Álgebra e geometria na primeira metade do século XIX:

Alguns exemplos da matemática britânica

Algèbre et géométrie dans la première moitié du XIXe siècle:

Quelques exemples de mathématiques britanniques

Leandro Silva **Dias**
Instituto Federal do Rio de Janeiro (IFRJ)

Gérard Emile **Grimberg**
Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ)

Resumo

Após um longo período de isolamento em relação ao continente, os ingleses se afastam da abordagem puramente sintética, herdada de Newton, para uma mais analítica, com a inserção dos termos usados pelo cálculo diferencial leibniziano. Além disso, seguindo o movimento iniciado pela Sociedade Analítica, surgem matemáticos abertos a pesquisa internacional, dos quais se destacaram Arthur Cayley, J. J. Sylvester e George Salmon. Estes, seguidos por vários outros, utilizaram as várias técnicas algébricas aplicadas a geometria, como por exemplo o uso das transformações lineares para as mudanças dos eixos coordenados. Ao ler estes trabalhos nos questionamos: como ocorreu o interesse inglês pela álgebra aplicada à geometria? Como participa a teoria dos invariantes dessa interação entre álgebra e geometria? Quais são seus interesses geométricos? Como ocorre a influência desta relação entre álgebra e geometria sobre os futuros trabalhos de Cayley? Para responder estas questões, analisamos os principais artigos sobre o tema de matemáticos como: Henry Parr Hamilton, De Morgan, Arthur Cayley e George Boole. Entre estes, destaca-se a influência de Boole sobre Cayley, sobre o uso das transformações lineares aplicada a geometria. Percebeu-se o quanto foi importante o crescente uso da álgebra aplicada à geometria, pois abriu novos caminhos de pesquisa. Além da importância desta relação, álgebra e geometria, para o desenvolvimento da teoria dos invariantes, a partir do artigo de 1841 de Boole que culminou nos importantes trabalhos de Cayley sobre esta teoria, dos quais se destacam as memórias sobre os *quantics*.

Palavras-chave: Álgebra. Geometria. Boole. Cayley. Salmon.

Résumé

Après une longue période d'isolement du continent, les Anglais s'éloignent de l'approche purement synthétique, héritée de Newton, pour une approche plus analytique, avec l'insertion de termes utilisés par le calcul différentiel leibnizien. Par ailleurs, suite au mouvement initié par l'Analytical Society, des mathématiciens ouverts à la recherche internationale ont émergé, parmi lesquels Arthur Cayley, J.J. Sylvester et George Salmon se sont distingués. Ceux-ci, suivis de plusieurs autres, ont utilisé les diverses techniques algébriques appliquées à la géométrie, telles que l'utilisation de transformations linéaires pour changer les axes de coordonnées. A la lecture de ces ouvrages, on se demande : comment est né l'intérêt des Anglais pour l'algèbre appliquée à la géométrie ? Comment la théorie des invariants participe de l’interaction entre algèbre et géométrie ? Quels sont vos intérêts géométriques ? Comment cette relation influence-t-elle les futurs travaux de Cayley ? Pour répondre à ces questions, nous analysons les principaux articles sur le sujet des mathématiciens tels que : Henry Parr Hamilton, De Morgan, Arthur Cayley et George Boole. Parmi celles-ci, l'influence de Boole sur Cayley se manifeste par l'utilisation de transformations linéaires appliquées à la géométrie. On a remarqué à quel point l'utilisation croissante de l'algèbre appliquée à la géométrie était importante, car elle ouvrait de nouvelles voies pour la recherche. Outre l'importance de cette relation, entre algèbre et géométrie, pour le développement de la théorie des invariants, de l'article de 1841 de Boole qui a abouti aux importants travaux de Cayley sur cette théorie, parmi lesquels se détachent les mémoires sur les *quantics*.

Mots-Clés: Algèbre. Géométrie. Boole. Cayley. Salmon.

1 INTRODUÇÃO

A primeira metade do século XIX foi marcada por importantes fatos que influenciaram a pesquisa matemática britânica. A influência dos trabalhos de Newton, do qual geometria euclidiana era a base de toda pesquisa matemática, fez com que os britânicos criassem resistência a todo desenvolvimento da análise e do cálculo diferencial que ocorreu nos demais países europeus. Tal estado de afastamento em relação à matemática europeia perdurou até o final do século XVIII.

A partir de Robert Woodhouse, iniciou-se um grupo de matemáticos interessados em introduzir as inovações analíticas e do cálculo diferencial, que permeavam a pesquisa matemática europeia. A escola analítica[1], formada por matemáticos seguidores das ideias de Woodhouse, procurou retirar a matemática britânica do isolamento provocado pela tradição de Newton.

Além do ganho obtido com as novas notações do cálculo diferencial, houve uma abertura para pesquisas em geometria analítica, com destaque para a álgebra com aplicações geométricas. Além da álgebra de Peacock, concorrem para esse avanço os desenvolvimentos analíticos de Hamilton e De Morgan. A criação de um periódico inglês específico para publicações de artigos matemáticos, com a presença de diversos artigos relacionados à geometria analítica e álgebra com aplicações geométricas, nos dá a clara noção das mudanças que ocorreram nos anos iniciais da primeira metade do século XIX.

Dentro deste contexto, a nossa pesquisa procura analisar como se deu a relação entre álgebra e geometria em alguns textos matemáticos britânicos da primeira metade do século XIX. Assim, nos perguntamos: como ocorreu o interesse inglês pela álgebra aplicada à geometria? Como participa a teoria dos invariantes? Quais são seus interesses geométricos? Como ocorre a influência desta relação entre álgebra e geometria sobre os futuros trabalhos de Cayley?

Tendo em vista nossos questionamentos, apresentaremos alguns aspectos geométricos que permearam o ambiente de pesquisa inglês da primeira metade do século XIX, bem como a sua relação com a teoria dos invariantes. Serão apresentadas características da geometria analítica britânica, porém não temos a intenção de esgotar as considerações, mas sim de apresentar as mais relevantes aos nossos questionamentos.

Em seguida, veremos o interesse inicial de Cayley por geometria analítica em seu primeiro artigo de 1841, do *Cambridge Mathematical Journal*, que nos sinaliza alguns aspectos importantes da álgebra aplicada à geometria. O início da teoria dos invariantes, como afirmado por historiadores como Tony Crilly e Karen Parshall, pode ser tomado a partir do artigo de George Boole de 1841, *Exposition of a General Theory of Linear Transformations*, apresentado em duas partes no *Cambridge Mathematical Journal*. Também sem a intenção de esgotar o assunto, apresentaremos a teoria de Boole e os aspectos geométricos presentes em seu artigo. Boole, através de seu artigo de 1841, influenciou os trabalhos de Cayley que desenvolveram a teoria dos invariantes. Cayley contou com a parceria de Sylvester e Salmon, o qual também se interessa pelo assunto posteriormente.

Este artigo, além da importância historiográfica, pode estimular que professores desenvolvam ambientes de ensino que busque integrar a história da matemática. Como exemplo, tem-se o belo artigo publicado na revista Hipatia de Aline Bernades. Nesse artigo, Bernardes (2019)

[1] Escola analítica foi um movimento que pretendia implementar os novos conhecimentos e notações matemáticas na Inglaterra. Se opõe a escola de Newton que foi responsável por deixar os britânicos isolados do continente europeu, no que diz respeito ao fazer matemática. Pois eles permaneciam utilizando os métodos e notações de Newton e tinham resistência aos novos métodos e notações, como o cálculo, por exemplo, que avançou bastante a partir da notação de Leibniz. A Escola analítica teve início com Robert Woodhouse que foi o primeiro a publicar um trabalho introduzindo as novas notações do cálculo diferencial. Com título: *Principles of analytical calculation*, sua obra foi publicada em 1803, em Cambridge, porém foi severamente criticada pela adoção dos novos métodos.

explora a abordagem de Cayley e Sylvester com matrizes e como ela pode integrar atividades de ensino inovadoras. Da mesma forma, o desenvolvimento das transformações lineares, apresentada neste artigo, pode inspirar professores na sua tarefa de ensinar. O ensino de álgebra linear no Brasil ainda é muito tradicional, sem uma relação com os aspectos geométricos que representa. Ao observar os trabalhos dos matemáticos do século XIX, como Cayley, pode-se perceber que não há separação entre álgebra e geometria. Trabalhar estes conceitos em conjunto poderia ser de muita serventia ao ensino superior, além de dar uma formação mais abrangente aos futuros professores de matemática.

2 GEOMETRIA ANALÍTICA INGLESA DO SÉCULO XIX

No início do século XIX, importantes mudanças na Inglaterra influenciaram a formação dos estudantes daquele período. Daí a importância de iniciarmos com uma contextualização, dando enfoque para o desenvolvimento da geometria analítica, foco inicial das pesquisas de Cayley.

A escola newtoniana foi responsável por deixar a matemática britânica isolada do restante da Europa, no que diz respeito aos desenvolvimentos matemáticos da análise, do cálculo diferencial e das abordagens analíticas com respeito à geometria.

A questão da escolha da notação de Newton na Inglaterra, em oposição à notação de Leibniz pelo restante da Europa, não é suficiente para explicar o atraso britânico, pois, mesmo que a notação de Newton fosse superior à de Leibniz, os matemáticos britânicos estariam em desvantagem em relação ao restante da comunidade matemática européia, que traduzia e utilizava os resultados de Newton, Taylor, Maclaurin, dentre outros, para sua própria notação. Por outro lado, os matemáticos britânicos não realizaram um esforço semelhante, colocando-se em situação de distanciamento em relação aos seus vizinhos (BALL, 1889, p.98).

Somado a isso, temos o fato da escola de Newton insistir no uso de demonstrações geométricas, mesmo após os princípios do cálculo diferencial já terem se tornados universais. Com isso, empregavam os métodos mais criativos possíveis para inserir tais demonstrações sempre que podiam. Daí uma resistência à análise e o fato de o critério de rigor britânico estar firmado na geometria sintética[2].

George Peacock foi o mais influente dos membros da escola analítica, que foi responsável por retirar os matemáticos britânicos desta situação de isolamento em relação ao restante da Europa. Isso chegou a ser um fato preocupante para tais matemáticos, uma vez que o isolamento perdurava desde a última metade do século XVIII.

O principal obstáculo para as inovações dos métodos analíticos e do cálculo diferencial vinha dos principais docentes e membros do senado, que consideravam qualquer tentativa de inovação como um pecado contra a memória de Newton (BALL, 1889, p.117).

Esse novo movimento, identificado como escola analítica, teve início com Robert Woodhouse, primeiro a publicar um trabalho que introduzia as novas notações do cálculo diferencial. Com título *Principles of analytical calculation*, sua obra foi publicada em 1803, em Cambridge, porém foi severamente criticada pela adoção dos novos métodos (BALL, 1889, p.118).

Em 1812, Peacock, Herschel e Babbage, seguindo a influência das observações de Woodhouse, concordaram em formar a Sociedade Analítica, com o objetivo de defender o uso dos

[2] Geometria sintética é a abordagem que prioriza o tratamento lógico-dedutivo, partindo de axiomas e postulados, a partir dos quais é possível demonstrar proposições. Normalmente se opõe a geometria analítica, ou seja, ao uso de coordenadas na geometria. Aqui exploramos essa diferença, ou seja, a geometria sintética em contrate com a geometria das coordenadas.

métodos analíticos e da nova notação do cálculo diferencial na universidade, no lugar da antiga notação de Newton (BALL, 1889, p.120).

A primeira das duas conquistas marcantes dessa sociedade foi, em 1816, a publicação da tradução do livro texto *Elementary differential calculus*, de Lacroix; e, a segunda, em 1817, foi a introdução por Peacock dos símbolos do cálculo diferencial no conjunto dos documentos do exame do senate-house (BALL, 1889, p.120).

Guicciardini (1989, p.136) destaca que, apesar da importância da Sociedade Analítica, há de se considerar o trabalho anterior de Woodhouse, em Cambridge, bem como de muitos outros centros de reforma igualmente importantes, desde academias militares como a *Royal Military Academy at Woolwich*, até universidades, como Oxford, Edinburgh, Glasgow, Dublin, dentre outras.

Além disso, Guicciardini afirma:

> Mas a segunda e mais importante contribuição dos membros da Sociedade Analítica foi que eles iniciaram uma tendência de pesquisa que caracterizou grande parte da matemática britânica até Cayley e Boole, As Memórias da Sociedade Analítica foram centradas no cálculo de operadores e equações funcionais. (GUICCIARDINI, 1989, p.137, tradução nossa)

Veremos adiante que, a partir das inovações da Sociedade Analítica, surgem matemáticos como George Boole e Cayley desempenhando papeis fundamentais para o desenvolvimento da pesquisa na Teoria dos Invariantes. Isso pode ser atribuído, em parte, a esse período de mudanças na matemática britânica, o que concorda com a afirmação de Guicciardini.

Dentre as muitas inovações da Sociedade Analítica, pode-se destacar o aumento progressivo de trabalhos em geometria analítica. Segundo Ball (1889, p.129), o único trabalho que introduzia o tema em Cambridge, no início do século XIX, tratava da Álgebra de Wood, que possuía um apêndice de aproximadamente trinta páginas no final do livro. O título era *On the application of algebra to geometry*, e continha as equações da reta, da elipse, e de poucas outras curvas. Logo, a necessidade de um livro texto em geometria analítica foi primeiramente suprida pelo trabalho de Henry Parr Hamilton em 1826 (BALL, 1889, p.129).

2.1 A geometria analítica de Henry Parr Hamilton

Henry Parr Hamilton (1794-1880) graduou-se no *Trinity College*, B.A., em 1816. Exerceu vários ofícios universitários, tomando o grau de M.A.[3] em 1819. O livro texto de Henry Parr Hamilton, *The Principles of Analytical Geometry Designed for use of students in the University*, como induz o próprio título, vinha suprir uma lacuna no ensino de geometria analítica em Cambridge. Em seu prefácio, o autor deixa claro que seu trabalho visa a atrair a atenção dos estudantes para esse ramo da ciência que considera extensamente útil para os superiores departamentos de matemática (HAMILTON, 1826, p.iii).

Sua abordagem detalhada possui duas partes: uma para geometria de duas dimensões e outra para geometria de três dimensões, incluindo transformações dos eixos coordenados e sólidos de revolução, além da apresentação formal da reta, parábola, elipse e hipérbole e das curvas e superfícies quaisquer de segunda ordem.

[3]Master of Arts, é um título que o candidato graduado (B.A.) concorre depois de três anos da graduação. Não se deve confundir com o mestrado, pois o candidato não é examinado por uma banca. M.A. substitui o B.A. e abre a possibilidade do portador de concorrer a uma vaga no Senado da Universidade, organismo de decisão e influência sobre a vida acadêmica. O M.A. também abre oportunidade de dar aulas no ensino superior.

No capítulo XI de sua obra, encontram-se transformações de coordenadas no espaço, tema que nos interessa, uma vez que Boole retoma essa idéia em seu artigo de 1841 sobre transformações lineares. Segue primeira proposição do livro de Hamilton:

> Prop. 1. Para passar de um sistema de eixos oblíquos para outro, a origem sendo a mesma. Sejam x, y, z e x', y', z' serem as coordenadas de um ponto a que se refere aos eixos primitivo e novo, respectivamente. Se o mesmo raciocínio for aplicado ao plano, que foi utilizado (72) no caso da reta, pode ser provado que as coordenadas primitivas são funções lineares das novas; vamos supor, por conseguinte,
>
> $$x = mx' + n y' + pz' ,$$
> $$y = m' x' + n' y' + p' z' ,$$
> $$z = m'' x' + n'' y' + p'' z' ,$$
>
> nas quais as constantes m, n, p . . . estão agora a serem determinadas. (HAMILTON, 1826, p.245, tradução nossa)

A transformação linear das variáveis era abordada de forma clara com a interpretação geométrica de mudança dos eixos coordenados. Hamilton acrescenta em sua observação, feita após desenvolver alguns de seus corolários:

> Observação. A transformação das coordenadas de um sistema retangular para outro, é subserviente a várias questões importantes nos departamentos de Mecânica. Entre os diferentes métodos que têm sido propostos para executar esta operação, o referido acima é o mais geralmente utilizado. Foi utilizado pela primeira vez por Euler, e foi subsequentemente adotado por Lagrange e de Laplace. (HAMILTON, 1826, p.251, tradução nossa)

Dois anos mais tarde, Hamilton publica *An analytical system of conic sections*, que foi substituído somente pelo trabalho de John Hymers, *Conic sections* de 1837 (BALL, 1889, p.130). Peacock também contribui com o ensino de geometria analítica num trabalho que, segundo Ball (1889, p.130), foi emitido anonimamente, em 1833, com o título *Syllabus of trigonometry, and application of algebra to geometry* e setenta páginas destinadas à geometria analítica. Houve uma segunda edição, em 1836, antes do trabalho de Hymers.

2.2 Contribuições de De Morgan

De Morgan foi igualmente importante propagador do uso da álgebra aplicada à geometria. Ele publica dois artigos no *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, um no quarto volume, no ano 1833, e outro no quinto volume, em 1835. O segundo artigo trata das superfícies de segunda ordem, uma pesquisa similar à primeira, que tratou das curvas de segunda ordem.

É importante notar que a principal referência britânica para estes artigos de De Morgan trata-se justamente do *Analytical geometry* de Henry Hamilton, conforme o próprio De Morgan cita em seu segundo artigo (DE MORGAN, 1835, p.93).

No primeiro artigo, *On the General Equation of Curves of Second Degree*, de 1830, De Morgan inicia apresentando seu objetivo:

> O objetivo deste trabalho é chamar a atenção para algumas propriedades das Curvas de Segundo Grau, por meio das quais a redução de suas equações de um conjunto de eixos para outro é materialmente facilitado. (DE MORGAN, 1833, p.71, tradução nossa).

Ele considera uma curva qualquer do segundo grau na qual os eixos formem um ângulo θ, logo $\widehat{\boldsymbol{xy}} = \boldsymbol{\theta}$, e que a origem seja movida para um ponto de coordenadas m e n nas direções de x e y. Também considera que os novos eixos possuem as seguintes inclinações, em comparação com os eixos originais, $\widehat{\boldsymbol{x'x}} = \boldsymbol{\phi}$ e $\widehat{\boldsymbol{y'x}} = \boldsymbol{\psi}$, sendo $\boldsymbol{x}'$ e $\boldsymbol{y}'$ os novos eixos coordenados, então $\widehat{\boldsymbol{x'y'}} = \boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\theta}'$. A partir daí, apresenta as equações da curva, no primeiro e no segundo sistema de eixos coordenados, respectivamente:

$$ay^2 + bxy + cx^2 + dy + ex + f = 0,$$
$$a'y'^2 + b'x'y' + c'x'^2 + d'y' + e'x' + f' = 0.$$

Com estas considerações, De Morgan encontra as relações abaixo, que representam x e y em função dos novos eixos coordenados:

$$x = \frac{\sin(\theta - \phi)}{\sin\theta}x' + \frac{\sin(\theta - \psi)}{\sin\theta}y' + m,$$
$$y = \frac{\sin\phi}{\sin\theta}x' + \frac{\sin\psi}{\sin\theta}y' + n.$$

Substituindo, na primeira equação do segundo grau esses valores de $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$, os resultados dos coeficientes de $\boldsymbol{y'^2}$, $\boldsymbol{x'y'}$, $\boldsymbol{x'^2}$, etc. devem ser proporcionais a $\boldsymbol{a}'$, $\boldsymbol{b}'$, $\boldsymbol{c}'$, etc.; feitas as substituições e desenvolvimentos, ele apresenta:

$$A = a - b\cos\theta + c\cos^2\theta,$$
$$B = \sin\theta(b - 2c\cos\theta),$$
$$C = c\sin^2\theta,$$
$$D = 2an + bm + d - \cos\theta(2cm + bn + e),$$
$$E = \sin\theta(2cm + bn + e),$$
$$F = an^2 + bmn + cm^2 + dn + em + f.$$

Desta etapa inicial de seu artigo, o autor tira algumas considerações:

> No qual é importante observar que, se as coordenadas primitivas forem retangulares $A = a$, $B = b$ e $C = c$. Se, além disso, a origem não for alterada $D = d$, $E = e$, $F = f$. Também, se os eixos de x' forem paralelos aos de x e $\widehat{x'y'} = 90°$, a equação torna-se $Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0$. (DE MORGAN, 1833, p. 72, tradução nossa)

A partir dos desenvolvimentos de Gauss e Lagrange em substituições lineares, surgem, na primeira metade do século XIX, pesquisadores ingleses interessados em desenvolver as propriedades dessas substituições e de suas aplicações à geometria e, consequentemente, às demais áreas das ciências físicas, como a mecânica. Nesses dois artigos, De Morgan demonstra estar entre esses pesquisadores, o que nos sinaliza o interesse crescente em se aplicar à álgebra uma interpretação geométrica.

Logo, conforme a escola analítica vencia as barreiras impostas pela tradição de Newton, não houve somente um ganho nos métodos analíticos e do cálculo diferencial, mas também ocorreu uma abertura para todo trabalho continental, inclusive para esses métodos de aplicações da álgebra para geometria.

A seguir, destacaremos o primeiro trabalho de Cayley em que revela seu interesse por geometria analítica.

2.3 Primeiro artigo de Arthur Cayley

O movimento da Escola analítica e a sua formação acadêmica explicam o interesse do primeiro artigo de Cayley, *On a Theorem in the Geometry of Position,* de 1841, de fazer uso da relação álgebra e geometria, o que está em consonância com o movimento trazido pela escola analítica e com sua leitura das recentes produções matemáticas dos principais jornais de sua época.

O trecho inicial do artigo deixa clara sua intenção:

> Propomo-nos aplicar o seguinte teorema (novo?) à solução de dois problemas em Geometria Analítica.
>
> Dados os símbolos
>
> $$|\boldsymbol{\alpha}|, \begin{vmatrix} \boldsymbol{\alpha}, & \boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{\alpha}', & \boldsymbol{\beta}' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \boldsymbol{\alpha}, & \boldsymbol{\beta}, & \boldsymbol{\gamma} \\ \boldsymbol{\alpha}', & \boldsymbol{\beta}', & \boldsymbol{\gamma}' \\ \boldsymbol{\alpha}'', & \boldsymbol{\beta}'', & \boldsymbol{\gamma}'' \end{vmatrix}, \&c.$$
>
> denotam as quantidades
>
> $$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha\beta' - \alpha'\beta}, \boldsymbol{\alpha\beta'\gamma'' - \alpha\beta''\gamma' + \alpha'\beta''\gamma - \alpha'\beta\gamma'' + \alpha''\beta\gamma' - \alpha''\beta'\gamma}, \&c.$$
>
> (CAYLEY, 1841, p. 267, tradução nossa)

Neste artigo de 1841, Cayley se propôs a encontrar a relação existente entre cinco pontos colocados no espaço arbitrariamente. Usando para isto recursos algébricos, dentre os quais propriedades dos determinantes e uso das equações da circunferência e da esfera (CAYLEY, 1841, p. 268).

Crilly (2006, p. 55) destaca alguns fatos importantes deste primeiro artigo de Cayley, a começar pelo fato desse problema da relação entre pontos no espaço já ter sido tratado por J. L. Lagrange, Lazare Carnot e Jacques Binet (amigo de Cauchy). Isso mostra a capacidade de Cayley em reconhecer problemas e interpretá-los, trazendo para a realidade inglesa e expressando relações algébricas por meio de determinantes. Outro destaque de Crilly (2006, p. 55), consiste no fato curioso de o problema recair novamente na "moderna teoria dos invariantes" na segunda metade do século XIX, ou seja, de certa forma, sua primeira investigação possui relação com a teoria que ajudaria a fundar a partir de 1845.

Esse trabalho inicial demonstra o grande interesse de Cayley pela álgebra aplicada à geometria. O fato condiz com as possíveis influências recebidas por seu primeiro tutor, George Peacock, e pelo ambiente propício criado pela escola analítica e por suas leituras, enquanto iniciava seus estudos em Cambridge.

3 O INÍCIO DA TEORIA DOS INVARIANTES

Boole publica, no terceiro volume do *The Cambridge Mathematical Journal*, um artigo em duas partes com título: *Exposition of a general theory of linear transformations*. Na primeira parte, em sua introdução, faz uma breve referência às suas investigações e cita: *Mécanique Analytique* de Lagrange, uma memória de Laplace (ele chama de especial memória, mas não a identifica), Lebesgue e Jacobi (sem identificar os respectivos trabalhos desses matemáticos), uma memória de Cauchy (também sem identificar) e o artigo de De Morgan que trata das superfícies do segundo grau que já temos citado.

Antes de entrar no texto cabe aqui destacar o que é um invariante, em notação atual. Um invariante da forma binária $Q(x, y)$ de grau n é a função $I(a) = I(a_0, \dots, a_n)$, dependendo dos seus coeficientes $a = (a_0, \dots, a_n)$, que, a menos do determinante dos coeficientes da substituição linear, permanecem inalterados sob uma dada transformação linear: $I(a) = (l.m' - l'.m)^k.I(a')$. Onde $a' = (a'_0, \dots, a'_n)$ são os coeficientes do polinômio transformado e K é chamado o "peso" do invariante. O texto de Boole dá seguimento ao que já era conhecido deste Gauss com os discriminantes. Além disso, cabe destacar que a notação da teoria dos invariantes é devida ao artigo de Sylvester (1851), onde ele dá os nomes as definições de vários dos conceitos empregados na teoria dos invariantes, tais como: invariante, covariante, hessiano, etc..

Retornando ao arutgo de Boole, em um de seus exemplos, Boole considera a forma quadrática $Q = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$, com isso o conjunto de derivadas parciais é:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dQ}{dx} = 2Ax + 2By = 0 \\ \frac{dQ}{dy} = 2Bx + 2Cy = 0 \end{aligned}\right\},$$

que pode ser reduzido à forma:

$$\left.\begin{aligned} Ax + By = 0 \\ Bx + Cy = 0 \end{aligned}\right\}.$$

Procedendo à eliminação das variáveis, Boole encontra: $\theta(Q) = B^2 - AC$, ou $\theta(Q) = AC - B^2$, que é o discriminante da forma quadrática apresentada. Utiliza a nomenclatura que posteriormente seria introduzida por Sylvester, em seu artigo de 1851, $\theta(Q)$ é um invariante de Q.

Boole avança com um novo exemplo de uma forma quadrática de três variáveis. Esse caso poderia ser considerado mais difícil se não fosse empregado seu novo método. Boole apresenta $Q = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Exz + 2Fxy$, o novo conjunto de equações, depois do processo de derivadas parciais, fica como abaixo:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dQ}{dx} = Ax + Fy + Ey = 0 \\ \frac{dQ}{dy} = Fx + By + Dz = 0 \\ \frac{dQ}{dz} = Ex + Dy + Cz = 0 \end{aligned}\right\}$$

Após a eliminação das variáveis, ele encontra: $\theta(Q) = ABC + 2DEF - (AD^2 + BE^2 + CF^2)$, que, nos termos de Sylvester, é o invariante desse polinômio homogêneo.

O próximo exemplo que Boole, igualmente de difícil resolução pela prática anterior, é o de uma cúbica binária: $Q = Ax^3 + 3Bx^2y + 3Cxy^2 + Dy^3$, onde o sistema de equações, pós as derivadas parciais, é:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 0,$$

$$Bx^2 + 2Cxy + Dy^2 = 0,$$

em que, ao se eliminar x^2 e y^2 e dividir os resultados por y e por x, respectivamente, encontrou:

$$\left.\begin{aligned} 2(B^2 - AC)x - (AD - BC)y = 0 \\ (AD - BC)x - 2(C^2 - BD)y = 0 \end{aligned}\right\},$$

Que, após a eliminação das variáveis, encontra: $\theta(Q) = (AD - BC)^2 - 4(B^2 - AC)(C^2 - BD)$, novamente uma forma invariante segundo a notação posterior de Sylvester.

Boole completa afirmando que o procedimento pode ser realizado para casos mais complicados (BOOLE, 1841b, p. 7). Em suas considerações seguintes ele pretende relacionar as formas $\theta(Q)$ e $\theta(q)$ e para isso utiliza um método próximo ao que aborda em seu artigo anterior. Boole (1841b, p. 10, tradução nossa) diz: “Este, de fato, consiste numa extensão do método que eu, em uma ocasião anterior, empreguei, quando tratei o mesmo tema nas páginas deste Jornal, vide No. VIII. Vo. II p. 64.”. Realmente seu método e seu interesse pelo tema podem ser verificados no artigo anterior, já apresentado aqui.

Nos interessa também, além de uma apresentação do início da Teoria dos Invariantes, a visão geométrica dessas transformações. E Boole explicita isso, mostrando sua importância. Num exemplo, seleciona o caso abaixo (1841a, p. 11):

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = a'x'^2 + 2b'x'y' + c'y'^2, \text{ (01)}$$

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = A'x'^2 + 2B'x'y' + C'y'^2. \text{ (02)}$$

No exemplo, tem-se: $\theta(Q) = AC - B^2$, $\theta(q) = ac - b^2$, $\theta(R) = A'C' - B'^2$, $\theta(r) = a'c' - b'^2$, que seriam as soluções pelo método anteriormente apresentado. Boole aplica seu método:

$$\frac{\theta(Q)}{\theta(q)} = \frac{\theta(R)}{\theta(r)} \text{ (03) e}$$

$$\frac{(a\frac{d}{dA}+b\frac{d}{dB}+c\frac{d}{dC})\theta(Q)}{\theta(q)} = \frac{(a'\frac{d}{dA'}+b'\frac{d}{dB'}+c'\frac{d}{dC'})\theta(R)}{\theta(r)}, \text{ (04)}$$

realizando as substituições e resolvendo as diferenciações:

$$\frac{AC-B^2}{ac-b^2} = \frac{A'C'-B'^2}{a'c'-b'^2} \text{ (05) e}$$

$$\frac{aC-2bB+cA}{ac-b^2} = \frac{a'C'-2b'B'+c'A'}{a'c'-b'^2}. \text{ (06)}$$

Em relação à primeira igualdade, (01), ele faz a seguinte consideração:

> Isto corresponde à idéia geométrica de um mudança de coordenadas, a partir de um par de eixos x, y, possuindo um ângulo θ, para um outro par x', y', cujo ângulo de inclinação é de θ', então (01) tornar-se
>
> $$x^2 + 2xycos\theta + y^2 = x'^2 + 2x'y'cos\theta' + y'^2$$
>
> $$\therefore a = 1, b = \cos\theta, c = 1, a' = 1, b' = \cos\theta', c' = 1.$$
>
> Desde (41) e (42), então
>
> $$\frac{AC-B^2}{(\sin\theta)^2} = \frac{A'C'-B'^2}{(\sin\theta')^2},$$
>
> $$\frac{A-2B\cos\theta+C}{(\sin\theta)^2} = \frac{A'-2B'\cos\theta'+C'}{(\sin\theta')^2}. \text{ (BOOLE, 1841a, p. 11)}$$

Logo, desde a primeira parte de seu trabalho sobre transformações lineares, Boole se utiliza do fato geométrico dessas transformações poderem ser interpretados como uma mudança dos eixos coordenados. Isso ainda foi destacado em outro exemplo, no mesmo artigo, em que:

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dyz + 2exz + 2fxy$$
$$= a'x'^2 + b'y'^2 + c'z'^2 + 2d'y'z' + 2e'x'z' + 2f'x'y',$$

pelo mesmo processo, corresponde a uma mudança do sistema de eixos x, y, z para o x', y', z'; onde se as inclinações entre x e y, y e z, x e z são, respectivamente, iguais a χ, ϕ, ψ, e as inclinações para o outro sistema de eixos, x' e y', y' e z', x' e z', sendo, respectivamente, iguais a χ', ϕ', ψ', então:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2yz\cos\phi + 2xz\cos\psi + 2xy\cos\chi$$
$$= x'^2 + y'^2 + z'^2 + 2y'z'\cos\phi' + 2x'z'\cos\psi' + 2x'y'\cos\chi'.$$

Após estas considerações, chega ao seu mais importante resultado, o seguinte teorema:

> Se Q_n é uma função homogênea de grau n, com m variáveis que, pelos teoremas lineares (80)[4] é transformado em R_n, uma similar função homogênea; e se γ representa o grau de $\theta(Q_n)$ e $\theta(R_n)$, então

[4] O item (80) trata da substituição linear das variáveis.

$$\boldsymbol{\theta(Q_n)} = \frac{\boldsymbol{\theta(R_n)}}{\boldsymbol{E}^{\frac{\boldsymbol{\gamma n}}{\boldsymbol{m}}}} \ ,$$

> $\boldsymbol{E}$ sendo o resultado obtido pela eliminação das variáveis dos segundos membros dos teoremas lineares (80), igualado a 0. (BOOLE, 1841a, p. 19)

Parshall (1989, p. 162) afirma que Boole acerta nesse teorema aquilo que se tornaria a definição de invariante. Pode se constatar que Boole disse, em outras palavras, que $\boldsymbol{\theta(Q_n)}$ e $\boldsymbol{\theta(R_n)}$ são iguais a menos de uma potência do determinante formado pelos coeficientes da transformação linear.

A segunda parte do artigo destina-se a exibir novos resultados, exemplos que ilustram a efetividade de suas técnicas, além da aplicabilidade dos teoremas. Boole novamente utiliza o fato de essas transformações serem interpretadas geometricamente como uma mudança do sistema de eixos coordenados. Aplica inclusive o caso de coordenadas ortogonais (ele chama de “retangulares”) que reduz a equações mais simples (BOOLE, 1841b, p. 118).

Ainda na segunda parte de seu artigo, aplica seus métodos à solução de equações algébricas, dando um claro exemplo da forma cúbica (BOOLE, 1841b, p. 118).

No final da segunda parte de seu artigo, faz duas considerações importantes. A primeira, que considera a conexão entre transformações lineares e extensivas classes de teoremas, dependendo de equações diferenciais parciais, particularmente aquelas que são encontradas em geometria analítica. A segunda consideração ele encoraja futuras investigações, dizendo acreditar ser um amplo campo de pesquisa e descoberta (BOOLE, 1841b, p. 119).

Essas considerações nos mostram dois fatores importantes e claramente percebíveis em nossa leitura dos artigos de Boole. Primeiro, seu forte caráter geométrico que não foi apenas acidental, mas sim uma visão clara desde os seus artigos anteriores. Segundo, ele abre um novo campo de pesquisa grandioso, algo que o próprio matemático considera e, apesar de dizer que não pretende explorar, escreve outros artigos neste campo de pesquisa, principalmente em 1851. Nesse espirito, Cayley, Sylvester e Salmon desenvolveram a teoria dos invariantes com uma visão geométrica bem clara a cerca das transformações lineares, dos invariante e covariantes. Dias e Grimberg (2015, p. 25) abordam esses aspectos e mostram que por volta do meado do século XIX havia uma interação entre diversos trabalhos que envolviam geometria projetiva e teoria dos invariantes.

4 GEOMETRIA PROJETIVA ANALÍTICA

A geometria projetiva analítica pode ser identificada na França através do *Aperçu Historique* de Michel Chasles e na Alemanha com os trabalhos de Julius Plücker, principalmente com o *System der Analytischen Geometrie.*

Mansion (1873, p. 314) ressalta a importância do trabalho de Plücker sobre coordenadas homogêneas e o tratamento analítico das propriedades projetivas. Destaca duas vantagens deste novo método: a idéia das curvas e das superfícies mais gerais e os imaginários que surgem nas equações algébricas. Plücker fez belas aplicações desse método para estudar curvas de terceira ordem (MANSION, 1873, id.). Ainda menciona Möbius e seu cálculo baricêntrico, destacando o fato de que, depois, as principais ideias foram sintetizadas por Steiner e com desenvolvimentos de Chasles, em seu *Aperçu Historique* (MANSION, 1873, p.315).

Esse trabalho de Chasles exerceu influência sobre as pesquisas de Cayley (CRILLY, 2006, p.65). Podem-se citar como exemplos os primeiros artigos de Cayley que tratam de curvas algébricas: *On the intersection of curves* (1843) e *On the theory of algebric curves* (1845). No primeiro, o autor cita um teorema presente no *Aperçu Historique* que Chasles usa para demonstrar o teorema de Pascal. O teorema como apresentado por Cayley: “Se uma curva de terceira ordem passa através de oito pontos de interseção de duas curvas de terceira ordem, ela passará através do nono ponto de interseção”. (CAYLEY, 1843, p. 211, tradução nossa).

Cayley estende a definição para curvas de ordem “m” e “n” e relaciona aos $m.n$ pontos de interseção (CAYLEY, 1843, p. 212).

Já no segundo artigo, Cayley considera os casos nos quais a interseção pode ser menor que $m.n$, considerando formas de ordem “m” e “n”. E, no final, cita duas fontes de referência no assunto: Jacobi, *Theoremata de punctis intersectionis duarum curvarum algebraicarum*, do jornal do Crelle (1836, volume XV) e Plücker, *Théorèmes généraux concernant les equations à plusieurs variables, d’un degré quelconque entre un nombre quelconque d’inconnues*, jornal do Crelle (1837, volume XVI).

Em seus primeiros artigos, pode-se constatar o quanto Cayley conhecia dos trabalhos dos matemáticos continentais, como Lagrange, Jacobi, M. Chasles, Plücker, dentre outros. Tal fato nos ajuda a entender o rápido desenvolvimento dos artigos de Cayley e sua extraordinária produção matemática.

É importante destacar o precoce interesse de Cayley sobre polinômios homogêneos, formas homogêneas, como fica perceptível na introdução de seu segundo artigo. Cayley simboliza essas formas de grau m como H_m, deixando clara a propriedade de homogeneidade ao afirmar que os termos de H_m são os de U, uma função de coeficientes inteiros e racionais, todos de grau m (CAYLEY, 1845, p. 103).

Jacobi, em seu artigo de 1836, além mencionar o uso de funções homogêneas, oferece como referência seu outro trabalho, também do Jornal do Crelle, de 1833, que investiga transformações de polinômios homogêneos por meio de substituições lineares (JACOBI, 1835, p. 115).

Em artigo de 1833, dentre seus desenvolvimentos, pode-se ver a busca por relações entre os coeficientes desses polinômios (JACOBI, 1833, p. 7). Boole vai além, estabelecendo as características dessas relações, bem como um método novo de encontrá-las.

Em meados de 1844, Cayley demonstra seu interesse por esse campo de pesquisa através de uma carta endereçada a Boole.

5 A INFLUÊNCIA DE GEORGE BOOLE SOBRE CAYLEY

Crilly (2006, p. 86) informa que, em junho de 1844, Cayley, escreve uma carta a George Boole, enviando alguns desenvolvimentos surgidos após sua leitura do artigo de Boole. Cayley escreve sobre seu interesse pelo novo tema de pesquisa:

> Permita-me usar do pretexto do prazer que me proporcionou um artigo seu publicado há algum tempo no *Mathematical Journal*, *On the theory of linear transformations*, e do interesse que eu tomei pelo assunto, para enviar algumas fórmulas em relação a este tema, que foram sugeridas por mim através de seu artigo muito interessante; eu ficaria feliz se elas prevalecerem sobre vós para retomar o assunto, o que realmente parece inesgotável. (CAYLEY apud CRILLY, 2006, p. 86, tradução nossa)

Logo, a comunicação entre Boole e Cayley nos mostra o quanto de interesse os artigos de 1841 daquele despertaram neste, levando-o a encontrar métodos próprios e mais eficazes do que o de Boole, o que fica registrado em seus artigos de 1845 e 1846 em transformações lineares que apresentam seus métodos na Teoria dos Invariantes.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O crescente uso da álgebra aplicada à geometria pode ser verificado a partir de trabalhos como os de Hamilton, De Morgan, Cayley e Boole. O interesse inicial está na investigação das substituições lineares que foi alvo principalmente de De Morgan, Boole e Cayley.

O artigo de 1841 de Boole, escrito em duas partes, além de marcar o início da teoria dos invariantes, nos mostra o quanto essa teoria já possuía relações geométricas desde os seus desenvolvimentos iniciais. Boole continua utilizando a interpretação da mudança dos eixos coordenados e destaca que a nova teoria seria frutífera, utilizando o cálculo diferencial aplicado à geometria analítica.

Cayley, antes de se comunicar com Boole, interessa-se por pesquisar as curvas algébricas, pode-se perceber a influência de Chasles e Plücker sobre seus desenvolvimentos. Em 1844, ele demonstra seu interesse na nova teoria de Boole e comunica alguns desenvolvimentos inspirados pelo já citado artigo de 1841.

Com isso, percebemos uma forte relação entre álgebra e geometria na primeira metade do século XIX que vai se estender para a geometria projetiva, além de favorecer o surgimento de modelos para as geometrias não euclidianas, a partir de 1859 com a sexta memória sobre os *quantics* de Cayley.

REFERÊNCIAS

BALL, W. W. R. **A History of the Study of Mathematics at Cambridge**. [S.l.]: University Press, 1889.

BERNARDES, Al. Uma Proposta para Integrar a História da Matemática ao Ensino de Matemática. **HIPÁTIA-Revista Brasileira de História, Educação e Matemática**, v. 4, n. 1, p. 84-101, 2019.

BOOLE, G. Exposition of a General Theory of Linear Transformations – Part I. **The Cambridge Mathematical Journal**, v. 3, n. 13, p. 1-20, 1841a.

BOOLE, G. Exposition of a General Theory of Linear Transformations – Part II. **The Cambridge Mathematical Journal**, v. 3, n. 15, p. 106-118, 1841b.

CAYLEY, A. On a theorem in the geometry of position. **Cambridge Mathematical Journal**, v. 2, p. 267–271, 1841.

CAYLEY, A. On the intersection of curves. **The Cambridge mathematical Journal**, v. 3, p. 211-213, 1843.

CAYLEY, A. On the theory of algebric curves. **The Cambridge mathematical Journal**, v. 4, p. 102-112, 1845.

CRILLY, T. **Arthur Cayley Mathematician Laureate of the Victorian Age**. Baltimore, MD: Johns Hopkins University Press, 2006. 609 p.

DE MORGAN, A. On the general equation of curves of second degree. **Transactions of The Cambridge Philosophical Society**, v. 4, p. 71–78, 1833.

DE MORGAN, A. On the general equation of curves of second degree. **Transactions of The Cambridge Philosophical Society**, v. 5, p. 77–94, 1835.

DIAS, L. S.; GRIMBERG, G. E. Álgebra e Geometria Projetiva Analítica na Inglaterra dos anos 1841-1853. **Llull: Revista de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias y de las Técnicas**, v. 38, n. 81, p. 11-31, 2015.

GUICCIARDINI, N. **The development of Newtonian calculus in Britain, 1700-1800**. [S.l.]: Cam- bridge University Press, 1989.

HAMILTON, H. P. **The Principles of Analytical Geometry Designed for use of students in the University**. [S.l.]: Cambridge University Press, 1826.

JACOBI, C. G. J. De binis quibuslibet functionibus homogeneis secundi ordinis per substitutiones lineares in alias binas transformandis, quae solis quadratis variabilium constant ; una cum variis theorematis de transformatione et determinate integralium multiplicium. **Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelle)**, v. 12, p. 1-69, 1833.

JACOBI, C. G. J. De eliminatione variabilis e duabus aequationibus algebraicis. **Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelle)**, v. 15, p. 101-124, 1835.

MANSION, P. Notice sur les travaux de Jules Plücker. **Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques**, v. 5, p. 313-319, 1873.

PARSHALL, K. H. Toward a History of Nineteenth-Century Invariant Theory. In: ROWE, D. E.; MCCLEARY, J. **The History of Modern Mathematics**. California, San Diego: Academic Press, v. 1, p. 157-206, 1989.

Submetido em agosto de 2021.
Aprovado em dezembro de 2021.