

PROGRAMA *ON-LINE* PARA O ESTUDO DE SISTEMAS LINEARES VIA FATORAÇÃO LU

ON-LINE SOFTWARE FOR LINEAR SYSTEMS STUDY VIA LU FACTORIZATION

PARRA, Isabela Cássia Dominical¹

NIRSCHL, Gustavo Cabrelli²

RESUMO

Vários programas de computador apresentam somente o resultado final ou alguns passos dos cálculos efetuados. Pretendendo principalmente mostrar os cálculos internamente programados e a teoria envolvida, foi desenvolvido um programa de computador hospedado em uma página de internet para a resolução de sistemas lineares por meio do método de fatoração LU com pivoteamento parcial, possibilitando a geração de arquivo PDF contendo toda a resolução. O relatório permite não somente o estudo teórico do método como a visualização passo a passo de todos os cálculos para sistemas lineares possíveis e determinados de qualquer ordem. A página visa não só ao aprendizado e ao estudo do método, mas também ao estudo do cálculo numérico, uma vez que é apresentado o algoritmo principal. A interface da página é simplificada, contendo somente as informações necessárias para realização dos cálculos, sendo que a resolução passo a passo encontra-se no relatório em PDF gerado. O programa aqui apresentado, assim como outros, foi criado como projeto de Iniciação Científica pelo grupo de pesquisa NEVE – Núcleo de Engenharia Virtual e Experimental.

Palavras-chave: Resolução passo a passo. Sistemas Lineares. Método de Fatoração LU.

ABSTRACT

Many software only show the final result or a few steps of the calculations. Intending mainly show calculations internally programmed and the theory involved, a software hosted on a web page has been developed for solving linear systems using LU factorization method with partial pivoting, allowing the generation of PDF file containing the complete resolution. The report not only allows the theoretical study of the method as the display step by step all calculations for possible and determined linear systems in either order. The main aims not only to study the method, but also to study the numerical calculation, because it is shown the main algorithm. The web page interface is simplified, containing only the information needed to perform the calculations, and the resolution step by step is in the PDF report generated. The software presented here, as well as others, was created as a project of Scientific Initiation by the research group NEVE - Virtual and Experimental Engineering Center.

Keywords: Resolution step by step. Linear Systems. LU Factorization method.

1 INTRODUÇÃO

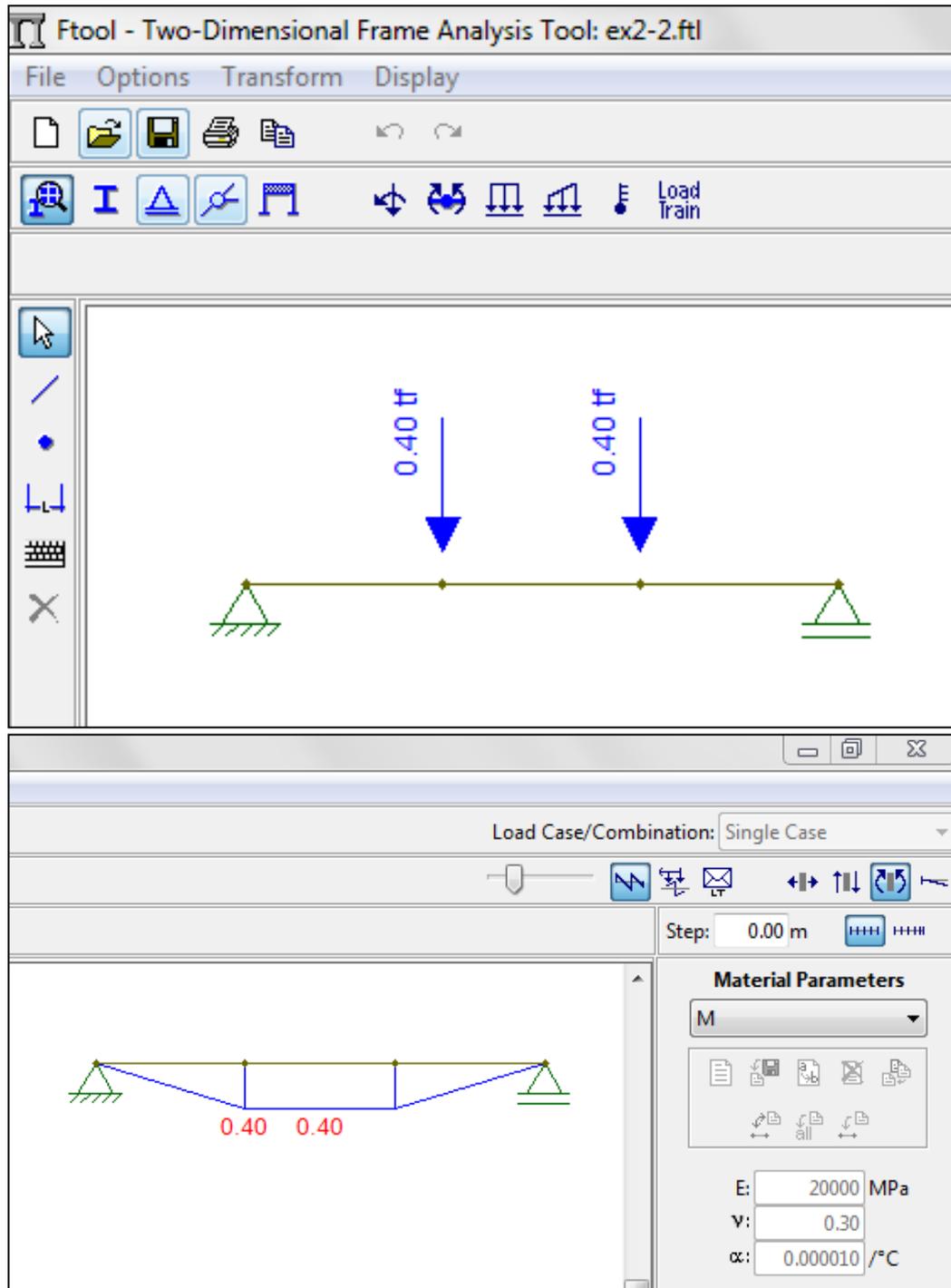
A maioria dos programas de computador voltados para área da Engenharia realiza cálculos mostrando somente a solução final na tela. Como exemplo, cita-se o Ftool (2015), para análise de estruturas lineares, em que são apresentados somente os diagramas dos resultados, mas não os cálculos envolvidos, o que pode dificultar o entendimento pormenorizado da resolução e a procura por eventuais erros, quando se faz necessária. A Figura 1 mostra um exemplo do referido programa.

¹ Discente do curso de Engenharia Civil do Instituto Federal de São Paulo (IFSP), Votuporanga, SP. Endereço eletrônico: isabelacassia19@gmail.com.

² Mestre em Engenharia Civil pela Universidade de São Paulo (USP), São Carlos, SP. Docente do Instituto Federal de São Paulo (IFSP), Votuporanga, SP. Endereço eletrônico: nirschl@gmail.com.

Visando a contribuir nesta questão, foi criado um programa de computador hospedado em uma página da internet que resolve sistemas lineares pelo método de Fatoração LU, contendo um relatório explicativo com todos os cálculos passo a passo.

Figura 1: Exemplo de entrada de dados (acima) e a resposta (abaixo) da análise da estrutura (diagrama de momentos fletores) dada pelo programa de computador Ftool (2015)



Fonte: autores

Esse programa de computador faz parte de um projeto de Iniciação Científica de graduação de Engenharia Civil, cujo escopo é criar programas de computador que seguem o objetivo de auxiliar alunos, profissionais e até mesmo professores no estudo aprofundado da resolução de problemas de Engenharia via Cálculo Numérico, como sistemas lineares,

interpolação e aproximação de dados e integração e derivação numéricas. O programa de computador referente a este artigo já está disponível para uso *on-line* (<http://vtp.ifsp.edu.br/nev/Sistema-lu/sistemalu.php?>) e faz parte das pesquisas de um grupo cadastrado no CNPq, chamado NEVE (<http://dgp.cnpq.br/dgp/espelhogrupo/2216017360594646>).

O Sistema Linear por Fatoração LU é um programa de computador disponibilizado como página de internet e foi criado por meio da linguagem HTML/Javascript. Para a elaboração do relatório em pdf, foi usada a biblioteca *pdfmake*.

2 APRESENTAÇÃO TEÓRICA

O Método da Fatoração LU é um método derivado do Método da Eliminação de Gauss que apresenta a vantagem do escalonamento ser feito independentemente do vetor dos termos autônomos. Um exemplo prático desta vantagem pode ser encontrado na Engenharia Civil. Para calcular os deslocamentos x dos nós de uma estrutura, um dos procedimentos é via Método dos Elementos Finitos, resolvendo um sistema linear da forma $Ax = b$, em que A é a matriz de rigidez, fixa para a estrutura, e o vetor b contém as ações externas, naturalmente variáveis. Sendo assim, pelo Método da Fatoração LU, é possível escalonar uma só vez a matriz A e utilizá-la para quaisquer vetores b .

De acordo com Ruggiero (1996), no Método da Fatoração LU, para resolver um sistema linear $Ax = b$, realiza-se a fatoração $A = LU$, sendo que o sistema fica $(LU)x = b$. Se $y = Ux$, resolver o sistema é equivalente a resolver $Ly = b$ e, depois, $Ux = y$.

LU é um termo que vem do inglês *lower* e *upper*, já que o método se baseia na decomposição da matriz A na forma $A = LU$, onde L é uma matriz triangular inferior (todos os elementos acima da diagonal são nulos) com elementos da diagonal principal iguais a 1 e U é uma matriz superior (todos os elementos abaixo da diagonal são nulos).

Para encontrar L e U , faz-se o escalonamento da matriz A , levando em consideração o pivoteamento parcial, ou seja, fazendo a troca de linhas de forma que o pivô seja o maior valor em módulo da coluna. Antes de resolver o sistema $Ly = b$, as mesmas trocas de linhas realizadas na matriz A têm que ser feitas no vetor b . A matriz A escalonada é a própria matriz U e a matriz L contém os multiplicadores da matriz A escalonada abaixo da diagonal, também com as devidas trocas de linhas realizadas.

Abaixo segue o esquema da resolução de uma matriz 3×3 genérica:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \rightarrow \text{matriz } A \text{ referente ao sistema } Ax = b$$

Escalonando a matriz A , têm-se:

a) Primeira coluna

Coeficientes: $m_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}}$ e $m_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}}$

Linha 2: $a'_{22} = a_{22} - m_{21} * a_{12}$
 $a'_{23} = a_{23} - m_{21} * a_{13}$

Linha 3: $a'_{32} = a_{32} - m_{31} * a_{12}$
 $a'_{33} = a_{33} - m_{31} * a_{13}$

b) Segunda coluna

Coeficientes:

$$m_{32} = \frac{a'_{32}}{a'_{22}}$$

Linha 3:

$$a''_{33} = a'_{33} - m_{32} * a'_{23}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0b_1 \\ m_{21} & 1 & 0b_2 \\ m_{31} & m_{32} & 1b_3 \end{bmatrix}$$

→ matriz aumentada referente ao sistema $Ly = b$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & y_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & y_2 \\ 0 & 0 & a''_{33} & y_3 \end{bmatrix}$$

→ matriz aumentada referente ao sistema $Ux = y$

Para achar os valores de x , é necessário que se resolva o sistema $Ly = b$, encontrando, assim, os valores de y e, depois, por retro substituição, que se resolva o sistema $Ux = y$.

Vale destacar que, no exemplo genérico anterior, não houve pivoteamento parcial.

3 RESULTADOS

O programa de computador já está disponível como página de internet³. Na figura 2, aparece exatamente como disponibilizado *on-line*, com a figura de um exemplo de um sistema para o usuário entender como funciona a entrada de dados. A partir disso, para iniciar os cálculos, têm-se duas opções: ou gerar o sistema na própria página, a partir da ordem digitada (botão *GERAR*), e digitar os valores (figura 3) de cada elemento ou criar um arquivo TXT, seguindo o padrão apresentado ao se clicar no botão *EXEMPLO de TXT*.

Figura 2: Programa de computador criado e hospedado em página de internet

SISTEMA LINEAR POR FATORAÇÃO LU

Abaixo segue um exemplo de como o sistema linear deverá ser montado na matriz

$\begin{cases} 2x - 4y + 7z = 3 \\ 9x \quad \quad - 3z = 3 \\ 4x - 8y + 5z = -4 \end{cases}$	Equivale a	$\begin{matrix} 2 & -4 & 7 & \vdots & 3 \\ 9 & 0 & -3 & \vdots & 3 \\ 4 & -8 & 5 & \vdots & -4 \end{matrix}$
--	-------------------	--

Ordem do sistema (n): OU

Nenhum arquivo selecionado *****

Fonte: autores

³ <http://vtp.ifsp.edu.br/nev/Sistema-lu/sistemalu.php?>

Figura 3: Exemplo de sistema gerado com ordem 3, cujos valores têm que ser digitados

Ordem do sistema (n):

OU Nenhum arquivo selecionado *****

Obs: Matriz COMPLETA (a última coluna contém os termos independentes. os valores após a igualdade).

<input type="text" value="3"/>	<input type="text" value="2"/>	<input type="text" value="4"/>	<input type="text" value="1"/>
<input type="text" value="1"/>	<input type="text" value="1"/>	<input type="text" value="2"/>	<input type="text" value="2"/>
<input type="text" value="4"/>	<input type="text" value="3"/>	<input type="text" value="2"/>	<input type="text" value="3"/>

Fonte: autores

Depois de ler ou digitar o sistema, clica-se no botão *CALCULAR* (figura 3), aparecendo os sistemas triangulares equivalentes e a solução final. A figura 5 apresenta um exemplo para um sistema de ordem 3.

Por fim, como principal característica do programa criado, pode-se gerar o relatório, clicando no botão *GERAR RELATÓRIO* ao fim da página, conforme a figura 4. O relatório é em pdf e contém a resolução detalhada. As figuras 5 e 6 mostram uma adaptação do relatório gerado para a matriz exemplificada na figura 4.

Figura 4: Exemplo da resolução de um sistema de ordem 3

Obs: Matriz COMPLETA (a última coluna contém os termos independentes. os valores após a igualdade).

<input type="text" value="3"/>	<input type="text" value="2"/>	<input type="text" value="4"/>	<input type="text" value="1"/>
<input type="text" value="1"/>	<input type="text" value="1"/>	<input type="text" value="2"/>	<input type="text" value="2"/>
<input type="text" value="4"/>	<input type="text" value="3"/>	<input type="text" value="2"/>	<input type="text" value="3"/>

$L*y=p*b$

<input type="text" value="1"/>	<input type="text" value="0"/>	<input type="text" value="0"/>	<input type="text" value="3"/>
<input type="text" value="0,25"/>	<input type="text" value="1"/>	<input type="text" value="0"/>	<input type="text" value="2"/>
<input type="text" value="0,75"/>	<input type="text" value="-1"/>	<input type="text" value="1"/>	<input type="text" value="1"/>

$U*x=y$

<input type="text" value="4"/>	<input type="text" value="3"/>	<input type="text" value="2"/>	<input type="text" value="3"/>
<input type="text" value="0"/>	<input type="text" value="0,25"/>	<input type="text" value="1,5"/>	<input type="text" value="1,25"/>
<input type="text" value="0"/>	<input type="text" value="0"/>	<input type="text" value="4"/>	<input type="text" value="0"/>

$x_1 = -3.0000$
 $x_2 = 5.0000$
 $x_3 = 0.0000$

Fonte: autores

Figura 5: Relatório gerado com o exemplo dos dados da figura 4

Ordem da Matriz = 3

Matriz Completa:

3.000	2.000	4.000	1.000
1.000	1.000	2.000	2.000
4.000	3.000	2.000	3.000

Para a resolução do sistema linear pelo método da fatoração LU, o escalonamento é feito independentemente do vetor dos termos independentes. Este método fatora o sistema linear $Ax=B$ em $Ly=B$ e em $Ux=y$. A matriz A (matriz dos coeficientes) irá se decompor em $A=L*U$. Onde:

- L é uma matriz triangular inferior em que todos os elementos acima da diagonal são nulos, os elementos da diagonal principal são iguais a 1 e os elementos abaixo da diagonal principal são os valores dos multiplicadores (m), resultantes do escalonamento da matriz A.
- U é a matriz triangular superior que resultou do escalonamento com pivoteamento parcial da matriz A.

Abaixo segue a resolução:

A ordem inicial das linhas (vetor p) é:

1
2
3

O Pivô é:
4.000

A nova ordem das linhas será (vetor p atualizado):

3
2
1

A matriz L inicial é a matriz identidade:

1.000	0.000	0.000
0.000	1.000	0.000
0.000	0.000	1.000

A matriz "A" com a troca de linhas fica:

4.000	3.000	2.000
1.000	1.000	2.000
3.000	2.000	4.000

A matriz L com a troca de linhas abaixo da diagonal fica:

1.000	0.000	0.000
0.000	1.000	0.000
0.000	0.000	1.000

$m[2,1]=a[2,1]/a[1,1]=1.0000/4.0000=0.2500$
 $a[2,1]=a[2,1]-m[2,1]*a[1,1]=1.0000-(0.2500)*(4.0000)=0.0000$
 $a[2,2]=a[2,2]-m[2,1]*a[1,2]=1.0000-(0.2500)*(3.0000)=0.2500$
 $a[2,3]=a[2,3]-m[2,1]*a[1,3]=2.0000-(0.2500)*(2.0000)=1.5000$

$m[3,1]=a[3,1]/a[1,1]=3.0000/4.0000=0.7500$
 $a[3,1]=a[3,1]-m[3,1]*a[1,1]=3.0000-(0.7500)*(4.0000)=0.0000$
 $a[3,2]=a[3,2]-m[3,1]*a[1,2]=2.0000-(0.7500)*(3.0000)=-0.2500$
 $a[3,3]=a[3,3]-m[3,1]*a[1,3]=4.0000-(0.7500)*(2.0000)=2.5000$

A matriz "A" escalonada até aqui fica:

4.000	3.000	2.000
0.000	0.2500	1.500
0.000	-0.2500	2.500

A matriz L atualizada fica:

1.000	0.000	0.000
0.2500	1.000	0.000
0.7500	0.000	1.000

O Pivô é:
0.2500

A nova ordem das linhas será (vetor p atualizado):

3
2
1

A matriz "A" com a troca de linhas fica:

4.000	3.000	2.000
0.000	0.2500	1.500
0.000	-0.2500	2.500

A matriz L com a troca de linhas abaixo da diagonal fica:

1.000	0.000	0.000
0.2500	1.000	0.000
0.7500	0.000	1.000

O vetor b com a troca de linhas determinada pelo vetor p fica:

3.000
2.000
1.000

Então, o sistema triangular inferior a resolver ($L*y=b$; b com as linhas trocadas) fica:

1.000	0.000	0.000	3.000
0.2500	1.000	0.000	2.000
0.7500	-1.000	1.000	1.000

Com o triângulo inferior formado pode se encontrar os valores de y:

soma=0
 $y1=(b[1]-(soma))/L[11]=(3.0000-(0.0000))/1.0000=3.0000$
 soma=0
 $soma=soma+L[2,1]*y[1]=0.0000+(0.2500*3.0000)=0.7500$
 $y2=(b[2]-(soma))/L[22]=(2.0000-(0.7500))/1.0000=1.2500$
 soma=0
 $soma=soma+L[3,1]*y[1]=0.0000+(0.7500*3.0000)=2.2500$
 $soma=soma+L[3,2]*y[2]=2.2500+(-1.0000*1.2500)=1.0000$
 $y3=(b[3]-(soma))/L[33]=(1.0000-(1.0000))/1.0000=0.0000$

Que resulta em y = :

3.000
1.250
0.000

Figura 6: Relatório gerado com o exemplo dos dados da figura 4 (parte 2)

<p>E o sistema triangular superior a resolver ($U \cdot x = y$) fica:</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr> <td style="padding: 2px 10px;">4.000</td> <td style="padding: 2px 10px;">3.000</td> <td style="padding: 2px 10px;">2.000</td> <td style="padding: 2px 10px; color: blue;">3.000</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px 10px; color: red;">0.000</td> <td style="padding: 2px 10px;">0.2500</td> <td style="padding: 2px 10px;">1.500</td> <td style="padding: 2px 10px; color: blue;">1.250</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px 10px; color: red;">0.000</td> <td style="padding: 2px 10px; color: red;">0.000</td> <td style="padding: 2px 10px;">4.000</td> <td style="padding: 2px 10px; color: blue;">0.000</td> </tr> </table>				4.000	3.000	2.000	3.000	0.000	0.2500	1.500	1.250	0.000	0.000	4.000	0.000
4.000	3.000	2.000	3.000												
0.000	0.2500	1.500	1.250												
0.000	0.000	4.000	0.000												
<p>Com o triângulo superior formado pode se encontrar os valores de x:</p> <p>$x_3 = (y[3]/a[33]) = 0.0000/4.0000 = 0.0000$ soma=0 $soma = soma + a[2,3] \cdot x[3] = 0.0000 + (1.5000 \cdot 0.0000) = 0.0000$ $x_2 = (y[2] - (soma)) / a[22] = (1.2500 - (0.0000)) / 0.2500 = 5.0000$ soma=0 $soma = soma + a[1,2] \cdot x[2] = 0.0000 + (3.0000 \cdot 5.0000) = 15.0000$ $soma = soma + a[1,3] \cdot x[3] = 15.0000 + (2.0000 \cdot 0.0000) = 15.0000$ $x_1 = (y[1] - (soma)) / a[11] = (3.0000 - (15.0000)) / 4.0000 = -3.0000$</p> <p>Resultando na solução final do sistema, $x =$:</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr> <td style="padding: 2px 10px;">-3.000</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px 10px;">5.000</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px 10px;">0.000</td> </tr> </table> <p>Dado n, A[n,n] e b[n,1] 1: Para i=1 até i=n faça 2: p[i]=i 3: Fim do laço 4: Para k=1 até k=n-1 faça //para cada coluna 5: pv= a[k,k] //pv é o pivô 6: r=k //r é o n° da linha que está o pivô 7: Para i=k+1 até i=n faça //para cada linha 8: Se a[i,k] > pv então //encontra o maior pivô em módulo 9: pv= a[i,k] 10: r=i 11: Fim do condicional 12: Fim do laço 13: Se pv=0 então 14: "Todos os pivôs são nulos." PARE. 15: Se r for diferente de k, faça 16: Troque a linha k com a linha r</p>				-3.000	5.000	0.000									
-3.000															
5.000															
0.000															
<pre> 17: atemp=p(k) 18: p(k)=p(r) 19: p(r)=aux 20: Para c=1 até c=n faça //coluna 1 a n+1 21: atemp=a[k,c]; //variável temporária 22: a[k,c]=a[r,c]; 23: a[r,c]=atemp; 24: Fim do Laço 25: Fim do condicional 26: Para i=k+1 até i=n faça //para cada linha, menos a anterior 27: m[i,k]=a[[i,k]/a[k,k] 28: a[i,k]=m[i,k] 29: Para j=k+1 até j=n faça //para cada coluna, a partir da k 30: a[i,j]=a[i,j]-m[i,k]*a[k,j] 31: Fim do laço 32: Fim do laço 33:Fim do laço 34://c=Pb 35:Para i=1 até i=n faça 36: r=p(i) 37: c[i]=b[r] 38:Fim do laço 39://Ly=c 40:y[1]=c[1] 41:Para i=2 até i=n faça 42:soma=0 43: Para j=1 até j=i-1 faça 44: soma=soma+a[i,j]*x[j] 45: Fim do laço 46:y[i]=c[i]-soma 47:Fim do laço 48://Ux=y 49:x[n]=y[n]/a[n,n] 50:Para i=n-1 até i=1 faça 51:soma=0 52: Para j=i+1 até j=n faça 53: soma=soma+a[i,j]*x[j] 54: Fim do laço 55:x[i]=(y[i]-soma)/a[i,i] 56:Fim do laço </pre>															

Fonte: Elaborado pelos autores

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O avanço das tecnologias está levando os profissionais da engenharia a simplesmente usarem os programas de computador, nem sempre compreendendo todos os cálculos realizados internamente. Neste contexto, a característica principal do programa aqui apresentado, o relatório PDF, contribui significativamente para o estudo, por parte de estudantes, professores e profissionais, da resolução de sistema linear de qualquer ordem via fatoração LU, pois apresenta a resolução detalhada de todos os cálculos realizados. Conforme anteriormente citado, este projeto faz parte de um grupo de pesquisa do CNPq (chamado NEVE) e possui outras páginas com programas de computador na área de Cálculo Numérico e Engenharia Civil (<http://vtp.ifsp.edu.br/nev>). Nesta linha de pesquisa, objetivando detalhar os cálculos envolvidos em programas de computador, estão em andamento outras iniciações científicas com aplicações na área de Estruturas de Engenharia Civil.

REFERÊNCIAS

FTOOL. Ftool para Windows, versão 3.01. PUC-Rio, 2015. Disponível em <<http://www.alis-sol.com.br/ftool/>>. Acesso em 03 de março de 2017.

QUADROS, Régis S. de; BORTOLI, Álvaro L. de. **Fundamentos de Cálculo Numérico para Engenheiros**. Porto Alegre, 2009. Disponível em: <<http://www.inf.ufrgs.br/~rlflupchinski/files/2>

0112/NUMERICO/numerico-bortoli.pdf >. Acesso em: outubro de 2014.

RUGGIERO, M.A.G; LOPES, V.L.R. **Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais**.2.ed. São Paulo: Makron Books, 1996.

SWOKOWSKI. **Cálculo com Geometria Analítica**. São Paulo. Makron Books, 1995.