

## Conversões entre representações algébricas e gráficas de números complexos a partir da ludicidade como aspecto de formação

### Conversions between algebraic and graphical representations of complex numbers from playfulness as an aspect of knowledge formation

Cílio José **Volce\***  
Claudete **Cargnin\*\***

#### Resumo

O ensino tradicional de operações com números complexos possui um forte componente abstrato, desperdiçando o potencial de visualização gráfica dessas operações. Uma forma de minimizar essa abstração é apropriar-se da ludicidade e da dinamicidade possibilitadas pelos jogos, que oferecem uma dinâmica colaborativa e lúdica capaz de estimular habilidades de coordenação, concentração e raciocínio lógico, promovendo o aprendizado autônomo e divertido. Este estudo objetiva discutir como um jogo, intitulado Trincas Complexas, pode potencialmente contribuir para o aprendizado das operações com números complexos na forma algébrica e suas respectivas conversões em representações gráficas com vetores. Fundamentaram a proposta do jogo princípios da Teoria dos Registros de Representação Semiótica (Duval, 1995), os quais consideram que o ensino e a aprendizagem da matemática requerem um trabalho com diversidade de representações. Acredita-se que esse jogo poderá contribuir para a apreensão de conceitos e significados matemáticos de operações com números complexos na forma algébrica, bem como diminuir lacunas de aprendizagens na visualização de representações gráficas dessas operações por meio da ludicidade enquanto um aspecto de formação.

**Palavras-chave:** Números Complexos. Representação Semiótica. Jogos matemáticos. Ludicidade. TRRS.

#### Abstract

Traditional teaching of operations with complex numbers has a significant abstract component, wasting the potential of graphic visualization of these operations. A way to minimize this abstraction is using playfulness and dynamism in class, which are made possible through games that offer a collaborative and playful dynamic capable of stimulating coordination, concentration and logical reasoning skills, promoting an autonomous and fun way of learning. This study aims at discussing how a game, entitled Complex Trincas, may potentially contribute on learning operations with complex numbers in algebraic form and their respective conversions into graphical representations with vectors. The principles of the Theory of Semiotic Representation Registers – (Duval, 1995) based the game proposal, which consider that the teaching and learning require a work with a diversity of representations. It is believed that this Mathematics game may contribute to the apprehension of mathematical concepts and meanings of operations with complex numbers in algebraic form, as well as reducing learning gaps in the visualization of graphical representations of these operations through playfulness as an aspect of knowledge formation.

**Keywords:** Complex numbers. Semiotic Representation. Math Games. Playfulness. TSRR.

---

\* Mestre em Ensino de Matemática pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Docente da Prefeitura Municipal de Londrina. Londrina, Paraná, Brasil. Lattes: <http://lattes.cnpq.br/6796881668145157>. Orcid: <https://orcid.org/0000-0002-6889-4114>. Endereço eletrônico: [cjvolceuel@yahoo.com.br](mailto:cjvolceuel@yahoo.com.br).

\*\*Doutora em Educação para a Ciência e a Matemática pela Universidade Estadual de Maringá (UEM). Docente da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Campo Mourão, Paraná, Brasil. Lattes: <http://lattes.cnpq.br/5336055654190666>. Orcid: <https://orcid.org/0000-0002-3067-1978>. Endereço eletrônico: [cargnin@utfpr.edu.br](mailto:cargnin@utfpr.edu.br).

## 1 INTRODUÇÃO

Dentre os conteúdos que fazem parte do programa de Matemática escolar, estão aqueles que possuem um forte componente abstrato, os quais muitas vezes são apresentados em sala de aula como algo novo, um conhecimento estático e desvinculado do contexto social e histórico, gerando dificuldades no processo de aprendizagem. Dentre esses, destacamos os Números Complexos.

Os Números Complexos têm como característica admitirem diferentes formas de representação: algébrica, pares ordenados, vetorial, trigonométrica, matricial, entre outras. No entanto, essas representações têm sido pouco exploradas nos materiais didáticos utilizados nas escolas públicas brasileiras, sendo o foco dado para as manipulações algébricas das operações entre Números Complexos (OLIVEIRA, 2010).

Dessa forma, o fato de um estudante saber resolver uma situação matemática, em determinada representação, não garante que ele tenha apreendido um amplo conceito matemático de um objeto. Para ocorrer a consecução conceitual de um objeto matemático, algumas representações devem ser mobilizadas, pois cada registro diferente revela um determinado conteúdo, uma característica, ou um sentido.

A partir disso, tem-se a seguinte indagação: como um jogo didático, que utiliza diferentes representações, pode contribuir com a aprendizagem sobre as operações entre números complexos?

Assim, vimos a necessidade de explorar as diferentes formas de representação e suas conversões entre si. Para isso, propomos um jogo, com base nos pressupostos da Teoria dos Registros de Representação Semiótica - TRRS, de Duval (1995), que tem potencial para contribuir com a superação de dificuldades em relação à representação gráfica de operações algébricas com números complexos.

Em busca de elaborar tarefas para o 3º ano do Ensino Médio, que permitissem ensinar o conteúdo Números Complexos por meio de abordagens geométricas para as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão, formulou-se uma proposta lúdica, com foco na aplicação desse conteúdo, em que os professores pudessem utilizar diferentes tipos de Registros de Representação Semiótica, em especial o algébrico e o gráfico. Então criou-se o jogo Trincas Complexas que faz parte de um conjunto de tarefas exclusivas de um produto educacional<sup>1</sup> produzido no Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – PPGMAT/UTFPR, *campus* Londrina, no ano de 2022.

Portanto, o presente artigo apresenta um jogo como recurso didático de apoio para professores de Matemática e estratégia lúdica de ensino para estudantes do Ensino Médio, com o objetivo de discutir como esse jogo, intitulado Trincas Complexas, pode potencialmente contribuir para o aprendizado das operações com números complexos na forma algébrica e suas respectivas conversões em representações gráficas com vetores.

## 2 O ENSINO DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Esse conteúdo faz parte de alguns documentos brasileiros oficiais para a Educação Básica. Dentre eles, destacamos as Diretrizes Curriculares da Educação Básica do Paraná (DCE) e os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+). Esses documentos buscam propor mudanças curriculares e metodológicas nas práticas educacionais presentes nas escolas brasileiras, mas, embora o conteúdo Números Complexos esteja presente nas DCE e nos PCN+, as escolas de Ensino Médio, com base nesses documentos oficiais, adaptam os conteúdos para a realidade dos seus alunos,

---

<sup>1</sup> Disponível em: <http://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/29089>

levando em consideração a Proposta Político-Pedagógica da instituição. Com isso, alguns tópicos do Ensino Médio podem ou não constar no currículo escolar.

De acordo com as DCE (PARANÁ, 2008), o tema Números Complexos está presente no Conteúdo Estruturante Números e Álgebra, sendo introduzido no Ensino Médio para que o aluno compreenda-os, além de suas operações, como forma de aprofundar esse estudo, de modo a ampliar o conhecimento e domínio desse objeto.

Mas, analisando os PCN+, percebemos que há uma flexibilidade para um potencial ensino dos Números Complexos, pois, nesse documento, há duas menções sobre o referido conteúdo no eixo estruturador Álgebra: números e funções, onde se considera que:

Os objetos de estudo são os campos numéricos dos números reais e, **eventualmente**, os números complexos e as funções e equações de variáveis ou incógnitas reais. Para o desenvolvimento desse eixo, são propostas duas unidades temáticas: variação de grandezas e trigonometria. [...] Tradicionalmente, a Matemática do ensino médio trata da ampliação do conjunto numérico, introduzindo os números complexos. Como esse tema isolado da resolução de equações perde seu sentido para os que não continuarão seus estudos na área, **ele pode ser tratado na parte flexível do currículo** das escolas (BRASIL, 2002, p.120-122 – grifo nosso).

Essa flexibilidade deixa o professor de Matemática com liberdade para trabalhar ou não esse conteúdo com os alunos, pois essa linha facultativa também é defendida nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio (2008):

Outro tópico que **pode ser tratado como tema complementar** é o estudo mais aprofundado dos números complexos. Por um lado, podem-se explorar os aspectos históricos da introdução dos números complexos e de seu papel fundamental no desenvolvimento da álgebra. Por outro lado, podem-se explorar as conexões entre as operações com números complexos e as transformações geométricas no plano (BRASIL, 2008, p. 93-94 – grifo nosso).

De certa forma, alguns educandos estão perdendo com essa indefinição, pois acabam tendo enfraquecida sua carga de conhecimentos, tanto científicos quanto culturais. Além disso, muitos cursos Técnicos e de Ensino Superior, em especial os da área de exatas, utilizam as competências matemáticas que deveriam ser adquiridas na Educação Básica. Alguns estudos, como os de Puhl *et al.* (2020), Randolph e Parraguez (2019) e Pinto e Laudares (2017), apontam para a importância da aplicação dos Números Complexos em uma formação profissional especializada, como, por exemplo, em cursos de Engenharia, nos quais se aplicam os Números Complexos para cálculos da força de sustentação da asa de uma aeronave, mecânica dos fluidos, eletricidade, entre outros. Além disso, ressaltam que é preciso explorá-lo nas mais diversas formas de registros de representação semiótica.

Enquanto alguns estudos mostram que o ensino de Números Complexos é importante e precisa ser mais assertivo, a proposta presente na Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2017) não prevê esse ensino e não o considerou como essencial ao estudante da Educação Básica. Tal documento não cita de forma explícita o assunto, o que pode fazer com que o aluno termine o Ensino Básico considerando que o conjunto dos Números Reais é o «mais amplo» de todos, podendo gerar falsas compreensões nos fundamentos matemáticos dos estudantes.

Sendo assim, o ensino dos Números Complexos encontra-se em uma situação documental polêmica, pois há uma organização no Estado do Paraná que prevê esse ensino, enquanto há documentos nacionais que, embora o mencionem, permitem que seja tratado como algo complementar, sem a obrigatoriedade de ser ensinado e, ainda, nem mesmo chega a ser previsto e referenciado na proposta curricular nacional.

A introdução desse conteúdo no final do terceiro ano do Ensino Médio costuma ser acompanhada de uma reviravolta conceitual ligada à existência de um número cujo quadrado é negativo (GHEDAMSI; TANAZEFTI, 2015). Além disso, as dificuldades de aprendizagem de muitos estudantes com os diversos tipos de registros de representação semiótica, que têm origem desde os anos iniciais, quando os conceitos matemáticos começam a ser consolidados e que pode acompanhar por toda a vida escolar, inclusive no Ensino Superior, podem gerar barreiras de aprendizagens em relação a um conteúdo considerado novo e provavelmente pouco discutido na Educação Básica.

Vale destacar que Ghedamsi e Tanazefi (2015) identificaram demandas cognitivas que revelam as dificuldades dos alunos franceses em lidar com os Números Complexos. Entre esses obstáculos, destacam-se: *i)* abusos de generalizações das propriedades dos números reais para os complexos, como, por exemplo, o conceito de ordem dos reais, transportado erroneamente; *ii)* confusão entre módulos e valor absoluto, sem sucesso em diferenciar cada um desses dois conceitos; *iii)* dificuldades em realizar tratamentos dentro da mesma representação, bem como conversões entre as representações com registros diferentes; *iv)* incapacidade de realizar mudanças imediatas entre os registros gráficos e registros algébricos e vice-versa, entre outras.

Uma pesquisa realizada com acadêmicos de Engenharia de universidades brasileiras, que buscava identificar e analisar os erros cometidos em operações de matemática básica, como adição, subtração, multiplicação e divisão com números complexos, mostrou que a maioria desses estudantes apresenta dificuldades com as duas últimas operações, demonstrando certo domínio apenas nas duas primeiras. Além disso, um dos principais obstáculos evidenciados foi a conversão entre as formas algébricas e trigonométricas (polar) e a operação de divisão. Para que os estudantes superem essas dificuldades, esse estudo apontou como alternativa que os professores propiciem estratégias e recursos de apoio para a recuperação de lacunas de conhecimentos básicos para a construção de novos saberes, como, por exemplo, a criação de objetos de aprendizagens com ambientes que atendam a objetivos didáticos variados e que favoreçam a construção de significados de conceitos e operações com números complexos (PUHL; MULLER; LIMA, 2020).

Logo, na tentativa de buscar uma forma lúdica, divertida e dinâmica de aprender conceitos e operações de um conteúdo de caráter predominantemente abstrato, optamos pela elaboração de um jogo que utiliza diferentes registros de representação semiótica como forma de ampliar e despertar o interesse dos alunos na aprendizagem e evocar o objeto matemático números complexos. É sobre esse jogo que trata a próxima seção.

### 3 JOGO TRINCAS COMPLEXAS

Esse jogo é uma proposta lúdica, aplicável em contexto real de ensino, elaborada para auxiliar na formação dos conceitos e procedimentos matemáticos dos estudantes sobre o objeto matemático Números Complexos. Além disso, utiliza cartões com dois diferentes tipos de registros de representação semiótica (algébrico e gráfico), o que é amparado pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC):

Para tanto, esta Base assume que para as aprendizagens dos conceitos e procedimentos matemáticos deve-se incluir, quando possível, pelo menos dois registros de representação. Assim, os estudantes precisam estar preparados para escolher as representações mais convenientes para cada situação, para mobilizar, de modo simultâneo, ao menos dois registros de representação e para, a todo o momento, trocar de registro de representação (BRASIL, 2018, p. 530).

Com esse jogo, os alunos podem captar sinais que, quando mobilizados nas estruturas cognitivas do pensamento, permitem representar o objeto matemático, talvez não em todos os

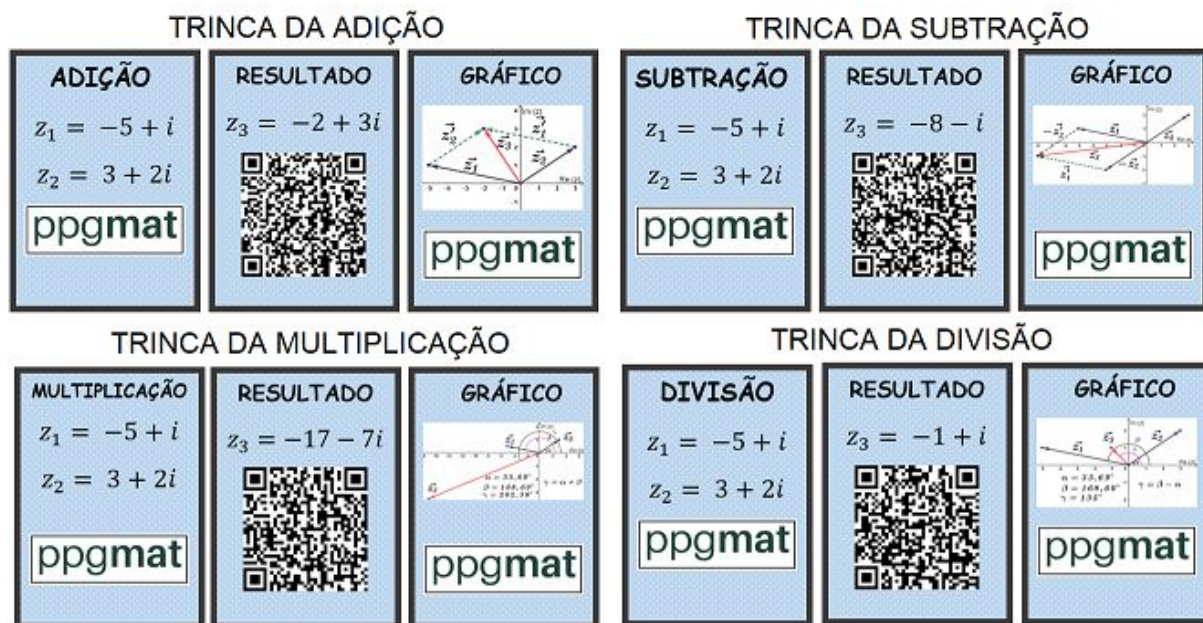
aspectos, mas com referências, ideias e características que o fazem ser identificado. Esses sinais são chamados de *signos*, definidos por Henriques e Almouloud como:

[...] um sinal mobilizado por alguém (sujeito) capaz de permitir-lhe identificar um sistema ou registro de representação semiótico (cf. Definição3), como as regras linguísticas ou gramaticais na língua materna, as propriedades ou escritas algébricas para o registro algébrico, as figuras geométricas (pontos, segmentos/retas/curvas, planos e superfícies) para o registro gráfico, os números, as operações aritméticas, para o registro numérico e, de um modo geral as regras de conformidade (HENRIQUES; ALMOULOU, 2016, p. 468).

Os signos presentes nos cartões do jogo são algumas propriedades e escritas algébricas para o registro algébrico e planos e vetores para o registro gráfico. Assim, no intuito de tornar esse objeto matemático acessível e garantir a consolidação da aprendizagem, propomos cartões que evocam conceitos e noções dos números complexos durante o tratamento e conversões dessas representações.

O jogo possui 13 cartões, que podem ser confeccionados pelo professor, sendo quatro trincas ( $4 \times 3 = 12$ ) e um curinga. Cada face desses cartões que formam trincas possui alguma informação sobre números complexos: dois números complexos na forma algébrica com a indicação de uma operação (adição ou subtração ou multiplicação ou divisão); o resultado algébrico dessa operação; ou a representação do registro gráfico dessa operação, conforme protótipo apresentado na Figura 1.

**Figura 1:** Cartões do jogo Trincas Complexas



Fonte: os autores (2022)

Além dos cartões, que formam as trincas complexas, esse jogo contém um curinga, cuja função será apresentada mais adiante. Esse cartão é representada pela letra  $\mathbb{C}$  (Conjunto dos Números Complexos), conforme apresentado na Figura 2.

**Figura 2:** Cartão Curinga do jogo Trincas Complexas

Fonte: os autores (2022)

Nos cartões que apresentam os resultados das operações, há dicas criptografadas em forma de QR CODE para auxiliar os jogadores a compreenderem o que a operação (adição ou subtração ou multiplicação ou divisão), entre dois números complexos na forma algébrica, gera na representação do registro gráfico no plano de Argand-Gauss. É sobre essas dicas que se refere o Quadro 1 a seguir.

**Quadro 1:** Dicas criptografadas do jogo Trincas Complexas

OPERAÇÃO	QR CODE	Dica: O que a operação faz graficamente?
ADIÇÃO		Este resultado é representado graficamente por meio da regra do paralelogramo com os vetores usados na operação.
SUBTRAÇÃO		Este resultado é representado graficamente por meio da regra do paralelogramo com o oposto de um dos vetores.
MULTIPLICAÇÃO		O argumento deste número é a soma dos argumentos dos números usados na operação.
DIVISÃO		O argumento deste número é a diferença dos argumentos dos números usados na operação.

Fonte: os autores (2022)

A leitura dessas dicas não é condição necessária para que o jogo aconteça, no entanto, entendemos que essa forma de associar o jogo ao uso de uma tecnologia possa ser uma estratégia interessante para atrair a atenção dos alunos. Além disso, acreditamos que as reflexões, geradas a partir das relações entre as operações algébricas e, conseqüentemente, das representações gráficas, podem trazer uma rica discussão entre professores e estudantes que, por muitas vezes, ambos pouco exploram os conceitos de módulos e argumentos de vetores complexos a partir das operações algébricas. E é nesse ponto que pretendeu-se associar os Registros de Representação Semiótica à ludicidade: por meio do jogo, intencionalmente, porém discretamente, os estudantes são levados a refletirem sobre as operações entre os números complexos em tela.

Conforme Assemany e Harab (2013), o ensino tradicional de números complexos conduz a uma visão algébrica, desperdiçando o potencial de visualização proporcionado pela Geometria. Ainda, segundo essas autoras, quando “um número complexo é representado no plano, sua leitura vetorial permite que os conceitos de Módulo e Argumento de números complexos sejam associados à Módulo e inclinação de vetores” (ASSEMANY; HARAB, 2013, p. 639). Para fazerem uso desse recurso, é necessário que os jogadores baixem previamente um aplicativo para leitura QR CODE em seus aparelhos de *smartphone*.

O objetivo do jogo é formar corretamente uma trinca complexa, ou seja, um cartão com a indicação de uma operação, um cartão com o resultado em registro algébrico dessa operação (após tratamento) e um cartão com o registro gráfico (após conversão).

Os treze cartões devem ser embaralhados e distribuídos entre quatro jogadores de forma que um não conheça os do outro. Após a distribuição, deve-se ter três integrantes com três cartões cada um e um jogador com quatro, totalizando 13 cartões.

Nenhum dos jogadores poderá sair “batido”, ou seja, receber, por muita “sorte”, uma trinca complexa na distribuição dos cartões. Dessa forma, jogador algum poderá vencer o jogo de imediato. Caso isso aconteça, os cartões devem ser embaralhados e distribuídos novamente.

O jogador que receber quatro cartões deverá escolher um deles e passá-lo para o parceiro à sua direita. Assim, ele irá receber esse cartão e poderá tentar combiná-lo de forma a completar uma trinca complexa.

Sempre com um jogador passando o quarto cartão para o jogador à direita, o jogo prossegue. Quem receber o curinga, deverá ficar com ele por uma rodada, devendo passar um outro cartão. Esse curinga tem a função de impedir que algum dos participantes ganhe rapidamente uma rodada, com isso não se pode vencer estando com ele em mãos. Além disso, o curinga não serve como substituição, de forma a completar corretamente uma trinca, pois vence quem formar primeiro uma trinca complexa correta.

Por conseguinte, ao jogar, os alunos poderão desenvolver a habilidade de saber associar os cartões e identificar as representações corretas de cada operação, bem como realizar as conversões das representações de um registro para o outro. Essa ação é muitas vezes necessária para uma adequada compreensão do objeto matemático em questão, uma vez que uma representação pode facilitar o entendimento de um aspecto que a outra não favorece.

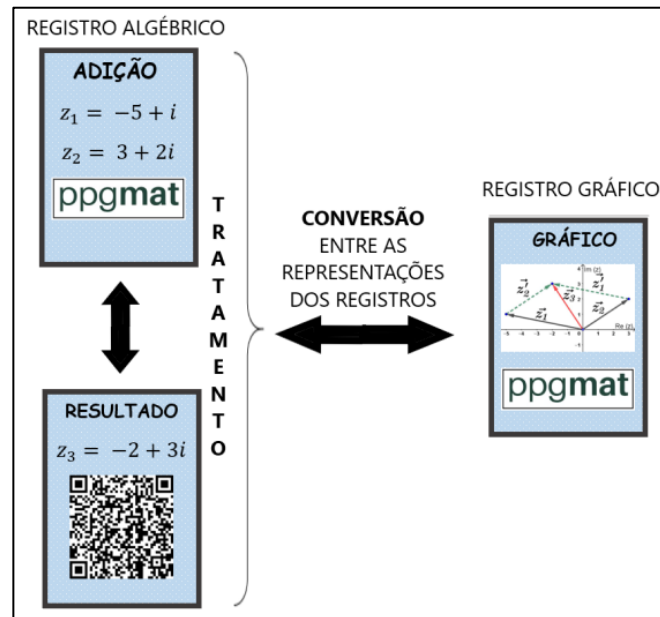
### 3.1 Tratamento e conversão das representações

Os conceitos de tratamento e conversão se referem às atividades cognitivas ligadas aos registros de representações semióticas. De acordo com Henriques e Almouloud (2016, p. 469), tratamento de uma representação “é a transformação desta em outra representação no mesmo registro no qual foi formada. O tratamento é, portanto, uma transformação interna num registro”, enquanto a conversão de uma representação “é a transformação dessa representação em uma representação de outro registro”.

Para o caso específico desse jogo, ocorre uma transformação da representação algébrica em um outro registro também algébrico dentro dessa mesma representação, ou seja, um tratamento com base nas propriedades e escritas algébricas como, por exemplo, a adição de dois números complexos em sua forma algébrica, resultando em um número complexo também na forma algébrica. Ressaltamos que a escolha de um registro de representação pode ser mais adequada do que outra para favorecer o tratamento e externar os conceitos de um objeto de saber. Além disso, também ocorre uma conversão entre as representações dos registros algébricos para os

gráficos (e vice-versa). Os conceitos de tratamento e conversão que ocorrem no jogo estão representados na Figura 3.

**Figura 3:** Exemplo de tratamento e conversão



Fonte: os autores (2022)

De acordo com Henriques e Almouloud,

A representação de um objeto e a conversão de representações entre registros, por exemplo, são comuns nas práticas do professor de Matemática em sala de aula, quando este pretende fazer com que os seus alunos compreendam uma determinada noção de difícil entendimento no registro no qual o objeto foi inicialmente apresentado. No momento em que o professor realiza essa conversão, não implica, necessariamente, que ele queira reforçar a estreita relação existente entre os registros que mobilizou (HENRIQUES; ALMOULOU, 2016, p.467).

Sendo assim, professores que ensinam Matemática podem utilizar esses cartões para fazer com que os alunos compreendam questionamentos da seguinte ordem: *em que resulta a soma de dois números complexos? E a subtração, multiplicação ou divisão?* Com o jogo Trincas Complexas, os estudantes poderão perceber, por exemplo, que dados dois números complexos, a adição entre eles gera, graficamente, um vetor  $\vec{z}_3$  que é justamente a diagonal de um paralelogramo formado pelos vetores  $\vec{z}_1$ ,  $\vec{z}_1'$ ,  $\vec{z}_2$  e  $\vec{z}_2'$ , conforme indicado na Figura 3, enquanto que a subtração entre eles forma outro paralelogramo com o oposto de um dos vetores.

Ainda, os professores podem esclarecer aos estudantes o que acontece geometricamente com a multiplicação ou divisão entre números complexos na forma algébrica, determinando os argumentos, escrevendo-os no aspecto trigonométrico e desse para o gráfico. Para essas operações, as trincas permitem o uso simultâneo de três registros e, nesse caso, o registro trigonométrico será utilizado como registro intermediário na conversão. A forma algébrica pertence ao registro simbólico algébrico e a forma trigonométrica pertence ao registro simbólico trigonométrico, devido ao fato de ambos registros obedecerem a regras operatórias diferentes.

Os cartões do jogo Trincas Complexas possibilitam que a conversão seja trabalhada em dois sentidos (algébrica para gráfica e vice-versa). Esse fato pode contribuir para a apreensão global das propriedades inerentes às representações gráficas e algébricas de um número complexo, pois, de acordo com Duval (1995), fazer as conversões em dois sentidos permite ao aluno a possibilidade de analisar propriedades onde a conversão em apenas um sentido não é valorizada ou perceptível.



Corroborando com a ideia de conversões em dois sentidos de representações com diferentes registros, Brasil (2018) afirma que:

[...] cabe observar que a conversão de um registro para outro nem sempre é simples, apesar de, muitas vezes, ser necessária para uma adequada compreensão do objeto matemático em questão, pois uma representação pode facilitar a compreensão de um aspecto que outra não favorece. Portanto, percebe-se que, do ponto de vista cognitivo, as aprendizagens fundamentais relativas ao raciocínio requerem a diversificação dos registros (BRASIL, 2018, p. 530).

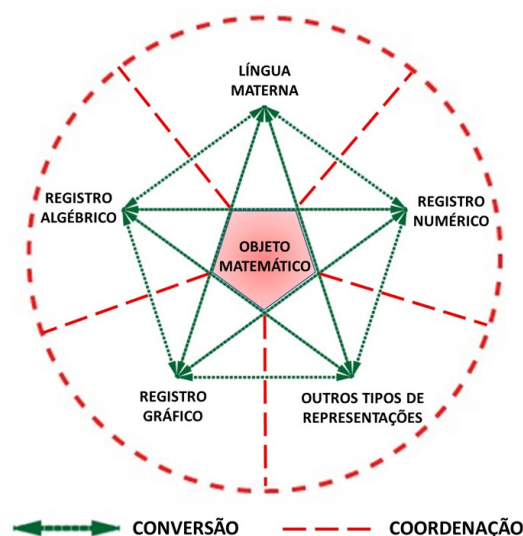
E ainda, além da conversão em dois sentidos, Andrade, Padilla e Dos Santos (2020) destacam a ação de coordenação como forma de ter uma visão global do objeto matemático:

Entende-se que uma aula na perspectiva da TRRS seja baseada na coordenação entre os registros de representação semiótica nos dois sentidos de conversão. E utilizando-se das transformações de tratamento para fixar os conteúdos e demonstrações matemáticas. Uma aula tradicional em contraste à Teoria de Duval, privilegia somente um sentido de conversão, por exemplo, partindo-se do registro algébrico para o gráfico. Essa apresentação de conteúdos obedecendo somente a um sentido de conversão prejudica a compreensão dos estudantes em ter uma visão mais abrangente do objeto matemático (ANDRADE; PADILLA; DOS SANTOS, 2020, p. 126-127).

Para garantir a compreensão do objeto matemático números complexos, além de utilizar vários tipos de registros de representação, Duval (1995) afirma que é preciso que ocorra uma ação chamada de coordenação que, de acordo com Henriques e Almouloud (2016, p. 470), essa coordenação “é a manifestação da capacidade do indivíduo em reconhecer a representação de um mesmo objeto, em dois ou mais registros distintos”.

Com base nos pressupostos de Duval (1995), elaboramos a Figura 4 em forma de um pentágono que leva em conta as possibilidades de conversões entre diferentes representações e enfatiza a coordenação.

**Figura 4:** Pentágono Semiótico: conversão e coordenação de representações de um objeto matemático



Fonte: os autores (2022)

Para o caso específico dessa proposta, os jogadores podem manifestar a capacidade de coordenação ao reconhecerem os números complexos por meio dos signos nas formas de vetores e escritas algébricas, de acordo com cada representação.

O professor poderá, ainda, durante e após a aplicação do Trincas Complexas, fazer uma avaliação com o intuito de analisar as possíveis contribuições do jogo para a aprendizagem dos estudantes acerca do tema. Sugerimos que essa etapa seja feita à luz da Teoria das Situações Didáticas (TSD), proposta por Brousseau (2008), a qual se baseia no princípio de que cada conhecimento ou saber está ligado a um tipo de situação, por meio da interação entre duas ou mais pessoas. Dessa forma, um jogo, por exemplo, pode levar o estudante a usar o que já sabe para criar uma estratégia adequada. Para esse autor, cabe ao professor propor uma situação didática que provoque no aluno uma interação autônoma, fazendo com que ele saia da zona de conforto e seja atuante no processo de aprendizagem.

Gomes e Silva (2018) afirmam que a TSD pode ser utilizada para uma melhor compreensão da gamificação de conteúdo como uma estratégia de ensino. Para esses autores,

[...] a gamificação de conteúdo é a aplicação dos elementos de jogos para alterar um conteúdo e transformá-lo em um jogo, ou seja, cria-se um jogo para ensinar um determinado conteúdo, modificando sua estrutura, de modo que ele possa ser apresentado e desenvolvido enquanto o aluno joga (GOMES; SILVA, 2018. p.22).

Além disso, é sugerida a utilização de características encontradas em jogos para promover o envolvimento dos estudantes em situações de aprendizagem, onde os alunos possam agir, formular e validar. Nesse sentido, entendemos que uma situação gamificada pode ser entendida como uma situação didática na perspectiva de Brousseau, visto que os alunos precisam mobilizar conhecimentos correspondentes aos momentos de estabelecer relações corretas entre os cartões, logo, as quatro etapas norteadoras da TSD (ação, formulação, validação e institucionalização) se fazem presentes nessa proposta.

Ainda destacamos que, durante o jogo, ocorrem as seguintes etapas: *i)* ação, quando os participantes precisam tomar decisões, colocando os seus saberes em prática para descartar ou não um dos cartões. É nessa etapa que os alunos podem explorar o jogo, conhecendo as regras, buscando solucionar um problema ao interagir com o ambiente do jogo; *ii)* formulação, momento em que o conhecimento implícito é transformado em explícito, quando os estudantes trocam informações com um ou mais colegas, podendo explicitar as suas soluções utilizando a língua materna ou alguma linguagem própria da Matemática; *iii)* validação, quando a estratégia utilizada para formar as trincas complexas precisam ser provadas dentro do contexto, realizando corretamente os tratamentos e as conversões entre as representações dos registros e validando as conjecturas formuladas nas etapas de ação e formulação.

Após o jogo, ocorre a última etapa, *iv)* institucionalização, momento em que o professor tem a oportunidade de fazer de forma explícita um resumo de todo o processo que foi vivenciado durante a prática, discutindo os acertos e os erros, captando as percepções e *feedbacks* dos estudantes, ressaltando a importância das representações para a compreensão de fatos, das ideias e dos conceitos a fim de perceber se as conversões entre as representações dos registros permitiram evocar o objeto matemático. Nesse momento, o docente valida o novo conhecimento matemático envolvido na proposta, de modo que esse saber adquirido se incorpore aos esquemas mentais dos alunos.

#### 4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

É sabido que distintas formas de ensino e de aprendizagem tornam-se indispensáveis em um contexto real de ensino, onde dificuldades com alguns conteúdos matemáticos predominantemente

abstratos muitas vezes se tornam verdadeiras barreiras no processo de ensino e de aprendizagem. Para isso, formas lúdicas, divertidas e dinâmicas de aprender conceitos e operações de um conteúdo que por muitas vezes é considerado difícil de ser compreendido pelos estudantes do Ensino Médio podem ser uma maneira plausível de contribuir com o ensinamento desses conteúdos.

Diante disso, o jogo Trincas Complexas foi desenvolvido para ampliar e despertar o interesse do aluno no aprendizado dos números complexos, com possibilidades de promover as conversões entre as representações algébricas e gráficas, com o potencial de tornar as aulas mais interessantes. Ainda, consideramos que o jogo didático proposto poderá contribuir com a aprendizagem sobre as operações entre esses números, pois o estudante estará refletindo, mesmo que inconscientemente, sobre as relações entre as diferentes representações ao mesmo tempo que aprende como operar com os números complexos.

O uso efetivo desse jogo, juntamente com a intervenção didático-pedagógica do professor, em especial na etapa de institucionalização, pode auxiliar na construção de novos conhecimentos, bem como contribuir para a concepção da aprendizagem dos estudantes do Ensino Médio.

Também pode contribuir para diminuir algumas dificuldades de aprendizagem, apontadas por alguns pesquisadores, como erros nas operações de multiplicação e divisão e nas conversões entre diferentes formas de representações, e ainda auxiliará os professores na necessidade de estabelecerem estratégias e recursos de apoio para a recuperação de lacunas de conhecimentos básicos.

Consideramos também que é possível que os alunos participem da confecção de jogos, bem como atribuam valores para as partes reais e imaginárias dos Números Complexos, com possibilidades de se trabalhar com números decimais. No entanto, ressaltamos que a prioridade dessa proposta é realizar corretamente os tratamentos e as conversões entre as diferentes representações de um número complexo.

Apesar da pouca utilização dos Números Complexos no Ensino Médio, aplicações desse conteúdo estão presentes em cursos superiores na área das Ciências Exatas, como nas engenharias. Os estudantes que pretendem seguir carreiras nesses campos poderão apresentar dificuldades de aprendizagem por não terem um contato inicial com esse conteúdo na Educação Básica, logo, o jogo Trincas Complexas poderá contribuir de forma lúdica para que tais conceitos possam ser vivenciados ainda nessa etapa.

## REFERÊNCIAS

- ANDRADE, A. A.; PADILLA, A.; DOS SANTOS, C. A. B. Representações Sociais dos Licenciandos em Matemática sobre o Ensino de Limites por meio da Teoria dos Registros de Representação Semiótica. **HIPÁTIA - Revista Brasileira de História, Educação e Matemática**, v. 5, n. 1, p. 120-131, 2020.
- ASSEMANY, D.; HARAB, L. Potencializando o ensino de números complexos a partir da abordagem vetorial. **VII CIBEM**. Montevideo, 2013. p. 636-645, 2013.
- BRASIL, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **PCN + Ensino Médio: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília: MEC, SEMTEC, 2002.
- BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Orientações curriculares para o ensino médio**. Brasília: Secretaria de Educação Básica, 2008.
- BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.
- BROUSSEAU, G. **Introdução ao estudo das situações didáticas: conteúdos e métodos de ensino**. Ática, 2008.
- OLIVEIRA, C. N. C. **Números Complexos: um estudo dos registros de representação e de aspectos gráficos**. 2010. 190 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2010.
- DUVAL, R. **Sémiosis et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels**. Berne: Peter Lang, 1995.

- GOMES, M. S.; DA SILVA, M. J. F. Gamificação: uma estratégia didática fundamentada pela perspectiva da teoria das situações didáticas. **Horizontes - Revista de Educação**, v. 6, n. 11, p. 18-30, 2018.
- GHEDAMSI, I.; TANAZEFTI, R. Difficultés d'apprentissage des nombres complexes en fin de Secondaire. **Petit x**, v. 98, p. 29-52, 2015.
- HENRIQUES, A.; ALMOULOUD, S. A. Teoria dos registros de representação semiótica em pesquisas na Educação Matemática no Ensino Superior: uma análise de superfícies e funções de duas variáveis com intervenção do software Maple. **Ciência & Educação (Bauru)**, v. 22, n. 2, p. 465-487, 2016.
- MORAES, R.; GALIAZZI, M. C. **Análise Textual Discursiva**. 3. ed. rev. e ampl. Ijuí: Ed. Ijuí, p. 264, 2016.
- PARANÁ. **Diretrizes Curriculares da Educação Básica Matemática**. SEED, Curitiba, 2008.
- PINTO, J. E.; LAUDARES, J. B. Objeto de Aprendizagem de Números Complexos com aplicações na área técnica em eletroeletrônica. **Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia**, v. 9, n. 3, 2017.
- PUHL, C. S.; MÜLLER, T. J.; DE LARA, I. C. M. Mapeamento de objetos de aprendizagem para o ensino de números complexos na engenharia elétrica. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, v. 11, n. 4, p. 191-211, 2020.
- PUHL, C. S.; MÜLLER, T. J.; DE LIMA, I. G. Operações com números complexos: análise de erros cometidos por acadêmicos de Engenharia. **Amazônia: Revista de Educação em Ciências e Matemáticas**, v. 16, n. 36, p. 181-196, 2020.
- RANDOLPH, V. N.; PARRAGUEZ, M. C. Comprensión del Sistema de los Números Complejos: Un Estudio de Caso a Nivel Escolar y Universitario. **Formación universitaria**, v. 12, n. 6, p. 57-82, 2019.

**Submetido em outubro de 2021.  
Aprovado em fevereiro de 2022.**