrich Gauss muito pouco publicou sobre seus estudos envolvendo esta nova geometria, por ele chamada inicialmente de *antieuclidiana*, depois de *geometria astral* e, finalmente, de *não euclidiana*. A maior parte dos registros históricos desses estudos está nas cartas que trocava com outros matemáticos e em algumas notas entre seus artigos. Segundo Bonola (1955, p. 65), desde 1792 ele estudava a possibilidade de uma geometria que negasse o quinto postulado de Euclides, visto que a demonstração lhe parecia muito distante. Em uma carta datada de 1817 ao amigo Heinrich Wilhelm Olbers, Gauss escreve que estava cada vez mais convencido que o postulado não poderia ser provado (ROSENFELD, 1988, p. 215).

Em outra correspondência, de 1824, agora para o matemático Franz Taurinus, Gauss diz que a hipótese da soma dos três ângulos internos de um triângulo ser menor que 180° conduz a uma curiosa geometria, muito diferente da euclidiana, mas totalmente consistente. Diz que os teoremas dessa geometria parecem ser paradoxais, “mas calma, constantes reflexões revelam que eles não contêm nada de todo impossível”. Segue descrevendo essa geometria e, então, diz: “Todos meus esforços para descobrir uma contradição, uma inconsistência, nesta geometria não-Euclidiana têm sido sem sucesso” (WOLFE, 1945, p. 47). Conclui dizendo ao amigo que aquela era uma comunicação privada e que ele não deveria torná-la pública.

Em 1829, Gauss escreveu para outro amigo matemático, Friedrich Wilhelm Bessel, que temia os gritos dos beócios[10], caso publicasse seus estudos sobre a nova geometria (GREENBERG, 2001, p. 182). Esse receio da reação da comunidade de matemáticos se deve principalmente ao conceito de espaço de Kant (1958), relacionado à ideia de intuição, ainda muito forte no século XIX.

Como pudemos ver, na primeira metade do século XIX cresceu a convicção em duas coisas: não é possível provar o quinto postulado sem admitir outro postulado equivalente a ele e é possível construir geometrias sem manter o quinto postulado (CHABERT, 1997).

Essa nova situação, com a possibilidade de geometrias que neguem a euclidiana, poderia ser considerada fruto de uma mudança revolucionária, em termos de Thomas S. Kuhn, pelo fato de ter sido necessário recusar componentes essenciais do conhecimento anteriormente admitidos, no caso, a ideia de intuição. Como apresenta Corry (1996, p. 173-174), em uma mudança normal (ou não revolucionária) o objetivo está em resolver problemas, sem suscitar dúvidas sobre a validade da teoria geral. Até o início do século XIX os matemáticos buscavam resolver um problema específico – a demonstração do quinto postulado de Euclides – sem questionar se este postulado poderia ser negado; a questão estava em saber se este postulado, tido como verdade, era demonstrável ou não. Abandonada a concepção de axiomas ou postulados como verdades, os fundamentos matemáticos são postos em cheque e, por isso, poderia ser este um momento de revolução. Para Kuhn (1998), as revoluções mudam a concepção de mundo que se tem: “na medida em que seu único acesso [dos cientistas] a esse mundo dá-se através do que veem e fazem, podemos ser tentados a dizer que, após uma revolução, os cientistas reagem a um mundo diferente” (KUHN, 1998, p. 146).

[10] De acordo com o dicionário Houaiss (2009), por extensão de sentido, refere-se àquele “que apresenta as características atribuídas (pelos atenienses) aos beócios, ou seja, espírito pouco cultivado, indiferença à cultura; grosseiro, boçal”.

Apesar desses indícios de o surgimento das geometrias não euclidianas marcar um momento de revolução, é muito questionada a possibilidade de haver revolução científica – na forma como é apresentada por Kuhn (1998) – na história da matemática. Crowe (1975) é enfático ao dizer que, em matemática, nunca ocorrem revoluções, pois princípios são mantidos sem que sejam destruídas doutrinas anteriores. No caso das geometrias não euclidianas, o autor se baseia na preservação da geometria euclidiana, coexistindo às geometrias não euclidianas para descaracterizar o momento como o de uma revolução científica.

Surgiu, então, a dúvida sobre a consistência da geometria hiperbólica. Como mostra Barker (1969), "dizer que um sistema é inconsistente é dizer que dos axiomas desse sistema podemos deduzir dois teoremas que se contradizem mutuamente" (p. 63). Porém, não encontrar dois teoremas que se contradigam não quer dizer que o sistema seja consistente; é preciso provar. E essa prova pode ser realizada de diferentes modos. Um deles consiste em encontrar uma interpretação sob a qual todos os axiomas, e todos os teoremas deles decorrentes, sejam, sem sombra de dúvida, verdadeiros. Entretanto, é necessário que a verdade da interpretação dos enunciados esteja perfeitamente definida, o que, no caso das geometrias, seria uma limitação. Outro modo de provar a consistência do sistema é por meio de uma relativização da consistência: "mostramos que um dado sistema é consistente contanto que outro sistema, menos suspeito, também o seja" (BARKER, 1969, p. 64).

Então, Eugenio Beltrami propôs o teorema metamatemático: *Se a geometria euclidiana for consistente, então a geometria hiperbólica também será*. Assim, a consistência de uma geometria é relativa à outra. Para a realização dessa prova, não há necessidade de se verificar que a geometria hiperbólica é consistente de fato. Apenas se a geometria euclidiana for consistente, a hiperbólica também será e, da mesma forma, se a geometria hiperbólica for inconsistente, a euclidiana também será. E, como mostra Trudeau (1987, p.233), apesar de não haver boas razões para suspeitar da consistência da geometria euclidiana, ela nunca foi exaustivamente demonstrada. Beltrami provou o teorema em 1868, com o auxílio da geometria diferencial. Ele também foi provado por Klein em 1871, mas de outra forma: por meio da geometria projetiva (GREENBERG, 2001).

Como corolário desse teorema metamatemático, foi proposto que se a geometria euclidiana for consistente, então o quinto postulado não poderia, de fato, ser decorrente dos outros quatro, assim como ele não seria contradito pelos outros quatro. A demonstração desse corolário é decorrente do teorema: se assumirmos que o quinto postulado pode ser provado a partir dos outros postulados, então a geometria hiperbólica seria inconsistente, já que ela nega o postulado das paralelas. Mas se a geometria hiperbólica não for consistente, pelo teorema metamatemático, a geometria euclidiana também não será. Teríamos, então, que a geometria euclidiana seria inconsistente, o que nega a hipótese inicial (GREENBERG, 2001, p. 225).

Existem, além da geometria euclidiana e das geometrias hiperbólicas, as geometrias elípticas, que não apresentaremos neste artigo. Vale pontuar que, no caso das geometrias elípticas, o postulado das paralelas é substituído por: Não há reta paralela a l que passe por um ponto P fora de l. Essa substituição não pode ser feita sem alterar outro postulado de modo que ela seja consistente. Assim, o segundo postulado de Euclides, que afirma ser possível alongar arbitrariamente um dado segmento, deve ser alterado, pois, nessa geometria, cada segmento admite um comprimento máximo que pode atingir.

4 ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

O objetivo deste artigo foi apresentar uma reconstrução histórica, com fins historiográficos, do surgimento das geometrias não euclidianas como resultado das discussões em torno do quinto postulado de Euclides. Para isso, recorremos à história de problemas (MAYR, 1998), por entendermos que ela se adequa ao tema em questão e ao propósito historiográfico que tínhamos. Utilizamos, na reconstrução feita, fontes historiográficas, traduções e edições de fontes primárias, textos matemáticos posteriores ao período histórico e textos filosóficos.

Apesar do nosso propósito historiográfico, entendemos que a reconstrução feita pode ser útil ao professor que deseje utilizar a história da matemática em suas aulas. Isso não significa que haja algo pronto para atingir fins pedagógicos; ao contrário, o texto que apresentamos não deve ser, simplesmente, inserido em aulas de matemática, seja como apresentação oral do professor, seja com a leitura dos estudantes, seja com a inclusão de trechos do texto nas aulas, já que não foi constituído para isso.

O professor que desejar pode se valer desse material produzido para elaborar atividades ou planejar discussões para suas aulas de matemática. Por utilizarmos a história de problemas em nossa reconstrução, o texto não é superficial demais, de modo que não dê elementos suficientes ao professor, nem longo ou detalhista demais, de modo que inviabilize sua leitura e seu estudo.

Ainda, aproximamos o que se entende por história de problemas da *história-problema* (MIGUEL; MIORIM, 2005), porém esta tem um caráter educacional: “uma história que põe problemas, isto é, que parte de problemas que se manifestam em práticas pedagógicas e investigativas do presente e que preocupam, de certa forma, o professor de Matemática e/ou o pesquisador em educação matemática do presente” (p. 160).

Finalizamos destacando a necessidade de produção de trabalhos, na área da Educação Matemática, que possibilitem ou subsidiem propostas metodológicas com a inclusão da história em aulas de matemática, que superem a inserção superficial, apenas como curiosidade – como vemos em livros didáticos, por exemplo.

REFERÊNCIAS

ARCARI, I. **Um texto da geometria hiperbólica**. 2008. 127 p. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2008.

BARBOSA, L. N. S. C. **Uma reconstrução histórico-filosófica do surgimento das geometrias não euclidianas**. 2011. 68 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2011.

BARBOSA, L. N. S. C.; SILVA, M. R. A participação da história no ensino de matemática: pontos de vista historiográfico e pedagógico. **Zetetiké**, Campinas, v. 21, n. 39, p. 103-120, jan./jun. 2013.

BARKER, S. T. **Filosofia da matemática**. Tradução de L. Hegenberg e O. Silveira da Mota. Rio de Janeiro: Zahar, 1969.

BICUDO, I. Introdução e tradução. In: EUCLIDES. **Os elementos**. São Paulo: Editora UNESP, 2009.

BONOLA, R. **Non-euclidean geometry**: a critical and historical study of its development. Tradução de H. S. Carslaw. New York: Dover, 1955.

BRITO, A. J. **Geometrias não-euclidianas**: um estudo histórico-pedagógico. 1995. 187 p. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1995.

CHABERT, J. L. Proving the Fifth Postulate: true or false? In: THE INTER-IREM COMMISSION. **History of mathematics, histories of problems**. Paris: Ellipses, 1997. p. 285-305.

CARNAP, R. **An introduction to the philosophy of science**. New York: Dover, 1995.

CORRY, L. Paradigms and paradigmatic change in the history of the mathematics. In: AUSEJO, E.; HORMIGON, M. (Eds.). **Paradigms and mathematics**. Madrid: Siglo Veintiuno de España Editores, 1996. p. 169-192.

CROWE, M. J. Ten "laws" concerning patterns of change in the history of mathematics. **Historia Mathematica**, v.2, p. 161-166, nov. 1975.

D'AMBROSIO, U. **Educação Matemática**: da teoria à prática. Campinas: Papirus, 1996.

EINSTEIN, A. Geometria e experiência. Tradução de V. A. Bezerra. **Scientiae Studia**, São Paulo, v.3, n.4, p.665-675, 2005.

EUCLIDES. **Os elementos**. Tradução de I. Bicudo. São Paulo: Editora UNESP, 2009.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Universidade Estadual de Campinas, 1995.

GREENBERG, M. J. **Euclidean and non-euclidean geometries**: development and history. 3. ed. New York: Freeman, 2001.

HEATH, T. L. **The thirteen books of Euclid's elements**: translated from the text of Heiberg with introduction and commentary. Cambridge: Cambridge University Press, 1968.

HOUAISS, A. **Houaiss eletrônico**. Rio de Janeiro: Objetiva, 2009. CD-ROM.

JAOUICHE, K. **La Théorie des parallèles en Pays d'Islam**. Paris: VRIM, 1986.

KANT, E. **Crítica da razão pura**. Tradução de J. Rodrigues de Mereje. São Paulo: Edições e Publicações Brasil, 1958.

KATZ, V. J. **A history of mathematics**: an introduction. 2. ed. London: Addison-Wesley, 1998.

KUHN, T. S. **A estrutura das revoluções científicas**. Tradução de Beatriz Vianna Boeira e Nelson Boeira. São Paulo: Perspectivas, 1998.

MARTINS, A. F. P. História e filosofia da ciência no ensino: há muitas pedras nesse caminho... **Caderno Brasileiro de Ensino de Física**, Florianópolis, v. 24, n.1, p. 112-131, 2007.

MAYR, E. **O desenvolvimento do pensamento biológico**: diversidade, evolução e herança. Tradução de Ivo Martinazzo. Brasília: UNB, 1998.

MIGUEL, A.; MIORIM, M. A. **História na Educação Matemática**: propostas e desafios. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

NASCIMENTO JUNIOR, A. F. Fragmentos da história das concepções de mundo na construção das ciências da natureza: das certezas medievais às dúvidas pré-modernas. **Ciência & Educação**, Bauru, v. 9, n. 2, p. 277-299, 2003.

NOBRE, S. R. **Introdução histórica às geometrias não euclidianas**: uma proposta pedagógica. Belém: SBHMt, 2009.

NOBRE, S. R. Leitura crítica da história da matemática: reflexões sobre a História da Matemática. **Ciência & Educação**, Bauru, v.10, n.3, p.531-543, 2004.

ROSENFELD, B. A. **A history of non-euclidean geometry**: evolution of the concept of a geometric space. Translated by Abe Shenitzer. New York: Springer-Verlag, 1988.

SILVA, M. D. O declínio da cultura grega e o desenvolvimento da matemática até a idade média: em busca de uma compreensão sociológica. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10., 2010, Salvador. **Anais**... Ilhéus: Via Litterarum, 2010. 1 CD.

SIU, M. K. "No, I don't use history of mathematics in my class. Why?". In: FURINGHETTI, F.; KAIJSER, S.; TZANAKIS, C. (Ed). **Proceedings of HPM 2004 & ESU 4**. Iraklion, Greece: University of Crete, 2006, p. 268-277.

SMITH, D. E. **History of mathematics**. New York: Dover Publications, 1958. v.1.

STRUIK, D. J. **História concisa das matemáticas**. Tradução de J. C. S. Guerreiro. 2. ed. Lisboa: Gradiva, 1992.

TRUDEAU, R. J. **The non-euclidean revolution**. Boston: Birkhäuser, 1987.

WOLFE, H. E. **Introduction to non-euclidean geometry**. New York: The Dryden Press, 1945.