ALGUNS ASPECTOS DO DESENVOLVIMENTO HISTÓRICO DO CONCEITO DE FUNÇÃO[1]

SOME ASPECTS OF THE HISTORICAL DEVELOPMENT OF THE FUNCTION CONCEPT

ZUFFI, Edna Maura[2]

RESUMO

O conhecimento da gênese histórica dos conceitos matemáticos pode ser uma ferramenta de grande valia para a elaboração da linguagem matemática e para uma compreensão mais profunda desses conceitos. Em particular, a ideia de função, tendo percorrido muitos séculos desde as suas primeiras noções intuitivas, e tendo chegado à sua elaboração mais recente apenas no século XX, mostra uma grande riqueza histórica a ser explorada, principalmente na formação de professores de Matemática. Nossa intenção, neste artigo, é trazer à tona alguns fatos da gênese histórica desse conceito, propondo também breves reflexões, obtidas em nossa pesquisa com professores, ao desenvolverem essa ideia no Ensino Médio.

Palavras-chave: Funções. Gênese histórica. Linguagem matemática. Professores.

ABSTRACT

The knowledge of the historical genesis of mathematical concepts can be a valuable tool for the development of mathematical language, and therefore, for a deeper understanding of these concepts. In particular, the idea of function has covered many centuries since its first intuitive notions, and has arrived at its latest development only in the twentieth century. This idea shows a great historical wealth to be exploited, particularly for the training of mathematics teachers. Our intention in this article is to bring to light some facts of the historical genesis of this concept, as well as to propose brief reflections obtained from our research with High School teachers that developed it.

Keywords: Functions. Historical genesis. Mathematics language. Teachers.

1 INTRODUÇÃO

Neste artigo não pretendemos fornecer uma análise minuciosa de todos os aspectos ligados ao desenvolvimento histórico do conceito de função, mas acreditamos que o compartilhar de alguns desses fatos com os colegas professores possa ser de grande utilidade na compreensão das diferentes definições propostas para o mesmo.

A partir dessas definições, e com a constatação de que nem todas as motivações históricas que surgiram para seu aprimoramento podem estar presentes em sala de aula, os professores poderão fazer uma análise crítica dos modos pelos quais essas ideias são desenvolvidas com seus alunos.

Uma de nossas pesquisas (ZUFFI, 1999) mostrou que há uma diversidade de conceituações para as funções, apresentadas pelos professores do Ensino Médio, que variam com o contexto em que são propostas. Mais ainda, revelou que nem sempre os professores têm consciência dessas diferenças.

---

[1] Este artigo foi originalmente publicado pela Sociedade Brasileira de Educação Matemática-SBEM, na *Educação Matemática em Revista*, ano 8, n.9/10, em abril de 2001, a qual autorizou previamente sua republicação neste periódico.

[2] Doutora pela Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo (USP), São Paulo, Brasil. Docente no Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação (ICMC) da USP, São Carlos, São Paulo, Brasil. Endereço para correspondência: Av. Trabalhador São-carlense, 400, Centro, CEP:13566-590, São Carlos, SP, Brasil. Endereço eletrônico: edna@icmc.usp.br.

A análise histórica, então, vem nos auxiliar a compreender que a criação em Matemática não se dá em um momento único. Há fatores socioculturais influenciando fortemente essa criação, todos dependendo dos problemas que as sociedades de cada época propõem como relevantes, juntamente com a comunidade científica. Da mesma maneira, na sala de aula, a elaboração das ideias matemáticas depende de problemas levantados pelos alunos e pelo professor, bem como das formas de expressão, através da linguagem matemática, com as quais essas ideias são abordadas.

2 UM POUCO DE HISTÓRIA

No trabalho de Sierpinska (1992), encontramos alguns momentos da evolução da ideia de função, como também a ressalva de que os papéis exercidos pelos conjuntos 'domínio' e 'contradomínio', envolvidos em sua definição, não são simétricos:

> Esta condição não nos parece um problema agora, mas foi necessário muito tempo na história para atingi-la como algo importante para se distinguir a ordem das variáveis. [...] Os historiadores atribuem a discriminação entre as variáveis dependentes e independentes a Descartes, mas parece que os papéis das coordenadas em sua 'Geometrie' eram bastante simétricos (SIERPINSKA, 1992, p. 38)[3].

Não parece existir um consenso, entre os diversos autores, a respeito da origem do conceito de função. Alguns deles consideram que os babilônicos já possuíam um "instinto de funcionalidade". (YOUSCHKEVITCH, 1976, apud MACHADO, 1998). Podemos encontrar este "instinto de funcionalidade", que precede uma ideia mais geral de função, desde cerca de 2000 A.C., em cálculos babilônicos com tabelas sexagesimais de quadrados e de raízes quadradas, podendo ser tomadas como "funções tabuladas", destinadas a um fim prático.

Entre os gregos, as tabelas que faziam a conexão entre a Matemática e a Astronomia mostravam evidências de que estes percebiam a ideia de dependência funcional, através da interpolação linear (YOUSCHKEVITCH, 1976, apud MACHADO, 1998).

Segundo Boyer (1974), na França, há indícios de ideias primárias de função anteriores a 1361, quando Nicole Oresme, um dos maiores escritores e professores de sua época, descreveu graficamente um corpo movendo-se com aceleração uniforme no tempo. Porém, o trabalho de Oresme resumia-se a ilustrar aspectos qualitativos, sem se utilizar de medidas (YOUSCHKEVITCH, 1976, apud MACHADO, 1998).

Para Youschkevitch (1976), há três fases principais do desenvolvimento da noção de função: 1) a Antiguidade, na qual o estudo de casos de dependência entre duas quantidades ainda não havia isolado as noções de variáveis e de função; 2) a Idade Média, quando as noções eram expressas sob uma forma geométrica e mecânica, mas em que ainda prevaleciam, em cada caso concreto, as descrições verbais ou gráficas; 3) o período Moderno, a partir do século XVII, principalmente, que comporta, a seguir, um melhor detalhamento.

Galileu Galilei (1564-1642) contribuiu para a evolução da ideia de função, ao introduzir o quantitativo nas suas representações gráficas. Nessa época, o aprimoramento dos instrumentos de medida propiciou a busca de resultados inspirados na experiência e na observação.

[3] Todas as traduções, neste artigo, são de nossa autoria.

Já Descartes (1696-1650) utilizou-se de equações em x e y para introduzir uma relação de dependência entre quantidades variáveis, de modo a permitir o cálculo de valores de uma delas, a partir dos valores da outra.

Entretanto, compreendemos que foi com dos trabalhos de Newton (1642-1727) e Leibniz (1646-1716) que surgiram as primeiras contribuições efetivas para o delineamento desse conceito.

Na teoria de Newton sobre "fluentes" – esse era o termo que ele usava para descrever as suas ideias de funções – estas encontravam-se bastante ligadas à noção de curva e às "taxas de mudança" de quantidades variando continuamente. E mais ainda, restringiam-se a "imagens geométricas de uma função real, de variável real" (CARAÇA, 1952).

Newton desenvolveu também uma grande habilidade em expressar estes "fluentes" em termos de séries infinitas, relacionadas a taxas de variação, para o cálculo de comprimentos, áreas, volumes, distâncias, temperaturas, enfim, grandezas variando continuamente. Isso acabou por resultar em sua tentativa de definir limite de uma função, falando em "quantidades" e "taxas de quantidades" (BOYER, 1974), termos que são bastante imprecisos e distantes da noção de limite que conhecemos hoje.

Foi Leibniz, na década de 1670, quem usou o termo "função" para se referir a "certos segmentos de reta cujos comprimentos dependiam de retas relacionadas a curvas". Logo depois, o termo foi usado para se referir a quantidades dependentes ou expressões (ITÔ, 1987).

Notamos que as primeiras definições do conceito revelam um certo encantamento pela álgebra, na qual a função era dada por uma expressão algébrica, como veremos a seguir, na definição dada por Jean Bernoulli (1667-1748): "Função de uma quantidade variável é uma quantidade composta de alguma maneira desta variável e de quantidades constantes" (SIERPINSKA, 1992, p. 45).

Jean Bernoulli estava interessado em funções que fossem bem-comportadas, devido à natureza dos problemas para os quais contribuiu, como o aprimoramento da utilização da regra de L'Hospital para formas indeterminadas de limite, que envolviam funções diferenciáveis. Este matemático também deu grandes contribuições à Geometria Diferencial, com seus estudos sobre geodésicas em uma superfície. Estudou curvas como a catenária, trajetórias cáusticas e funções exponenciais simples: $y = a^x$, e gerais: $y = x^x$. Para essa última, propôs também sua expansão em séries de exponenciais e, integrando-a termo a termo, achou a área sob essa curva. Jean experimentou várias notações para uma função de x, das quais a mais próxima da notação em uso é "ϕx" (BOYER, 1974).

Outra definição interessante é a de Leonard Euler (1707-1783), que foi discípulo de Jean Bernoulli:

> Uma função de uma quantidade variável é uma expressão analítica, composta de alguma maneira desta mesma quantidade e números ou quantidades constantes. Assim, qualquer expressão analítica a qual, além da variável z, contém também quantidades constantes, é uma função de z. Por exemplo: $a + 3z$; $az - 4zz$; $az + b/aa - zz$; cz etc; são funções de z (SIERPINSKA, 1992, p.45).

Euler, a partir de seu *Introductio in analysin infinitorum*, de 1748, organizou o cálculo diferencial, ampliando a ideia de "fluentes" de Newton para um ramo mais amplo da Matemática – a Análise, a qual se caracteriza pelo estudo de processos infinitos (BOYER, 1974). A partir daí, a ideia de função tornou-se fundamental para esta área, enquanto esteve implícita na Geometria Analítica de Fermat e Descartes, e nos estudos de Newton e Leibniz.

Entretanto, a definição dada por Euler não explicita o que é uma "expressão analítica". Não podemos, porém, deixar de observar que este matemático trouxe grandes contribuições para a linguagem simbólica e as notações que utilizamos hoje, entre elas, o "$f(x)$" para denotar uma função de x (além da letra e, para a base de logaritmos naturais, π para o perímetro da circunferência dividido por seu diâmetro, i para $\sqrt{-1}$, Σ para somatório etc.).

Em seu *Introductio*, Euler estabeleceu um tratamento estritamente analítico para as funções trigonométricas (em termos de expansão das mesmas em séries de potências), introduzindo abreviações para estas funções que são próximas às que conhecemos hoje. Também trabalhou com séries fracionárias infinitas, estabelecendo relações entre a Análise e a Teoria dos Números. Estudou particularmente as funções exponenciais e os logaritmos. Com D'Alembert, trocou correspondências sobre o "problema das cordas vibrantes", que envolvia equações diferenciais e funções diferenciáveis (e, portanto, bem-comportadas).

A imprecisão da definição de limite de uma função proposta por Euler, que se utilizava de ideias dúbias sobre os diferenciais, parece refletir a própria imprecisão em sua definição de função e de variável. Segundo Euler, os diferenciais eram símbolos para "quantidades que são zero" e também "quantitativamente diferentes de zero". Esta sua proposta foi criticada por D'Alembert, o qual tentou melhorar o conceito de limite, mas essa questão só foi bem resolvida no século XIX (BOYER, 1974).

A nosso ver, um detalhe interessante que pode ter indiretamente contribuído para o aperfeiçoamento da definição de função – e, particularmente, para a de funções logarítmicas e exponenciais – foi que Euler esclareceu que os logaritmos de números negativos não são números reais. Isto era bastante confuso, até então, e acabou por levar a se pensar em restrições para os domínios destas funções e para as bases consideradas. Euler também trabalhou com as funções seno e cosseno para números complexos, o que, juntamente com os estudos de D'Alembert a este respeito, serviu como antecipação de um ambiente favorável para o desenvolvimento da teoria de funções de variáveis complexas de Cauchy, no século XIX.

Outra definição interessante de função é a do matemático francês Jean-Louis Lagrange (1736-1813) ~~e~~ que já incorpora ao conceito a possibilidade de termos várias variáveis:

> Chama-se função de uma, ou várias quantidades, toda expressão de cálculo na qual estas quantidades entram de uma maneira qualquer, misturadas ou não com outras quantidades, que se veem como valores dados e invariáveis, de modo que as quantidades da função podem receber todos os valores possíveis. Assim, nas funções considera-se somente as quantidades que se consideram variáveis, sem consideração às constantes que podem estar aí misturadas. (SIERPINSKA, 1992, p.45).

A Segunda metade do século XVIII foi uma época de importantes publicações que serviram de livros-texto para cursos de Matemática, que surgiram particularmente na França. Em 1788, Lagrange publicou seu *Mecanique Analytique*, no qual apresentou a Análise por meio de um tratamento por postulados (BOYER, 1974). Utilizou as notações $f'(x), f''(x), \dots, f^n(x)$ para a 1^a, 2^a, ..., n-ésima derivada da função $f(x)$. Também trabalhou com a expansão de funções em séries de potências, mas deixou lapsos quanto à convergência destas séries e também no estudo de funções que não eram expressas em séries infinitas. Lagrange publicou resultados sobre mecânica e teoria de equações, contribuindo com o "método da variação dos parâmetros" para a solução de equações diferenciais lineares não-homogêneas, e com os "multiplicadores de Lagrange", para máximos e mínimos condicionados de uma função $f(x, y, z, w)$ – aqui, relembramos que sua definição de função tem o cuidado de incluir funções de várias variáveis. Também se interessou pela Teoria dos Números e, na Álgebra, contribuiu com o teorema que diz que a ordem de um subgrupo divide a ordem do grupo em que este se insere.

Percebemos que esta foi uma época de grande entusiasmo pelo Cálculo, porém isto não foi suficiente para que se extinguissem por completo as confusões sobre seus princípios básicos. No entanto, as discussões geradas nesse período parecem ter tido fortes influências no desenvolvimento da “era do rigor”, no século seguinte.

Outro matemático francês a quem se atribui muito desse rigor, é Augustin Cauchy (1789-1857), o qual influenciou marcadamente a Matemática do início do século XIX. Embora Gauss (1777-1855) o tivesse acompanhado em termos do rigor empregado em seus trabalhos, o fato de Cauchy ter publicado mais e apresentar maior aptidão para o ensino parece ter-lhe rendido mais créditos.

A definição de função, segundo Augustin Cauchy, era: “Chamam-se funções de uma ou várias quantidades variáveis às quantidades que se apresentam, no cálculo, como resultados de operações feitas sobre uma ou várias outras quantidades constantes ou variáveis” (SIERPINSKA, 1992, p.45).

Embora lhe seja atribuído o rigor do século XIX, observando com o olhar atual, não nos parece que esta definição seja muito precisa, pois não esclarece, de pronto, qual seria a natureza dessas “operações” feitas sobre as variáveis. Apesar disso, a teoria de funções de uma variável complexa foi desenvolvida por Cauchy, a partir de 1814.

Notamos que esse matemático já incorporava, como fundamento de suas teorias, o conceito de limite de D’Alembert, olhando os infinitesimais como variáveis dependentes. Ele também forneceu uma definição mais satisfatória de função contínua e sua definição para a derivada deixava claro que funções descontínuas em um ponto não seriam aí diferenciáveis, embora gráficos descontínuos pudessem determinar uma área bem definida.

Podemos observar algumas similaridades nos trabalhos de Cauchy e Bolzano (1781-1848). Este último, por volta de 1840, parecia reconhecer que os números reais não são enumeráveis, ou seja, que seu “infinito” é diferente daquele dos conjuntos de números naturais e inteiros.

Enquanto Newton, à sua época, preocupava-se com curvas suaves e contínuas, que representavam movimentos e fenômenos mecânicos, Bolzano, em 1834, apresentava uma função que era contínua, mas que não era diferenciável em nenhum ponto do intervalo em que se definia. Este exemplo, nada “comportado”, passou despercebido até ser redescoberto e difundido por Weierstrass (1815-1897).

Segundo Boyer (1974), o termo “função” é uma palavra-chave em Análise, e foi especialmente na clarificação deste termo que o processo de aritmetização da Análise surgiu, tendo Fourier um papel destacado nesse processo.

As diferenças de opinião entre D’Alembert e Euler, na metade do século XVIII, sobre a solução do “problema da corda vibrante”, e a solução apresentada por Daniel Bernoulli (que parecia implicar periodicidade e ser menos geral que a solução dada pelos primeiros), foram eliminadas em 1824, por Fourier (1768-1830), quando esse último mostrou não ser este o caso.

Para Fourier, qualquer função $y = f(x)$ poderia ser representada por uma série do tipo:

$$y = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx),$$

e esta conferiria maior generalidade ao tipo de função que poderia ser estudada. A série de Taylor, por exemplo, exigia funções diferenciáveis, enquanto que para a representação de Fourier, bastaria que as funções fossem contínuas e diferenciáveis por partes, podendo apresentar, assim, infinitos pontos de descontinuidade na reta.

Em 1837, Peter Gustav Lejeune-Dirichlet (1805-1859) propôs a seguinte definição geral de função, que foi amplamente aceita até meados do século XX:

> Se uma variável y está relacionada a uma variável x de modo que, ao se atribuir qualquer valor numérico a x, existe uma regra de acordo com a qual um único valor de y é determinado, então y é dito ser uma função da variável independente x (SIERPINSKA, 1992, p.46).

Embora esta última chegue próximo à noção moderna de função, àquela época, os conceitos de "conjunto" e de "número real" ainda não haviam sido precisamente estabelecidos. Mas a "regra" proposta por este matemático poderia ser bastante arbitrária. Dirichlet propôs a seguinte função real: $f(x) = c$, para os valores de x irracionais, e $f(x) = d \neq c$, para os valores de x racionais, o que determinava, já àquela época, uma função bastante "mal comportada" e não visualizável num gráfico (BOYER, 1974).

Foi esse matemático quem forneceu as primeiras provas rigorosas para a convergência das séries de Fourier, para funções restritas a certas condições.

Segundo Boyer (1974), o ano de 1872 foi crucial para a aritmetização da Análise, com a investigação da natureza das funções e da noção de número (faltava, à época, uma definição mais precisa para "número real"), que se iniciou com a proposta das séries de Fourier.

Bolzano já apresentara provas puramente aritméticas para seus resultados e a redescoberta de seu exemplo de função contínua e não-diferenciável, por Weierstrass, levou este último a elaborar o teorema de Bolzano-Weierstrass[4]. Por outro lado, Riemann havia exibido uma função $f(x)$ que era descontínua em quase toda parte de um intervalo e cuja integral existia e definia uma função contínua.

Somando-se a estes fatos, em 1844, Liouville exibia uma classe de números reais não-algébricos: os "números de Liouville"[5] e os números da forma $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{n!}}$. A transcendentalidade de π, π^2, e, e^2 foi mostrada por essa ocasião, provando-se que estes números não são algébricos.

Em 1872, cinco matemáticos, incluindo-se Weierstrass, propuseram uma teoria de números reais como limites de sequências de números racionais. Weierstrass viu a necessidade de se dar uma definição de número irracional que corrigisse o erro lógico de Cauchy. Este último definia todo limite de sequência como número real e, por outro lado, um número real como limite de uma sequência (de racionais). Weierstrass tentou adequar a questão, propondo a existência de um limite para a sequência convergente e fazendo desse limite o número real correspondente.

Também em 1872, um argumento mais completo para o problema dos números reais foi dado por Dedekind (1831-1916). Este chegou à conclusão de que a essência da continuidade de um segmento de reta não é a ideia vaga de "estar próximo", mas uma propriedade oposta, em certo sentido: a natureza da divisão do segmento em duas partes, por um ponto do segmento (ideia de "cotas superiores e inferiores"). Com os "cortes de Dedekind"[6] no sistema de números

[4] Todo conjunto limitado S, contendo infinitos elementos (pontos ou números) contém no mínimo um ponto limite.
[5] Para maiores detalhes, ver Marchiori (2013).
[6] Para toda divisão dos números racionais em duas classes A e B, tais que cada número da primeira classe, A, é menor do que todo número da segunda classe, B, existe um só número real produzindo este 'Schnitt', ou corte de Dedekind. Se

racionais, o conjunto dos números reais mostrou-se realmente como uma construção intelectual humana e pouco intuitiva.

Ainda no ano de 1872, surgiu a definição precisa de um conjunto infinito, dada por Dedekind (na condição de que um de seus subconjuntos próprios esteja em correspondência biunívoca com o conjunto dado). Também Heine forneceu a definição de limites em termos de ε's e δ's que conhecemos hoje, resolvendo o problema de termos ainda imprecisos usados por Cauchy, como: "valores sucessivos", "aproximar indefinidamente" e "tão pequeno quanto se queira". A partir daí, os teoremas fundamentais de limites poderiam ser provados rigorosamente.

Georg Cantor (1845-1918) também apresentou contribuições sobre a noção de "infinito", mostrando que os infinitos dos naturais e dos reais não eram os mesmos.

O matemático italiano, Giuseppe Peano (1858-1932) também deixou contribuições à noção de número, que, a nosso ver, podem ter influenciado na elaboração final do conceito de função. Peano tentou desenvolver uma linguagem que deveria conter não somente a lógica, mas todos os ramos mais importantes da Matemática. Fez uma escolha feliz para vários símbolos matemáticos que utilizamos ainda hoje $\in, \cup, \cap, \supset$. Porém, sua maior contribuição talvez esteja nos três conceitos primitivos que estabeleceu em seus fundamentos de aritmética: o zero, o conceito de número (inteiro não-negativo) e a relação de "ser sucessor de", os quais, junto com seus cinco postulados, forneceram uma construção rigorosa do conjunto dos números naturais.

Em seu *Sulla definizione de funzione, Atti dei Lincei*, de 1911, Peano propõe reduzir o conceito de função ao conceito de relação unívoca (SIERPINSKA, 1992, p.48).

Na primeira metade do século XX, surgem as publicações de Bourbaki, que era o pseudônimo de um grupo de matemáticos do qual participavam André Weil e Jean Dieudonné. É de Bourbaki a definição de função, usada atualmente nos meios matemáticos e científicos, e que foi proposta em 1939: "uma função é uma tripla ordenada (X, Y, f), em que X e Y são conjuntos e f é um subconjunto de $X \times Y$, tal que, se $(x, y) \in f$ e $(x, y') \in f$, então $y = y'$" (SIERPINSKA, 1992, p.30).

Com esta definição mais geral – na qual o conceito de função pode ser definido de uma maneira simbólica, formal e quase que sem usar palavras da língua materna – e com a eliminação dos problemas lógicos que envolviam a construção do conjunto dos números reais, hoje é possível elaborar funções muito mais abrangentes. Por exemplo, aquelas usadas no sentido de "aplicações", definidas em conjuntos quaisquer, ou em estruturas da Álgebra, onde os domínios e imagens são "grupos", "corpos", "anéis" etc. Dentro da própria Análise, o conceito se estende à ideia de "funcional", quando o seu domínio é um espaço de funções, ou seja, quando temos, a grosso modo, "função de funções". As sequências, numéricas ou mais gerais, passam agora a ser vistas como exemplos de funções, cujo domínio é o conjunto dos números naturais.

Com o que foi anteriormente exposto, observamos que os problemas que ocupavam os matemáticos, em cada época, exerceram forte influência na elaboração do conceito de função. Na Antiguidade, a preocupação de Aristóteles era apenas a de descrever mudanças e relações que ocorriam na natureza de uma maneira qualitativa (CARAÇA, 1952). Com Newton e Leibniz, houve uma quebra nesta visão da ciência e os problemas que preocupavam os matemáticos, até a época de Cauchy, estiveram relacionados com funções bem-comportadas (contínuas e diferenciáveis), com as quais se pretendia resolver aspectos quantitativos a eles relacionados.

A contém um ponto de máximo como elemento, ou B contém um mínimo, então o corte define um número racional. Caso contrário, o corte define um número irracional (BOYER,1974).

A necessidade de estender a noção de função para além daquelas "expressáveis analiticamente", ou visualizáveis com o recurso de um gráfico, apareceu na história com a polêmica gerada entre Euler, D´Alembert e Bernoulli, sobre o "problema da corda vibrante". Esta polêmica teve seu desfecho com o estudo das séries de Fourier, que foram aperfeiçoados por Dirichlet, na busca de condições mais rigorosas para sua convergência.

As consequências lógicas da definição de Dirichlet e da posterior elucidação da questão da definição dos números reais acabaram por gerar exemplos que estão fora do protótipo do que era originalmente concebido como função. Hoje, esse conceito não se reduz apenas a aspectos numéricos e quantitativos. Segundo Sierpinska (1992), uma função não se concebe nem como lei, nem como valor, na definição atual, mas como a síntese desses dois aspectos, juntamente com os conceitos de domínio e contradomínio.

3 ALGUMAS REFLEXÕES SOBRE O ENSINO DO CONCEITO DE FUNÇÃO

A partir dos resultados obtidos com uma de nossas pesquisas com professores do Ensino Médio (ZUFFI, 1999), vimos que, ao fazerem uso da linguagem matemática para expressar suas próprias concepções sobre o conceito de função, esses professores apresentaram visões diferenciadas quando se reportavam às definições informalmente e quando eram solicitados a fornecer definições formais. Cada uma dessas visões identificou-se com um momento histórico diferente para o conceito. Maiores detalhes dessa pesquisa podem ser acessados em Zuffi e Pacca (2000).

No caso formal, as definições foram elaboradas de maneira a atingir as mais recentes propostas históricas, muito próximas às definições de função de Dirichlet e Bourbaki, enquanto que no tratamento informal, ou com exemplos e resoluções de problemas/exercícios, as ideias propostas para as funções estavam muito mais próximas da definição de Euler, dando destaque para as expressões analíticas (algébricas) que representavam as funções. Assim, pudemos notar que os professores do Ensino Médio que foram investigados, à época, faziam uma separação bastante dicotômica entre o "teórico" e o "prático", relegando ao primeiro, um papel muito menor. Em geral, as definições formais eram colocadas na introdução do assunto (funções) e depois eram abandonadas ao tratarem dos exemplos, exercícios e problemas relativos ao tema (em geral, nesta ordem), sem que houvesse uma aproximação mais detalhada das ideias que cada uma delas destacava. Acreditamos que essas práticas ainda persistam para muitos professores, ao tratarem dessa temática em sala de aula.

Vimos, também nessa investigação, que obstáculos epistemológicos que ocorriam com alunos, apontados por Sierpinska (1992), também surgiram com os professores acompanhados. É comum que estes pensem nas funções somente em termos de equações e de elementos desconhecidos a serem extraídos delas e que as ideias que estas englobam, de conjuntos, relação e variabilidade fiquem perdidas, muitas vezes. Outro obstáculo evidenciou-se quando esses professores mostraram dificuldades em determinar quais eram as variáveis dependentes e independentes, para alguns casos propostos. Vemos que isso se assemelha ao fato de que as primeiras aproximações históricas da ideia de função também não faziam clara distinção entre variáveis dependentes e independentes – estas consagradas após o maior desenvolvimento da Análise e da Teoria de Conjuntos – e, ainda, identificavam mais a função com uma expressão analítica (parte mais completa de uma equação, como na definição de Euler), do que com uma relação especial entre duas variáveis.

Esses professores também tiveram dificuldades em perceber os papéis não simétricos dos conjuntos de domínio e contradomínio, talvez devido ao fato de não considerarem relevantes as definições mais atuais e formais para funções. Isso não seria um problema, se os vários exemplos fornecidos pelos professores deixassem mais evidentes essas diversas nuanças da definição formal. Mesmo exemplos de relações entre variáveis, que não se adequam à presente ideia de funcionalidade, apareceram muito raramente entre os professores observados em suas práticas de sala de aula.

Com relação à noção de número, os resultados evidenciaram um outro obstáculo: embora a grande maioria dos casos de funções envolvesse o conjunto dos reais, as variações de valores, propostas pelos professores pesquisados em sala de aula e nas entrevistas, ocorriam sempre (e apenas) dentro de um conjunto reduzido de números racionais, ou mais frequentemente ainda, de um subconjunto pequeno de números inteiros. Constatamos que isso ocorria mesmo após os professores fazerem, em classe, o estudo do conjunto dos números reais.

Vemos novamente que, do ponto de vista histórico, as construções formais do conjunto dos números reais e da ideia de continuidade da reta real, e consequentemente da própria continuidade das funções mais usuais, também demoraram para se solidificar. Talvez por esse motivo persistam, no ensino desse conceito, abreviações para os tratamentos em conjuntos numéricos finitos e com elementos esparsos (naturais e inteiros), uma vez que os contextos em que as funções são apresentadas no nível básico se assemelham aos contextos históricos mais remotos, de estudos de funções bem-comportadas que representavam movimentos simples, no início do período moderno. Para os alunos do Ensino Médio, em geral, isso não deve se constituir num grande problema; entretanto, se o professor tiver consciência desses fatos históricos que envolvem a gênese e o desenvolvimento do conceito matemático de função, poderá trabalhar mais adequadamente os casos em que não temos continuidade (por exemplo, em situações de dados estatísticos isolados, em que se traça uma curva de aproximação contínua para esses dados, mas não se pode afirmar que todos os pontos se adequem a essa curva, expressando uma tendência, apenas).

A transposição didática (CHEVALLARD, 1991) para o conceito de função nos pareceu ocorrer de maneira oblíqua, de modo que é essencialmente a definição formal de Dirichlet, proposta no final do século XIX e, portanto, mais recente, que chega à sala de aula do Ensino Médio hoje, quando esses professores se reportam aos seus aspectos mais formais. Ao mesmo tempo, perderam-se as conceituações históricas intermediárias, mas algumas dessas (como a de Euler), ainda que sem o conhecimento do professor, refletem-se nos exemplos apresentados.

As imagens conceituais (VINNER, 1991) – grosso modo, imagens mentais mais imediatas que os indivíduos evocam ao ouvirem o nome de um conceito – que identificamos para os professores investigados, através de um questionário, resumiram-se aos casos presentes no currículo do Ensino Médio (funções polinomiais de 1º, 2º e no máximo (em poucos casos) 3º graus, funções trigonométricas, exponenciais e logarítmicas). Ou seja, suas imagens conceituais para funções resumiam-se àquelas com expressões analíticas "bem comportadas" e que, em geral, ensinavam na primeira série desse ciclo. Os raros casos, que apenas dois dos sete professores observados exemplificaram com funções descontínuas, nas aulas observadas, ofereceram dificuldades de tratamento por esses professores.

Nossa pesquisa apontou que os entrevistados não pareciam estar cientes dessa separação didática que faziam entre o formal e o prático. Ao conhecerem alguns dos processos históricos que evidenciam a gênese do conceito de função, como uma construção humana que se altera no tempo e no espaço, talvez pudessem trazer à tona uma maior consciência de suas próprias concepções a este respeito e também do modo como ensinam sobre esse assunto.

Diante das considerações anteriormente levantadas, podemos concluir que a formação que temos proporcionado aos professores de Matemática do Ensino Médio, seja ela inicial ou continuada, e do modo como a efetivamos, ainda não os tem conduzido a uma adequada reflexão sobre o uso que fazem da linguagem matemática. Nossa pesquisa trouxe indícios de que essa linguagem não é vista por eles nem como uma construção histórica e dinâmica da Matemática, como área do conhecimento humano, nem como ferramenta para resolver problemas, da vida prática ou de outras ciências.

Este passeio pela gênese histórica do conceito de função mostra o quanto sua elaboração foi complexa e quantos estudiosos contribuíram para essa gênese, em cada período, imersos num ambiente de problemas matemáticos que era característico de cada época. Os conhecimentos históricos podem, então, colaborar com os professores para uma reflexão mais profunda sobre as ideias matemáticas. Particularmente com relação às funções, eles podem auxiliar o professor a refletir sobre suas concepções pessoais do assunto, dentre as diversas formalizações matemáticas propostas ao longo dos séculos, e sobre como essas concepções se relacionam à sua atividade em sala de aula e podem influenciar no aprendizado de seus alunos.

REFERÊNCIAS

BOYER, C. **História da matemática.** Tradução Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher; EDUSP, 1974.

CARAÇA, B. J. **Conceitos fundamentais da matemática**. Lisboa: Gradiva, 1952.

CHEVALLARD, Y. **La transposition didactique**: du savoir savant au savoir enseigné. 12e éd. Grenoble: La Pensée Sauvage, 1991.

ITÔ, K. (Ed.). **Encyclopedic dictionary of mathematics**. 2nd ed. Cambridge, Massachusetts: MIT Press; Mathematical Society of Japan, 1960.

MACHADO, A. C., **A aquisição do conceito de função**: perfil de imagens produzidas pelos alunos. 1998. Dissertação (Mestrado) – Faculdade de Educação da UFMG, Belo Horizonte, 1998.

MARCHIORI, R. M. **Números transcendentes e de Liouville**. 2013. 36 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – IGCE, Universidade Estadual Paulista – UNESP, Rio Claro, 2013. Disponível em: <http://www.rc.unesp.br/igce/pos/profmat/arquivos/dissertacoes/N%C3%BAmeros%20Transcendentes%20e%20de%20Liouville.pdf> . Acesso em: 26 abr. 2016.

SIERPINSKA, A. On understanding the notion of function. In: DUBINSKY, E.; HAREL, G. (Ed.) **The concept of function**: aspects of epistemology and pedagogy. Washington, USA: Mathematical Association of America, 1992. p. 25-58.

VINNER, S. The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In: TALL, D. (Ed.). **Advanced mathematical thinking**. Dordrecht, NED: Kluwer, 1991. p. 65-81. (Mathematical Education Library, 11).

YOUSCHKEVITCH, A. P. The concept of function. **Archive for History of Exact Sciences**, vol. 16, n. 1, p. 37-85. 1976.

ZUFFI, E. M. **O tema 'funções' e a linguagem matemática de professores do ensino médio:** por uma aprendizagem de significados. 1999. 307 f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, USP, São Paulo, 1999.

ZUFFI, E. M.; PACCA, J. L. A. Sobre funções e a linguagem matemática de professores do ensino médio**. Zetetiké**, Campinas, v. 9, n. 13/14, p. 7-28, jan/dez. 2000.