

OS TEOREMAS DE PAPPUS PARA OS SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO: A DEMONSTRAÇÃO DE JAMES GREGORY

PAPPUS'S THEOREMS FOR REVOLUTION SOLIDS: JAMES GREGORY'S PROOF

RAUTENBERG, Robson Raulino¹

PROBST, Roy Wilhelm²

RESUMO

Este artigo apresenta, como resultado de uma pesquisa realizada durante a elaboração da dissertação de mestrado, a partir de teoremas encontrados na publicação *Geometriae Pars Universalis* (1668), pela primeira vez em Português, a prova dos teoremas de Pappus para os sólidos de revolução. Tal publicação, que foi traduzida para o Inglês por Andrew Leahy em 2009, foi escrita originalmente em Latim pelo matemático escocês James Gregory (1638-1675) e antecede o desenvolvimento do Cálculo.

Palavras-chave: História da Matemática. James Gregory. Sólidos de Revolução. Teoremas de Pappus.

ABSTRACT

This article presents, as a result of a research carried out during my master's, from theorems found in the publication *Geometriae Pars Universalis* (1668) and for the first time in Portuguese, the proof of Pappus's theorems for solids of revolution. This publication, which was translated to English by Andrew Leahy in 2009, was originally written in Latin by Scottish mathematician James Gregory (1638-1675) and predates the development of Calculus.

Keywords: History of Mathematics. James Gregory. Revolution solids. Pappus's Theorems.

1 INTRODUÇÃO

No livro VII da sua obra *Coleção*, publicada no ano de 320, Pappus de Alexandria escreveu o que em linguagem atual pode ser interpretado da seguinte forma: A razão entre os volumes de dois sólidos de revolução é dada pela razão obtida por meio da multiplicação entre a razão das áreas das figuras que rotacionam em torno dos seus eixos de rotação e a razão entre as distâncias dos seus respectivos centros de gravidade ao eixo de rotação. A demonstração original dessa afirmação conhecida como 1ª Relação de Pappus, se existe, não é conhecida. Alguns séculos depois o matemático suíço Paul Guldin (1577-1643) publica *Centrobaryca*, com mais de 700 páginas, no qual tratava principalmente do estudo do centro de gravidade de figuras geométricas. Nesse livro aparece novamente, porém em uma linguagem um pouco diferente, segundo (HEATH, 1921), a afirmação feita por Pappus há mais de 1200 anos: "Quantitas rotunda in viam rotationis ducta producit Potestatem Rotundam uno grado altiore Potestate sive Quantitate Rotata"³. Apesar dos

¹ Mestre Profissional em Matemática pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Docente do Instituto Federal de Santa Catarina (IFSC), Gaspar, Santa Catarina, Brasil. E-mail: robson.rautenberg@ifsc.edu.br.

² Doutor em Matemática Aplicada pela Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP). Docente da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), Curitiba, Paraná, Brasil. E-mail: rwprobst@gmail.com.

³Encontrado em (GULDIN, 1635), Livro II, cap. VIII, Prop. 3. Viena 1641. Uma tradução direta dessa frase, segundo (MANCOSU, 1996), é a seguinte: A quantidade que é rodada ao longo do caminho de rotação produz uma quantidade de um grau maior do que a quantidade que foi rotacionada. Nesse caso, quantidade pode ser compreendida como o elemento que foi rotacionado e grau como a sua dimensão. Se, por exemplo, for rotacionada uma figura plana de dimensão dois, obteremos um sólido. Nessa mesma obra Guldin apresentou, como corolário, um método que permitia calcular o volume dos sólidos obtidos.

teoremas sobre sólidos de revolução serem, de maneira geral, conhecidos como teoremas de Pappus-Guldin para sólidos de revolução, existem ainda algumas controvérsias em relação à autenticidade dos teoremas encontrados na publicação *Centrobaryca*. Isto ocorre, de acordo com (BULMER-THOMAS, 1984), porque Guldin tivera a oportunidade de ler os trabalhos traduzidos de Pappus enquanto estudava em Roma, 20 anos antes de publicar a sua obra. Além disso, vale destacar ainda que na demonstração encontrada no *Centrobaryca*, conforme afirmado por (BUSSARD, 1970) em seu Dicionário da Biografia Científica, Guldin apelou inclusive para a metafísica, deixando espaço para que outros matemáticos também trabalhassem nesses teoremas e os demonstrassem rigorosamente.

Segundo (RAUTENBERG, 2013), entre outros grandes nomes que abordaram esses teoremas e suas respectivas demonstrações, se destaca o trabalho do matemático escocês James Gregory⁴ (1638-1675). De acordo com (EVES, 2008), James Gregory foi professor em St. Andrews e Edinburgh e em 1668 publicou *Geometriae Pars Universalis*, com mais de 70 teoremas. A partir de alguns desses teoremas é possível demonstrar os teoremas de Pappus. Escrita originalmente em latim, essa obra de James Gregory vem sendo estudada e traduzida para o inglês pelo professor Andrew Leahy, do Knox College (LEAHY, 2009), e parte de seu trabalho foi publicado no jornal de matemática *MathDL* (The MAA Mathematical Sciences Digital Library) da Associação Matemática da América (MAA).

2 A DEMONSTRAÇÃO DE JAMES GREGORY

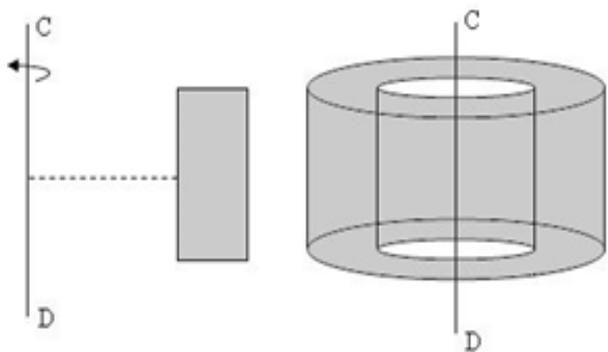
Alguns séculos se passaram até que James Gregory revelasse uma demonstração bastante engenhosa da afirmação encontrada no livro VII da obra *Coleção*. Para que possamos compreender essa demonstração é necessária a introdução de algumas definições e notações. Primeiramente considere que sólidos de revolução podem ser obtidos pela rotação de uma região de um plano em torno de uma reta desse plano, chamado eixo de revolução ou rotação, que toca a fronteira da região ou não intersecta a região em nenhum ponto. A figura 1a mostra um invólucro cilíndrico enquanto que na figura 1b é representada uma esfera, obtidos da rotação de um retângulo e de um semicírculo, respectivamente, em torno de um eixo de revolução dado por um segmento CD. Vale ressaltar ainda que em todo o texto seguinte, sempre que nos referirmos a uma rotação de uma região ou de uma curva em torno de um eixo de revolução, essa região ou curva estará inteiramente de um lado do eixo considerado.

Considere também que uma superfície de revolução é formada quando uma curva é girada ao redor de uma reta que não intersecta essa curva. A figura 2a mostra uma superfície obtida a partir da rotação de um arco de uma curva em torno do eixo de revolução CD. Note ainda que na figura 2.b é mostrada a superfície lateral de um tronco de cone obtida a partir da rotação de um segmento de reta que não toca e não é paralelo ao eixo de revolução dado pelo segmento CD.

Além disso, considere Ω uma figura ou região plana, com centro de gravidade A, que é rotacionada em torno de um eixo CD. Definimos como Raio(A) a distância de A ao eixo de rotação ou revolução. De modo semelhante, podemos considerar Φ outra figura plana com centro de gravidade E que é rotacionada em torno de um eixo GH, cujo raio é dado por Raio(E), conforme ilustra a figura 3 a seguir.

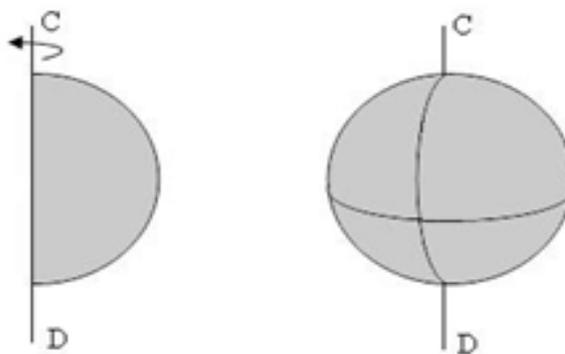
⁴ Entre outros resultados, é creditada a ele a obtenção da série infinita $\arctg(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots$ utilizada para o cálculo de π .

Figura 1a: Invólucro cilíndrico



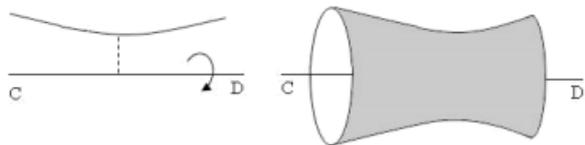
Fonte: Rautenberg (2013, p. 10)

Figura 1b: Esfera



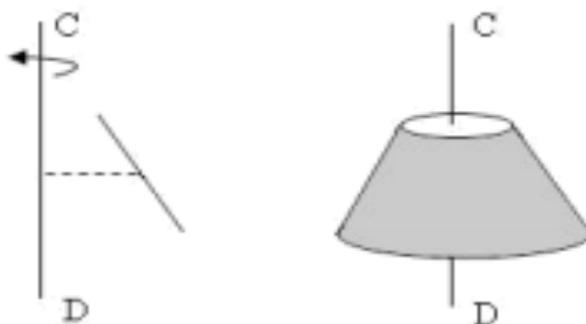
Fonte: Rautenberg (2013, p. 10)

Figura 2a: Superfície de revolução



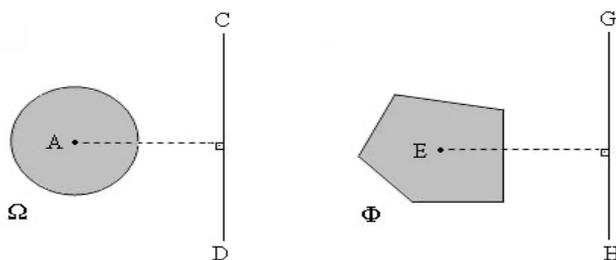
Fonte: Rautenberg (2013, p. 10)

Figura 2b: Superfície lateral do tronco de cone



Fonte: Rautenberg (2013, p. 10)

Figura 3: Figuras planas com seus respectivos centros de gravidade



Fonte: Rautenberg (2013, p. 13)

Sejam também $\text{Área}(\Omega)$ e $\text{Área}(\Phi)$ as áreas das figuras planas Ω e Φ , assim como $\text{Rev}(\Omega)$ e $\text{Rev}(\Phi)$ os volumes dos sólidos obtidos pela rotação ou revolução de Ω e Φ em torno dos eixos CD e GH, respectivamente. Desse modo, a primeira relação mencionada por Pappus pode ser escrita como:

$$\frac{\text{Rev}(\Omega)}{\text{Rev}(\Phi)} = \frac{\text{Área}(\Omega)}{\text{Área}(\Phi)} \frac{\text{Raio}(A)}{\text{Raio}(E)} \tag{1}$$

de onde obtemos, multiplicando por $\frac{2\pi}{2\pi}$ o membro direito da igualdade, a seguinte proporção:

$$\frac{\text{Rev}(\Omega)}{\text{Rev}(\Phi)} = \frac{\text{Área}(\Omega)}{\text{Área}(\Phi)} \frac{2\pi\text{Raio}(A)}{2\pi\text{Raio}(E)}$$

ou ainda

$$\frac{\text{Rev}(\Omega)}{\text{Rev}(\Phi)} = \frac{\text{Área}(\Omega)}{\text{Área}(\Phi)} \frac{\text{Circ}(A)}{\text{Circ}(E)} \quad (2)$$

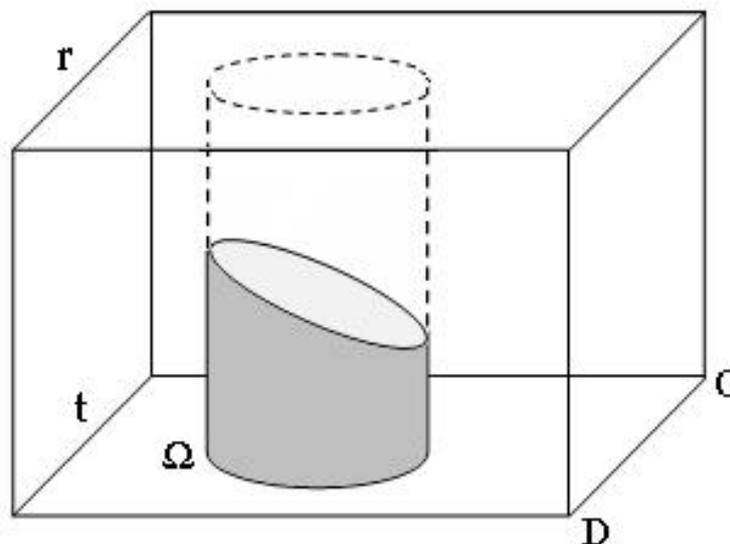
Aqui, $\text{Circ}(A)$ e $\text{Circ}(E)$ representam o perímetro da circunferência descrita pelo $\text{Raio}(A)$ e $\text{Raio}(E)$, respectivamente.

2.1 Tronco

Até agora apenas colocamos em linguagem atual a afirmação feita por Pappus. Para que possamos continuar é necessário introduzir o conceito de tronco, investigado por James Gregory. Dada uma figura plana, podemos obter a partir dela duas figuras tridimensionais; a primeira delas um cilindro reto ou oblíquo e a outra, um sólido de revolução. No nosso caso utilizaremos um cilindro circular reto e um toro, obtidos de um círculo Ω .

Definimos tronco de cilindro como uma porção do cilindro compreendida entre a base e uma seção não paralela a essa base. De acordo com Gregory podemos obter um tronco a partir de um cilindro reto, conforme a figura 4.

Figura 4: Tronco obtido a partir da figura plana



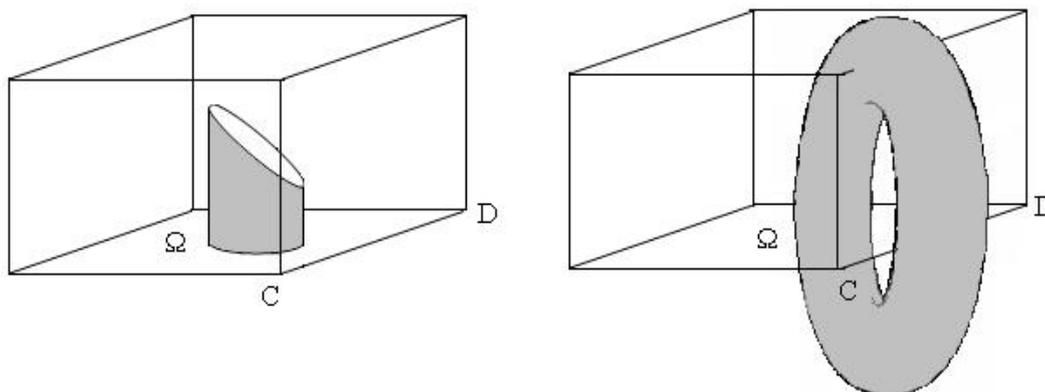
Fonte: Rautenberg (2013, p. 14)

A ilustração mostra que o tronco foi obtido do cilindro reto original, que foi cortado por um plano que passa pelo eixo de rotação e intersecta o plano da base superior do cilindro segundo a reta r . Além disso, a partir de r é baixado um plano perpendicular ao plano superior, determinando uma reta t no plano que contém a base do cilindro. Nessa etapa define-se também que a distância entre a reta t e o eixo de rotação, dado pelo segmento CD , será o raio de rotação da figura plana. Note que a partir do momento em que foi fixado um tronco, entre os vários possíveis, o raio de rotação também é fixado.

Grande parte do trabalho da prova do teorema está em estabelecer uma relação entre o volume do tronco e o volume do cilindro, assim como uma relação entre o volume do tronco e o

volume do sólido de revolução. A figura 5 mostra um tronco de cilindro e um sólido de revolução, obtidos a partir de uma figura plana circular Ω .

Figura 5: Tronco e sólido de revolução

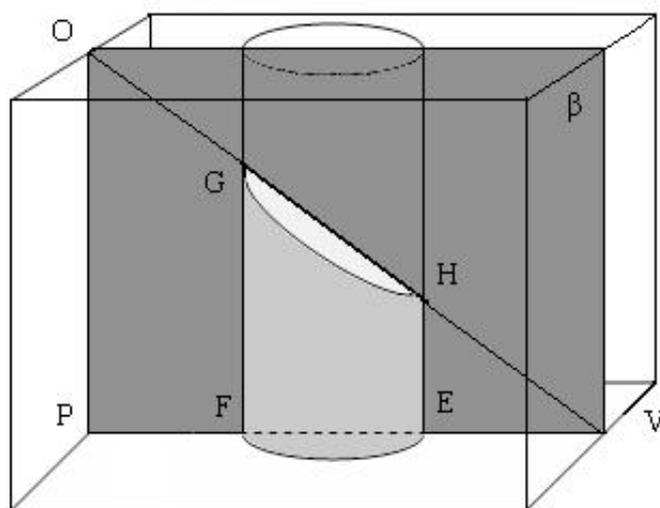


Fonte: Rautenberg (2013, p. 15)

2.2 Relação entre volumes: tronco e sólido de revolução

Para entender essa relação, Gregory utiliza o Princípio de Cavalieri: Se dois sólidos são tais que todo plano secante a eles e paralelo a um plano dado determina nos sólidos secções cuja razão entre suas áreas é constante, então a razão entre os volumes desses sólidos é a mesma constante. Desta forma, a partir do momento em que se consiga estabelecer uma razão fixa entre as áreas das secções do tronco e do sólido de revolução, teremos, pelo Princípio de Cavalieri, que a razão entre os volumes desses sólidos será igual a essa razão fixa.

Figura 6: Secção do tronco



Fonte: Rautenberg (2013, p. 16)

Para obter essa razão constante foi utilizado um processo relativamente simples, usando o tronco mostrado na figura 4, que é intersectado por um plano β qualquer, perpendicular ao eixo de rotação, conforme mostra a figura 6. Considerando os pontos de intersecção O, P e V, entre os

planos e ainda F, G, H e E os pontos de intersecção do plano com o tronco, podemos utilizar semelhança entre os triângulos OPV e HEV para obtermos:

$$\frac{OP}{PV} = \frac{HE}{EV} \quad (3)$$

Assim como a semelhança entre os triângulos OPV e GFV resulta em:

$$\frac{OP}{PV} = \frac{GF}{FV} \quad (4)$$

Sendo que OP representa a altura do cilindro reto e PV o raio de rotação, multiplicando ambos os membros da equação (4) por $\frac{1}{2\pi}$, e depois o numerador e o denominador do membro direito por $\frac{1}{2}FV$, obteremos:

$$\frac{OP}{2\pi PV} = \frac{GF}{2\pi FV} \Rightarrow \frac{OP}{2\pi PV} = \frac{GF}{2\pi FV} \frac{\frac{1}{2}FV}{\frac{1}{2}FV} \Rightarrow \frac{OP}{2\pi PV} = \frac{\frac{1}{2}GF \cdot FV}{\pi FV^2} = \frac{\text{Área}(GFV)}{\text{Área}(FV)} \quad (5)$$

sendo que, no último membro, o numerador representa a área do triângulo GFV e o denominador representa a área do círculo de raio FV. Do mesmo modo podemos obter da equação (3) que:

$$\frac{OP}{2\pi PV} = \frac{\text{Área}(HEV)}{\text{Área}(EV)} \quad (6)$$

Das propriedades das proporções temos que se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ e $\frac{a}{b} = \frac{e}{f}$, com $c > e$ e $d > f$, então:

$$\frac{a}{b} = \frac{c-e}{d-f} \quad (7)$$

Dessa forma, podemos usar (7) em (5) e (6) e obter

$$\frac{OP}{2\pi PV} = \frac{\text{Área}(GFV) - \text{Área}(HEV)}{\text{Área}(FV) - \text{Área}(EV)} = \frac{\text{Área}(GHEF)}{\text{Área}(\text{Anel}(FV-EV))} \quad (8)$$

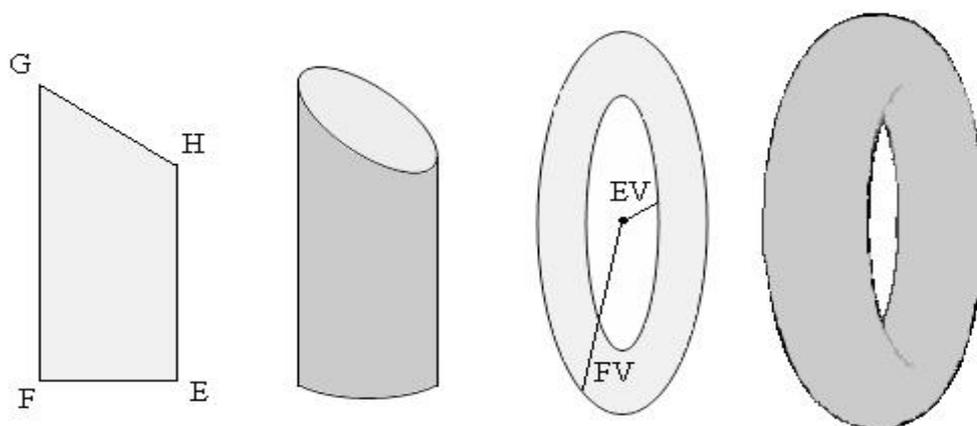
Note que, na equação (8), o numerador do lado direito representa a área de uma secção qualquer do tronco, enquanto que o denominador representa a área de um anel circular proveniente de uma secção do sólido de revolução obtido pela rotação do círculo em torno do eixo de rotação, conforme mostra a figura 7 a seguir.

Como a razão $\frac{OP}{PV}$ é fixa, independentemente da posição do plano β , a razão dada por $\frac{OP}{2\pi PV}$ também será e, portanto, pelo Princípio de Cavalieri, temos que a razão entre os volumes dos sólidos será igual a essa razão. Portanto, teremos que

$$\frac{\text{Tronc}(\Omega)}{\text{Rev}(\Omega)} = \frac{OP}{2\pi PV} \quad (9)$$

Na igualdade (9), $\text{Tronc}(\Omega)$ representa o volume do tronco gerado a partir do círculo Ω e $\text{Rev}(\Omega)$ representa o volume do sólido gerado pela rotação desse mesmo círculo em torno do seu eixo de rotação. Além disso, temos que OP representa a altura do cilindro de base Ω , ou seja, $OP = \text{Alt}(\Omega)$ e PV é o raio de rotação de Ω , dessa forma $2\pi PV = \text{Circ}(\Omega)$. Logo, podemos escrever que

$$\frac{\text{Tronc}(\Omega)}{\text{Rev}(\Omega)} = \frac{\text{Alt}(\Omega)}{\text{Circ}(\Omega)} \quad (10)$$

Figura 7: Área das secções

Fonte: Rautenberg (2013, p. 17)

Essa igualdade (10) é a relação procurada entre o volume do tronco e o volume do sólido de revolução obtidos a partir de uma figura plana, no nosso caso um círculo Ω .

A partir dessa igualdade podemos obter uma relação entre os volumes de dois sólidos de revolução. Suponha que Ω e Φ são duas figuras planas, como mostra a figura 3, com seus respectivos eixos e raios de rotação, das quais são obtidos dois cilindros retos de mesma altura.

Utilizando a relação encontrada em (10) podemos escrever que

$$\frac{\text{Tronc}(\Omega)}{\text{Rev}(\Omega)} = \frac{\text{Alt}(\Omega)}{\text{Circ}(\Omega)}, \quad \frac{\text{Tronc}(\Phi)}{\text{Rev}(\Phi)} = \frac{\text{Alt}(\Phi)}{\text{Circ}(\Phi)} \quad (11)$$

Como, por hipótese, temos que $\text{Alt}(\Omega) = \text{Alt}(\Phi)$, combinando as duas proporções encontradas em (11), obtemos

$$\frac{\text{Rev}(\Omega)}{\text{Rev}(\Phi)} = \frac{\text{Tronc}(\Omega)}{\text{Tronc}(\Phi)} \frac{\text{Circ}(\Omega)}{\text{Circ}(\Phi)} \quad (12)$$

De onde percebemos que a razão entre os volumes dos sólidos de revolução pode ser escrita apenas em função dos volumes de troncos e de raios de rotação.

2.3 Relação entre volumes: tronco e cilindro

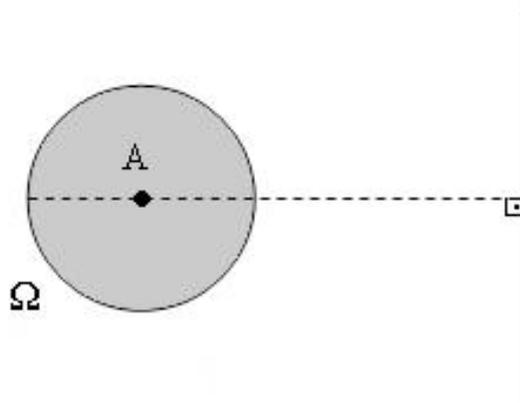
James Gregory inicia o estudo dessa relação investigando a respeito da localização do centro de gravidade de um tronco. Da Física, centro de gravidade é definido como um ponto onde toda a força da gravidade que atua sobre um corpo pode ser concentrada, ou seja, o corpo se comporta como se simplesmente toda a sua massa estivesse concentrada nele.

Nesse estudo Gregory considera os seguintes axiomas: 1) o centro de gravidade de um segmento é seu ponto médio; 2) se uma figura possui um eixo de simetria, então o seu centro de gravidade pertence a esse eixo. Como consequência, se uma figura plana homogênea⁵ possui um centro geométrico (intersecção de dois eixos de simetria), então esse ponto é seu centro de gravidade. De modo equivalente, define-se que o centro geométrico de um sólido homogêneo coincide com o seu centro de gravidade.

⁵ Neste artigo, o conceito de homogeneidade está relacionado à razão entre a massa e o volume de um corpo. Se esta razão for constante em cada uma de suas partes, então ele será homogêneo.

Na sequência são tomados cilindros retos construídos a partir de figuras planas, no nosso caso um círculo, que é simétrico em torno de um eixo perpendicular ao eixo de rotação da figura, mostrado na figura 8.

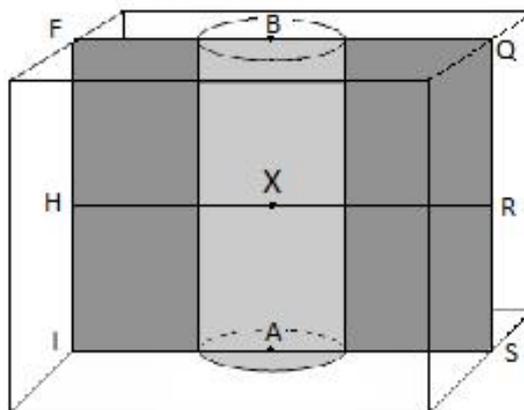
Figura 8: Figura plana simétrica



Fonte: Rautenberg (2013, p. 18)

Essa restrição de simetria é muito útil tendo em vista que, de acordo com os axiomas apresentados, se uma figura é simétrica, então o seu centro de gravidade estará sobre esse eixo de simetria. Além disso, se A é o centro de gravidade da figura plana Ω e se B é o centro de gravidade da base superior do cilindro reto obtido a partir de Ω, então o centro de gravidade de todo o cilindro encontra-se no ponto médio X do segmento AB.

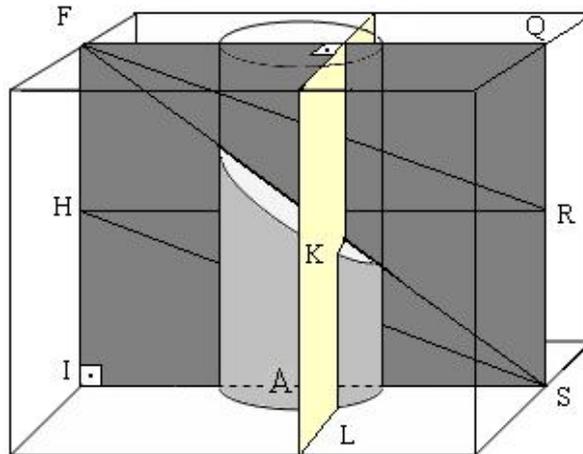
Figura 9: Cilindro e seu eixo de simetria



Fonte: Rautenberg (2013, p. 19)

Considere agora o caso em que o plano FQSI passa pelo eixo de simetria e é perpendicular ao eixo de rotação, conforme mostra a figura 9, onde FI = QS representam a altura do cilindro, cuja base é dada pela figura plana Ω. Além disso, H e R são os pontos médios de FI e QS, respectivamente. Dessa forma, o centro de gravidade X deve estar na intersecção dos segmentos AB e RH. Utilizaremos essas informações para determinar o centro de gravidade do tronco. Considere, para tanto, o tronco visto na figura 4 e também o plano FQSI da figura 9, mostrados agora na figura 10.

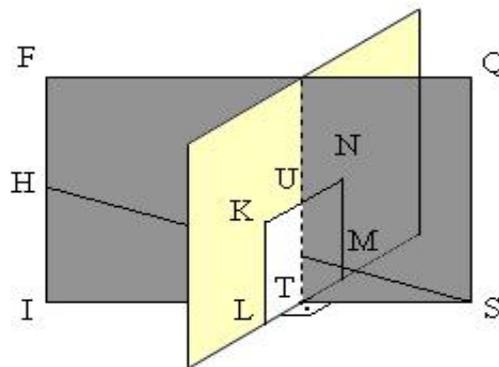
Figura 10: Plano FQSI



Fonte: Rautenberg (2013, p. 19)

Como o plano FQSI passa perpendicularmente pelo eixo de simetria da figura plana e conseqüentemente pelo eixo do cilindro reto obtido de Ω , temos que FQSI também será o plano de simetria dos troncos superior e inferior. Conseqüentemente, os seus centros de gravidade também deverão pertencer ao plano FQSI. Considere agora um plano perpendicular ao plano FQSI que intersecta o tronco inferior formando o retângulo KLMN, mostrado na figura 11, onde M e N são os vértices opostos a L e K, respectivamente.

Figura 11: Secção retangular KLMN

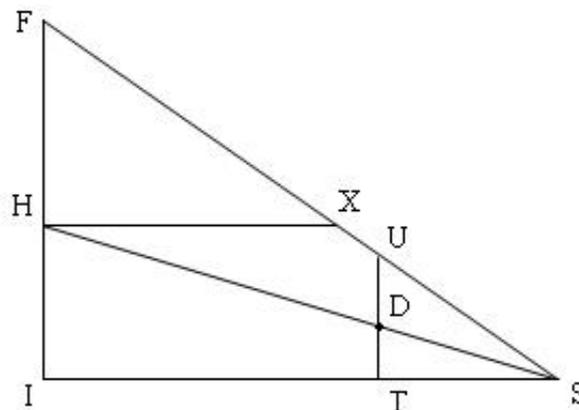


Fonte: Rautenberg (2013, p. 20)

Seja ainda UT o segmento pertencente à intersecção do plano FQSI com o plano que contém o retângulo KLMN. Como esses planos são perpendiculares e, além disso, o plano FQSI passa pelo eixo de simetria da figura plana Ω , temos que o segmento UT é o eixo de simetria do retângulo KLMN. Desse modo, o centro de gravidade desse retângulo pertence ao segmento UT. De acordo com os axiomas vistos no início dessa seção temos que se uma figura é simétrica, então o seu centro de gravidade pertence ao seu eixo de simetria, porém qualquer retângulo possui dois eixos de simetria, o que implica que o seu centro de gravidade estará localizado na intersecção desses eixos, no caso do retângulo KLMN será no ponto médio de UT.

Mostraremos agora que o centro de gravidade de KLMN pertence ao segmento HS. Primeiramente note que HS e UT pertencem ao mesmo plano FQSI e que $HS \cap UT = D$, conforme mostra a figura 12.

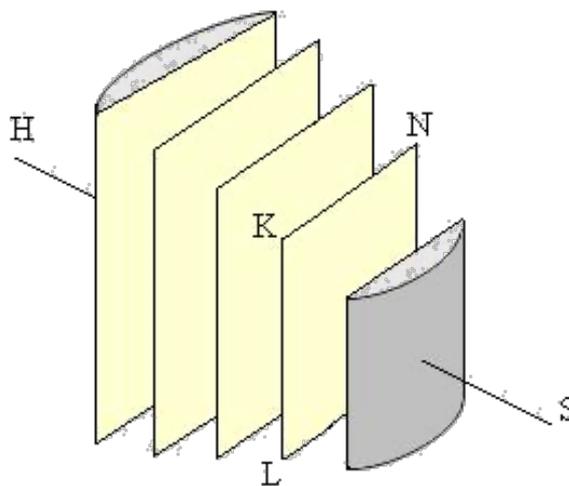
Figura 12: Triângulo FIS



Fonte: Rautenberg (2013, p. 20)

Da semelhança entre os triângulos FIS e UTS e entre os triângulos HIS e DTS, e sabendo que $HI = \frac{1}{2} FI$, obtemos que $DT = \frac{1}{2} UT$. Portanto, D \in HS é a intersecção entre os eixos de simetria do retângulo KLMN, ou seja, é o seu centro de gravidade. Note que todo plano paralelo ao plano que contém o retângulo KLMN produzirá no tronco secções retangulares, cujo centro de gravidade estará no segmento HS. Portanto, o centro de gravidade Y do tronco inferior do cilindro reto, obtido a partir de Ω , pertencerá ao segmento HS. A figura 13 mostra algumas das secções retangulares obtidas. De modo equivalente mostra-se que o centro de gravidade Z, do tronco superior, pertence ao segmento FR.

Figura 13: Secções retangulares



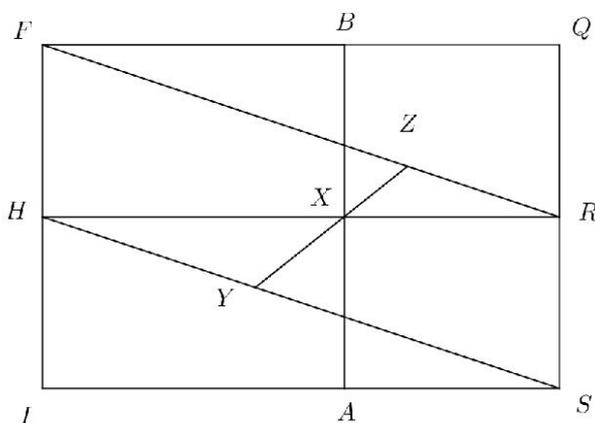
Fonte: Rautenberg (2013, p. 21)

Pelo Princípio de Arquimedes, conhecido como Lei da Alavanca, temos que: Se duas massas m_1 e m_2 são ligadas por uma haste de peso desprezível em lados opostos de um ponto de apoio a uma distância d_1 e d_2 a partir desse ponto, então a haste ficará equilibrada se $m_1d_1 = m_2d_2$. Portanto, considerando um cilindro de densidade constante ρ , o seu volume pode ser representado por sua massa, a menos de uma constante ρ . Desse modo, se considerarmos que toda a massa do tronco superior está concentrada em Z e que toda a massa do tronco inferior está concentrada em Y, o centro de gravidade dessas duas massas deve estar em algum ponto do

segmento YZ. Porém, a massa dos dois troncos somadas resulta na massa do cilindro, que por sua vez tem centro de gravidade em X.

Dessa forma X, Y e Z pertencem ao mesmo plano FQSI e estão alinhados, conforme mostra a figura 14.

Figura 14: Centros de gravidade



Fonte: Rautenberg (2013, p. 21)

Do Princípio de Arquimedes podemos escrever que

$$\text{Vol}(\text{Sup}(\Omega)) \cdot XZ = \text{Vol}(\text{Inf}(\Omega)) \cdot XY \Rightarrow \frac{\text{Vol}(\text{Sup}(\Omega))}{\text{Vol}(\text{Inf}(\Omega))} = \frac{XY}{XZ} \tag{13}$$

Em (13), temos que $\text{Vol}(\text{Sup}(\Omega))$ representa o volume do tronco superior do cilindro obtido a partir de Ω enquanto que $\text{Vol}(\text{Inf}(\Omega))$ representa o volume do tronco inferior. Além disso, da figura 14 temos que FQ, HR e IS são paralelos e os triângulos HXY e RZX são semelhantes, de onde obtemos

$$\frac{IA}{AS} = \frac{HX}{XR} = \frac{XY}{XZ} = \frac{\text{Vol}(\text{Sup}(\Omega))}{\text{Vol}(\text{Inf}(\Omega))} \tag{14}$$

Agora, usando o fato de que $IS = IA + AS$, de (14), podemos escrever que

$$\frac{IS}{AS} = \frac{IA+AS}{AS} = \frac{IA}{AS} + 1 = \frac{\text{Vol}(\text{Sup}(\Omega))}{\text{Vol}(\text{Inf}(\Omega))} + 1 = \frac{\text{Vol}(\text{Sup}(\Omega))+\text{Vol}(\text{Inf}(\Omega))}{\text{Vol}(\text{Inf}(\Omega))} = \frac{\text{Vol}(\text{Cil}(\Omega))}{\text{Tronc}(\Omega)}$$

Dessa forma obtemos

$$\frac{IS}{AS} = \frac{\text{Vol}(\text{Cil}(\Omega))}{\text{Tronc}(\Omega)} \tag{15}$$

Podemos ainda multiplicar o numerador e o denominador por 2π do lado esquerdo da igualdade (15) e obter

$$\frac{2\pi IS}{2\pi AS} = \frac{\text{Vol}(\text{Cil}(\Omega))}{\text{Tronc}(\Omega)} \Rightarrow \frac{\text{Circ}(A)}{\text{Circ}(\Omega)} = \frac{\text{Tronc}(\Omega)}{\text{Vol}(\text{Cil}(\Omega))} \tag{16}$$

Onde $\text{Vol}(\text{Cil}(\Omega))$ representa o volume de todo o cilindro reto obtido a partir do círculo Ω e ainda $2\pi IS = \text{Circ}(\Omega)$, já que IS é igual ao raio de rotação de Ω .

Do mesmo modo, a partir de uma figura plana simétrica Φ de centro de gravidade E, podemos obter

$$\frac{\text{Tronc}(\Phi)}{\text{Vol}(\text{Cil}(\Phi))} = \frac{\text{Circ}(E)}{\text{Circ}(\Phi)} \tag{17}$$

2.4 A 1ª Relação de Pappus

Do que já vimos na igualdade (12), temos que se Ω e Φ são figuras planas com centros de gravidade A e E , respectivamente, das quais são obtidos cilindros retos de mesma altura, então

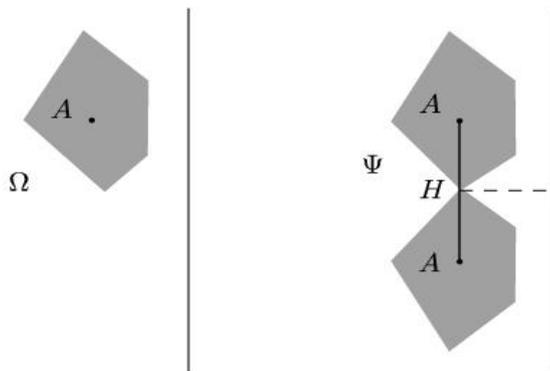
$$\frac{\text{Rev}(\Omega)}{\text{Rev}(\Phi)} = \frac{\text{Tronc}(\Omega)}{\text{Tronc}(\Phi)} \frac{\text{Circ}(\Omega)}{\text{Circ}(\Phi)} \tag{18}$$

Agora, multiplicando a igualdade (18) por $\frac{\text{Vol}(\text{Cil}(\Omega))}{\text{Vol}(\text{Cil}(\Omega))} \frac{\text{Vol}(\text{Cil}(\Phi))}{\text{Vol}(\text{Cil}(\Phi))} = 1$ e usando (16), assim como (17), obteremos

$$\begin{aligned} \frac{\text{Rev}(\Omega)}{\text{Rev}(\Phi)} &= \frac{\text{Tronc}(\Omega)}{\text{Tronc}(\Phi)} \frac{\text{Circ}(\Omega)}{\text{Circ}(\Phi)} \\ &= \frac{\text{Tronc}(\Omega)}{\text{Vol}(\text{Cil}(\Omega))} \frac{\text{Vol}(\text{Cil}(\Omega))}{\text{Vol}(\text{Cil}(\Phi))} \frac{\text{Vol}(\text{Cil}(\Phi))}{\text{Tronc}(\Phi)} \frac{\text{Circ}(\Omega)}{\text{Circ}(\Phi)} \\ &= \frac{\text{Circ}(A)}{\text{Circ}(\Omega)} \frac{\text{Vol}(\text{Cil}(\Omega))}{\text{Vol}(\text{Cil}(\Phi))} \frac{\text{Circ}(\Phi)}{\text{Circ}(E)} \frac{\text{Circ}(\Omega)}{\text{Circ}(\Phi)} \\ &= \frac{\text{Circ}(A)}{\text{Circ}(E)} \frac{\text{Vol}(\text{Cil}(\Omega))}{\text{Vol}(\text{Cil}(\Phi))} \\ &= \frac{\text{Circ}(A)}{\text{Circ}(E)} \frac{\text{Área}(\Omega)}{\text{Área}(\Phi)} \end{aligned} \tag{19}$$

Porém, esse resultado só foi obtido sob a hipótese de que Ω e Φ são simétricas em torno de um eixo perpendicular ao eixo de rotação. Mas essa restrição pode ser removida; se Ω não é simétrica podemos refleti-la em torno de um eixo de simetria perpendicular ao eixo de rotação, conforme a figura 15.

Figura 15: Duplicação de Ω



Fonte: Rautenberg (2013, p. 23)

Note que da duplicação de Ω obtemos a figura Ψ e que, de acordo com o Princípio de Arquimedes, o centro de gravidade H , dessa nova figura, será o ponto médio do segmento que une os centros de gravidade de Ω e de sua cópia. Como o eixo de simetria é perpendicular ao eixo de rotação, temos que os centros de gravidades de Ω e de sua cópia estão à mesma distância do eixo

de rotação, ou seja, o segmento que une os centros de gravidade é paralelo ao eixo de rotação e, portanto, obteremos a seguinte igualdade: $\text{Circ}(A) = \text{Circ}(H)$. Além disso, $\text{Área}(\Psi) = 2\text{Área}(\Omega)$, da mesma maneira obtemos $\text{Rev}(\Psi) = 2\text{Rev}(\Omega)$. De modo equivalente, podemos construir outra figura simétrica Γ , de centro de gravidade J , a partir da duplicação de Φ . Portanto, usando a relação (19) em Ψ e Γ , obtemos

$$\frac{2\text{Rev}(\Omega)}{2\text{Rev}(\Phi)} = \frac{\text{Rev}(\Psi)}{\text{Rev}(\Gamma)} = \frac{\text{Área}(\Psi) \text{Circ}(H)}{\text{Área}(\Gamma) \text{Circ}(J)} = \frac{2\text{Área}(\Omega) \text{Circ}(A)}{2\text{Área}(\Phi) \text{Circ}(E)}$$

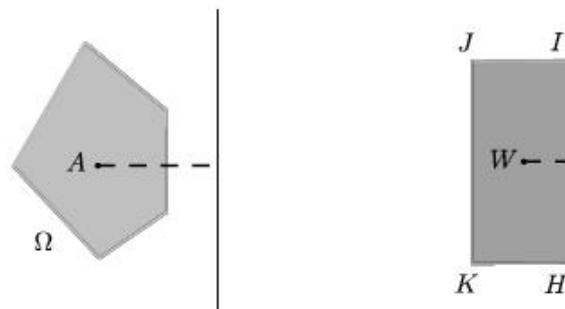
Logo

$$\frac{\text{Rev}(\Omega)}{\text{Rev}(\Phi)} = \frac{\text{Área}(\Omega) \text{Circ}(A)}{\text{Área}(\Phi) \text{Circ}(E)} = \frac{\text{Área}(\Omega) \text{Raio}(A)}{\text{Área}(\Phi) \text{Raio}(E)} \quad (20)$$

Portanto, dessa forma, fica demonstrada a 1ª Relação de Pappus: a razão entre os volumes de dois sólidos de revolução é dada pela razão obtida por meio da multiplicação entre a razão das áreas das figuras que rotacionam em torno dos seus eixos de rotação e a razão entre as distâncias dos seus respectivos centros de gravidade ao eixo de rotação⁶.

A partir da 1ª Relação de Pappus será obtida uma fórmula, enunciada como um teorema, que relaciona diretamente o volume de um sólido de revolução, o centro de gravidade e a área da figura que foi rotacionada para obtê-lo. Para tanto, James Gregory aplica a relação (20) em duas figuras, sendo uma delas de dimensões conhecidas, conforme a figura 16.

Figura16: Figura plana Ω e o retângulo de vértices HIJK



Fonte: Rautenberg (2013, p. 24)

Do lado direito da figura 16 temos um retângulo de $\text{Área} = \text{HK} \cdot \text{HI}$, cujo centro de gravidade W está a uma distância $\frac{\text{HK}}{2}$ do eixo de rotação. Além disso, o sólido de revolução terá o volume de um cilindro de altura HI e raio da base igual a HK .

Usando a 1ª Relação de Pappus podemos escrever:

$$\frac{\text{Rev}(\Omega)}{\text{HI} \cdot \text{HK}^2 \cdot \pi} = \frac{\text{Área}(\Omega) \text{Circ}(A)}{\text{HK} \cdot \text{HI} \cdot 2\pi \cdot \frac{\text{HK}}{2}}$$

Portanto,

$$\text{Rev}(\Omega) = \text{Área}(\Omega) \text{Circ}(A)$$

Dessa forma, demonstramos o seguinte teorema: Teorema 1) Se uma figura plana é rotacionada em torno de um eixo que não a intersecta, então o volume do sólido de revolução

⁶ Essa relação é mencionada na obra *Pappi Alexandrini Collectio* - v.3, encontrada em (HULTSCH, 1878).

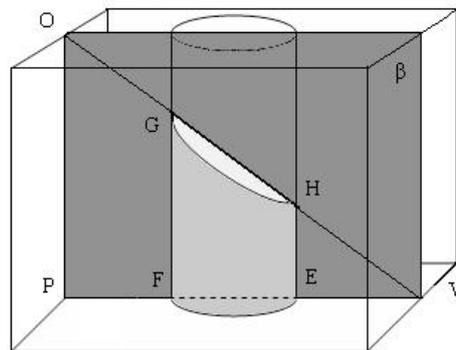
gerado é dado pelo produto entre a área da figura rotacionada e o comprimento da circunferência cujo raio é a distância entre o centro de gravidade dessa figura e o eixo de rotação.

2.5 Relação entre superfícies: tronco e sólido de revolução

Embora não seja encontrada em Leahy (2009), utilizando argumentos semelhantes aos anteriores, obtemos diretamente do trabalho de Gregory que a razão entre as áreas das superfícies de dois sólidos de revolução é dada pela razão obtida por meio da multiplicação entre a razão dos perímetros das figuras que rotacionam em torno dos seus eixos de rotação e a razão entre as distâncias dos seus respectivos centros de gravidade ao eixo de rotação. Esta é a 2ª Relação de Pappus.

Aqui novamente são investigadas as relações entre o tronco e o sólido de revolução, obtidos a partir de uma figura circular plana Ω e suas respectivas superfícies. Considere, ainda, nas relações seguintes, que quando nos referirmos à superfície do tronco, não são consideradas as áreas da base nem da secção oblíqua superior do tronco. Na sequência, considere na figura 17 a semelhança entre os triângulos OPV e HEV.

Figura 17: Secção do tronco



Fonte: Rautenberg (2013, p. 19)

A partir dessa figura 17 podemos escrever que

$$\frac{OP}{PV} = \frac{HE}{EV} \Rightarrow \frac{OP}{2\pi PV} = \frac{HE}{2\pi EV} \quad (21)$$

Dessa forma, fica claro que a razão entre uma aresta qualquer do tronco inferior do cilindro reto e uma das circunferências que compõem a superfície do sólido de revolução, obtido da rotação de Ω em torno do eixo de rotação, é constante. Note ainda que essa razão $\frac{OP}{2\pi PV}$ é fixa para qualquer plano paralelo ao plano que contém OPV. Além disso, podemos escrever, de acordo com (LIMA et al., 2006), que a superfície do tronco inferior será composta pela união de todos os segmentos obtidos da intersecção da superfície do tronco com os planos paralelos mencionados. Do mesmo modo, a superfície do sólido de revolução será composta pela união de todas as circunferências provenientes da intersecção do sólido de revolução com os mesmos planos paralelos ao plano que contém OPV.

Aqui usaremos novamente as propriedades das proporções que afirmam que, se

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ e } \frac{a}{b} = \frac{e}{f}, \text{ então } \frac{a}{b} = \frac{c+e}{d+f} \quad (22)$$

Como todas as razões obtidas conforme (21) serão fixas e iguais a $\frac{OP}{2\pi PV}$, podemos usar (22) para adicioná-las e igualá-las a essa razão fixa, de onde obtemos

$$\frac{OP}{2\pi PV} = \frac{\text{Super}(\text{Inf}(\Omega))}{\text{Super}(\text{Rev}(\Omega))}$$

Note ainda que OP representa a altura do cilindro reto obtido de Ω , ou seja, $OP = \text{Alt}(\Omega)$, assim como $2\pi PV$ representa a circunferência, cujo raio é o raio de rotação de Ω , logo $2\pi PV = \text{Circ}(\Omega)$. Portanto

$$\frac{\text{Super}(\text{Inf}(\Omega))}{\text{Super}(\text{Rev}(\Omega))} = \frac{\text{Alt}(\Omega)}{\text{Circ}(\Omega)} \quad (23)$$

Aqui $\text{Super}(\text{Inf}(\Omega))$ representa a superfície do tronco inferior, ou seja, a soma de todas as arestas obtidas das intersecções do tronco com os planos paralelos ao plano que contém OPV , enquanto que $\text{Super}(\text{Rev}(\Omega))$ representa a superfície do sólido de revolução, resultante da soma de todas as circunferências obtidas de forma equivalente.

Agora iremos estabelecer uma relação entre as superfícies de dois sólidos de revolução. Suponha que Ω e Φ são duas figuras planas, das quais são obtidos dois cilindros retos de mesma altura. Da relação (23) podemos escrever

$$\frac{\text{Alt}(\Omega)}{\text{Circ}(\Omega)} = \frac{\text{Super}(\text{Inf}(\Omega))}{\text{Super}(\text{Rev}(\Omega))} \quad \text{e} \quad \frac{\text{Alt}(\Phi)}{\text{Circ}(\Phi)} = \frac{\text{Super}(\text{Inf}(\Phi))}{\text{Super}(\text{Rev}(\Phi))} \quad (24)$$

Como, por hipótese $\text{Alt}(\Omega) = \text{Alt}(\Phi)$, combinando essas duas igualdades de (24) obtemos

$$\frac{\text{Super}(\text{Rev}(\Omega))}{\text{Super}(\text{Rev}(\Phi))} = \frac{\text{Super}(\text{Inf}(\Omega)) \text{Circ}(\Omega)}{\text{Super}(\text{Inf}(\Phi)) \text{Circ}(\Phi)} \quad (25)$$

2.6 Relação entre superfícies: tronco e cilindro

Para encontrarmos essa relação usaremos novamente as estruturas utilizadas quando investigamos a relação entre os volumes de um tronco e de um sólido de revolução, com uma exceção, agora A e B representam os centros de gravidade dos perímetros das bases opostas dos cilindros obtidos a partir de Ω . Da mesma forma como foi feito anteriormente, X representará o centro de gravidade de toda a superfície do cilindro, assim como Y e Z representam, respectivamente, os centros de gravidade das superfícies do tronco inferior e superior. De modo semelhante aqueles já indicados, mostra-se que os centros de gravidade Y e Z pertencem aos segmentos HS e FR , respectivamente.

Novamente utilizando o Princípio de Arquimedes, supondo que toda massa resultante da superfície dos troncos superior e inferior estejam localizadas em Y e Z , podemos obter a seguinte igualdade: $\text{Super}(\text{Sup}(\Omega)).XZ = \text{Super}(\text{Inf}(\Omega)).XY$, ou ainda

$$\frac{\text{Super}(\text{Sup}(\Omega))}{\text{Super}(\text{Inf}(\Omega))} = \frac{XY}{XZ} .$$

Aqui $\text{Super}(\text{Sup}(\Omega))$ representa a superfície do tronco superior do cilindro, enquanto que $\text{Super}(\text{Inf}(\Omega))$ representa a superfície do tronco inferior.

Agora, da figura 14, podemos usar a semelhança entre os triângulos $H Y X$ e $R Z X$ e o fato de que FQ , HR e IS são paralelos, para obter

$$\frac{IA}{AS} = \frac{HX}{XR} = \frac{XY}{XZ} = \frac{\text{Super}(\text{Sup}(\Omega))}{\text{Super}(\text{Inf}(\Omega))} \quad (26)$$

Além disso, de (26) podemos escrever que

$$\frac{IS}{AS} = \frac{IA}{AS} + 1 = \frac{\text{Super}(\text{Sup}(\Omega))}{\text{Super}(\text{Inf}(\Omega))} + 1 = \frac{\text{Super}(\text{Sup}(\Omega)) + \text{Super}(\text{Inf}(\Omega))}{\text{Super}(\text{Inf}(\Omega))} = \frac{\text{Super}(\text{Cil}(\Omega))}{\text{Super}(\text{Inf}(\Omega))}$$

Portanto,

$$\frac{\text{Super}(\text{Cil}(\Omega))}{\text{Super}(\text{Inf}(\Omega))} = \frac{IS}{AS} \quad (27)$$

Na igualdade (27), $\text{Super}(\text{Cil}(\Omega))$ representa a superfície de todo o cilindro, e multiplicando o numerador e o denominador do lado direito dessa última igualdade por 2π , obtemos

$$\frac{2\pi IS}{2\pi AS} = \frac{\text{Super}(\text{Cil}(\Omega))}{\text{Super}(\text{Inf}(\Omega))} \Rightarrow \frac{\text{Super}(\text{Inf}(\Omega))}{\text{Super}(\text{Cil}(\Omega))} = \frac{\text{Circ}(A)}{\text{Circ}(\Omega)} \quad (28)$$

Note que na equação (28) temos que $2\pi IS = \text{Circ}(\Omega)$ pois IS foi definido como raio de rotação de Ω , assim como $2\pi AS = \text{Circ}(A)$. Além disso, a partir de uma figura simétrica Φ de centro de gravidade E , podemos de maneira equivalente escrever que

$$\frac{\text{Super}(\text{Inf}(\Phi))}{\text{Super}(\text{Cil}(\Phi))} = \frac{\text{Circ}(E)}{\text{Circ}(\Phi)} \quad (29)$$

2.7 A 2ª Relação de Pappus

Agora podemos multiplicar a equação (25) por $\frac{\text{Super}(\text{Cil}(\Omega))}{\text{Super}(\text{Cil}(\Omega))} \frac{\text{Super}(\text{Cil}(\Phi))}{\text{Super}(\text{Cil}(\Phi))} = 1$ e usar as igualdades (28) e (29) para obter

$$\begin{aligned} \frac{\text{Super}(\text{Rev}(\Omega))}{\text{Super}(\text{Rev}(\Phi))} &= \frac{\text{Super}(\text{Inf}(\Omega))}{\text{Super}(\text{Inf}(\Phi))} \frac{\text{Circ}(\Omega)}{\text{Circ}(\Phi)} \\ &= \frac{\text{Super}(\text{Inf}(\Omega))}{\text{Super}(\text{Cil}(\Omega))} \frac{\text{Super}(\text{Cil}(\Omega))}{\text{Circ}(\Phi)} \frac{\text{Super}(\text{Cil}(\Phi))}{\text{Super}(\text{Inf}(\Phi))} \frac{\text{Circ}(\Omega)}{\text{Super}(\text{Cil}(\Phi))} \\ &= \frac{\text{Circ}(A)}{\text{Circ}(E)} \frac{\text{Super}(\text{Cil}(\Omega))}{\text{Super}(\text{Cil}(\Phi))} \\ &= \frac{\text{Circ}(A)}{\text{Circ}(E)} \frac{\text{Per}(\Omega)}{\text{Per}(\Phi)} \end{aligned} \quad (30)$$

Aqui $\text{Per}(\Omega)$ representa o perímetro da base do cilindro Ω enquanto que $\text{Per}(\Phi)$ representa o perímetro da base do cilindro Φ e na última passagem levou-se em conta o fato de que se dois cilindros retos têm a mesma altura, então a razão entre as suas superfícies é igual a razão entre os perímetros de suas bases. Porém, como visto na seção anterior, esse resultado só foi obtido a partir da hipótese de que Ω e Φ são simétricas em torno de um eixo perpendicular ao eixo de rotação. Essa restrição pode ser removida do mesmo modo que antes e, dessa forma, obtemos

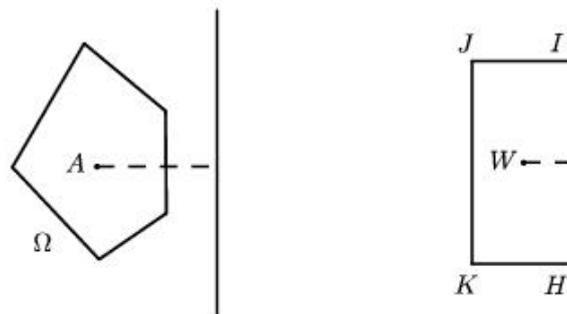
$$\frac{\text{Super}(\text{Rev}(\Omega))}{\text{Super}(\text{Rev}(\Phi))} = \frac{\text{Per}(\Omega)}{\text{Per}(\Phi)} \frac{\text{Circ}(A)}{\text{Circ}(E)} = \frac{\text{Per}(\Omega)}{\text{Per}(\Phi)} \frac{\text{Raio}(A)}{\text{Raio}(E)} \quad (31)$$

Portanto, demonstramos a 2ª Relação de Pappus: a razão entre as áreas das superfícies de dois sólidos de revolução é dada pela razão obtida por meio da multiplicação entre a razão dos

perímetros das figuras que rotacionam em torno dos seus eixos de rotação e a razão entre as distâncias dos seus respectivos centros de gravidade ao eixo de rotação.⁷

A partir da 2ª Relação de Pappus é possível estabelecer uma fórmula, que será enunciada como um teorema, que relaciona diretamente a superfície de um sólido de revolução, o perímetro e o centro de gravidade da figura da qual foi obtido o sólido. Para tanto, considere o perímetro do retângulo HIJK, de altura H, com centro de gravidade W que dista $\frac{HK}{2}$ do eixo de rotação, visto na seção anterior, e o perímetro de uma outra figura Ω , de centro de gravidade A qualquer, mostrados na figura 18.

Figura 18: Perímetros da figura plana Ω e do retângulo de vértices HIJK



Fonte: Rautenberg (2013, p. 29)

Sabemos que a superfície do sólido obtido da rotação de HIJK é a soma da área lateral com as áreas das bases, ou seja, $2\pi \cdot HK \cdot HI$ somado a $2\pi \cdot (HK)^2$ e, além disso, o perímetro do retângulo HIJK é dado por $2HK + 2HI$. Agora podemos utilizar a 2ª Relação de Pappus entre as figuras Ω e HIJK, mostradas na figura 18. Dessa forma podemos estabelecer a seguinte igualdade:

$$\frac{\text{Super}(\text{Rev}(\Omega))}{2\pi HK \cdot HI + 2\pi \cdot (HK)^2} = \frac{\text{Per}(\Omega) \cdot \text{Circ}(A)}{2HK + 2HI \cdot 2\pi \cdot \frac{HK}{2}}$$

Portanto, $\text{Super}(\text{Rev}(\Omega)) = \text{Per}(\Omega) \text{Circ}(A)$.

Dessa forma, demonstramos o seguinte teorema: Teorema 2) Se uma figura plana é rotacionada em torno de um eixo que não a intersecta, então a área da superfície gerada é dada pelo produto entre o perímetro da figura rotacionada e o comprimento da circunferência cujo raio é a distância entre o centro de gravidade desse perímetro e o eixo de rotação.

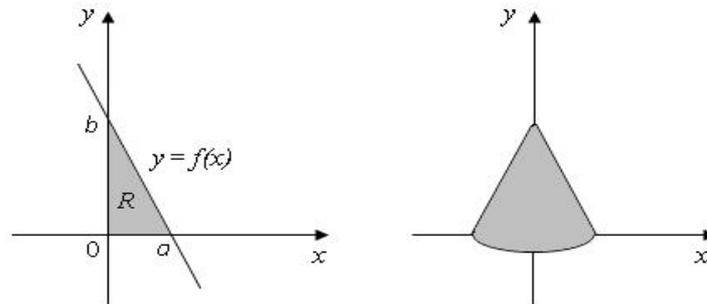
3 APLICAÇÕES

Mostraremos agora exemplos relacionados aos teoremas de Pappus. No primeiro deles obteremos a fórmula do volume do cone a partir da rotação de uma região triangular em torno de um eixo de revolução que contém um dos seus lados. Na sequência utilizaremos um dos teoremas no sentido inverso, ou seja, para determinar o centro de gravidade de um arco de uma curva do plano.

⁷ Essa relação também aparece na obra *Pappi Alexandrini Collectio* - v.3, encontrada em (HULTSCH, 1878).

Exemplo 1) Determinar o volume do cone obtido pela rotação da região R limitada pela função $f(x) = -\frac{bx}{a} + b$, com $a > 0, b > 0$ e pelas retas $x = 0$ e $y = 0$ em torno do eixo y, conforme mostra a figura 19.

Figura 19: Cone de revolução



Fonte: Rautenberg (2013, p. 44)

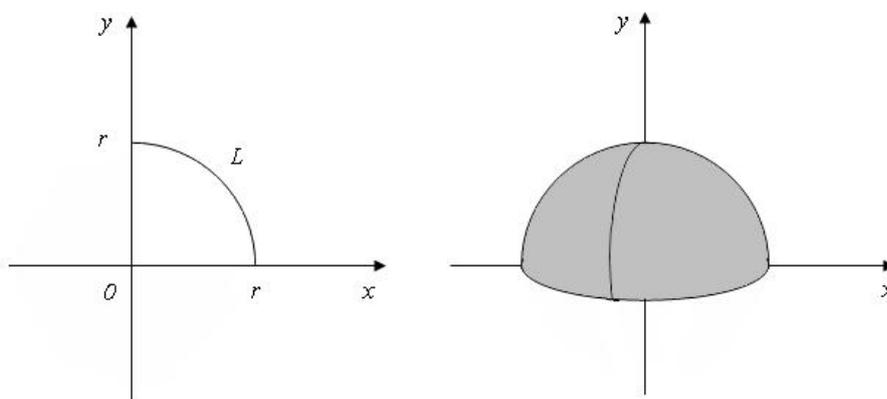
Solução: De acordo com o 1º teorema de Pappus, temos que esse volume procurado é dado pela expressão $Rev(\Omega) = \text{Área}(\Omega)\text{Circ}(A)$, ou ainda $V = 2\pi dA$, onde d é a distância entre o centro de gravidade e o eixo y, e A representa a área da região R que será rotacionada. Lembrando que o centro de gravidade de um triângulo é dado pelo ponto de encontro das suas medianas, e utilizando o conceito de semelhança entre triângulos, obtemos $d = \frac{a}{3}$. Além disso, temos que a área desse triângulo é dada por $A = \frac{ab}{2}$.

Dessa forma, temos:

$$V = 2\pi dA = 2\pi \left(\frac{a}{3}\right) \left(\frac{ab}{2}\right) = \frac{\pi a^2 b}{3}$$

Exemplo 2) Encontre o centro de gravidade do arco da função dada por $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, com $0 \leq x \leq r$, que é mostrado na figura 20.

Figura 20: Arco da função $y = \sqrt{r^2 - x^2}$



Fonte: Rautenberg (2013, p. 50)

Solução: Utilizaremos o 2º teorema de Pappus, dado por $\text{Super}(\text{Rev}(\Omega)) = \text{Per}(\Omega)\text{Circ}(A)$, ou ainda, $A = 2\pi dL$, para determinar o centro de gravidade desse arco. Primeiramente note que o perímetro L desse arco é igual a $\frac{\pi r}{2}$ e, além disso, quando o rotacionamos geramos uma superfície correspondente à metade da área de uma esfera, ou seja, de área $A = 2\pi r^2$. Portanto, podemos escrever

$$A = 2\pi dL \Rightarrow 2\pi r^2 = 2\pi d \left(\frac{\pi r}{2}\right) \Rightarrow d = \frac{2r}{\pi}$$

Quando rotacionamos esse mesmo arco em torno do eixo x encontramos uma superfície de mesma área e, portanto, também encontraremos $d = \frac{2r}{\pi}$. Como essas distâncias $d = \frac{2r}{\pi}$ encontradas são consideradas a partir do centro de gravidade aos eixos x e y, temos que o centro de gravidade desse arco será dado por $\left(\frac{2r}{\pi}, \frac{2r}{\pi}\right)$.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste artigo tratamos dos teoremas de Pappus relativos aos sólidos de revolução. Utilizando apenas conceitos de geometria, de centro de gravidade, além dos Princípios de Arquimedes e Cavalieri, foi possível apresentar as demonstrações desses importantes teoremas, ainda inéditas em português. Essas demonstrações foram obtidas a partir dos trabalhos de James Gregory, publicados no artigo do professor Andrew Leahy. Todas as construções dessas demonstrações merecem, no mínimo, a nossa atenção já que provam resultados importantes, utilizando conceitos anteriores ao desenvolvimento do Cálculo.

Relativamente extensas, é plenamente compreensível que as demonstrações em questão não apareçam em livros de Cálculo e, tampouco, em livros que tratam da História da Matemática de maneira mais ampla. Daí seguiu-se a estrutura desse artigo, ou seja, apresentamos a demonstração desses teoremas de modo a preencher essa eventual lacuna existente entre simples citações históricas desse tema e demonstrações que envolvem apenas elementos de Cálculo, tornando prático o acesso a todos que tenham interesse em conhecer esses teoremas.

Verificamos ainda, através de exemplos de aplicação, que os teoremas de Pappus também podem ser utilizados no sentido inverso, ou seja, para encontrar o centro de gravidade de figuras planas, quando conhecemos de antemão o volume ou a área da superfície do sólido gerado pela rotação, assim como as dimensões da figura que foi rotacionada. Além disso, alguns dos conceitos vistos podem ser aplicados em sala durante aulas de geometria espacial. Fórmulas de áreas de superfícies e volumes de sólidos de revolução, por exemplo, podem ser obtidas de forma alternativa a partir dos teoremas de Pappus.

REFERÊNCIAS

- BULMER-THOMAS, I. **Guldin's Theorem – or Pappus's?** Chicago: The University of Chicago Press, 1984. p. 348-352. v. 75. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/231832i>>. Acesso em: 8 mar. 2013.
- BUSSARD, H. L. L. **Paul Guldin - dictionary of scientific biography.** 1. ed. New York: Scribner, 1970. Disponível em: <<http://www.encyclopedia.com/doc/1G2-2830901775.html>>. Acesso em: 05 jan. 2013.
- EVES, H. **Introdução à história da matemática.** 1. ed. Campinas: Editora da UNICAMP, 2008.
- GULDIN, P. **Centrobarryca.** 1. ed. Viena: Gregorii Gelbhaar, 1635. p.147. Disponível em: <<http://echo.mpiwg-berlin.mpg.de/MPIWG:7C3STXR7i>>. Acesso em: 10 jan. 2013.
- HEATH, T. **A history of Greek mathematics - v. 2.** 1. ed. Oxford: The Clarendon Press, 1921. p.404. Disponível em: <<http://archive.org/stream/ahistorygreekm-a00heatgoogi>>. Acesso em: 05 jan. 2013.
- HULTSCH, F. O. **Pappi Alexandrini Collectio - v. 3.** 1. ed. Berlim: Apud Weidmannos, 1878. p.683. Disponível em: <<http://archive.org/stream/pappialexandrin-01pappgoogi>>. Acesso em: 20 dez. 2012.
- LEAHY, A. **James Gregory and the Pappus – Guldin Theorem.** [S.l.], 2009. Disponível

em: <<http://mathdl.maa.org/mathDL>>.
Acesso em: 19 dez. 2012.

LIMA, E. L. et al. **A matemática do ensino médio - v. 2.** p.275. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

MANCOSU, P. **Philosophy of mathematics & manual practice in the seventeenth century.** New York: Oxford University Press, 1996. p.58 Disponível em:

<<http://books.google.com.br/booksi>>.
Acesso em: 21 jan. 2013.

RAUTENBERG, R. R. **Os teoremas de Pappus para os sólidos de revolução.** Curitiba: Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT).p.12. Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2013.