Breves considerações sobre os 23 Problemas de Hilbert

Brief considerations on the twenty-three Hilbert Problems

Bruno Cavalcante Martins **Noronha**
Universidade Federal de Itajubá (UNIFEI)

RESUMO

No ano de 1900, David Hilbert (1862 - 1943) apresentou, no II Congresso Internacional de Matemáticos, 23 problemas que poderiam guiar os rumos da Matemática do século XX. Considerando a relevância destes para a Matemática do século passado, realizamos a presente investigação com o objetivo de identificá-los e tecer breves considerações sobre suas contribuições para a Matemática no século XX. Para tanto, realizamos uma pesquisa bibliográfica acerca da vida e obra de Hilbert, bem como sobre os 23 problemas propostos por ele. Buscamos, também, identificar quais foram solucionados, os estudiosos que desenvolveram tais soluções e suas contribuições para o desenvolvimento da área de conhecimento em questão no século XX. Dos problemas propostos, identificamos que 14 são considerados resolvidos; dois o foram parcialmente e sete ainda se encontram em aberto. Pudemos identificar que matemáticos provenientes de diversas nacionalidades, ao longo de todo o século XX, se dedicaram a resolvê-los e destacamos a relevância de tais descobertas para a Matemática, por terem contribuído para o desenvolvimento de novos ramos dessa ciência, novas técnicas e teorias.

Palavras-chave: História da Matemática. David Hilbert. Os 23 problemas de Hilbert. Século XX.

ABSTRACT

In 1900, at the Second International Congress of Mathematicians, David Hilbert (1862 - 1943) presented 23 problems that could guide the directions of mathematics in the 20th century. Considering the relevance of these problems for the mathematics of the last century, we conducted the present investigation with the aim of identifying the 23 problems proposed by Hilbert and make brief considerations about his contributions to mathematics in the century. To do so, we conducted a literature search about Hilbert's life and work, as well as about the 23 problems proposed by him. We also tried to identify which of these problems were solved, the scholars who developed these solutions and their contributions to the development of mathematics in the 20th century. Of the 23 problems proposed, we found that 14 are considered solved, two were partially solved, and seven are still open. We were able to identify those mathematicians from various nationalities, throughout the twentieth century, were dedicated to solving these problems and we highlight the relevance of these problems for Mathematics, because they contributed to the development of new branches of this science, new techniques and theories.

Keywords: History of Mathematics. David Hilbert. Hilbert's 23 Problems. 20th century.

Hipátia v. 6, n. 2, p. 272-283, dez. 2021

1 INTRODUÇÃO

No século XIX, houve um grande desenvolvimento da Matemática, de modo que, para D'Ambrosio (2005, p. 131), tal período "[...] pode ser visto como o século da consolidação da Matemática Ocidental, desenvolvida a partir da Antiguidade". No final desse período, observou-se "[...] um impressionante conhecimento científico ancorado numa Matemática rigorosamente fundamentada" (D'AMBROSIO, 2005, p. 2). Nesse contexto de transição entre os séculos XIX e XX, podemos destacar o matemático David Hilbert (1862 - 1943) que, além de elaborar importantes trabalhos em variadas áreas da Matemática, contribuiu para o desenvolvimento da Matemática por meio da apresentação dos 23 problemas de Hilbert.

De acordo com Silva (2007), os 23 problemas propostos por Hilbert, no II Congresso Internacional de Matemáticos, realizado em Paris, em 1900, tinham como objetivo traçar novos rumos para a Matemática que começaria a ser desenvolvida no século que se iniciara. De fato, diversos matemáticos(as) se empenharam em solucionar esses problemas ao longo do século XX. Desta forma, corrobora-se a seguinte afirmação de D'Ambrosio (2005, p. 2):

> Os 23 problemas de Hilbert constituíram-se em algo equivalente a um vademecum para os pesquisadores matemáticos do século XX. A matemática aceitou o desafio de Hilbert e, durante todo um século, os esforços resultaram na criação e no desenvolvimento de novas teorias e de novas técnicas, que foram incorporadas ao majestoso edifício.

Tendo como base este contexto, realizamos a presente[1] investigação com o objetivo de identificar os 23 problemas propostos por Hilbert e tecer breves considerações sobre suas contribuições para a Matemática no século XX.

Para tanto, realizamos uma pesquisa bibliográfica que inicialmente se voltou para o estudo da vida e obra de Hilbert, e, posteriormente, foi dedicada a identificar os 23 problemas apresentados por ele no II Congresso Internacional de Matemáticos e a localizar informações sobre os estudiosos(as) que se dedicaram a solucioná-los.

Dessa forma, para apresentar os resultados da investigação, o presente trabalho se divide em duas partes. Na primeira, apresentamos uma breve biografia de David Hilbert, evidenciando suas principais áreas de pesquisa; e, na segunda, expomos os problemas, destacando a situação em que se encontram, atualmente, os matemáticos que os resolveram e seus impactos para o cenário da matemática no século XX.

2 David Hilbert: uma breve biografia

David Hilbert nasceu na cidade de Königsberg, na Prússia Oriental em 23 de janeiro de 1862, e faleceu em Göttingen, Alemanha, em 14 de fevereiro de 1943. Era filho de Otto Hilbert e Maria Therese Erdtmann. Seu pai era juiz de um condado e sua mãe, filha de um comerciante, fascinada por astronomia, filosofia e números primos (O'CONNOR E ROBERTSON, 2014).

O fato de seu pai ter sido promovido a juiz supremo fez com que ele e sua família se mudassem para Königsberg, cidade que foi capital e centro cultural da Prússia durante o período de 1457 a 1701, onde, segundo O'Connor e Robertson (2014), David Hilbert passou grande parte de sua infância. David estudou, durante sua infância, na escola Royal Friedrichskolleg, instituição

---

1 Esse trabalho apresenta uma expansão do texto intitulado *Breves considerações sobre os 23 Problemas de Hilbert* apresentado pelo autor no XIV Seminário Nacional de História da Matemática no ano de 2021.

também conhecida como Collegium Fridericianum, ingressando aos oito anos, diferentemente dos outros alunos que começavam a frequentar a escola aos seis anos de idade (O'CONNOR E ROBERTSON, 2014). Segundo esses autores, em tal escola não era ensinado Ciência, e o aprendizado era voltado para a memorização, ou seja,

> A ciência não era ensinada em Friedrichskolleg. A principal abordagem para o aprendizado foi fazer com que os alunos memorizassem grandes quantidades de material, algo que David não era particularmente bom. Talvez surpreendentemente, para alguém que causaria um impacto gigantesco na matemática, ele não brilhou na escola. (O'CONNOR E ROBERTSON, 2014, tradução nossa).

Por esse motivo, David Hilbert foi transferido dessa instituição de ensino para o colégio de Wilhelm Gymnasium, onde obteve excelentes notas em Matemática, justamente pelo fato de que era colocada ênfase no estudo da Matemática e era incentivado o pensamento original (O'CONNOR E ROBERTSON, 2014).

Em outubro de 1880, logo após concluir seus estudos no Wilhelm Gymnasium, Hilbert ingressou na Universidade de Königsberg, onde cursou, no primeiro semestre, as disciplinas de Cálculo Integral, Teoria dos Determinantes e Curvatura das Superfícies. Após isso, O'Connor e Robertson (2014) ressaltam que, seguindo a tradição alemã da época, foi para Heidelberg no segundo semestre, onde teve a oportunidade de participar de palestras do prestigiado matemático prussiano Lazarus Fuchs (1833 - 1902) que trabalhava com Equações Diferenciais e em Teoria das Funções.

Figura 1: David Hilbert

Fonte: O'Connor e Robertson (2014)

Hilbert era amigo próximo de Adolf Hurwitz (1859 - 1919), professor da Universidade de Königsberg. De acordo com O'Connor e Robertson (2014), essa amizade foi um dos fatores determinantes para o seu progresso como matemático. Destacamos, entretanto, que seu orientador de doutoramento foi outro docente da Universidade, Ferdinand von Lindemann (1852 - 1939). Sua tese intitulada *Über invariante Eigenschaften specieller binärer Formen, insbesondere der Kugelfunctionen* (*Sobre propriedades invariantes de formas binárias especiais, em particular das funções esféricas*) foi defendida em 1884.

Posteriormente, em 1892, foi nomeado Ausserordentlicher Professor (Professor Associado) na Universidade de Königsberg, sucedendo seu professor e amigo Adolf Hurwitz e, no ano seguinte, avançou para o cargo de professor titular (O'CONNOR E ROBERTSON, 2014).

Por influência de Felix Klein (1849 - 1925), Hilbert foi convidado a lecionar na Universidade de Göttingen, em 1895, atuando nesta instituição até o fim de sua carreira. Em 1928, foi eleito como membro estrangeiro da Royal Society of London, e posteriormente, no ano de 1930, se aposentou (O'CONNOR E ROBERTSON, 2014).

Segundo Weyl (1944), David Hilbert deixou um legado de pesquisas em variadas áreas da Matemática e também da Física; seus trabalhos usam uma abordagem matemática simples, entretanto rigorosa e profunda. O mesmo autor afirma que Hilbert desenvolveu trabalhos acerca da Teoria dos Invariantes, durante o período de 1885 até 1893; da Teoria dos Campos Numéricos Algébricos, de 1893 até 1898; dos Fundamentos da Geometria, de 1898 até 1902 e da Matemática em geral, durante o período de 1922 até 1930; das Equações Integrais, durante o período de 1902 até 1912 e, também, realizou estudos na área de Física, de 1910 até 1922. Neste sentido, para Weyl (1944, p. 548, tradução nossa) "[...] a pesquisa de Hilbert deixou uma marca indelével em praticamente todos os ramos da ciência Matemática".

Diante disso, podemos destacar seus estudos sobre a Teoria dos Invariantes, por meio da qual Hilbert provou como ocorre a finitude fundamental dos termos da Teoria dos Invariantes para todo grupo projetivo. Porém, seu método fornecia a existência de uma base finita para os invariantes, não tornando possível a construção de um caso individual concreto. Entretanto, com pesquisas mais aprofundadas sobre esse tema, ele conseguiu meios para uma execução finita da construção (WEYL, 1944).

Salientamos, também, seus trabalhos referentes ao campo das Equações Integrais. De acordo com Weyl (1944), esse foi um dos trabalhos do Hilbert que obteve maior relevância em tal campo, possivelmente seria aquele que apresentaria a extensão da Teoria da Decomposição Espectral das Formas Quadráticas Completamente Contínuas, as chamadas quadráticas limitadas. Nesse trabalho, o matemático mostra que "[...] o espectro de pontos em geral terá pontos de condensação e um espectro contínuo aparecerá ao lado do espectro de pontos" (WEYL, 1944, p. 649, tradução nossa). Enquanto Hilbert avançava nessa teoria geral, não deixou de lado as equações diferencias e ordinárias. Em colaboração com o matemático italiano Eugenio Elia Levi (1883 – 1917), desenvolveu o método paramétrico como uma ponte entre equações diferenciais e integrais. Com isso, Weyl (1944) afirma que, por meio desses estudos,

> Uma grande escola internacional de jovens matemáticos se reuniu em torno de Hilbert e as equações integrais se tornaram a moda do dia, não apenas na Alemanha, mas também na França, onde grandes mestres como E. Picard e Goursat prestavam seus tributos, na Itália e neste lado do Atlântico. Muitos bons artigos foram escritos, e muitos medíocres. Mas o efeito total foi uma mudança apreciável no aspecto da análise (WEYL, 1944, p. 650, tradução nossa).

Além disso, Weyl (1944) evidencia que o trabalho sobre Teoria do Espectro no Espaço, foi o instrumento matemático mais adequado para uma nova Física que estava sendo formada naquele momento, conhecida como Física Quântica e encabeçada por Werner Karl Heisenberg (1901 – 1976) e Erwin Schrödinger (1887 – 1961). Vale ressaltar que ambos físicos foram laureados com o Prêmio Nobel da Física nos anos de 1932 e 1933, respectivamente, pelas suas contribuições relacionadas à Física Quântica.

Como evidenciamos acima, durante os anos de 1910 até 1922, Hilbert, dedicou-se a estudos voltados à Física Teórica. De acordo com Weyl (1944), o primeiro fruto desse trabalho foi direcionado à Teoria da Relatividade. Segundo as ideias de Corry (1999), o nome do matemático aparece relacionado à Física geralmente em três momentos distintos.

O primeiro ocorreu no II Congresso Internacional de Paris em 1900, no qual, ao listar os 23 problemas matemáticos, apresentou, no sexto deles, uma ligação específica com a Física. Entretanto, como ressalta Corry (1999, p. 2, tradução nossa), esse problema recebeu muito menos atenção do que qualquer um dos outros vinte e dois na lista. Trabalhos matemáticos dirigidos em geral tiveram relativamente pouco esforço para resolvê-lo.

Segundo Corry (1999), o segundo momento em que seu nome é relacionado à Física está ligado à Teoria Cinética dos Gases, pois, em seu trabalho sobre equações integrais, Hilbert resolve a chamada equação de Boltzmann. O autor destaca também que, embora esse resultado seja importante para o desenvolvimento dessa disciplina, ele não despertou tanto interesse a ponto de se aprofundar em tal Teoria.

O terceiro momento foi marcado por estudos de relevância associados à relatividade geral, no qual em 1915, "[...] apresenta a Royal Society Científica em Göttingen sua versão das equações de campo de gravitação, no âmbito do que ele viu como um axiomaticamente formulando fundação para toda a física." (CORRY, 1999, p. 2, tradução nossa). Conforme é ressaltado por Weyl (1944), para essa teoria, Hilbert associou a da gravitação de Albert Einstein (1879 – 1955) ao programa de Física Pura de Campo, de Gustav Mie (1868 – 1957). Entretanto, os estudos de Einstein sobre relatividade geral provaram ser mais qualitativos ao não considerar os trabalhos de Gustav Mie.

Dentre as contribuições desenvolvidas por Hilbert, destacamos, em especial, a obra intitulada *Grundlagen der Geometrie* (Fundamentos da Geometria) elaborada em 1889, trazendo à Geometria um cenário axiomático formal. Para Boyer (1974), o esforço de Hilbert, nessa obra, era dar caráter puramente formal como a álgebra e a análise, assim "[...] apresenta uma fundamentação para a Geometria Euclidiana, objetivando tornar formalizada a Geometria Euclidiana e deixando claros possíveis pressupostos que estavam não explicitados ou tacitamente aceitos na obra de Euclides" (BATISTELA, 2017, p. 27). Diante do exposto, *Grundlagen der Geometrie* influenciou o desenvolvimento da Geometria e, também, o da Matemática como um todo (WUSSING, 1998), tornando Hilbert o principal representante de uma "escola axiomática" que foi influente na formação das atitudes contemporâneas na Matemática e no ensino da Matemática.

Salientamos que, em meados do século XIX, a Matemática passava por grandes reformulações ligadas à sua fundamentação. O objetivo dos matemáticos na época era livrar essa área de conhecimento dos paradoxos provindos do desenvolvimento da teoria dos conjuntos e da geometria, tendo como principais destaques o Paradoxo de Burali-Forti, o Paradoxo de Cantor e o Paradoxo de Russell (SILVA, 2007).

Batistela (2017) ressalta que a busca pelos fundamentos da Matemática é uma questão fundamental da Filosofia, pois a natureza abstrata que constitui aquela exibe desafios especiais no âmbito desta. A autora destaca ainda que, diante de tal desafio, algumas escolas tentaram efetivar a busca pela sua formalização, as quais tinham em comum a visão metafórica de que o conhecimento é um edifício e, diante disso, deve conter fundamentos seguros.

O Logicismo foi a primeira dessas escolas. Iniciada por volta de 1884, possuía como principais representantes Gottlob Frege (1861 - 1925), Giuseppe Peano (1858 - 1932), Alfred North Whitehead (1861 - 1947) e Bertrand Russell (1872 - 1970). Os logicistas tinham como principal proposta a apresentação de dois eixos importantes, a saber: i) os axiomas matemáticos são princípio da Lógica, e, ii) a Matemática pode ser deduzida da Lógica (BATISTELA, 2017).

A principal obra que guiava os logicistas era o *Principia Mathematica*, de Russell e Whitehead, desenvolvida em três volumes, publicados em 1910, 1912 e 1913. Como destaca Sapunaru, Santiago e Vieira (2014, p. 89). O objetivo dessa escola era concluir todas as verdades das áreas da Matemática, tendo como base um conjunto bem definido de axiomas e regras de dedução, usando uma linguagem desenvolvida pelos autores especialmente para esse fim.

A obra *Principia Mathematica* foi considerada uma referência na construção de uma Teoria Formal dos Conjuntos. Posteriormente, o objetivo dos logicistas se alterou para revelar que a Teoria dos Conjuntos pertencia à Lógica Matemática, provando então que os axiomas da Teoria dos Conjuntos pertenciam à Lógica. Entretanto, os logicistas falharam em tentar consolidar esse objetivo (BATISTELA, 2017).

Posteriormente ao Logicismo, em 1908, uma nova escola se formou, conhecida por Intuicionismo, encabeçada por Luitzen E. J. Brouwer (1881 - 1966). De acordo com Silva (2007, p. 25), Brouwer “[...] acreditava que toda a matemática deveria ser fundada nesta intuição básica: um instante temporal sucedendo outro (e assim sucessivamente)”. Diante disso, a consequência mais relevante desta definição intuicionista está no fato de que a Matemática é construtiva e que não poderia ser reduzida a nenhuma outra ciência (BATISTELA, 2017).

Para Silva (2007), essa perspectiva tinha como principal estrutura os números naturais e a convicção que os seres humanos tinham uma intuição natural sobre esses números. Diante disso, pretendiam reformular toda a Matemática, tendo como ponto de partida a intuição, ou seja, todo objeto matemático existiria somente se pudesse ser construído, e com isso vários teoremas, antes julgados como importantes, tornaram-se irrelevantes, segundo a lógica intuicionista.

Entretanto, Batistela (2017, p. 25) ressalta que “[...] os teoremas intuicionistas em especial, por sua vez, tornaram-se muito longos. Ao serem feitos de maneira construtiva, eram desprovidos da elegância, engenhosidade e brevidade dos mesmos teoremas provados ao modo da Matemática Clássica” (BATISTELA, 2017, p. 25). Além disso, existiam teoremas que eram considerados falsos na Matemática Clássica, porém, foram provados como verdadeiros no Intuicionismo. Nesse sentido, a visão filosófica da Matemática utilizada pelos intuicionistas não agradou a comunidade científica e, assim, muitos matemáticos clássicos se posicionaram de forma contrária à concepção intuicionista (MONDINI, 2008), o que fez com que perdessem força no meio com o passar dos anos.

Em 1910, surgiu uma nova escola conhecida como Formalismo, cujo principal representante era David Hilbert, com o objetivo de abolir os possíveis paradoxos e contradições da Matemática, utilizando um sistema completamente formal, consistindo em símbolos sem significados ou interpretações, na qual a manipulação, através de regras precisas e finitas, e as demonstrações rigorosas provariam a veracidade ou falsidade das expressões que possam ser descritas nesse sistema (BATISTELA, 2017). Mondini (2008, p. 6) destaca que “[...] a filosofia base para o Formalismo é o Nominalismo, segundo o qual as entidades da Matemática não existem, nem como objetos reais e nem como objetos mentais […]". Essa concepção filosófica era diferente da utilizada na Escola Intuicionista. Batistela (2017, p. 26) salienta que o objetivo de Hilbert era contradizer essa escola, tinha como pretensão “[...] provar que toda Matemática Clássica era consistente, usando métodos finitários também usados pelos intuicionistas, pois, sendo assim, tinha certeza de que sua prova seria aceita por Brouwer e seus seguidores".

Portanto, para essa escola, a formalização da Matemática, uma expressão descrita nesse sistema, não poderia assumir em sua prova ser verdadeira e falsa simultaneamente. Partindo desse princípio, acreditavam que "[...] provariam que as teorias matemáticas são completas e consistentes dentro da sua própria axiomática" (BATISTELA, 2017, p. 27).

No entanto, é relevante destacar que, em 1930, o matemático Kurt Gödel provou, com a Teoria da Incompletude, que não é possível demonstrar a compatibilidade dos axiomas da Aritmética dentro de um sistema que a incluía. Além disso, esse teorema provou que o Formalismo não poderia ser bem sucedido.

Por fim, destacamos a relevância dos problemas propostos por Hilbert no II Congresso Internacional de Matemáticos, abordados no item subsequente.

2.1 Os 23 Problemas de Hilbert e o desenvolvimento da Matemática do Século XX

Conforme já mencionado, os 23 problemas propostos por Hilbert tinham como objetivo traçar novos rumos à Matemática desenvolvida no século XX, que se iniciava naquele momento (SILVA, 2007). O II Congresso Internacional de Matemática ocorreu na cidade de Paris em 08 de agosto de 1900: "[...] sabe-se muito do Congresso. Até detalhes como o valor da inscrição, que era 30 francos sem direito ao banquete e às Atas. Havia 232 participantes inscritos, provenientes de 26 países. O Presidente do Congresso foi Henri Poincaré" (D'AMBROSIO, 2003, p. 136). Na ocasião, Hilbert, com seus 38 anos de idade, propôs uma lista de dez dentre 23 problemas abertos, os quais, segundo ele, mereciam melhor atenção. Na verdade, ele estava definindo sua intenção em indicar possíveis rumos à Matemática do novo século, por isso pontuou:

> Se quisermos ter uma ideia sobre o possível desenvolvimento do conhecimento matemático no futuro próximo, então precisamos ter em pensamento as perguntas em aberto e visualizar os problemas que a ciência contemporânea nos apresenta, cujas soluções nós esperamos do futuro (HILBERT, 2003, p. 5).

Consequentemente, a importância de problemas no campo da Matemática deve-se ao fato de que, através deles, tem-se a possibilidade do desenvolvimento de novas ferramentas que auxiliam seu progresso. Donde, para o matemático, um ramo da ciência continua sendo essencial enquanto apresentar problemas.

No Quadro 1, apresentamos os 23 problemas propostos por Hilbert no referido evento e a situação em que cada um deles se encontra.

Quadro 1: Os 23 Problemas de Hilbert e a situação em que se encontram

Problema	**Situação**
Problema 1 - Problema de Cantor sobre a potência do Continuum	Resolvido
Problema 2 - A não contradição dos axiomas da Aritmética	Resolvido
Problema 3 - A igualdade do volume de dois tetraedros com as mesmas áreas da base e alturas	Resolvido
Problema 4 - O problema da linha reta como a menor distância entre dois pontos	Aberto

Problema 5 - A noção de grupo contínuo de transformações de Lie sem a hipótese da diferenciabilidade das funções definidoras dos grupos	Resolvido
Problema 6 - Tratamento matemático para os axiomas da física	Aberto
Problema 7 - Irracionalidade e transcendência de determinados números	Resolvido
Problema 8 - O problema de números primos	Aberto
Problema 9 - Prova da mais geral lei de reciprocidade em um corpo numérico qualquer	Resolvido
Problema 10 - A decisão sobre a resolubilidade de uma equação diofantina	Resolvido
Problema 11 - Formas quadráticas com quaisquer coeficientes numéricos algébricos	Resolvido
Problema 12 - Extensão do teorema de Kronecker sobre corpos abelianos a um domínio de racionalidade algébrica qualquer	Aberto
Problema 13 - Impossibilidade da resolução da equação geral do sétimo grau através de funções de somente 2 argumentos	Resolvido
Problema 14 - Prova da finitude de certos sistemas de funções completos	Resolvido
Problema 15 - Fundamentação rigorosa do cálculo enumerativo de Schubert	Parcialmente resolvido
Problema 16 - Problema da topologia de curvas e superfícies algébricas	Parcialmente resolvido
Problema 17 - Representação de formas definidas através de quadrados	Resolvido
Problema 18 - Construção do espaço a partir de poliedros congruentes	Aberto
Problema 19 - As soluções de problemas regulares no cálculo de variações são sempre necessariamente analíticas?	Resolvido
Problema 20 - Problemas gerais dos valores de fronteira	Aberto
Problema 21 - Demonstração da existência de equações diferenciais lineares tendo grupo monodrômico prescrito	Resolvido
Problema 22 - Uniformização de relações analíticas por meio de funções automórfas	Resolvido

Hipátia v. 6, n. 2, p. 272-283, dez. 2021

Problema 23 - Mais desenvolvimento dos métodos do cálculo de variações	Aberto

Fonte: Adaptado de Yandell (2002)

Com base nos dados do Quadro 1, podemos identificar que sete dos 23 problemas encontram-se em aberto, dois estão parcialmente resolvidos e 14 são considerados resolvidos. Destacamos que, em muitas dessas soluções, foram utilizados conhecimentos elaborados previamente por outros matemáticos, fato que indica que há outros pesquisadores que contribuíram para sua resolução de forma indireta.

No Quadro 2, apresentamos informações relativas a problemas resolvidos pelos matemáticos, bem como suas nacionalidades e o período da solução.

Quadro 2: Problemas resolvidos pelos matemáticos e informações sobre eles

Número do Problema	**Quem solucionou**	**País de origem**	**Período da solução**
Problema - 1	Paul Cohen	Estados Unidos da América	1963 - 1964
Problema - 2	Kurt Gödel	Áustria-Hungria	1931
Problema - 3	Max Dehn	Alemanha	1900
Problema - 5	Andrew Mattei Gleason, Deane Montgomery e Leo Zipin	Estados Unidos da América	1952
Problema - 7	Aleksandr Osipovich Gelfond e Theodor Schneider	Rússia e Alemanha	1929 - 1934
Problema - 9 e 17	Emil Artin	Áustria	1927
Problema - 10	Yuri V. Matiyasevich	Rússia	1970
Problema - 11	Helmut Hasse	Alemanha	1923
Problema - 13	Andrey N. Kolmogorov e Vladimir I. Arnold	Rússia/Ucrânia	1957
Problema - 14	Masayoshi Nagata	Japão	1958
Problema - 19	Sergei N. Bernstein	Ucrânia	1904
Problema - 21	Andrei Bolibruch	Rússia	1989
Problema - 22	Paul Koebe	Alemanha	1907

Fonte: própria do autor

Com base nestas informações, podemos identificar que a nacionalidade dos matemáticos se dispõe nos seguintes grupos: cinco russos, quatro alemães, quatro americanos, dois austríacos, um japonês e um ucraniano. Tal constatação indica a abrangência geográfica dos problemas, já que matemáticos provenientes de três continentes se dedicaram a solucioná-los.

Segundo Cardoso (2006), Hilbert destacou “[...] a importância dos problemas para o desenvolvimento da Matemática, influenciou várias gerações de matemáticos, muitos dos quais dedicaram grande parte das suas vidas a tentar obter uma solução” (CARDOSO, 2006, p. 14).

Em relação às contribuições dos problemas de Hilbert para o desenvolvimento da Matemática, Shirley (2000) afirma que as ideias de Kurt Gödel (1906 – 1978) para a resolução do segundo problema “[...] também contribuíram para a teoria da computabilidade de Turing” (SHIRLEY, 2000, p. 76).

Já Conde (2003) ressalta que o Terceiro Problema de Hilbert, por ter sido resolvido rapidamente, “[...] foi por muito tempo, considerado como um problema que não tinha o mesmo status que os demais” (CONDE, 2003, p. 41). Entretanto, para esse autor, “[...] Tal impressão vem mudando uma vez que o mesmo vem dando origens a desenvolvimento relevantes em outras áreas da Matemática e criando novos problemas ainda abertos” (CONDE, 2003, p. 41).

Com relação ao 17º problema, Reznick (2000) indica que, na década de 1950, mais de uma após o problema ser solucionado, A. Robinson (1918 - 1974) apresentou que havia uma grande conexão deste com a lógica. Tal conexão foi evidenciada por Charles Neal Delzell, que “[...] escreveu uma história detalhada e recente do inter-conjunto dos lógicos no 17º problema de Hilbert” (REZNICK, 2000, p. 256, tradução nossa).

Alguns problemas ainda continuam em aberto, e de acordo com Papadopoulos (2014), o motivo do quarto permanecer assim, refere-se ao fato de que o mesmo foi considerado muito amplo e admitiu diferentes interpretações e generalizações ao longo dos anos. Entretanto, o autor apresenta cinco áreas da Matemática que se desenvolveram e permitiram abordar o quarto problema. São elas:

> (1) A configuração da geometria Riemanniana. Nesse cenário, o problema foi resolvido por Beltrami. (2) A configuração do cálculo das variações, que foi a de Darboux no trabalho que mencionamos. Nesse cenário, o problema de Hilbert é frequentemente descrito como um "problema inverso"; isto é, procura se um Lagrangiano (definindo a métrica) que está associado a um determinado conjunto de extremas (que são as linhas geodésicas). Como é sabido, os métodos do cálculo das variações começaram nos trabalhos de Johann e Jakob Bernoulli, de Euler e de Lagrange. (3) A configuração da geometria métrica, em que não se assume diferenciabilidade. Essa configuração é baseada nos métodos de Busemann e na grande quantidade de trabalhos interessantes que surgiram a partir deles. (4) A configuração da geometria de Finsler, onde a métrica está associada a uma norma em cada espaço tangente do coletor. É necessário um mínimo de diferenciabilidade nessa configuração, pelo menos para dar um significado aos vetores tangentes. Essa configuração pode ser considerada na borda da métrica e da geometria diferencial. (5) A configuração dos fundamentos da geometria [...] (PAPADOPOULOS, 2014, p. 12, tradução nossa).

O mesmo autor ressalta também que “[...] um problema como o IV Problema de Hilbert nunca morre, [...] ele admite várias generalizações e formulações em várias configurações” (PAPADOPOULOS, 2014, p. 31, tradução nossa).

Já para o sexto problema, Hilbert propunha que fosse realizada uma axiomatização da Física Clássica, portanto, era demasiadamente longo. Ferreira Júnior (2003, p. 63) afirma que “[...] mesmo levando em conta que Hilbert se refere tão somente à Física clássica, ainda assim esta proposta tem um escopo muito mais abrangente e difuso do que as outras 22 que consistiam em problemas técnicos e específicos da matemática pura”.

O oitavo problema da lista de 23 problemas propostos por Hilbert refere-se à demonstração da Hipótese de Riemann sobre os zeros da função zeta de Riemann. Tal função, que tem como objetivo encontrar uma estimativa precisa da "densidade dos números primos" (YANDELL, 2002), continua sendo um desafio para os matemáticos, permanecendo, assim, sem solução.

O décimo segundo problema relaciona-se à extensão do Teorema de Kronecker nos campos abelianos a qualquer domínio algébrico da racionalidade, não foi enunciado de maneira concisa (YANDELL, 2002).

Em relação ao décimo oitavo problema, Hilbert solicitava a construção de espaço a partir de poliedros congruentes. Diante disso, ele foi dividido em três partes, todavia, apenas uma delas foi resolvida, permanecendo, assim, em aberto (YANDELL, 2002).

No vigésimo problema, Hilbert (1900) questiona se algum erro regular de cálculo de variações teria solução (YANDELL, 2002). Segundo o mesmo autor, este tornou-se um programa de pesquisa que ainda não foi resolvido. Porém, os primeiros passos para sua realização foram apresentados pelo matemático Bernstein (1880 – 1968), em uma série de artigos entre os anos de 1910 até 1912.

Por fim, Yandell (2002) afirma que o vigésimo terceiro problema não foi mencionado como específico da Matemática, pois, diferentemente dos demais, foi voltado a incentivar o desenvolvimento de métodos para cálculos de variações gerais.

Assim, podemos destacar que a realização desta investigação permitiu identificar que as resoluções dos problemas e/ou suas tentativas possibilitaram o surgimento de novas técnicas e teorias importantes para o progresso da Matemática nos séculos posteriores.

3 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho teve como objetivo identificar os 23 problemas propostos por Hilbert, no II Congresso Internacional de Matemáticos, realizado em Paris, em 1900, e apresentar considerações sobre seus impactos na Matemática do século XX.

Identificamos que destes, cujo propósito consistiu em traçar os novos rumos para a Matemática, 14 são considerados resolvidos, dois se encontram parcialmente resolvidos e sete encontram-se em aberto.

Os resultados de nossa investigação permitem afirmar que os problemas propostos por Hilbert foram importantes no cenário científico matemático, pois mobilizaram, ao longo do período em questão, diversos matemáticos de nações distintas. Além disso, contribuíram para o desenvolvimento da Matemática, já que áreas de estudos surgiram em decorrência da busca por suas soluções.

REFERÊNCIAS

BATISTELA, R. F. **O Teorema da Incompletude de Gödel em cursos de licenciatura em Matemática.** 139 p. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Rio Claro, 2017.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, Universidade de São Paulo, 1974.

CARDOSO, D. M. **A Matemática e os seus Problemas**. 2006.

CONDE, A. O terceiro problema de Hilbert. **Revista Brasileira de História da Matemática**, v.3, n. 5, p. 41-59, 2001

CORRY, L. **Hilbert and Physics (1900 1915)**. 1999.

D'AMBROSIO, U. Um brasileiro no congresso internacional de matemáticos de 1900. **Revista Brasileira de História da Matemática**, v. 3, n. 5, p. 131-139, 2005.

HILBERT, D. Problemas Matemáticos: Conferência proferida no 2º Congresso Internacional de

Matemáticos realizado em Paris em 1900. Tradução de Sergio R. Nobre. **Revista Brasileira de História da Matemática**, v. 3, n. 5, p. 5-12, 2003.

MATHEMATICS GENEALOGY PROJECT. Dakota: North Dakota State University. Disponível em: https://www.genealogy.math.ndsu.nodak.edu/index.php. Acesso em: 22 de jan. de 2021.

MONDINI, F. O logicismo, o formalismo e o intuicionismo e seus diferentes modos de pensar a matemática. *In*: Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática, 12., 2008, Rio Claro. **Anais...** Rio Claro, 2008. p. 1-10.

O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. **David Hilbert.** The MacTutor history of mathematics archive. Disponível em: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Hilbert. Acesso em: 03 dez. 2020.

PAPADOPOULOS, A. **On Hilbert's fourth problem**. In: Handbook of Hilbert geometry, European Mathematical Society Publishing House, 2014.

REZNICK, B. Some concrete aspects of Hilbert's 17th problem. **Contemporary mathematics**, v. 253, p. 251-272, 2000.

SAPUNARU, R. A; SANTIAGO, D F G; VIEIRA, M. M. Uma breve introdução às filosofias da lógica e da matemática de Bertrand Russell: conceitos e inferências a partir do número. **Revista Abakós**. Belo Horizonte, v. 3, n. 1, p. 87-101, nov. 2014.

SHIRLEY, L. Matemática do século XX: o século em breve revista. Tradução de David Mendes, Fernando Menezes, Henrique Machado, Hussene Remane, Pedro Ávila, Ricardo Barreiros, Rui Roboredo e Sérgio Antunes. **Educação e Matemática**. v. 60, p. 73-79, 2000.

SILVA, J. J. **Filosofias da matemática**. São Paulo: UNESP, 2007.

WEYL, H. David Hilbert and is Mathematical Work. **Bulletin of the American Mathematical Society**, v. 50, n. 9, p. 612-654, 1944.

WEYL, H. David Hilbert 1862-1943. **Royal Society**. v. 4, n. 13, p. 547-553,1944.

WUSSING, H. **Lecciones de Historia de las matemáticas**. Siglo XXI de España Editores, 1998.

YANDELL, B. **The honors class:** Hilbert's problems and their solvers. CRC Press, 2002.

Submetido em agosto de 2021.
Aprovado em novembro de 2021.

Bruno Cavalcante Martins Noronha

Graduação em Matemática pela Universidade Federal de Itajubá (UNIFEI), Itajubá, Minas Gerais, Brasil. ID Lattes: 6126579404681966. Orcid ID: 0000-0003-1721-9861.

Contato: bruno.cmn@unifei.edu.br.