História e Epistemologia da Matemática no Ensino de Frações

History and Epistemology of Mathematics in the Teaching of Fractions

Osvaldo **Inarejos**
Universidade Estadual de Londrina (UEL)

Giovana Rodrigues **Castilho**
Universidade Estadual de Londrina (UEL)

Angela Marta Pereira das Dores **Savioli**
Universidade Estadual de Londrina (UEL)

RESUMO

Este estudo tem por objetivo argumentar que é possível abordar aspectos históricos e epistemológicos no ensino de frações, por meio de uma pesquisa teórica, relacionando suas interpretações a dois contextos históricos: o sistema de medição egípcio e a Matemática hindu na Antiguidade. Para tanto, delimita-se a frações de números inteiros, ou seja, números racionais. Assim, consideram-se as interpretações de frações a partir das de números racionais estabelecidas por Kieren (1980) e, com base em seu referencial teórico, identificam-se interpretações relacionadas aos respectivos contextos históricos. Como aspecto propositivo, apresenta-se um exemplo de abordagem didática, com o intuito de aprofundar tal discussão, que parte de três problemas históricos elaborados para a exploração de diversas interpretações de frações. Efetua-se um delineamento inicial de algumas relações teóricas entre os temas envolvidos, contribuindo com reflexões acerca da Educação Matemática em sua natureza interdisciplinar e suas implicações didáticas.

Palavras-chave: Educação Matemática. História na Educação Matemática. Epistemologia. Ensino de frações.

ABSTRACT

This study aims at showing that it is possible to approach the history and epistemology of fractions in the teaching of Mathematics, through a theoretical research, relating fraction interpretations in two historical contexts: the Egyptian measurement system and Hindu mathematics in ancient history. For this purpose, it is delimited to fractions of whole numbers, that is, rational numbers. Thus, based on the interpretations of rational numbers established by Kieren (1980), fraction interpretations were considered and, based on his theoretical framework, interpretations of fractions related to historical circumstances were identified. As a propositional aspect, an example of a didactic approach is presented, with the purpose of deepening this discussion, which starts from three historical problems for the exploration of different fraction interpretations. An initial design of some theoretical relationships between the involved themes is carried out, contributing with reflections about Mathematics Education in its interdisciplinary nature and didactic implications.

Keywords: Mathematics Education. History in Mathematics Education. Epistemology. Teaching of fractions.

1 INTRODUÇÃO

Pesquisas apontam dificuldades na aprendizagem de frações de inteiros por parte de estudantes, especialmente nos Anos Finais do Ensino Fundamental (ETCHEVERRIA *et al*., 2019; FONSECA; SANTOS, 2019; MELO; ANDRADE, 2014; MONTEIRO; GROENWALD, 2014; OLIVEIRA, 2015; RUBENS; FERNANDES, 2013). Algumas trazem soluções para essas dificuldades, dentre elas destacamos Silva (2005) e Elias (2017).

Silva (2005) realizou um projeto de formação para professores de Matemática dos Anos Finais do Ensino Fundamental que participaram de sua pesquisa. A autora observou dificuldades dos docentes em tomar decisões e colocá-las em prática para obter sequências de ensino que pudessem favorecer a construção de conhecimentos pertinentes às diversas concepções de números fracionários pelos estudantes.

Nessa esteira, Elias (2017) propôs fundamentos teórico-metodológicos e uma sequência de tarefas para o ensino na licenciatura em Matemática, considerando os subconstrutos[1] de números racionais e aspectos históricos. Para isso, o autor pesquisou e organizou, em uma matriz epistemológica, diferentes formas de significar o conceito.

Assim, considerando os aspectos históricos, filosóficos e de concepções alternativas pesquisadas, Elias (2017) elencou onze temas epistemológicos para significar os números racionais: relação entre grandezas; divisão entre dois números inteiros; o inverso de um número inteiro; processo de dupla contagem; formas de representação; aspectos geométricos; multiplicação e divisão; práticas cotidianas; classe de equivalência de pares ordenados de números inteiros; elemento de um corpo; e corpo de frações do domínio de integridade $\mathbb{Z}$.

No caso da representação fracionária, foco de nossa pesquisa, pensamos que tanto suas interpretações e princípios epistemológicos quanto suas raízes históricas podem contribuir para que o estudante aprimore sua rede de relações quanto ao conceito, atribuindo significados e tornando-a mais coerente. Consideramos, dessa forma, que trabalhar os vários aspectos relacionados ao conceito pode contribuir para a superação das dificuldades que emergem nos Anos Finais do Ensino Fundamental.

Desse modo, nos deparamos com a questão de como o professor de Matemática, nesse nível de ensino, poderia utilizar aspectos históricos e epistemológicos do conceito de fração no exercício da docência. Em decorrência disso, estabelecemos como objetivo argumentar que é possível abordar esses dois enfoques concomitantemente no ensino de frações. Para isso, realizamos uma pesquisa teórica relacionando-os a dois contextos históricos: a origem histórica dos números fracionários na civilização egípcia e nos povos hindus da Antiguidade Tardia. A fim de aprofundar a discussão quanto às interpretações de frações e elementos históricos no ensino, apresentamos um exemplo de abordagem didática que parte de três problemas geradores que elaboramos, propondo, assim, uma possível resposta à questão da pesquisa.

Para tal, utilizamos a História da Matemática considerando o papel didático que ela tem assumido no campo da Educação Matemática. Isso posto, focando no Ensino Fundamental II, nos delimitamos às frações de números inteiros, ou seja, aos números racionais em sua representação fracionária, sem aprofundarmo-nos na formalização como estrutura algébrica corpo.

Além da epistemologia do conceito, a forma como ele é abordado revela a concepção que o professor possui de conhecimento (MACHADO, 2000). Sendo assim, trabalhamos com

[1] Kieren (1980) nomeia as diferentes interpretações de números racionais como subconstrutos. Elias (2017) baseou-se nesse autor e em outros que propuseram interpretações, subconstrutos ou “personalidades” de números racionais. No caso das frações, escolhemos utilizar apenas o termo “interpretações”, pois alguns subconstrutos de números racionais não se adequam à notação fracionária, como o decimal proposto por Behr *et al*. (1983).

uma concepção que considera o conhecimento como uma rede, de forma que as conexões de conceitos (com o contexto dos problemas e com as próprias propriedades) recebam uma atenção especial (MACHADO, 2000).

Utilizamos a Resolução de Problemas, na perspectiva de Onuchic e Allevato (2011), para estruturar o exemplo de abordagem didática, partindo de problemas geradores, como proposto pelas autoras.

Desse modo, buscamos fundamentar esta pesquisa nas discussões a respeito das interpretações de frações, sua historicidade em dois contextos e na História da Matemática na Educação Matemática. A teorização do conhecimento como rede contribui como base epistemológica para nossa perspectiva de ensino e aprendizagem enquanto pesquisadores. Além de colaborar com o ensino de frações, esperamos que este artigo contribua com pesquisas que venham a explorar mais as relações teóricas que começamos a estabelecer entre esses tópicos, cientes de que são muitos temas e relações para serem aprofundados em um único texto. Em particular, as relações que estabelecemos entre as interpretações de frações e os contextos históricos adotados contribuem com reflexões para a Educação Matemática em sua natureza interdisciplinar (CARVALHO, 1991) e implicações didáticas.

Na próxima seção, dissertamos a respeito de questões epistemológicas relacionadas à construção do conhecimento por parte do estudante. Comentamos, na terceira seção, a respeito da História da Matemática como recurso didático. Em seguida, resumimos alguns aspectos históricos dos números fracionários na civilização Egípcia e posteriormente nos povos hindus da Antiguidade. Na sequência, comentamos algumas interpretações para as frações, relacionando-as com o conteúdo já mencionado. Na sétima e penúltima parte, trazemos um exemplo de abordagem didática, aprofundando o que foi discutido. Por fim, tecemos algumas considerações finais.

2 A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E A CONSTRUÇÃO DO CONHECIMENTO

Antes de focarmos no conceito de fração e seu ensino, precisamos esclarecer nossas bases epistemológicas a respeito do conhecimento de forma geral e da Educação Matemática.

Conforme Machado (2000, p. 71), “toda ação docente extrai sua consistência de uma articulação simbiótica com o discurso pedagógico, sendo o par ação/discurso tributário de uma concepção de conhecimento”. Corroborando com essa perspectiva, Machado (2000) indica que muitas ações ainda são fundamentadas numa concepção de conhecimento como um bem passível de acumulação, como quando se fala em “aquisição de conhecimento. Outras se fundamentam em uma concepção de conhecimento como uma cadeia linear e progressiva, como podemos perceber na ideia de pré-requisito.

Entendemos que o conhecimento é algo que se constrói, mas não necessariamente seguindo uma hierarquia. A ideia de rede se adequa para descrever essa concepção de conhecimento por meio de várias metáforas, como um conjunto de significados em um espaço de representações, uma teia de relações, interligações, dinâmicas dos processos cognitivos e o funcionamento das redes neurais (MACHADO, 2000).

Seis princípios nos ajudam a descrever melhor o conhecimento como rede : conforme Machado (2000), o da metamorfose explicita a concepção de que a rede está em constante construção e renegociação. O da heterogeneidade diz respeito à diversidade de conexões possíveis de serem estabelecidas entre dois objetos. Por exemplo, na memória são encontradas imagens, sons, palavras e sensações que se confrontam em relações lógicas, afetivas e sensoriais. O da multiplicidade considera os vários níveis de escala entre as conexões, de forma que cada nó, quando analisado, revela-se composto por toda uma rede, dando à esta um aspecto de fractal[2]. O princípio de exterioridade caracteriza a contínua construção do conhecimento, tanto em novos elementos quanto em novas ligações. O de topologia[3] fornece múltiplos sentidos às distâncias e proximidades e o de mobilidade dos centros reconhece que não há na rede um centro fixo.

Como consequência dessa concepção de conhecimento, a composição dos significados deve ser aberta ao feixe de relações que o objeto possui, incluindo propriedades, relações com outros objetos e com o contexto da tarefa, inclusive no que tange à ultrapassagem de barreiras disciplinares. Ou seja, precisamos superar o mero ensino isolado do conceito matemático. Além disso, tal perspectiva pouco se adequa às exigências de pré-requisitos e de um currículo pré-determinado, de forma que não consideramos pertinente focar esta pesquisa em uma série do Ensino Fundamental II ou condicioná-la aos conhecimentos prévios de um determinado nível de ensino.

Essa compreensão se adequa aos nossos entendimentos quanto à Matemática e à Educação Matemática. Em um levantamento de estudos que adotam e discutem as expressões "ensino de Matemática" e "Educação Matemática", seguido de uma análise que levou em conta aspectos históricos, filosóficos e epistemológicos, Inarejos (2019, p. 11) concluiu que "A Educação Matemática constitui-se de um campo de estudo que visa, dentre outros objetivos, colaborar com o ensino de Matemática [...]". Ou seja, a Educação Matemática não visa apenas ao ensino de Matemática, focado no professor e em suas ações, mas possui outras metas como a aprendizagem do aluno e o desenvolvimento das futuras gerações. Enfim, a Educação Matemática envolve a "pré-ocupação com os rumos que o processo educacional toma, definindo possibilidades" (BICUDO, 1999, p. 7).

Consideramos ainda o caráter interdisciplinar da Educação Matemática que, como destaca Carvalho (1991), emprega contribuições de muitas áreas, tais como Psicologia, Educação, Sociologia, História, entre outras. Neste artigo, exploramos essa interdisciplinaridade.

Carvalho (1991) também destacou o reconhecimento dado pela Educação Matemática à individualidade, ao valor e às especificidades da Matemática, que é entendida como uma construção social influenciada por estruturas econômico-sociais e que ainda, estranhamente, sempre teve suas preocupações não utilitárias.

Sendo assim, as concepções de conhecimento como rede e Educação Matemática como campo de estudo e pesquisa, com preocupações para além do ensino estrito do conteúdo matemático, permeiam as discussões aqui realizadas e destacam relações entre história, epistemologia e didática.

3 A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

De acordo com Miguel e Miorim (2004), os interesses pelas questões históricas relativas à Matemática e à Educação Matemática vêm ocorrendo de forma ligada ao movimento mais amplo da Educação Matemática.

Entretanto, o movimento em torno da História da Matemática já é tão amplo e diversificado que possui campos de investigação, dos quais se destacam o da História da Matemática propriamente dita, o da História da Educação Matemática e o da História na Educação Matemática (MIGUEL; MIORIM, 2004). Esse último é o nosso foco para o presente estudo.

[2] Fractal é um objeto cujas partes repetem os traços do todo.
[3] Topologia é o estudo da forma.

Estamos particularmente interessados na utilização da história na formação matemática de estudantes dos Anos Finais do Ensino Fundamental. A Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018, s. p.), no texto referente à Matemática, nesse nível de ensino, determina que:

> [...] é importante incluir a história da Matemática como recurso que pode despertar interesse e representar um contexto significativo para aprender e ensinar Matemática. Entretanto, esses recursos e materiais precisam estar integrados a situações que propiciem a reflexão, contribuindo para a sistematização e a formalização dos conceitos matemáticos.

Assim, a História da Matemática não deve ser introduzida anedoticamente, com o ensino voltado para si ou como mero recurso motivador, mas como auxílio na contextualização e aprendizagem de conceitos matemáticos. Isso não significa descartá-la como recurso motivador, mas evitar que a motivação seja externa ao conteúdo e utilizá-la de forma que esteja "vinculada e produzida no ato cognitivo da solução de um problema" (MIGUEL; MIORIN, 2004, p. 48).

Dessa forma, pensamos na utilização da história como recurso motivador e didático, considerando o interesse na solução de um problema contextualizado historicamente e a aprendizagem desenvolvida na reflexão propiciada, na resolução do problema e na sistematização e formalização do conceito matemático.

A Resolução de Problemas pode ser utilizada em conjunto com a História da Matemática em uma abordagem que os problemas de natureza histórica gerem a atividade matemática, pois, nessa metodologia, eles são propostos antes que o estudante tenha sido apresentado formalmente ao conteúdo (ONUCHIC ; ALLEVATO, 2011). Assim, para criarmos um exemplo de abordagem para o ensino de frações que considere aspectos históricos e epistemológicos e caracterize uma Resolução de Problemas na perspectiva de Onuchic e Allevato (2011), formulamos problemas históricos que possam levar os estudantes a refletir a respeito de aspectos epistemológicos referentes às frações, conduzindo à sistematização do conteúdo de forma a serem ativos na construção do próprio conhecimento.

Furinghetti (2020) destaca duas principais correntes de ação para a introdução da História da Matemática na sala de aula: a que age sobre a imagem que as pessoas têm dessa disciplina e a história para o ensino de conceitos e processos matemáticos. Embora nosso enfoque maior seja nessa segunda corrente de ação, é interessante observar como a utilização da história pode desmitificar a imagem negativa que a Matemática possui, promovendo reflexões a respeito da natureza desta como processo sociocultural e produção humana.

A contextualização do conceito matemático promovida por tal recurso é um importante ponto a ser considerado ao assumirmos a concepção de conhecimento como rede. O que é fração? Como surgiram as frações? Onde? Para quê? O que mudou e por quê? Por que tal formalização foi adotada pelos matemáticos? Qual função ela possui na sociedade atual? Questões como essas podem ser respondidas com o auxílio da história e da epistemologia das frações, permitindo aprofundar e fortalecer a rede de conexões do conceito com os objetos aos quais se relaciona, contribuindo para seu aprendizado.

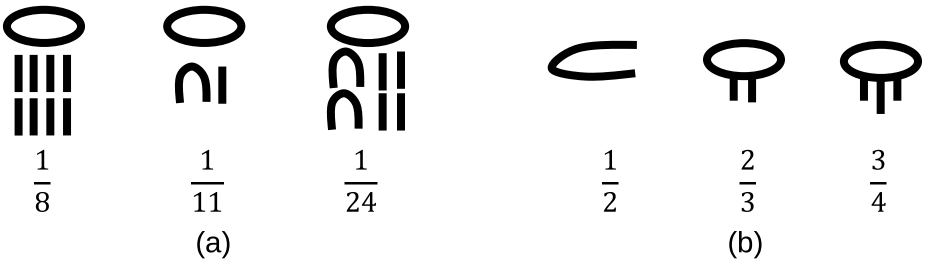
4 A HISTÓRIA DOS NÚMEROS FRACIONÁRIOS NA CIVILIZAÇÃO EGÍPCIA

A civilização egípcia é a mais antiga com registros de números fracionários (PERLIN; LOPES, 2013). Há, ainda, registros de números não inteiros na Babilônia (ROQUE, 2012). Porém, os povos mesopotâmicos utilizavam a notação posicional em base 60, tanto para números inteiros quanto para fracionários, enquanto que os egípcios representavam os inteiros em notação posicional de base 10 e os fracionários como divisões de um inteiro em partes iguais, correspondente ao que hoje denotamos com frações unitárias. Por essa razão, consideramos que o contexto egípcio é adequado para iniciar uma abordagem didática com frações.

Segundo Perlin e Lopes (2013), a ideia de fracionar uma quantidade surgiu da necessidade dos egípcios em medir terrenos. O sistema métrico se baseava em uma corda repleta de nós equidistantes. A distância entre os nós era de um cúbito – ou unidade do faraó, dada pela distância da ponta de seu dedo médio ao cotovelo. Porém, nem sempre as medições dos terrenos resultavam em unidades inteiras. Assim, os egípcios criaram subunidades do cúbito.

Com relação à notação, haviam inscrições hieróglifas e hieráticas (MERZBACH, BOYER, 2011). Há cerca de quatro mil anos (KATZ, 2009), para representar uma divisão de um inteiro em partes iguais, os egípcios escreviam um símbolo posicionando-o acima do número de partes iguais. Para a escrita hieróglifa (Figura 1), o número fracionário era representado por um sinal oval e, para a hierática, por um ponto acima dos inteiros correspondentes.

Figura 1: Representações hieróglifas de números fracionários



Fonte: Adaptado de Roque (2012).

Além dos valores que hoje denotaríamos por frações unitárias (Figura 1 a), os egípcios atribuíam um sinal especial para as frações $1/2$, $2/3$ e $3/4$ (Figura 1 b). Para encontrar $1/3$ de uma unidade, os egípcios encontravam o valor correspondente à $2/3$ da unidade e somente depois, a metade desse valor.

Na Figura 1 b, os sinais especiais das frações $2/3$ e $3/4$ possuem os traços atados ao sinal oval. Em sala de aula, se tais traços forem desenhados separados do sinal oval, pode haver confusão com possíveis representações alternativas (nos moldes da Figura 1 a) para as frações $1/2$ e $1/3$, por representarem, respectivamente, um sinal oval acima nos números 2 e 3. Por isso, em uma abordagem que envolva apenas frações unitárias, não vemos necessidade de se trabalhar com os sinais especiais, a não ser que se pretenda discutir outras frações utilizadas pelos egípcios além das unitárias.

De acordo com Merzbach e Boyer (2011), os egípcios ocasionalmente possuíam notação especial para quantidades que denotamos pelas frações da forma $n/(n+1)$, com n e $n+1$ naturais, que entendemos hoje como complementares às frações unitárias. Porém, de um modo geral, reduziam as quantidades não inteiras em somas de frações unitárias. Por exemplo, a fração $3/5$, que nós consideramos "irredutível", seria decomposta pelos egípcios na soma de três frações unitárias: $1/3$, $1/5$ e $1/15$. Roque (2012) apresenta um método para converter frações gerais em unitárias.

Segundo Merzbach e Boyer (2011), os egípcios também sabiam que o dobro de $1/(2n)$ é $1/n$, e que $2/3$ de $1/n$ é a soma das frações $1/(2n)$ e $1/(6n)$, em que n é um número natural e diferente de zero. Além disso, os egípcios decompunham $2/n = 1/n + 1/(2n) + 1/(3n) + 1/(2 \cdot 3 \cdot n)$. Não se sabe o motivo de utilizarem tal decomposição, uma vez que $2/n = 1/n + 1/n$. É possível que eles quisessem encontrar frações menores que $1/n$.

Contudo, ressalvamos que, para os egípcios, as frações de unidade não eram exatamente as como temos hoje, denotadas na forma $1/n$. Segundo Roque (2012), o sinal oval não possuía o mesmo significado que damos ao numerador e os egípcios não trabalhavam com as noções de numerador e denominador. Por isso, a autora considera mais adequado dizer que essas frações representavam os inversos dos números. Isso não significa que a aritmética dos egípcios apresentava uma limitação, nem mesmo pelo fato de trabalharem com soma de frações unitárias, pois as frações egípcias eram consistentes com as técnicas empregadas por eles.

Inspirados na história dos números fracionários no Egito Antigo, iniciamos nosso exemplo de abordagem didática (Seção 7) relacionando frações unitárias com o ato de medir (Quadro 1). No segundo problema (Quadro 2), apoiamo-nos em registros históricos constantes no papiro Rhind.

5 A HISTÓRIA DOS NÚMEROS FRACIONÁRIOS NOS POVOS HINDUS

Conforme Merzbach e Boyer (2011), há um alto grau de incerteza na cronologia hindu. Um importante material encontrado, o manuscrito Bakhshali, de conteúdo anônimo, possui data indefinida, embora alguns historiadores o situem entre os anos 200 e 400 da Era Comum. Isso o coloca como anterior ao "período clássico" da Matemática na Índia, que começou com o trabalho de Aryabhata I próximo ao ano 500.

Apenas parte do manuscrito Bakhshali foi restaurada, contendo regras e exemplos ilustrativos, principalmente de Aritmética e Álgebra. Os problemas geralmente envolviam preços ou pagamentos, mas o manuscrito também contém questões de Geometria e inclusive um método para aproximação de raízes quadradas. Ligados às atividades econômicas da região, eles levaram os hindus da Antiguidade Tardia a trabalharem com conceitos como frações, raízes e equações polinomiais.

As frações contidas no manuscrito Bakhshali não são muito diferentes das que utilizamos hoje: eram escritas com um número natural sobre o outro. A seguir, apresentamos na Figura 2 a representação da operação $3/4$ menos $1/2$, com os algarismos que utilizamos hoje, mas na forma como era escrita pelos hindus daquele tempo:

Figura 2: Representação da operação $3/4$ menos $1/2$

$$\begin{array}{|cc|} 3 & 1+ \\ 4 & 2 \\ \hline \end{array}$$

Fonte: O'Connor e Robertson (2000).

Os hindus adaptaram a forma de escrever um número natural acima do outro dos gregos, porém, estes registravam o número natural correspondente ao denominador em cima e o correspondente ao numerador embaixo (MERZBACH, BOYER, 2011). Matemáticos árabes, que tiveram influência da Matemática hindu, introduziram a barra por volta do século XIII, que foi popularizada na Europa, juntamente com os algarismos hindu-arábicos, a partir das obras de Leonardo de Piza (Fibonacci) e outros matemáticos medievais.

Na época do manuscrito Bakhshali, os hindus já utilizavam um sistema de numeração posicional de base 10, com formas antecessoras aos nove algarismos que utilizamos hoje em nosso sistema hindu-arábico. Ainda não consideravam o zero como um número, embora tivessem um símbolo para o preenchimento das posições vazias. A primeira evidência de uso do zero como algarismo na Índia data de 876, mas não se sabe se sua origem foi conjunta com os outros nove algarismos ou por influência grega (MERZBACH, BOYER, 2011).

6 A EPISTEMOLOGIA DAS FRAÇÕES

De acordo com Silva (2005), o termo "fração" é derivado do latim *fractio* que, assim como *minutum ruptus*, pode ser traduzido como "números quebrados". No árabe é usada a palavra *al-kasr*, que significa "quebrar". Desse modo, em sua etimologia, "fração" significa "partir", "quebrar", "dividir" ou "a parte de um todo". Essas diferentes atribuições ao termo indicam algumas interpretações do conceito.

Podemos representar na forma de fração outros números além dos racionais, como $\sqrt{2}/3$ e $3i/5$. Porém, como estamos focados em números racionais, nos aproveitamos das interpretações destes, consideradas pelos autores na literatura, e as adaptamos para nosso enfoque: a representação fracionária.

Com foco nos números racionais, Kieren (1980) lista cinco interpretações para os números fracionários: relações parte-todo, razões, quocientes, medidas e operadores. Segundo o autor, tais interpretações emergem como base para uma construção de números racionais, e não são matematicamente ou psicologicamente independentes.

Na interpretação parte-todo, "algo inteiro é quebrado em partes 'iguais'" (KIEREN, 1980, p. 134, tradução nossa). Para o autor, essa interpretação ilumina psicologicamente a noção de equivalência de frações. As razões dizem respeito a comparações quantitativas de duas qualidades. A medida está assossiada com a relação parte-todo, mas

> [...] as tarefas de medir significam associar um número a uma região (tomada no sentido geral da palavra, pode ter 1, 2 ou 3 dimensões ou outras características). Isso é usualmente feito pela interação do processo de contar o número de unidades inteiras utilizadas para "cobrir" a região, e então dividindo igualmente a unidade para fornecer o ajuste apropriado (KIEREN, 1980, p. 136, tradução nossa).

Conforme exemplifica Kieren (1980), a equivalência de frações pode se adequar ou não à interpretação de razão: representamos 3 cestas em 4 finalizações ou 30 cestas em 40 finalizações com o decimal $0{,}75$. Nesse exemplo, apesar do percentual de acertos ser o mesmo, trata-se de fenômenos distintos. Por outro lado, quando se trata de medida, 75 centímetros ($75/100$ metros) e 750 milímetros ($750/1000$ metros) representam a mesma medida.

A interpretação de frações como quociente refere-se à quantificação do resultado de dividir uma quantidade em um número de partes; está relacionada com a resolução de equações lineares e com a estrutura de corpo. Como não estamos focados na estrutura de corpo estudada na Matemática Acadêmica, não nos preocupamos, neste artigo, com a diferenciação que alguns pesquisadores fazem entre as interpretações de quociente indicado e corpo quociente (BEHR *et al*., 1983).

A interpretação como operador permite considerar que os números racionais sejam mecanismos que mapeiam um conjunto (ou região) multiplicativamente em outro; está relacionada com funções e o conceito de grupo.

Nos dois contextos históricos aqui apresentados, podemos deduzir algumas interpretações distintas acerca das frações em suas origens históricas. Os egípcios da Antiguidade precisavam dos inversos de números naturais em seu ofício de medir. Partiam o cúbito em subunidades, o que evidencia uma ideia de que os números fracionários, para eles, representavam uma parte do inteiro, indicando uma possível interpretação como parte-todo associada à medida. Ainda, as interpretações do conceito de fração como operador e como razão podem emergir da mudança de escala, fato que pode ser explorado em sala de aula, como abordado na resolução do primeiro problema (Quadro 1).

Já os hindus, na Antiguidade Tardia, utilizavam frações na divisão de números inteiros, em diversos contextos práticos, indicando uma possível interpretação de frações como quociente. Uma possível interpretação operacional é respaldada pelo manuscrito Bakhshali, uma vez que os hindus possuíam regras de cálculo em que frações operavam com outros números para responder a um problema. Trazemos um exemplo disso (Quadro 3) na seção seguinte, em que a fração "icchā/pramāna", operada com o valor recebido pelo trabalhador em uma quantidade (pramāna) de dias, resulta no valor a ser recebido nos dias a serem (icchā) trabalhados.

Não obstante, podemos perceber uma possível relação das regras criadas pelos hindus com o conceito de razão, em que "icchā/pramāna", por exemplo, expressa a razão entre a quantidade de dias a serem trabalhados e a quantidade de dias cujo valor a receber é conhecido. No mesmo exemplo, utilizamos (no Quadro 3) um quociente como possível justificativa para a regra criada pelos hindus.

Assim, utilizamos os exemplos de problemas geradores para aprofundar essa discussão quanto às interpretações de frações nos dois contextos históricos apresentados, focando em relações que podem ser estabelecidas em sala de aula.

7 EXEMPLOS DE PROBLEMAS GERADORES PARA UMA ABORDAGEM DA HISTÓRIA E EPISTEMOLOGIA DAS FRAÇÕES NO ENSINO

Os problemas aqui apresentados podem ser utilizados por professores do 6º ano do Ensino Fundamental II, pois os estudantes já possuem alguma noção de frações e conhecimento das quatro operações matemáticas básicas. No entanto, também podem ser abordados em séries posteriores, possibilitando um aprofundamento do conteúdo. Assim, esses exemplos estão alinhados à postura epistemológica do conhecimento como rede, cujas relações podem ser estabelecidas e fortalecidas sem que seja necessária uma única ordem preexistente para a aprendizagem.

Para uma abordagem que tenha os problemas como ponto de partida, propomos aos professores que utilizem os passos da Resolução de Problemas sugeridos por Onuchic e Allevato (2011): preparação do problema, leitura individual, leitura em conjunto, resolução do problema, observar e incentivar, registro das resoluções na lousa, plenária, busca do consenso e formalização do conteúdo.

Onuchic e Allevato (2011) afirmam que a plenária é um momento rico para a aprendizagem, algo que concordamos e atestamos pela nossa prática como professores de Matemática. No entanto, considerando que pretendemos apresentar um exemplo de abordagem didática para contribuir com nosso objetivo de argumentar que é possível abordar aspectos históricos e epistemológicos no ensino de frações, focaremos nos passos que norteiam a proposição do problema e possibilidades para a observação e escolha das resoluções a serem registradas na lousa e para a formalização do conteúdo.

Tendo isso em vista, apresentamos, no Quadro 1, um primeiro exemplo de problema gerador.

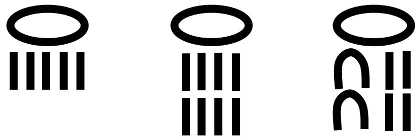
No enunciado desse problema, adaptamos a notação da fração $1/2$ conforme a representação geral de frações unitárias (Figura 1 a), para que não seja necessário definir sinais especiais em sala de aula, tornando o enunciado autoexplicativo.

Esse problema pode ser proposto para ser resolvido em pequenos grupos - com três ou quatro estudantes em cada grupo, de forma que o trabalho colaborativo crie um ambiente propício para a aprendizagem, numa perspectiva sociointeracionista (LEAL JÚNIOR; ONUCHIC, 2019).

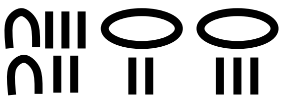
Quadro 1: Problema das medidas dos lotes egípcios.

Os egípcios precisavam recalcular as medidas das terras a cada cheia e seca do Rio Nilo. Para isso, usavam uma corda com nós a cada cúbito (aproximadamente 45 centímetros). Dificilmente as medidas tomadas eram equivalentes a uma quantidade inteira de cúbitos e, por isso, eles dividiam um cúbito ao meio, obtendo meio $(1/2)$ cúbito; dividiam em três, obtendo um terço $(1/3)$ de cúbito; dividiam em quatro, obtendo um quarto $(1/4)$ de cúbito; em cinco, obtendo um quinto $(1/5)$ de cúbito, e assim por diante.

Para representar a parte obtida da divisão de um inteiro pela quantidade indicada de partes iguais, os egípcios utilizavam um símbolo oval, posicionando-o acima do número. Por exemplo, as quantidades a seguir representavam, respectivamente, $1/5$, $1/8$ e $1/24$:



Digamos que um medidor egípcio verificasse que a largura de um terreno mede 25 cúbitos, mais $1/2$ cúbito e mais $1/3$ de cúbito; em notação atual, poderíamos descrever essa medida como $25 + 1/2 + 1/3$ cúbitos. Na notação egípcia, essa medida seria assim representada:



Agora suponhamos que as medidas representadas a seguir, em cúbitos, tenham sido obtidas por egípcios, ao medir as larguras de seis lotes de terra com o mesmo comprimento, e que eles precisassem dos dois maiores lotes para o plantio de trigo, os dois menores para o plantio de hortaliças e os outros dois para o plantio de centeio.

a) $25 + 1/2$;
b) $24 + 1/2 + 1/4$;
c) $25 + 1/3 + 1/5$;
d) $24 + 1/3 + 1/4 + 1/8$;
e) $25 + 1/3 + 1/6$;
f) $24 + 1/2 + 1/6 + 1/24$.

Quais desses lotes poderiam ser destinados ao plantio de hortaliças, de centeio e de trigo?

Fonte: Os autores; símbolos adaptados de Roque (2012).

Durante a fase de observação e incentivo, considerando o pensamento desenvolvido pelos estudantes e suas tentativas, o professor poderá incentivar algumas abordagens do problema, tais como: forma geométrica, envolvendo uma mudança de representação da soma de frações para um comprimento obtido pela soma de segmentos, e posteriorente comparar os segmentos; utilizando a expansão decimal, transformando as frações em números decimais e somando-os; soma de frações, mesmo que ainda não estudada, mas que pode ser explorada a partir desse problema; comparações, por meio de combinações de estratégias na interação com os colegas. Ressaltamos que as abordagens não previstas aqui, e que se mostrarem coerentes, também podem ser incentivadas.

Algumas reflexões referentes à soma de frações podem ser estimuladas por qualquer uma dessas abordagens, embora a intenção para a propositura do problema mencionado não precise ser a de sistematizar a soma de frações. De fato, com a estratégia de transformar as frações em representações geométricas de medida, os estudantes podem perceber que a soma de frações $a/b + c/d$ não se dá do modo "intuitivo", como na multiplicação. Por exemplo, $1/3 + 1/6 = 1/2$ e não duas vezes a medida de $1/9$. Nesse sentido, é possível que perguntem se $1/3 + 1/5 = 1/2$ e se $1/3 + 1/4 + 1/8 = 1/2 + 1/6 + 1/24$ ou se há uma pequena diferença causada por um erro no desenho geométrico, motivo pelo qual inserimos tais frações no problema. Conclusões similares podem ser obtidas com a expansão decimal. Nesse caso, entendemos que é interessante permitir que os estudantes usem calculadora, consentindo que explorem muitas somas e verifiquem conjecturas.

A partir de que $1/2$ é o dobro de $1/4$ ou com outras relações, surgem algumas possibilidades de explorações a serem estimuladas pelo professor. Por exemplo, a generalização das relações $2 \cdot (1/4) = 1/2$ e $2 \cdot (1/6) = 1/3$. Essa ideia pode levar a métodos básicos de somar frações, como $1/3 + 1/6 = 2 \cdot (1/6) + 1/6 = 3 \cdot (1/6) = 1/2$. Desse modo, a soma de frações pode começar a ser trabalhada com os estudantes e talvez até se torne uma estratégia para a resolução do problema.

Se julgar adequado para o momento, o professor pode apresentar aos estudantes as estratégias egípcias para operações com frações[4]. A multiplicação egípcia envolvia o cálculo de dobras sucessivas de um número, seguidas de uma soma adequada (KATZ, 2009). Nesse procedimento, tanto para as dobras das frações quanto para as somas, eles recorriam a tabelas, com informações como $2 \cdot (1/5\,) = 1/3 + 1/15$ e $(1/5) + (2/3 + 1/10 + 1/30) = 1$. Uma possibilidade para a sala de aula é montar uma tabela a partir dos cálculos dos estudantes, para que investiguem as somas e as anotem, no intuito de utilizá-las em cálculos posteriores.

É interessante levá-los a refletir a respeito dos motivos que levaram os egípcios a adotarem tais métodos. Não podemos obter todas as respostas historicamente, mas uma discussão envolvendo os símbolos que utilizavam e a forma como interpretavam as frações pode iluminar algumas possibilidades. Por exemplo, o sistema de representação não posicional dificultava a criação de algoritmos como os atuais, enquanto que dobrar um número não seria muito difícil nesse sistema, justificando o método de multiplicação. Outra questão é que, conforme lembra Roque (2012), é mais fácil comparar frações unitárias uma a uma, enquanto que no sistema atual precisamos igualar os denominadores para estabelecer uma ordem. Também é mais fácil comparar medidas dadas por um número inteiro somado com uma parte fracionária menor que um inteiro. Assim, as possíveis interpretações de frações como medida e parte-todo (parte de um cúbito) favorecem a adoção dos números e métodos egípcios.

Durante o andamento da atividade, é possível fazer sugestões para os grupos que finalizarem antes dos demais. Um exemplo é incentivá-los a descobrir como somar frações partindo de que $1/3 + 1/6 = 1/2$ ou de que $1/3 + 1/4 + 1/8 = 1/2 + 1/6 + 1/24$. Essas somas resultam em $17/24$, e uma forma de inverter a situação apresentada no problema, que fornece medidas obtidas por egípcios, seria pensar como eles denotariam uma medida de $17/24$ cúbitos. Ou seja, dada uma fração como $21/24$ ou $27/50$, de que modo escrevê-la em uma soma de frações unitárias?

Para formalizar o conceito de fração e suas interpretações, é interessante que o professor escolha para serem expostas no quadro e basearem a plenária resoluções que explorem melhor expressões como $2 \cdot (1/4) + 1/4$ ou $3 \cdot (1/6)$, ou ainda, considerando que

[4] Santos e Baier (2020) utilizaram métodos egípcios e de outros contextos históricos em uma vivência pedagógica com multiplicação de números inteiros no 6º ano do Ensino Fundamental.

são estudantes dos Anos Finais do Ensino Fundamental, é possível que escrevam essas medidas nas formas $3/4$ e $3/6$. A estratégia geométrica é interessante pela ligação com o contexto histórico do problema. Além disso, é conveniente que estratégias diferentes sejam escolhidas, não só para fomentar a plenária, mas também para conduzir as reflexões a respeito das diferentes formas de interpretar frações.

Cada interpretação do conceito de fração discutida na seção anterior pode ser explorada nesta abordagem. No entanto, no primeiro problema (Quadro 1), algumas podem ser exploradas mais do que outras. A ideia de dividir um cúbito em partes iguais, presente no enunciado e nas resoluções, evidencia uma possível interpretação parte-todo e ilumina noções intuitivas de equivalência, como ao obter $3 \cdot (1/6) = 1/2$, o que pode ser escrito como $3/6$, mas com uma diferença interpretativa. Enquanto $3 \cdot (1/6)$ significa tomar três vezes a sexta parte de um cúbito, $3/6$ pode ter esse significado ou, em uma interpretação de quociente, o de dividir três cúbitos em seis partes, obtendo-se a mesma medida que metade de um cúbito, constatação que foge um pouco do contexto egípcio, mas ainda explora a interpretação parte-todo (o todo, nesse segundo caso, seria o total de três cúbitos) e contribui na discussão da equivalência de frações.

A ideia de medida está presente no enunciado e na resolução pela estratégia geométrica. Além do mais, a estratégia geométrica envolve mudança de escalas, que mobiliza as interpretações de frações como operador e razão. Nela, os estudantes precisam elaborar e aplicar a escala, empregando frações, ou ao menos números racionais na representação decimal. É indicado comentar a respeito das interpretações durante a atividade, pois é possível que os estudantes não percebam, na resolução, que estão utilizando frações em uma perspectiva diferente do contexto do problema.

Por fim, a utilização de métodos mais atuais em algumas resoluções pode passar a falsa impressão de que os métodos egípcios foram ultrapassados, criando uma interpretação anacrônica. Por isso, ao final da plenária desse problema, é necessário retomar a história e as interpretações de frações no contexto dos egípcios antigos, discutindo como as frações unitárias e seus métodos pareciam-lhes mais naturais.

Para dar sequência a esse exemplo de abordagem didática, apresentamos um segundo problema no Quadro 2.

Quadro 2: “Problemas de aha”

O papiro Rhind data de cerca de 1650 da Era Comum, embora seu conteúdo tenha sido copiado de um texto ainda mais antigo.

Esse papiro possui diversos problemas matemáticos. Dentre eles, uma classe denominada “problemas de aha”.

A palavra “aha”, utilizada pelos egípcios da Antiguidade, pode ser traduzida como “número” ou “quantidade”.

Assim, os “problemas de aha” são aqueles em que se pergunta o número que satisfaz uma condição.

Resolva aos seguintes “problemas de aha” extraídos do papiro Rhind:

a) Uma quantidade e sua metade somadas fazem 16. Qual a quantidade?

b) Uma quantidade e seu $1/4$ somados fazem 15. Qual a quantidade?

c) Uma quantidade e seu $1/5$ somados fazem 21. Qual a quantidade?

Fonte: Adaptado de Roque (2012).

A ideia do “aha” pode apoiar a noção de incógnita, a depender do ano letivo em que seja abordada. Mas, focando no trabalho com frações, é possível aplicar o método da falsa posição utilizado pelos egípcios para resolver problemas desse tipo (ROQUE, 2012).

No entanto, ao invés de apresentar este ou qualquer outro método aos estudantes, o professor pode incentivá-los a explorar números, dar “chutes”, zapear[5], de forma que possam chegar às respostas combinando tentativas. Desse modo, mesmo que não se fale em “falsa posição”, a sistematização do problema pode levar a uma ideia semelhante ao método egípcio: procurar números que se aproximem da resposta e realizar ajustes até se chegar ao “aha”.

Por exemplo, na letra “a)” (Quadro 2), os estudantes podem verificar que, chutando “1”, o número mais a sua metade é $1 + 1/2$. Então o palpite precisa ser maior, como “10”, a partir do qual obtém-se $10 + 5 = 15$; com “11”, obtém-se $11 + (1/2) \cdot 11 = 11 + 5 + 1/2 = 16 + 1/2$. Logo, o número procurado pode ser representado por 10 e mais uma quantidade menor que 1. Se o palpite for $10 + 1/2$, obtém-se $10 + 1/2 + (1/2) \cdot (10 + 1/2) = 10 + 1/2 + 5 + 1/4 = 15 + 1/2 + 1/4$, então é necessário aumentar o valor, obtendo-se $10 + 1/2 + 1/4$ e $10 + 1/2 + 1/5$, que resultam em valores altos. Por fim, $10 + 1/2 + 1/6$ satisfaz a condição.

Alguns estudantes podem apresentar soluções mais criativas, como pensar se o palpite 10 resulta em $10 + (1/2) \cdot 10 = 15$, então falta adicionar a 10 a quantia que, somada à sua metade, é 1. Assim, por diversos caminhos, podem ser estimulados a descobrir que essa quantia é $2/3$. É possível que um desses caminhos seja semelhante ao método egípcio, ao descobrir que o chute $1/3$ leva a $1/3 + (1/2) \cdot (1/3) = 1/3 + 1/6 = 1/2$ e então dobrar o palpite.

Resoluções diferentes podem ser exploradas nas discussões e convém retomar as questões envolvendo as relações dos problemas e métodos egípcios com as interpretações de frações. Nesse problema (Quadro 2), pode-se enfatizar na plenária o aspecto operacional das frações. Por exemplo, na questão “a)”, o chute é sempre multiplicado por $1 + 1/2 = 3/2$ para se verificar se a resposta foi encontrada. Isso estabelece uma operação do conjunto dos “chutes” ao conjunto das “respostas”, relacionada ao conceito de função. Possivelmente, os estudantes reconheçam, após as resoluções, que as respostas são obtidas pelos inversos desses operadores. Por exemplo, $(2/3) \cdot 16 = 32/3$ ou (mais próximo ao sistema egípcio) $(2/3) \cdot (15 + 1) = 10 + 2/3$, o que favorece uma discussão inicial a respeito de inversos multiplicativos. Novamente, é adequado o incentivo a testes na calculadora, para que os estudantes verifiquem os efeitos de multiplicar por uma fração e pela inversa.

Por fim, para quando estiverem familiarizados com as frações unitárias e algumas outras (como $2/3$), apresentamos um terceiro exemplo de problema (Quadro 3), envolvendo a Matemática hindu da Antiguidade, com formas mais gerais de frações e outras interpretações do conceito.

No entendimento da questão explicada no enunciado, o professor pode realizar alguns esclarecimentos quanto à regra adotada pelos hindus e à associatividade da multiplicação e divisão. Pode também incentivar os estudantes a verificar tais propriedades, por exemplo, em testes na calculadora ou por meio de representações geométricas de multiplicação e divisão.

É possível que surjam resoluções que utilizem a regra de cálculo dos antigos hindus ou outras mais voltadas para a Matemática atual, que trabalhem com as frações $13/6$ e $3/2$. Nesse ínterim, é possível sugerir a estudantes com dificuldade em pensar na diferença entre as frações que recorram a uma tabela com os dias corridos, quanto cada pajem ganha e como a

[5] Conforme Leal Junior e Onuchic (2019), “zapear”, no contexto da Resolução de Problemas, refere-se ao ato de tentar formas diferentes e aleatórias para se chegar a alguma resposta.

diferença evolui; ou a uma com os ganhos do primeiro pajem de seis em seis dias e os do segundo pajem de dois em dois dias, evitando operações com as frações.

Na plenária, é importante discutir as soluções compartilhadas, suas semelhanças e diferenças, e como podem se ligar para justificar procedimentos, incluindo operações com frações e exemplos de formas de cálculo.

Quadro 3: Problema dos pajens

Na Antiguidade, os hindus utilizavam frações para descrever quantidades não inteiras, principalmente ao lidarem com dinheiro. Por exemplo, para calcular quanto um trabalhador recebia em 12 dias, sabendo que ele recebe 50 dinares em 8 dias, eles possuíam uma regra que, em notação atual, levava ao seguinte cálculo: phala × icchā / pramāna,   em que "phala" significa "a fruta" em canarês (gratificação de 50 dinares); "icchā" significa "vai" (12 dias de trabalho a ser realizado); e "pramāna" significa "quantia" (quantidade de dias em que o trabalhador recebe a "phala"). Portanto, eles calculavam: $50 \times 12 \,/\, 8 = 75.$ Para justificar essa regra, poderíamos considerar que $50 \div 8$ é a quantidade de dinares que o trabalhador recebia por dia e, assim, receberia 12 vezes essa quantidade em 12 dias.   No manuscrito Bakhshali, datado entre o terceiro e o quarto século da Era Comum, os historiadores encontraram o seguinte problema: "Dois pajens são atendentes de um rei. Pelos seus serviços, um recebe $13/6$ dinares por dia e o outro $3/2$. O primeiro deve ao segundo 10 dinares. Calcule e me diga quando eles terão valores iguais."   Resolva o problema e depois responda: que diferenças você encontra na forma que os egípcios e hindus lidavam com frações e no significado que possivelmente atribuíam ao conceito? Como podemos lidar com frações hoje em dia, considerando essas diferenças?

Fonte: Adaptado de O'Connor e Robertson (2000).

A discussão pode ser retomada a partir da perspectiva epistemológica das frações, aproveitando-se as respostas dadas às questões do final do Quadro 3. As diferenças entre interpretar as frações como medida e parte-todo (caso dos egípcios) e como quociente e razão (caso dos hindus) podem ser salientadas. Além disso, a interpretação como operador pode ser explorada com base em algumas resoluções dos problemas egípcios e na regra hindu (Quadro 3). A partir dessas discussões, é possível considerar como as interpretações influenciam na forma das frações e nas mudanças que o conceito obtém ao longo do tempo. Por exemplo, para os egípcios, frações unitárias eram suficientes, mas não para os hindus.

Enfatizar que tais interpretações são compatíveis em termos de cálculos[6] também é interessante, tendo como base os diferentes caminhos adotados pelos estudantes que conduziram aos mesmos resultados. Essa compatibilidade permite que hoje utilizemos distintas formas de interpretar as frações, em diversos contextos.

Finalmente, a conclusão da abordagem deve ser realizada por meio da sistematização da definição de fração, de acordo com o livro didático adotado pela escola. Ao descrever a

[6] Formalmente, essa compatibilidade se deve às propriedades do corpo dos números racionais.

definição, sugerimos ao professor considerar as dúvidas dos estudantes e discutir ligações com tudo o que foi abordado.

A Resolução de Problemas apresentada nesta seção é uma forma de abordar frações nos Anos Finais do Ensino Fundamental. Demais tarefas podem dar sequência ao trabalho e explorar melhor outros aspectos, como operações com frações. Os egípcios possuíam formas peculiares de realizar cálculos aritméticos, abordadas por Katz (2009) e Roque (2012), que podem ser utilizadas em uma abordagem subsequente.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste artigo, propomos que a história e a epistemologia das frações sejam consideradas no processo de ensino e aprendizagem do conceito. Para tanto, apresentamos um exemplo de abordagem didática, a partir de três problemas geradores, como uma possível forma de explorar, em sala de aula, questões que vão além da mera definição e operacionalização do conceito, gerando o que entendemos fazer parte da rede de relações. Esse exemplo, obviamente, não exaure os nós e as relações dessa rede, pois se limita à parte da história e suas relações com as interpretações do conceito de fração, mas outras estratégias didáticas podem complementar o ensino com outros enfoques históricos e epistemológicos. Contudo, pudemos utilizar os problemas apresentados para aprofundar a discussão de como aspectos históricos e epistemológicos do conceito de fração podem ser utilizados no ensino.

Além disso, a aproximação inicial entre alguns elementos estudados pela Educação Matemática que relacionamos no artigo, como História da Matemática, epistemologia do conceito e concepções de conhecimento, mesmo que ainda sem o merecido aprofundamento, contribuem com os estudos de pesquisadores que desejem explorá-las melhor. Neste artigo, trouxemos um exemplo de como a Resolução de Problemas pode ser utilizada como recurso didático em conjunto com a História da Matemática; mobilizamos nossas concepções de conhecimento, de Matemática e de Educação Matemática em uma abordagem didática; relacionamos a contextualização oferecida pela História na Educação Matemática com a concepção de conhecimento como rede; adaptamos as interpretações de números racionais para interpretações de frações e discutimos essas interpretações nos contextos históricos adotados.

REFERÊNCIAS

BEHR, M.; LESH, R.; POST, T.; SILVER E. Rational Number Concepts. *In*: LESH, R.; LANDAU (Eds.). **Acquisition of Mathematics Concepts and Processes**. New York: Academic Press, 1983. p. 91-125.

BICUDO, M. A. V. Ensino de Matemática e Educação Matemática: algumas considerações sobre seus significados. **Bolema**, v. 12, n. 13, p. 1-11, 1999.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

CARVALHO, J. B. P. O que é Educação Matemática? **Temas & Debates**, ano IV, n. 3, p. 17-26, 1991.

ELIAS, H. R. **Fundamentos teórico-metodológicos para o ensino do corpo dos números racionais na formação de professores de matemática**. 2017. 325 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2017.

ETCHEVERRIA, T. C; AQUINO, V. J. L; OLIVEIRA, J. S; LISBOA, C. C. Reflexões acerca do desempenho e das dificuldades de estudantes da educação básica e superior nas operações com frações. **ReviSeM**, v. 4, n. 2, p. 71-88, 2019.

FONSECA, S.; SANTOS, R. Dificuldades dos alunos do 7º ano do Ensino Fundamental em Aprender Fração. **Revista Insignare Scientia** – RIS, v. 2, n. 1, p. 50-66, 2019.

FURINGHETTI, F. History and epistemology in mathematics education. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, v. 51, n. 6, p. 967-944, 2020.

INAREJOS, O. Uma análise panorâmica das expressões ensino de Matemática e Educação Matemática. *In*: ENCONTRO PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA – EPREM, 15., 2019, Londrina - PR. **Anais** ... Londrina: SBEM Paraná, 2019. p. 1-13.

KATZ, V. J. **A History of Mathematics**: an Introduction. 3. ed. Boston: Addison-Wesley, 2009.

KIEREN, T. E. The rational number construct – its elements and mechanisms. *In*: KIEREN, T. E. **Recent Research on Number Learning**. Columbus: Eric/Smeac, 1980. p.125-149.

LEAL JUNIOR, L. C; ONUCHIC, L. R. Ensaios sobre Compreensões em Matemática em Perspectivas de Resolução de Problemas: uma análise percussiva de atividades ao zapeamento. **Hipátia**, v. 4, n. 2, p. 230-249, 2019.

MACHADO, N. J. **Epistemologia e Didática**: As concepções de conhecimento e inteligência e a prática docente. 4. ed. São Paulo: Cortez, 2000.

MELO, I. A. S. C; ANDRADE, P. H. F. Análise de erros em questões de adição e subtração com frações. **Revista WEB-MAT**, v. 1, n. 1, p. 51-60, 2014.

MERZBACH, U. C.; BOYER, C. B. **A History of Mathematics**. 3. ed. Hoboken: John Wiley & Sons, 2011.

MIGUEL, A.; MIORIM, M. A. **História na Educação Matemática**: propostas e desafios. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

MONTEIRO, A. B.; GROENWALD, C. L. O. Dificuldades na Aprendizagem de Frações: Reflexões a partir de uma Experiência Utilizando Testes Adaptativos. **Alexandria**, v. 7, n. 2, p. 103-135, 2014.

O'CONNOR, J.J.; ROBERTSON, E. F. The Bakhshali manuscript. *In*: **MacTutor History of Mathematics Archive**. St. Andrews, novembro 2000. Disponível em: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Bakhshali_manuscript/. Acesso em: 29 out. 2021.

OLIVEIRA, J. N. de. **Dificuldades na aprendizagem dos números racionais**. 2015. 110 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação – Licenciatura em Matemática) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Cornélio Procópio, 2015.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Pesquisa em Resolução de Problemas: Caminhos, Avanços e Novas Perspectivas. **Bolema**, v. 25, n. 41, p. 73-98, 2011.

PERLIN, P; LOPES, A. R. L. V. A necessidade histórica da criação das frações e a organização do ensino do professor dos anos iniciais. *In*: CONGRESSO INTERNACIONAL DE ENSINO DA MATEMÁTICA, 6., 2013, Canoas. **Anais**... Canoas: ULBRA, 2013. p. 1-11.

ROQUE, T. **História da Matemática**: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

RUBENS, A; FERNANDES, I. Uma discussão sobre as dificuldades dos alunos do 7º ano na compreensão do conceito de fração e suas operações. *In*: CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA, 7., 2013, Montevideo. **Anais**... Montevideo: SEMUR, 2013. p. 1465-1472.

SANTOS, I. A.; BAIER, T. História da Matemática no Ensino Fundamental: uma pesquisa qualitativa relacionada à operação de multiplicação. **Hipátia**, v. 5, n. 1, p. 36-55, 2020.

SILVA, M. J. F. **Investigando saberes de professores do Ensino Fundamental com enfoque em números fracionários para a quinta série**. 2005. 301 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – PUC/SP, São Paulo, 2005.

Submetido em dezembro de 2021.

Aprovado em agosto de 2022.

Osvaldo Inarejos

Mestre em Matemática Aplicada e Computacional pela Universidade Estadual de Londrina. (UEL), docente da Universidade Estadual de Londrina (UEL), Londrina, Paraná, Brasil. ID Lattes: 0383741804298780. Orcid ID: 0000-0002-4753-6115.

Contato: inarejos@uel.br.

Giovana Rodrigues Castilho

Graduada em Licenciatura em Matemática pela Universidade Estadual de Maringá (UEM), mestranda em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL), Londrina, Paraná, Brasil. ID Lattes: 4960075438586700. Orcid ID: 0000-0003-0441-1360.

Contato: giovanacastilho34@gmail.com.

Angela Marta Pereira das Dores Savioli

Doutora em Matemática pela Universidade de São Paulo (USP), docente da Universidade Estadual de Londrina (UEL), Londrina, Paraná, Brasil. ID Lattes: 4879872802919794. Orcid ID: 0000-0002-5624-6398.

Contato: angelamartasavioli@gmail.com.