Relações da Álgebra, Aritmética e Geometria:

Problema 24 do Papiro de Rhind, proposição 4 do livro II d'*Os Elementos* de Euclides, regra de sinais "menos vezes menos dá mais" e método de Al-Khwarizmi para equações do segundo grau

Relationships of Algebra, Arithmetic and Geometry:

Problem 24 of the Rhind Papyrus, proposition 4 of book II of Euclid's Elements, rule of signs "less times less gives more" and Al-Khwarizmi method for quadratic equations

Lucas Queiroz Cordeiro de **Moura**
Universidade Federal de Alagoas (Ufal)

Viviane de Oliveira **Santos**
Universidade Federal de Alagoas (Ufal)

Resumo

Este trabalho tem como objetivo apresentar resoluções de quatro problemas, até o século XVI, os quais interligam Aritmética, Álgebra e Geometria, sendo três dos dois primeiros relacionados com o último, e uma proposição cuja demonstração geométrica possui características algébricas. Os resultados apresentados fazem parte da pesquisa realizada pelo Grupo de Pesquisa História da Matemática e Educação Matemática da Universidade Federal de Alagoas (Ufal) "Aspectos históricos da aritmética e álgebra até o século XVI: relações com a geometria". Para o estudo, utilizamos fontes de História da Matemática, como livros, artigos, trabalhos de conclusão de curso, dissertações e teses; coletamos alguns problemas de Aritmética e Álgebra relacionados com a Geometria e os resolvemos com o auxílio de régua, compasso e do *software GeoGebra*. Abordemos um problema encontrado no Papiro de Rhind, a proposição 4 do livro II d'*Os Elementos*, de Euclides, uma demonstração geométrica da conhecida regra de sinais da multiplicação "menos vezes menos dá mais" e o método feito por Al-Khwarizmi para resolver equações do segundo grau. Esperamos que este trabalho possibilite uma melhor compreensão da relação entre as áreas citadas. **Palavras-chave**: História da Matemática. Aritmética. Álgebra. Geometria.

Abstract

This work aims to present resolutions of four problems, until the 16th century, which interconnects Arithmetic, Algebra and Geometry, being three of the two first ones problems related to the last one, and a proposition whose geometric proof has algebraic characteristics. The results presented are carried out by the *História da Matemática e Educação Matemática* Research Group at the Federal University of Alagoas (Ufal) "Historical aspects of arithmetic and algebra until the 16th century: relations with geometry". For the study, we used sources from the History of Mathematics, such as books, articles, course conclusion works, dissertations and thesis; we collected some Arithmetic and Algebra problems related to Geometry and solve them with the help of the ruler, a compass and the GeoGebra software. We will address a problem found in the Rhind Papyrus, proposition 4 of book II of Euclid's Elements, a geometric demonstration of the well-known sign rule of multiplication "less times less gives more" and the method done by Al-Khwarizmi to solve equations of high school. We hope that this work will enable a better understanding of the relationship between the mentioned areas. **Keywords:** History of Mathematics. Arithmetic. Algebra. Geometry.

1 INTRODUÇÃO[1]

Este trabalho é parte de uma pesquisa do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica (Pibic) "Aspectos históricos da aritmética e álgebra até o século XVI: relações com a geometria", realizada pelo Grupo de Pesquisa *História da Matemática e Educação Matemática*, da Universidade Federal de Alagoas (Ufal). O objetivo desta pesquisa foi compreender, por meio do estudo de problemas encontrados ao longo da História da Matemática, as duas áreas desse objeto, analisando aspectos históricos desses problemas e suas respectivas soluções, tendo como foco principal estudar os problemas de Aritmética e Álgebra até o século XVI, e que podem ser relacionados com a Geometria.

Para auxílio na realização desse trabalho, utilizamos algumas fontes de História da Matemática, como: livros de Berlingoff (2008), Bicudo (2009), Eves (2004), Garbi (2010), Roque (2012) e Saito (2015); artigos de Bertato (2018), D'ambrosio (2007), Gamas (2013), Hillesheim e Moretti (2016), Lorenssati (2012), Medeiros e Medeiros (2004), Morey (2018), Neto (2011) e Oliveira e Laudares (2015); o trabalho de conclusão de curso de Lyra (2019); a dissertação de mestrado de Martins (2015); e a tese de doutorado de Leão (2017).

Inicialmente, coletamos problemas de Aritmética e Álgebra até o século XVI. Em seguida, foram realizadas pesquisas com o intuito de entender o desenvolvimento histórico dessas duas áreas, bem como explorar tais problemas de um ponto de vista geométrico. Sempre que possível, utilizamos a régua, compasso e o *software GeoGebra*.

Dentre os vários problemas coletados, escolhemos apresentar neste trabalho um encontrado no Papiro de Rhind: a proposição 4 do livro II d'*Os Elementos*, de Euclides, uma prova geométrica da conhecida regra de sinais da multiplicação "menos vezes menos dá mais" e o método feito por Al-Khwarizmi para resolver equações do segundo grau.

O problema 24 do Papiro de Rhind foi designado com o propósito de desmistificar o uso do "Método da Falsa Posição" e abordar uma solução usando semelhanças de triângulos. Vale ressaltar que essa resolução não se encontra no documento. A demonstração geométrica da regra de sinais da multiplicação "menos vezes menos dá mais" foi escolhida no intuito apresentar a imprecisão quanto sua origem e salientar que tal demonstração ampara ideias aritméticas, também esclarecendo que, no método feito por Al-Khwarizmi, para resolver equações do segundo grau, existe uma relação com a Geometria, a qual nessa abordagem, apresenta uma necessidade de completar quadrados.

As escolhas supracitadas partem de ideias da Aritmética e da Álgebra, com o intuito de mostrar conexões com a Geometria, a única exceção é a proposição 4 do livro II d'*Os Elementos*, de Euclides. A escolha deste último foi justamente por apresentar o processo inverso em relação aos problemas anteriores; a essência na demonstração da proposição é geométrica, porém dispõe de ideias de Álgebra. É n'*Os Elementos* que se encontra a "álgebra geométrica"[2] dos gregos.

Como diz D'Ambrosio (2007, p. 402), uma das principais razões para se estudar História da Matemática é estender o conhecimento dos futuros professores, no sentindo de entenderem a Álgebra como processo geométrico, e sua importância na fundamentação nessa área. Além disso,

[1] Agradecemos ao Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica (Pibic), do projeto de pesquisa "A álgebra e as operações numéricas fundamentadas pela geometria ao longo da História da Matemática", do qual este trabalho é parte. O título do plano de trabalho foi "Problemas algébricos e aritméticos antes do século XVII: relações com a geometria".

[2] Para alguns pesquisadores, a "álgebra geométrica" dos gregos são formulações geométricas que possui regras algébricas. Para Roque (2012), as demonstrações são essencialmente geométricas e que não se tem indicações que Euclides utilizasse propriedades de operações algébricas.

é comum alunos serem considerados bons em Álgebra e operações numéricas, mas terem dificuldades na Geometria, isso ocorre, em grande parte, pelo fato de que ambas estão sendo entendidas como ideias isoladas, o que não acontece ao longo da História. Dessa forma, a importância deste trabalho é o fato de abordar problemas relacionando diferentes áreas da Matemática.

De acordo com Castro (2003 *apud* OLIVEIRA; LAUDARES, 2015), a Geometria, há muito tempo, foi tendenciosa à Álgebra e fez uso dela. Até hoje, aquela trabalhada na escola está impregnada desta, transformando seu uso em recurso imprescindível para o ensino e a aprendizagem na escola, tornando-se metodologicamente viáveis suas associações.

A seguir, apresentamos uma contextualização histórica de cada problema mencionado anteriormente, para posteriormente abordar as resoluções de tais problemas.

2 CONTEXTUALIZAÇÃO HISTÓRICA

Como nossa pesquisa foi referente a problemas do período até o século XVI, escolhemos quatro dessa época. Sendo eles: o problema 24 do Papiro de Rhind; a proposição 4 do livro II d'*Os Elementos*, de Euclides, uma demonstração geométrica da conhecida regra de sinais "menos vezes menos dá mais" e o método feito por Al-Khwarizmi para resolver equações do segundo grau.

Os problemas foram escolhidos com o intuito de reforçar a relação entre a Aritmética, a Álgebra e a Geometria, obtendo uma melhor compreensão deles. No caso do *Papiro de Rhind*, usaremos uma construção geométrica usando uma Matemática mais conhecida atualmente; para a proposição 4 do livro II d'*Os Elementos*, de Euclides, vamos ver a suposta "álgebra geométrica" dos gregos; e, para reforçar ideias aritméticas e algébricas, veremos a demonstração da regra de sinais da multiplicação "menos vezes menos dá mais" e sua parte do método de Al-Khwarizmi para resolver equações do segundo grau.

2.1 O Papiro de Rhind e o conhecido "Método da Falsa Posição"

De acordo com Roque (2012), temos informação sobre Matemática egípcia por meio de poucos papiros, entre eles o de Rhind, escrito em hierático e datado cerca de 1650 a.E.C. Ele foi copiado pelo escriba[3] egípcio Ahmes, por isso também é conhecido como "Papiro de Ahmes". O escocês Alexander Henry Rhind o comprou no Egito por volta de 1850 e atualmente encontra-se no *British Museum*.

> Em seu estado original o papiro teria aproximadamente 5,5 metros de comprimento por 33 centímetros de largura. Está escrito em hierático, da direita para a esquerda, em tintas preta e vermelha e foi copiado por um escriba chamado Ahmes. É também conhecido por papiro de Ahmes (BOYER, 2001), cuja denominação pode ser encarada como uma homenagem ao escriba copista. (MARTINS, 2015, p. 28)

Medeiros e Medeiros (2004) ressaltam o Papiro de Rhind como um dos documentos mais antigos que podemos encontrar, o que conhecemos como "Método da Falsa Posição", o qual é cercado de divergências sobre sua origem. Ainda de acordo com Medeiros e Medeiros (2004, p. 5):

> É muito difícil traçar a origem exata do método da falsa posição. Tanto os autores quanto as datas de importantes documentos da História Antiga da Matemática são de atribuições bastante imprecisas. Certo é que tanto no antigo Egito, quanto na China, o referido método era há muito conhecido, ainda que com denominações

[3] Define-se "escriba" como: "na Antiguidade, pessoa encarregada de escrever aquilo que lhe ditavam ou copiava textos manuscritos; copista, secretário, redator" (ESCRIBA, 2020).

> diversas e com distintas convicções quanto à sua validade e generalidade. Como já afirmamos acima, um dos documentos mais antigos que faz referência ao método da falsa posição é o papiro Rhind, compilado pelo escriba Ahmes por volta de 1650 a.C. Esse texto, entretanto, é um relato de conhecimentos bem mais antigos e não da exata autoria de Ahmes. Fica, portanto, difícil precisar os verdadeiros autores das idéias ali expostas, assim como a época dos seus surgimentos.

Porém, segundo Bertato (2018, p. 13):

> Nossa tradução pode decepcionar aqueles que estão convencidos, baseados na quase totalidade dos livros que tratam do conteúdo matemático do Papiro em questão, de que as “equações” do Papiro são resolvidas via Método da Falsa Posição. De fato, não se pode constatar literalmente que para resolver as equações dos problemas *“h” (aHá)* seja empregada pelo escriba qualquer suposição de valor. Encontramos sim, nas resoluções dos problemas aritméticos e dos problemas “h”, uma hábil manipulação de decomposição aritmética dos números, multiplicações por mínimo múltiplo comum (ou apenas múltiplo comum), soma direta de coeficientes da *“h”* e consecutiva divisão da constante por tal soma. Talvez, devido a tais constatações, autores como *Moritz Benedikt Cantor* (1829 – 1920) e *Orro Eduard Neugebauer* (1899 - 1990), tenham concluído que o método de resolução das equações examinada, empregado pelos antigos egípcios, se dava via coeficientes, isolando a incógnita, exatamente como faria um estudante de álgebra elementar dos dias de hoje (grifo do autor).

Bertato (2018) ainda ressalta que, dentre os analistas da abordagem mencionada acima, e/ou defensores do “Método da Falsa Posição”, podemos evidenciar Léon Rodet (1850 – 1895) um dos maiores críticos; Thomas Eric Peet (1882 – 1934), o qual efetuou uma versão inglesa; Arnorld Buffum Chace (1845 – 1932), que realizou a primeira tradução e inseriu comentários; e Marshall Clagett (1916 – 2005), com a mais recente tradução do papiro em inglês. As traduções correspondentes realizadas por tais estudiosos são efetuadas com a chave de leitura da “Falsa Posição”. Com isso, “[...] trechos que poderiam ser traduzidos por ‘multiplique por x’ são traduzidos por ‘suponha x’, ‘assuma x’, ‘opere com x’ e similares. Até mesmo onde nada consta acerca sobre expressões no original, tais tradutores costumam introduzir alguma expressão que induz a falsa posição” (BERTATO, 2018, p. 13).

Mesmo com essa divergência histórica, tais problemas são importantes e podem ser resolvidos de diferentes formas, inclusive, com uma Matemática que utilizamos atualmente.

2.2 *Os Elementos* de Euclides e sua “álgebra geométrica”

A Aritmética, a Geometria, a Astronomia e a música eram as ciências consideradas relevantes na época de Platão. As duas primeiras eram áreas distintas, pois aquela era definida como ciência dos números e esta, das figuras, conhecida por Geometria Plana. A Astronomia era a ciência dos sólidos em movimento e a música a das proporções e razões. Segundo Platão, ambas eram consideradas ciências irmãs. O filósofo não explorou a fundo os conceitos matemáticos, se limitou a encontrar sua classificação das ciências e a sua importância em relação à natureza (SAITO, 2015).

> Quando nos voltamos à antiguidade clássica, encontramos um movimento de construção de provas dedutivas, que deram origem ao modelo axiomático adotado hoje pela Matemática. Historiadores defendem que nessa época havia a necessidade de justificar processos os quais poderiam ser repetidos indefinidamente. Hoje podemos ver que essa busca estava pautada em justificar uma abstração suficientemente estável que pudesse generalizar um processo, de modo que não fosse preciso repeti-lo indefinidamente, mas que se extrapolasse seu resultado, após um grande número de repetições, ou seja, objetivava-se um modo de fazer com que essas repetições se tornassem demonstrações de propriedades

> matemáticas. Esse modo de pensar pode ter sido o precursor da pesquisa sobre a continuidade (MISSE; LAMOGLIA, 2020, p. 4).

Pouco sabemos sobre Euclides, não se tem certeza de quando nasceu ou morreu. Tanto Garbi (2010) quanto Leão (2017) questionam se ele teria sido ou não aluno da Academia de Platão, embora o primeiro autor afirme, com seguridade, que ele foi até mesmo diretor da área de Matemática do Museu de Alexandria. Além de ensinar, foi neste mesmo local que escreveu seus trabalhos; dentre eles: *Falácias (pseudaria), Dados, Sobre Divisões (de figuras), Porimos, Superfícies que são Lugares Geométricos, Cônicas, Fenômenos, Óptica, Elementos da Música* e sua principal obra *Os Elementos.*

Segundo Lorensatti (2012), foi somente na Grécia que a Matemática começou a ser explorada de forma mais conceitual, com teoremas e axiomas. Os gregos buscavam soluções mais racionais das questões e não se contentavam em apenas resolver problemas.

O pouco que sabemos sobre Euclides é devido ao filósofo e matemático grego Proclus (411 – 465). Garbi (2010) afirma que Proclus, no prólogo do seu livro *Comentários sobre o Livro I de Euclides*, forneceu importantes análises sobre obras de geômetras. Nobre (2009) apresenta três grandes hipóteses sobre suas autorias: a primeira é que Euclides vivera entre 325 a.E.C e 265 a.E.C., em Alexandria, e que realmente escreveu, tanto *Os Elementos,* como outras obras também; outra é que Euclides fora líder de um grupo de matemáticos de Alexandria e que escreveram juntos vários trabalhos, porém eram assinados em seu nome; a última é que as obras com seu nome foram escritas por um grupo de matemáticos, que adotaram o nome Euclides em referência a Euclides de Mergara, o qual viveu cerca de 100 anos antes. Bicudo (2009, p. 41) afirma que "acontece com Euclides o mesmo que com outros matemáticos da Grécia Antiga: restam-nos apenas macérrimas informações sobre a vida e a personalidade do homem".

Os Elementos, de Euclides, é uma das obras mais importantes da História da Matemática, sendo um compilado de 13 livros, os quais tratam de diversas de suas áreas. Segundo Roque (2012), a obra *Os Elementos* é vista como o apogeu da organização feita da Geometria grega desenvolvida até o século III a.E.C. Para alguns, os resultados encontrados nessa obra foram apenas uma compilação de textos produzidos por outros autores, em contrapartida esse trabalho foi visto de um novo modo, o de que só aumentaria a predominância no país, sendo visto como pensamento lógico e dedutivo.

A terminologia "álgebra geométrica" é atribuída ao livro II d'*Os Elementos*, de Euclides, que é composto por 14 proposições voltadas à Geometria Plana. Segundo alguns pesquisadores, esse título atribui a problemas realizados no livro II, de modo geométrico, mas que possuem traços algébricos. De acordo com Roque (2012, p. 185), "esses pesquisadores se baseavam na hipótese de que as proposições do livro II são formulações geométricas de regras algébricas, como as que permitem resolver uma equação do segundo grau".

Porém, essa ideia é vista com certo ceticismo em Roque (2012, p. 188), ao dizer:

> Ainda que as proposições do livro II dos *Elementos* possam ser interpretadas algebricamente, suas demonstrações são essencialmente geométricas e utilizam as propriedades geométricas particulares das figuras em questão. Nada sinaliza que Euclides estivesse usando relações abstratas ente quantidade, além disso suas demonstrações não utilizavam nenhuma das propriedades das operações algébricas. Logo, não há evidências, e parece improvável, que um "pensamento algébrico" estivesse em jogo nos argumentos apresentados por ele.

A seguir, apresentamos algumas informações históricas sobre a conhecida regra de sinais "menos vezes menos dá mais".

2.3 Regra de sinais "menos vezes menos dá mais"

A Matemática grega tinha pouco interesse em questões práticas e aritméticas de contagem e medida, sendo, prioritariamente, geométrica. Os antigos historiadores alegam que os primeiros estudiosos gregos foram Thales de Mileto (640 a.E.C – 564 a.E.C.) e Pitágoras de Samos (586 a.E.C – 500 a.E.C), sendo que ambos aprenderam sobre a área com os egípcios e babilônios. (BERLINGOFF; GOUVÊA, 2008).

De acordo com Garbi (2010), Thales de Mileto é considerado o primeiro filósofo e matemático grego. Já sobre Pitágoras, Olivia e Guerreiro (2007) o caracterizam como um mistério e afirmam que tudo relacionado a ele são doxografrias, ou seja, relatos de ideias interpretados por outros atores, uma vez que nada deixou escrito.

Eves (2004) afirma que, para resolver equações simples, os gregos usufruíam de duas maneiras essenciais: o método das proporções e o da aplicação de áreas. Ao que se pode observar, ambos se originaram dos pitagóricos.

Antes da demonstração geométrica da multiplicação da regra de sinais "menos vezes menos dá mais", é constatado um impasse entre a origem dessa abordagem. Encontram-se dúvidas a respeito de quem realizou tal demonstração primeiro: Diofanto de Alexandria ou Simon Stevin.

Segundo Roque (2012), acredita-se que Diofanto viveu no século III, data que não pode ser contestada, pois embora também tenha vivido em Alexandria, não se pode confirmar sua descendência grega, apesar de seu texto ser escrito nessa língua. De acordo com Eves (2004), sua escrita era conhecida como Álgebra Sincopada, ou seja, que continha abreviações para algumas das quantidades e operações que se repetem com frequência.

De acordo com Garbi (2010), Diofanto de Alexandria contribuiu nas áreas de Álgebra e teoria dos números, e escreveu três tratados: *Arithmetica*, em treze livros, dos quais, apenas seis restaram, *Sobre Números Poligonais* restaram alguns fragmentos; e *Parismas*, o qual foi perdido.

Sobre o tratado *Arithmetica* (em grego, significa "ciência dos números"), Garbi (2010, p. 123) afirma: "é uma obra-prima, pioneira no tratamento do difícil tema a que hoje denominamos Teoria dos Números, e não deixa qualquer dúvida de que seu autor era um gênio do mais alto nível".

> A parte que nos chegou da Aritmética de Diofanto mostra que a obra não é propriamente um tratado de Álgebra, mas uma colecção de problemas para cuja solução se recorre à Álgebra; de facto, Diofanto formula e procura solucionar cerca de 130 problemas de diversa natureza. As soluções levam à formulação de equações de primeiro e de segundo grau. Um caso ocorre que pede solução por uma equação de grau 3 (GAMAS, 2013, p. 64).

A origem dessa regra de sinais da multiplicação, de acordo com Garbi (2010), geralmente é atribuída a Diofanto de Alexandria. No livro I de *Arithmetica*, aparece de forma explícita a regra: "menos multiplicado por menos é mais e menos por mais é menos" (DIOFANTO DE ALEXANDRIA, 2007, p. 22 *apud* HILLESHEIM; MORETTI, 2016, p. 234). Porém, segundo Boyer (2010 *apud* HILLESHEIM; MORETTI, 2016), ele não apresenta uma justificativa para tal regra.

De acordo com Garbi (2010), a origem da regra de sinais da multiplicação é atribuída a Diofanto, porém a origem da demonstração geométrica apresenta contradições. Essa construção é designada a ele, porém Hillessheim e Moretti (2016) afirmam que, no século XVI, o matemático

Simon Stevin (1548 – 1629), em sua obra *Aritmética* (1585), demonstra uma regra de sinais e ainda complementa com a construção geométrica.

Apesar dessa imprecisão, no que diz respeito a quem realizou tal abordagem, Neto (2008) ressalta que a construção geométrica aparece apenas como auxílio epistemológico para a distributividade e para confirmar a regra dos sinais.

2.4 Método de Al-Khwarizmi para resolver equações de segundo grau

Os antigos possuíam outros métodos para a resolução de problemas. Segundo Eves (2004), o matemático alemão G. H. F. Nesselmann (1811 – 1881) distinguiu a notação algébrica em três métodos: Álgebra Retórica, que era escrito por extenso; Álgebra Sincopada, que continha abreviações; e Álgebra Simbólica, a qual era formada por símbolos e é utilizada atualmente.

Roque (2012) afirma que o termo "álgebra" tem origem em um dos livros árabes mais importantes da Idade Média, chamado *Tratado sobre o cálculo de al-jabr e al-muqabala*, escrito pelo próprio Al-Khwarizmi, matemático, astrônomo, geólogo e escritor persa. A palavra *al-jabr* significa "restauração" e *al-muqabala* quer dizer algo como "balanceamento". Seus livros não possuíam, na escrita, influência de Diofanto, por isso, Al-Khwarizmi não empregava nenhum simbolismo, possuía linguagem retórica.

De acordo com Morey (2018), ao escrever o tratado sobre a álgebra, Al-Khwarizmi tinha como principal objetivo resolver problemas relacionados ao cotidiano, principalmente àqueles envolvendo testamentos e heranças. Além disso, Morey (2018, p. 9) ressalta que: "a álgebra de Al-Khwarizmi é a ciência de resolver equações lineares e quadráticas".

Segundo Roque (2012, p. 251), Al-Khwarizmi enumera seis possíveis problemas, enunciados de forma retórica (com tradução em notação atual):

Quadrados iguais a raízes$(ax^2 = bx)$
Quadrados iguais a um número $(ax^2 = c)$
Raízes iguais a um número $(bx = c)$
Quadrados e raízes iguais a um número $(ax^2 + bx = c)$
Quadrados e um número iguais a raízes $(ax^2 + c = bx)$
Raízes e um número iguais a quadrados $(bx + c = ax^2)$

Notamos, em Roque (2012), que Al-Khwarizmi também fez um vocabulário para auxiliar seus problemas: A palavra *Adad* nesse sentido, refere-se à quantidade conhecida e, na notação moderna, à constante c; *Jidhr* no sentido dos problemas é o valor desconhecido e na notação moderna, o x; e o *Mal, que* seria o quadrado da quantidade desconhecida na notação moderna, é o x^2.

Em Morey (2018), encontramos algumas nomenclaturas diferentes, nesse vocabulário: temos o número simples ou *dirham* (unidade monetária), o *jizra* (raiz) ou *shay* (coisa) e o *mal* (propriedade, soma em dinheiro etc., e também o quadrado). A autora ainda destaca que o *mal*, de acordo com Al-Khwarizmi, é o produto de *jizra* por ele mesmo, e que, em certas ocasiões, é uma grandeza que pode ser multiplicada com ela mesma. Existem várias suposições sobre a origem desses termos algébricos:

> No capítulo testamento e heranças *mal* significa propriedade e serve como incógnita em problemas lineares. Aparentemente, mais tarde *mal* passou a designar o quadro em contraste com a raiz, *jizra*. A palabra *shai* poderia, naturalmente, ser interpretada como a quantidade procurada, a coisa procurada. *Jizra*, provavelmente, é a tradução do mula sânscrita, a raiz. É possível que haja ligação entre a palavra *dirham* e o sânscrito rupa, denotando também uma moeda. De qualquer modo, o

significado matemático dos termos é claro, e podemos chamar de *jizra* (raiz) ou *shai* (coisa) a incógnita ou raiz e de *mal*, o seu quadrado (MOREY, 2018, p. 9).

Roque (2012) afirma que a Álgebra tem origem no estudo sistemático dos métodos para classificar e resolver equações. Além disso, com as obras gregas, os árabes expandiram seu conhecimento, ultrapassaram a divisão entre números e grandezas, que era um problema comum na Matemática euclidiana, e criaram o cálculo algébrico sobre expressões polinomiais, estendendo também as operações numéricas a essas expressões.

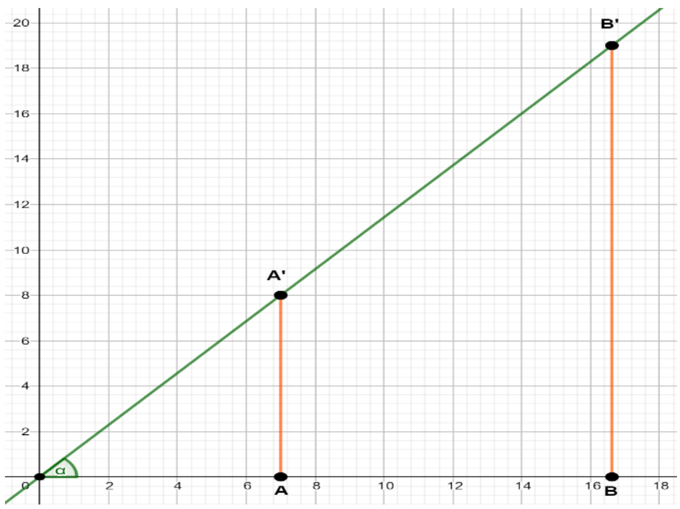
3 RESOLUÇÃO DOS PROBLEMAS

Após a contextualização histórica, apresentamos as resoluções dos problemas escolhidos. O primeiro é o 24 do *Papiro de Rhind*, feito geometricamente usando semelhança de triângulos e por meio do conhecido Método da Falsa Posição, que diz: “uma quantidade, 1/7 desta adicionada a esta, fica 19. Qual a quantidade?”. A resolução foi apresentada por Lyra (2019), de forma algébrica e geométrica.

Numa linguagem atual, temos: $x + \frac{x}{7} = 19$. Se $x_0 = 7$ for nossa falsa posição, teremos $7 + \frac{7}{7} = 8$. Tal método nos leva a pensar “que número devemos multiplicar o 8 para chegarmos a 19?”.

Feito no *GeoGebra*, escolhemos a função $y = x + \frac{x}{7} = \frac{8x}{7}$ e marcamos os pontos desejados (Figura 1). Para um certo $x_0 = 7$, temos um $f(x_0) = y_0 = 8$ e, para resolver o problema, precisamos encontrar quem é x quando $y = 19$. Existem diversas formas de se chegar ao resultado, porém basicamente todas usando proporção.

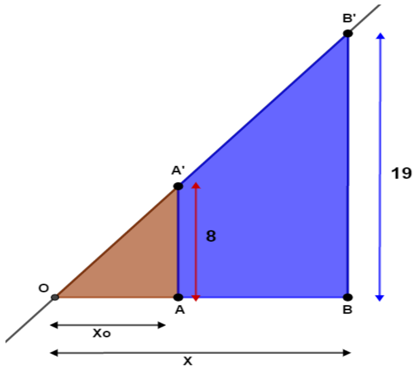
Figura 1: Representação gráfica do problema 24



Fonte: Lyra (2019, p. 17).

A construção geométrica foi feita usando semelhança de triângulos (Figura 2). A semelhança destes (OA’A e OB’B) ocorre por conta dos ângulos. A reta de equação $y = \frac{8x}{7}$ forma o ângulo α com o eixo-x, os segmentos AA’ e BB’ são perpendiculares ao eixo-x e, portanto, formam um ângulo de 90° com o eixo-x. Logo, pela propriedade da soma dos ângulos internos de um triângulo, que é igual a 180°, a semelhança ocorre porque os três possuem mesma medida.

Figura 2 : Proporção do problema 24



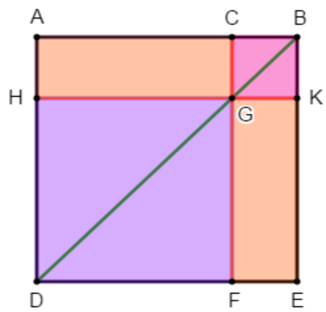
Fonte : Lyra (2019, p. 18)

A proporção encontrada será : $\frac{7}{x} = \frac{8}{19} \to 8x = 138 \to x = \frac{133}{8}$. Portanto, esse é o valor procurado.

Segundo Roque (2012), o "Método da Falsa Posição" pode fornecer uma maneira de resolver equações aritmeticamente, ou seja, sem procedimentos algébricos, e foi usado em diversos momentos da História. Medeiros e Medeiros (2004) complementam que a essência de tal método consiste em erros e acertos.

A seguir, vejamos uma proposição encontrada em *Os Elementos,* de Euclides. Dentre as 14 do livro II, tome-se a 4, na qual é possível encontrar o que conhecemos como "quadrado da soma" em sua demonstração geométrica e vemos que: "caso uma linha reta seja cortada, ao acaso, o quadrado sobre a reta toda é igual aos quadrados sobre os segmentos, e também, duas vezes o retângulo contido pelos segmentos" (EUCLIDES, 2009, p. 137).

Figura 3: Construção geométrica da proposição 4 do livro II d'*Os Elementos*, de Euclides

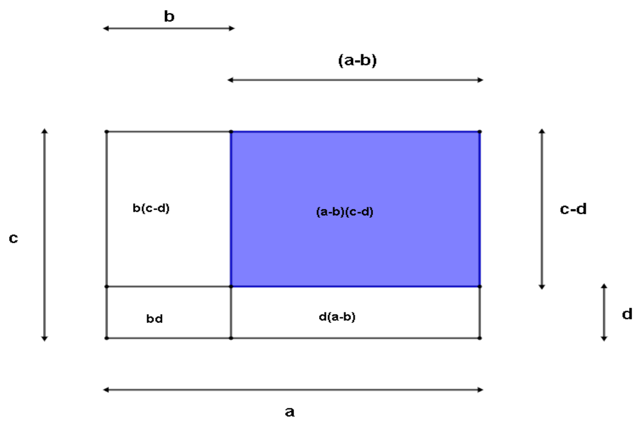


Fonte: Elaborada pelos autores (2021)

Sendo $AC = a$ e $CB = b$, então, de acordo com Roque (2012), temos a versão geométrica do produto notável $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$. Como já foi dito anteriormente, em diversas proposições do livro II, é possível identificar uma interpretação, porém não há evidências dessas ideias para as construções geométricas.

No que se refere à demonstração da regra de sinais da multiplicação "menos vezes menos dá mais" por Diofanto de Alexandria, a construção geométrica $(a - b)(c - d)$ pode ser encontrada em Garbi (2010), a qual aparece no desenvolvimento do produto que $(-b)(-d)$ é igual a $+bd$, ou seja, a conhecida regra "menos vezes menos dá mais".

Figura 4: Demonstração da regra de sinais da multiplicação "menos vezes menos dá mais", por Diofanto de Alexandria.



Fonte: Garbi (2010, p. 124)

Na Figura 4, observamos que a área do retângulo de lados a e c é a soma das áreas dos 4 retângulos nele contidos. Com isso,

$$ac = (a-b)(c-d) + b(c-d) + d(a-b) + bd$$

Segundo Garbi (2010), Euclides já havia demonstrado que os produtos $b(c-d)$ e $d(a-b)$ eram $bc - bd$ e $ad - bd$, respectivamente. Logo,

$$(a-b)(c-d) - bd + bc - bd + ad + bd = ac$$

$$(a-b)(c-d) = ac - ad - bc + bd$$

Isso mostra que, no desenvolvimento do produto $(a-b)(c-d)$, a parcela correspondente a $(-b)(-d)$ é $+bd$, pois:

$$(a-b)(c-d) = ac + a(-d) + (-b)c + (-b)(-d)$$

Garbi (2010, p. 125) comenta que:

> Alguns livros de Matemática dizem que a regra dos sinais é uma convenção, não um teorema. Isso precisa ser recebido com cuidado e bem entendido: trata-se de uma convenção que somos obrigados a estabelecer se quisermos a propriedade distributiva do produto em relação à soma valha também para números negativos e essa é a essência da prova de Diofanto.

Segundo Hillesheim e Moretti (2016, p. 245), o exemplo mostra a Geometria como apoio da Aritmética, contribuindo para verificar que a regra funciona. Além disso, afirma que, para Glaeser (1981), essa demonstração "pode servir de base para o desenvolvimento geral de $(a-b) \times (c-d) = ac - ad - bc + bd$. No entanto, observamos que, nesse período histórico, a regra $- \times - = +$ só é usada como um procedimento transitório".

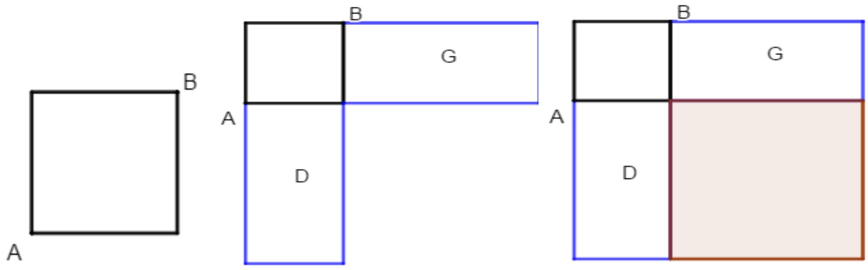
Por fim, temos um problema solucionado por meio do método de Al-Khwarizmi para resolver equações do segundo grau. Um exemplo feito por Roque (2012, p. 252) diz: "Um *Mal* e dez *jidhr* igualam 39 *dinares*". Em notação moderna, temos: $x^2 + 10x = 39$ e a resolução era descrita.

Quadro 1 – Método de resolução feito por Al-Khwarizmi comparado com a notação moderna

Solução apresentada por Al-Khwarizmi	Operações correspondentes em linguagem moderna	Operações correspondentes em linguagem moderna considerando uma equação genérica do tipo ou $x^2 + bx - c = 0$
Tome a metade da quantidade de *Jidhr*	$\frac{10}{2} = 5$	$\frac{b}{2}$
Multiplique essa quantidade por si mesma	$5^2 = 25$	$\left(\frac{b}{2}\right)^2$
Some ao resultado os *Adad*	25+39 = 64	$\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c$
Extraia a raiz do quadrado	$\sqrt{64} = 8$	$\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c}$
Subtraia desse resultado a metade dos *Jidhr*, encontrando a solução	8-5 = 3	$\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} - \frac{b}{2}$

Fonte: Roque (2012, p. 252).

Figura 5: Solução geométrica apresentada por Al-Khwarizmi.



Fonte: Roque (2012, p. 252).

De acordo com Roque (2012), essa construção geométrica reproduz exatamente o procedimento de resolução, demonstrando a necessidade de completar o quadrado na solução algébrica.

Sobre os fundamentos dos desenvolvimentos algébricos realizados por Al-Khwarizmi, até hoje encontram-se em aberto. Segundo Morey (2018), a parte aritmética contém claramente influência do modelo indiano, devido ao cálculo sexagesimal[4], porém detectam-se particularidades em sua Álgebra. O matemático apresenta justificativas geométricas para as regras de soluções de equações, ao contrário dos indianos, que também utilizavam números negativos e símbolos. A autora afirma que a construção geométrica das raízes das equações quadráticas se assemelhava com a perspectiva grega, porém no geral, sua abordagem convergia na essência da "álgebra geométrica" d'*Os Elementos* de Euclides.

[4] Um dos mais antigos sistemas utilizados pela humanidade, em Roque (2012), encontramos que ele é posicional, ou seja, cada algarismo vale não pelo seu valor absoluto, mas pela posição que a escrita do seu número ocupa, em outras palavras, pelo seu valor relativo.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, abordamos possíveis relações entre a Álgebra, Aritmética e Geometria, como forma de verificar como os conteúdos mencionados poderiam ser abordados conjuntamente e não como ideias isoladas. O objetivo geral que nos guiou em todo processo de construção do objeto de pesquisa foi entender a relação entre as três áreas, por meio do estudo de problemas encontrados ao longo da História da Matemática, analisando seus aspectos históricos e suas respectivas soluções.

A metodologia utilizada envolveu, inicialmente, coletar quatro problemas e identificar a abordagem da Aritmética e Álgebra. O próximo passo se deu ao resolvê-los, de forma que aqueles relativos a ambas as áreas foram abordados geometricamente, enquanto o geométrico foi analisado na perspectiva algébrica. As dificuldades encontradas no trabalho foram as divergências apontadas pelos pesquisadores acerca dos aspectos históricos relativos ao assunto.

O problema do Papiro de Rhind foi resolvido utilizando do “Método da Falsa Posição”, contudo, vale destacar que os egípcios não resolveram por esse meio e não utilizaram a demonstração geométrica, a qual foi feita usando a semelhança de triângulos.

Na demonstração geométrica da multiplicação da regra de sinais “menos vezes menos dá mais”, foi apresentada inicialmente a demonstração algébrica, enquanto a parte geométrica serviria para esclarecer a Álgebra dessa regra.

A Geometria encontrada no método para resolver equações do segundo grau feito por Al-Khwarizmi tem a necessidade de completar quadrados,

Diferente dos problemas supracitados, a proposição 4, do livro II d’*Os Elementos,* de Euclides, apresenta um caminho inverso, pois o problema é demonstrado de forma geométrica e apresenta traços algébricos, sendo conhecida como a “álgebra geométrica” dos gregos.

Notamos que, tanto as ideias contidas nos problemas aritméticos e algébricos, que podem ser apresentados de uma forma geométrica, como no apresentado geometricamente, que possui ligações com a Álgebra, não podem ser vistas como isoladas, pois as demonstrações podem oferecer um melhor entendimento em relação aos problemas históricos.

REFERÊNCIAS

BERLINGOFF, W. P.; GOUVEIA, F. Q. **A matemática através dos tempos.** São Paulo: Edgard Blucher, 2008.

BERTATO, F. M**.** A falsa (su-)posição? Tradução dos problemas 24, 25, 26 e 27 do Papiro de Rhind. **Revista Brasileira de História da Matemática**, v. 18, n. 36, p. 11-29, 2018.

BICUDO, I. Introdução e tradução. *In*: EUCLIDES. **Os Elementos**. São Paulo: Editora UNESP, 2009.

D’AMBROSIO, B. S. Reflexões sobre a História da Matemática na Formação de Professores. **Revista Brasileira de História da Matemática**, especial n. 1, p. 399-406, 2007**.**

ESCRIBA. *In*: DICIO, **Dicionário Online de Português**. Porto: 7Graus, 2020. Disponível em: https://www.dicio.com.br/escriba. Acesso em: 31 ago. 2021.

EUCLIDES. **Os elementos**. Tradução de I. Bicudo. São Paulo: Editora UNESP, 2009.

EVES, H. **Introdução à história da matemática.** Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas: UNICAMP, 2004.

GAMAS, C. **Diofanto de Alexandria e os primórdios da Álgebra**. Coimbra: Imprensa da Universidade de Coimbra, 2013. Disponível em: https://digitalisdsp.uc.pt/jspui/bitstream/10316.2/29941/5/Espacos%20do%20Pensamento_artigo3.pdf?ln=en. Acesso em: 22 dez. 2020.

GARBI, G. G. **A rainha das ciências:** um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática. 5. ed, ver. e ampl. São Paulo: Livraria da Física, 2010

HILLESHEIM, S. F.; MORETTI, M. T. A regra dos sinais: alguns elementos importantes do seu contexto histórico. *In*: BRANDT, CF.;

MORETTI, MT. (Org.) **Ensinar e aprender matemática:** possibilidades para a prática educativa. Ponta Grossa: Editora UEPG, 2016. p. 233-254. Disponível em: http://books.scielo.org/id/dj9m9/pdf/brandt-9788577982158-12.pdf. Acesso em: 05 mar. 2021.

LEÃO, A. F. **Euclides e a incomensurabilidade: o profundo tear das abrangências** – os sumos e segredos do livro X. 2017. 330 p. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2017.

LYRA, V. H. C. **Um estudo sobre a história e aplicações do método da falsa posição**. 2019. 35 p. Trabalho de Conclusão de Curso (Matemática) – Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2019.

LORENSATTI, E. J. C. Aritmética: um pouco de história. *In*: SEMINÁRIO DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO DA REGIÃO SUL – ANPED SUL, 9., 2012, Caxias do Sul. **Anais...** Caxias do Sul, 2012. p. 1-15. Disponível em: http://www.ucs.br/etc/conferencias/index.php/anpedsul/9anpedsul/paper/viewFile/1786/265. Acesso em: 13 jul. 2020.

MARTINS, J. **O livro que divulgou o papiro Rhind no Brasil**. 2015. 146 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2015.

MEDEIROS, C. F. de. MEDEIROS, A. O método da Falsa Posição na História e na Educação Matemática. **Ciência & Educação**, Bauru, v. 19, n. 3, p. 54-557, 2004.

MISSE, B. H. L.; LAMMOGLIA, B. Uma perspectiva histórica do conceito de continuidade matemática. **HIPÁTIA – Revista Brasileira de História, Educação e Matemática**, n. 5, n.1, p. 132-142, 2020.

MOREY, B. Yushikiévitch sobre o tratado algébrico de Al-Khwarizmi**. Revista Brasileira de História da Matemática**, v. 18 n. 36, p. 171-198, 2018.

NETO, R. F. Menos vezes menos dá mais: observações históricas sobre o conceito de números negativos. **Revista de Educação Matemática e Tecnológica líbero-Americana**, Recife, v. 2, n. 1, p. 1-22, 2011.

NOBRE, S. R. **Introdução histórica às geometrias não euclidianas**: uma proposta pedagógica. Belém: SBHMat, 2009.

OLIVEIRA, S. C. LAUDARES, J. B. Pensamento Algébrico: uma relação entre álgebra, aritmética e geometria. *In*: ENCONTRO MINEIRO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 7., 2015, São João Del Rei. **Anais...** São João Del Rei, 2015. p. 1-10.

OLIVA, A.; GUERREIRO, M. **Pré-Socráticos**: A Invenção da Filosofia. Edição II. Campinas: Papirus Editora, 2000.

ROQUE, T. **História da matemática:** uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

SAITO, F. **História da matemática e suas (re)construções contextuais.** São Paulo: Livraria da Física, 2015.

Submetido em agosto de 2021.
Aprovado em outubro de 2021.

Lucas Queiroz Cordeiro de Moura

Graduando em Licenciatura em Matemática pela Universidade Federal de Alagoas (Ufal), Maceió, Alagoas, Brasil. ID Lattes: 049218623355192. Orcid ID: 0000-0003-0336-8612.

Contato: lucas.moura@im.ufal.br.

Viviane de Oliveira Santos

Doutora em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista "Julio de Mesquita Filho" (Unesp). Docente da Universidade Federal de Alagoas (Ufal), Maceió, Alagoas, Brasil. ID Lattes: 7168613854793428. Orcid ID: 0000-0002-4425-3806. **Contato:** viviane.santos@im.ufal.br.