Concepções Hamiltonianas para a Constituição dos Quaternions

Hamiltonian Conceptions for the Constitution of Quaternions

Rannyelly Rodrigues de **Oliveira**[*]
Maria Helena de **Andrade****

Resumo

Este trabalho tem, em seu escopo, a descrição das concepções fundamentais dos quaternions hamiltonianos. Dessa forma, foi desenvolvida uma historiografia dos quaternions numa abordagem atualizada da História da Matemática. Essa história foi derivada de um contexto e uma temporalidade marcada pela discussão da estabilidade dos fundamentos da Álgebra Clássica e da conceituação dos números negativo e imaginário considerando, nesse processo, elementos de ordem epistemológica, axiológica, filosófica, social, dentre outros aspectos. Para isso, foi assumida a seguinte questão norteadora: quais aspectos preliminares e heurísticos influenciaram o desenvolvimento dos quaternions hamiltonianos? Diante disso, primeiramente, foram apresentados os aspectos preliminares pertinentes ao desenvolvimento histórico dos quaternions. Em seguida, foi feita uma descrição do percurso heurístico realizado por Hamilton durante a construção dos quaternions. E, finalmente, foi discutida sobre a constituição algébrica quaterniônica e sua representação institucionalizada. Portanto, compreende-se que os aspectos contextuais e temporais influenciam na formação do perfil heurístico de um matemático e no sentido que o corpo científico se institucionaliza. Embora, os tripletos não tenham alcançado sucesso na tradição extensiva algébrica, a criação dos quaternions traduziu um estágio de transição na Álgebra possibilitando, assim, o desenvolvimento de outras álgebras como a não-comutativa. E, a investigação histórica dos quaternions, por meio de uma releitura e reinterpretação numa perspectiva historiográfica atualizada, oportunizou explorar os campos epistêmicos do seu desenvolvimento histórico, até então, desvalorizados. **Palavras-chave**: Quaternions. Hamilton. História da Matemática. Historiografia da História da Matemática.

Abstract

This work has, in its scope, the description of the fundamental conceptions of the Hamiltonian quaternions. Thus, a historiography of the quaternions was developed in an updated approach to the History of Mathematics. This story was derived from a context and a temporality marked by the discussion of the stability of the foundations of Classical Algebra and the conceptualization of negative and imaginary numbers, considering, in this process, elements of an epistemological, axiological, philosophical, social order, among other aspects. For this, the following guiding question was assumed: which preliminary and heuristic aspects influenced the development of the Hamiltonian quaternions? Therefore, first, the preliminary aspects relevant to the historical development of the quaternions were presented. Then, a description of the heuristic path performed by Hamilton during the construction of the quaternions was made. And finally, it was discussed about the quaternionic algebraic constitution and its institutionalized representation. Therefore, it is understood that contextual and temporal aspects influence the formation of the heuristic profile of a mathematician and in the sense that the scientific body is institutionalized. Although triplets were not successful in the extensive algebraic tradition, the creation of quaternions translated a transitional stage in Algebra, thus enabling the development of other algebras such as non-commutative. And, the historical investigation of the quaternions, through a rereading and reinterpretation in an updated historiographic perspective, provided an opportunity to explore the epistemic fields of their historical development, which had been devalued until then. **Keywords**: Quaternions. Hamilton. History of Mathematics. Historiography of the History of Mathematics.

[*] Doutoranda em Ensino de Ciências e Matemática (UFRN). Docente Efetiva na Rede Estadual de Educação Básica do Ceará e Agente de Gestão da Inovação Educacional na Secretaria de Educação do Ceará (SEDUC/CE). Fortaleza, Ceará, Brasil. Lattes: http://lattes.cnpq.br/0165311853960226. Orcid: https://orcid.org/0000-0002-3850-5237. E-mail: ranny.math.06@gmail.com

[**] Doutoranda em Ensino de Ciências e Matemática (UFRN). Docente Efetiva na Rede Municipal de Educação Básica de Fortaleza (SME/CE). Fortaleza, Ceará, Brasil. Lattes: http://lattes.cnpq.br/4405954791230148. Orcid: https://orcid.org/0000-0003-2931-1868. E-mail: helenaeducadoramat@gmail.com

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho tem o propósito de descrever as concepções fundamentais dos quaternions hamiltonianos. Para isso, buscou-se aqui discorrer sobre os quaternions numa abordagem historiográfica atualizada da História da Matemática. Baseado em Saito (2018), essa perspectiva metodológica-historiográfica atualizada tem o objetivo de destacar os cenários e contextos, nos quais, ocorreu o desenvolvimento e a expansão do conhecimento matemático.

Assim, será apresentada uma história dos quaternions oriunda de um contexto e uma temporalidade evidenciada pela discussão da estabilidade dos fundamentos da Álgebra Clássica e da conceituação dos números negativo e imaginário considerando, nesse processo, elementos de ordem epistemológica, axiológica, filosófica, social, dentre outros aspectos.

Para isso, foi assumida a seguinte questão norteadora: quais aspectos preliminares e heurísticos influenciaram o desenvolvimento dos quaternions hamiltonianos? Nesse sentido, vale salientar que, neste artigo, a descrição do percurso heurístico hamiltoniano foi feita a partir da análise biográfica de William Rowan Hamilton (1805-1865) baseada no estudo do Dicionário de Biografias Científicas de Pereira (2007). A realização da historiografia descritiva e representacional dos quaternions teve como fundamentação os estudos das obras de Hamilton (1837) e Smith (1929).

Isto posto, este trabalho foi organizado em três seções intermediárias. A primeira seção versará sobre os aspectos preliminares pertinentes ao desenvolvimento histórico dos quaternions, marcado pelas ideias revolucionárias que questionavam a base da Álgebra Clássica estabelecida como única e verdadeira naquele período. A segunda seção abrangerá a descrição do percurso heurístico realizado por Hamilton durante a construção dos quaternions. E, a terceira seção discutirá sobre a constituição algébrica quaterniônica até sua institucionalização representacional como é conhecida atualmente.

2 CONCEPÇÕES PRÉVIAS

Nesta seção, serão apresentados alguns aspectos preliminares pertinentes ao contexto relacionado ao surgimento dos quaternions. Vale salientar que Hamilton, ao desenvolver os quaternions, pretendia romper com os fundamentos da Álgebra Clássica, para isso, realizando uma extensão algébrica dos números complexos bidimensionais a dimensões superiores.

Esse processo extensivo causou uma perda das propriedades da Álgebra Clássica oportunizando, assim, a constituição de outras álgebras. Vale apontar também que, de acordo com Pereira (2007), o matemático Gauss estudou as estruturas quaterniônicas muito antes de Hamilton, mas não publicou essas pesquisas. Diferentemente de Gauss, Hamilton compartilhou seus cálculos quaterniônicos e, por isso, a Álgebra dos Quaternions faz referência ao seu nome.

No final do século XVIII, a Álgebra era vista como uma aritmética simbólica que, assim como uma tipologia de linguagem, representava números e suas operações. Assim sendo, era considerada como uma ciência das magnitudes (das quantidades). Dessa forma, acreditava-se que a Álgebra era a ciência que investigava a solução de equações algébricas numa perspectiva de universalidade aritmética (NEVES, 2008).

Além disso, predominava a tradição euclidiana de se diferenciar número de razão entre grandezas. Não tinha uma definição fechada para os números negativos e os números imaginários. Numa abordagem resolutiva das equações algébricas, esses tipos de números geraram resultados relevantes para a ciência, contudo, representavam um entrave epistemológico na Álgebra surgido a partir da reflexão: como justificar a existência de objetos algébricos menores do que nada e/ou que assumam um quadrado algébrico negativo?! (NEVES, 2008).

A extensão conceitual de número foi bastante discutida durante a construção do corpo teórico da Matemática Pura na Alemanha. Na França, durante os séculos XVIII e XIX, somente os números absolutos eram entendidos como objetos matemáticos, todavia, já se vislumbrava a constituição de números negativos e complexos. Cauchy assumia um conceito de número fundamentado na diferenciação entre essa conceituação de número e a noção de quantidade. (ROQUE, 2012).

E Ampère defendia que os números negativos não são essencialmente números (com significados próprios) e sim quantidades, dessa maneira, quando se associa um sinal a um número absoluto, ele deve ser compreendido como uma quantidade, de modo que as duas quantidades são iguais quando possuem sinais e valores numéricos iguais. E as quantidades são opostas quando possuem mesmo valor numérico e sinais diferentes. (ROQUE, 2012).

Nesse viés, no início do século XIX na Alemanha, alguns matemáticos acreditavam que o conceito de número deveria ser avaliado sob duas vertentes: uma relacionada à natureza de número e outra referente à noção de quantidade. Nesse contexto, destacou-se o astrônomo Gauss que defendia que os números negativos só podiam ser corretamente interpretados quando se considerava que os objetos contados podiam ser opostos. O astrônomo explicava que os números não devem ser estudados apenas pela sua natureza, mas também por estarem relacionados a outros objetos. (ROQUE, 2012).

Diante do exposto, vale esclarecer que o matemático Gauss foi um dos principais colaboradores do desenvolvimento da Geometria não-euclidiana e da Álgebra não-comutativa, as quais marcaram o século XIX como sendo duas concepções matemáticas revolucionárias, pois questionavam a veracidade dos fundamentos da Álgebra e Geometria. Contudo, não se pode ignorar a contribuição, nesse sentido, de Hamilton que, posteriormente a Gauss, defendeu que a conceituação dos números negativo e imaginário assumiu, *a priori*, como parâmetro a concepção da Ciência de Ordem (temporal e espacial) e, portanto, não se restringiu à Ciência da Magnitude. Essa concepção hamiltoniana impulsionou o desenvolvimento dos quaternions. (HAMILTON, 1837 & SMITH, 1929).

3 ITINERÁRIO HEURÍSTICO DE HAMILTON

Os quaternions foram definidos e desenvolvidos, em outubro de 1843, pelo Matemático e Astrônomo irlandês William Rowan Hamilton que, desde então, dedicou os últimos 22 anos de sua vida à pesquisa quaterniônica. Por volta de 1820, Hamilton começou a estudar a obra (os *Principia*) de Newton o que instigou seu interesse pela Astronomia. Em 1822, concentrou seus estudos na área da Matemática, especificamente, sobre propriedades de curvas e superfícies desencadeando, assim, um conjunto de pesquisas sobre sistemas de linhas retas em um plano. Hamilton ingressou no Trinity College de Dublin em 1823. Em 1827, foi nomeado Astrônomo Real do Observatório de Dunsink e Professor de Astronomia da Trinity College.

As duas principais contribuições de Hamilton para a comunidade científica foram a determinação da função característica, no âmbito da Física com aplicabilidade na óptica e dinâmica, e a definição dos números hipercomplexos quaterniônicos que tiveram grande repercussão no contexto da Matemática Acadêmica. Em 1828, em diversos diálogos com seu amigo John T. Graves, Hamilton questionava a estabilidade dos fundamentos da Álgebra, em particular, o que diz respeitava à concepção dos números negativos e imaginários considerados como elementos essenciais para Álgebra. Contudo, Hamilton defendia a necessidade de reescrever os princípios lógicos da Álgebra.

Em 1828, foi publicado um trabalho (*Treatise on the Geometrical Representation of the Square Roots of Negative Quantities*) de John Warren sobre quantidades negativas a partir de representações geométricas de raízes quadradas. Incentivado por Graves, em 1829, Hamilton estudou essa obra, na qual havia uma descrição do diagrama de Argand, que consistia em um sistema de dois eixos retangulares, de maneira que, um eixo representava a parte real do número complexo e outro eixo sua parte imaginária.

Essa representação gráfica designou Hamilton a dois questionamentos: (*i*) Seria possível conceber outra representação algébrica de números complexos que explicitasse todas as suas operações válidas? (*ii*) Seria possível definir um número hipercomplexo que esteja associado ao espaço tridimensional assim como o número complexo usual se relaciona com o plano bidimensional? Hamilton imaginava que se isso fosse possível, esse número complexo tridimensional deveria ser uma representação algébrica natural do espaço, em contraposição à representação arbitrária de coordenadas. (PEREIRA, 2007).

Em busca de respostas, em novembro de 1833, Hamilton desenvolveu na Real Academia Irlandesa estudos sobre pares algébricos, onde obteve resposta a sua primeira interrogativa. Esses pares algébricos eram, de fato, pares de números reais, para os quais ele definiu as operações de adição e multiplicação. Posteriormente, Hamilton demonstrou que esses pares numéricos permitiam a composição de uma álgebra de divisão associativa e comutativa que obedecia às regras operacionais dos números complexos.

Em junho de 1835, foi divulgado o segundo trabalho de Hamilton que também discursava sobre os pares algébricos. Esse trabalho (*Preliminary and elementary essay on álgebra as the Science of pure time*) apresentava noções preliminares e elementares inerentes à álgebra, considerando-a como uma ciência do "tempo puro", de modo que os pares eram reconhecidos como as etapas no tempo. Em 1837, Hamilton reuniu os seus dois primeiros trabalhos em uma única obra, acrescentando-lhes comentários pormenorizados e a publicou nos *Proceedings of the Royal Irish Academy.*

A concepção dos complexos sofreu uma influência filosófica kantiana. Isso pode ser percebido nas pesquisas gaussianas em 1800, quando Gauss assumiu um conceito mais independente de número, de maneira que definiu os números negativos e complexos a partir dos pressupostos defendidos pelo professor Förstemann, o qual norteava-se pelas ideias propostas por Kant em 1763. (ROQUE, 2012).

De modo semelhante, a concepção hamiltoniana de número também apresentava traços kantianos. Contudo, em 1830 e 1831, antes de estudar as ideias de Kant, Hamilton já defendia que a base algébrica deveria estar firmada no aspecto ordinal dos números e essa ordenação assumia uma fundamentação intuitiva no tempo. Em 1837, Hamilton concentrou seus estudos na álgebra dos pares numéricos e na filosofia idealista de Kant. Acredita-se que essa vertente filosófica reforçou as concepções de Hamilton. (PEREIRA, 2007).

Hamilton pretendia corrigir a instabilidade dos fundamentos lógicos da Álgebra através do conceito de tempo. Para isso, ele destacava a existência de três escolas algébricas: prática, filológica e teórica. A primeira compreendia a álgebra como uma ferramenta para a solução de problemas desenvolvendo, assim, uma Matemática Aplicada. A segunda tratava a álgebra como uma linguagem peculiar expressa sob a forma de símbolos matemáticos, sendo assim, uma tipologia de Lógica Matemática. A terceira escola entendia a álgebra como um conjunto de definições e teoremas sobre os quais se podia refletir e, assim, constituindo a Matemática Acadêmica.

Hamilton trabalhava no viés da Escola Algébrica Teórica, pois acreditava que era necessário compreender os significados dos objetos matemáticos e, para isso, devia analisar além dos signos do formalismo. Assim sendo, usar a intuição para compreender os números permitiria à Álgebra conquistar um *status* de ciência. Numa perspectiva crítica da razão pura, Kant declarou que a ordenação dos fenômenos no espaço era uma função da mente e, portanto, devia fazer parte do modo como se percebe os objetos. Todavia, a Geometria era vista como uma ciência que enxergava a percepção sendo chamada de “ciência do espaço puro”. Além disso, Hamilton defendia que a intuição da ordem no tempo é muito mais evidente na mente humana do que a intuição da ordem no espaço. (PEREIRA, 2007).

Pode-se entender que há um conceito de tempo puro (matemático), que foi mais significativo do que a organização cronológica de fenômenos específicos. Essa intuição de tempo matemático foi o paradigma do simbolismo algébrico. Essa concepção foi extensiva e idêntica à álgebra, conforme a álgebra se constituiu como uma ciência. Hamilton compartilhou essas suas acepções filosóficas, de que a intuição do tempo era a base da álgebra, com Graves e De Morgan, porém, recebeu uma reação adversativa. Assim, em 1835, através de uma carta. Continuou defendendo sua convicção.

Retornando ao segundo questionamento referente à concepção dos números complexos tridimensionais também chamados de ternos, Hamilton não obteve sucesso. Pois, ele conseguiu escrever uma representação algébrica para os números complexos tridimensionais e realizar a operação de adição com eles, porém, não conseguiu definir a operação de multiplicação entre eles. Com efeito, 13 anos depois que Hamilton morreu, G. Frobenius provou essa impossibilidade verificando que a álgebra de divisão associativa somente era possível sobre os números reais, como por exemplo, os próprios números reais, os números complexos reais e os quaternions reais.

Contudo, Hamilton tentou provar que os tripletos satisfaziam à lei dos módulos, pois para ser considerada como uma álgebra de divisão, os tripletos deveriam satisfazer a essa lei modular. Hamilton explicava que o módulo de um número complexo era gerado pela multiplicação entre o número complexo e seu conjugado.

Semelhante à representação algébrica dos números complexos bidimensionais, os tripletos foram escritos na seguinte forma: $x + iy + jz$ com $i^2 = j^2 = -1$ e seu módulo como sendo $x^2 + y^2 + z^2$. Porém, como Hamilton encontrou em seus cálculos, referentes ao módulo do produto, a soma de quatro quadrados, então, ele decidiu explorar as propriedades algébricas com representações quaterniônicas ($a + bi + cj + kd$) verificando se elas satisfaziam à lei modular.

Nos cálculos dos quaternions, foi constatado que eles não conservam a propriedade comutativa. Hamilton definiu um produto quaterniônico da seguinte maneira $ij = - ji$ e, mesmo assim, conseguiu constituir uma Álgebra. O quaternion é compreendido como uma composição de duas partes: uma real e outra complexa (vetorial). A multiplicação de dois vetores gera outro número hipercomplexo composto, também, por duas partes: uma escalar e outra complexa. A parte escalar do quaternion dificultava a sua representação geométrica, pois necessitava de uma visualização quadrimensional que assumisse a quarta dimensão como uma unidade imaginária espacial.

4 CONSTITUIÇÃO DA REPRESENTAÇÃO ALGÉBRICA QUATERNIÔNICA

Diante da descrição quaterniônica proposta por Hamilton, existem trabalhos que universalizaram a representação algébrica dos quaternions. Nesse sentido, esta seção versa sobre essa representatividade e sua composição algébrica como uma extensão dos números complexos bidimensionais.

Iniciando com Sangwine, Ell & Biham (2011, p. 608), que apontam os quaternions como objetos estudados na Álgebra Linear e, por isso, permitem o uso de suas operações fundamentais: existência das partes vetorial e escalar, representações conjugadas, semi-normas, produtos internos, dentre outras relações. Os autores organizaram duas categorias quaterniônicas: os Quaternions, que possuem números reais, como uma extensão ao conjunto dos números Reais e os Biquaternions, com números complexos, como uma ampliação do conjunto dos números Complexos. Isto é, o conjunto dos Quaternions é um subconjunto dos Biquaternions (quaternions complexificados).

A representação inicial de Hamilton para os quaternions era de pares ordenados de números reais que podiam ser representados geometricamente. Essa ideia foi inspirada no fato de que os números complexos bidimensionais podem ser estudados geometricamente com aporte no plano de Argand-Gauss.

Seguindo esse raciocínio de extensão algébrica, Menon (2009, p. 2305-4) explicou que Hamilton tentou generalizar os números complexos ($z=a+bi$) em três dimensões através dos tripletos, porém, não obteve êxito. Os tripletos complexificados, conhecidos como hipercomplexos, possuem a seguinte forma algébrica: $t=a+bi+cj$ com a, b, c sendo números reais, sendo i e j as unidades imaginárias, de modo que satisfazem: $i^2 = j^2 = -1$.

O fracasso de Hamilton com os tripletos surgiu diante de um obstáculo epistemológico oriundo das condições essenciais que fundamentam a Álgebra Clássica. Nesse caso, essa barreira surgiu no fato de os tripletos não possuírem a propriedade de fechamento na operação de multiplicação. Diante disso, Hamilton inseriu uma terceira unidade imaginária em seus cálculos e obteve uma estrutura matemática com quatro componentes deixando, dessa forma, de ser uma representação tridimensional para vislumbrar uma representação quadrimensional. Essa nova estrutura foi denominada por Hamilton de quaternions, os quais admitiam uma estrutura algébrica fechada (MENON, 2009, p. 2305-4). Pode-se compreender que os tripletos foram, praticamente, esquecidos durante o processo de generalização e complexificação algébrica.

Nessa perspectiva de generalização em dimensões superiores, vale saber que os números complexos bidimensionais são escritos na seguinte forma $z=a+bi$ onde a, b são números reais. Além disso, eles podem ser organizados em duas porções: parte real $Re(z)= a$ e parte imaginária $Im(z)=b$. O conjugado do número complexo é definido como $Zc= a-bi$.

De modo análogo, para o tripleto $t=a+bi+cj$ tem-se: parte escalar $S(t)=a$ e parte vetorial $V(t)=bi+cj$. Seu conjugado seria $Tc=a-bi-cj$. De acordo com Horadam (1963, 1993) e Sangwine, Ell & Biham (2011), um quaternion do tipo $q=q0.1+q1.i+q2.j+q3.k$, onde i, j, k são as unidades imaginárias, também, pode ser estruturado em dois conjuntos: parte escalar $S(q)=q0.1$ e parte vetorial $V(q)= q1.i+q2.j+q3.k.$ Seu conjugado é $Qc=q0.1-q1.i-q2.j-q3.k$.

Pode-se ver que os números complexos são estudados considerando sempre suas duas partes (real e imaginária). De modo semelhante, os quaternions também recebem um tratamento nesse sentido. Halici (2012, 2013) e Oliveira & Alves (2018) destacam essa descrição reconhecendo essas duas partes como parte escalar (real) composta por ($q0, q1, q2, q3$) e parte vetorial constituída pela base (1, i, j, k) onde i, j, k pertencem ao conjunto dos números Complexos e satisfazem à $(i)^2=(j)^2=(k)^2 = i.j.k = -1$.

Ninahuanca (2015, p.19) explicou que um quaternion é gerado a partir da soma direta de dois subespaços, ou seja, o quaternion é a soma de dois conjuntos: conjunto real mais o conjunto vetorial (com três dimensões). Ou ainda, pode-se compreender que um quaternion é gerado pela base canônica (1, i, j, k), onde 1=(1,0,0,0), i=(0,1,0,0), j=(0,0,1,0) e k=(0,0,0,1).

No quadro 1, tem-se o produto quaterniônico hamiltoniano descrito por Horadam (1993), assim, vale evidenciar que: $i^2=j^2=k^2 = -1$, $i.j=k=-j.i$, $j.k=i=-k.j$ e $k.i=j=-i.k$. Nessa operação, são gerados três componentes i, j, k, os quais estruturam um sistema de três versores ortogonais dispostos em três planos simultaneamente retangulares (ver figura 1).

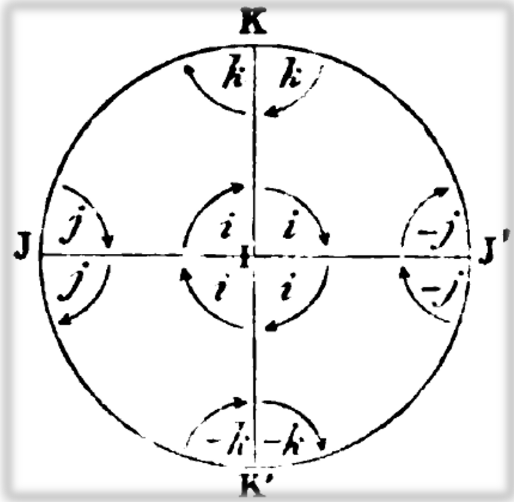
Quadro 1: Produto Quaterniônico Hamiltoniano.

PRODUTO QUATERNIÔNICO HAMILTONIANO				
Vetores	**1**	***i***	***j***	***k***
1	$1^2 = 1$	$1i = i$	$1j = j$	$1k = k$

i	$i1 = i$	$i^2 = -1$	$ij = k$	$ik = -j$
j	$j1 = j$	$ji = -k$	$j^2 = -1$	$jk = i$
k	$k1 = k$	$ki = j$	$kj = -i$	$k^2 = -1$

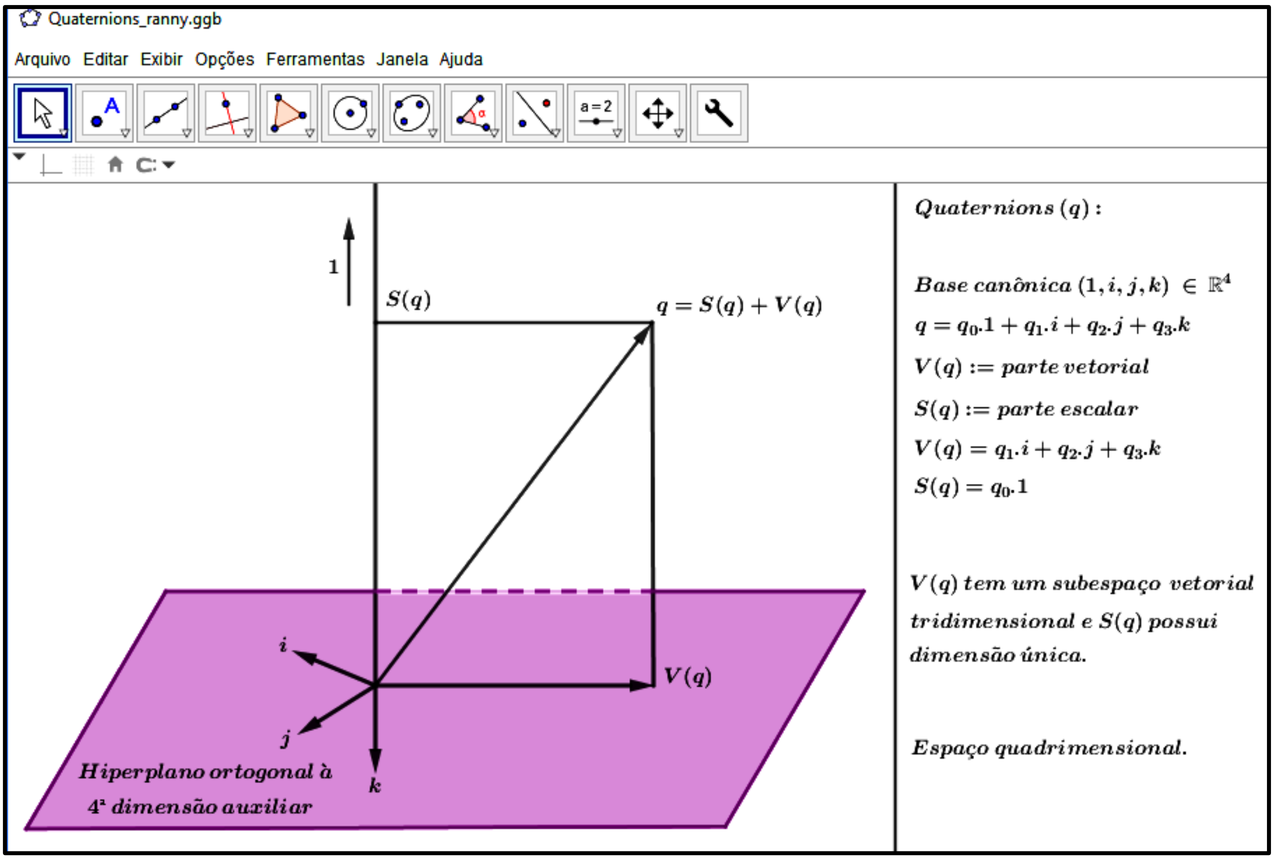
Fonte: Elaboração dos autores.

Figura 1: Versores ortogonais.



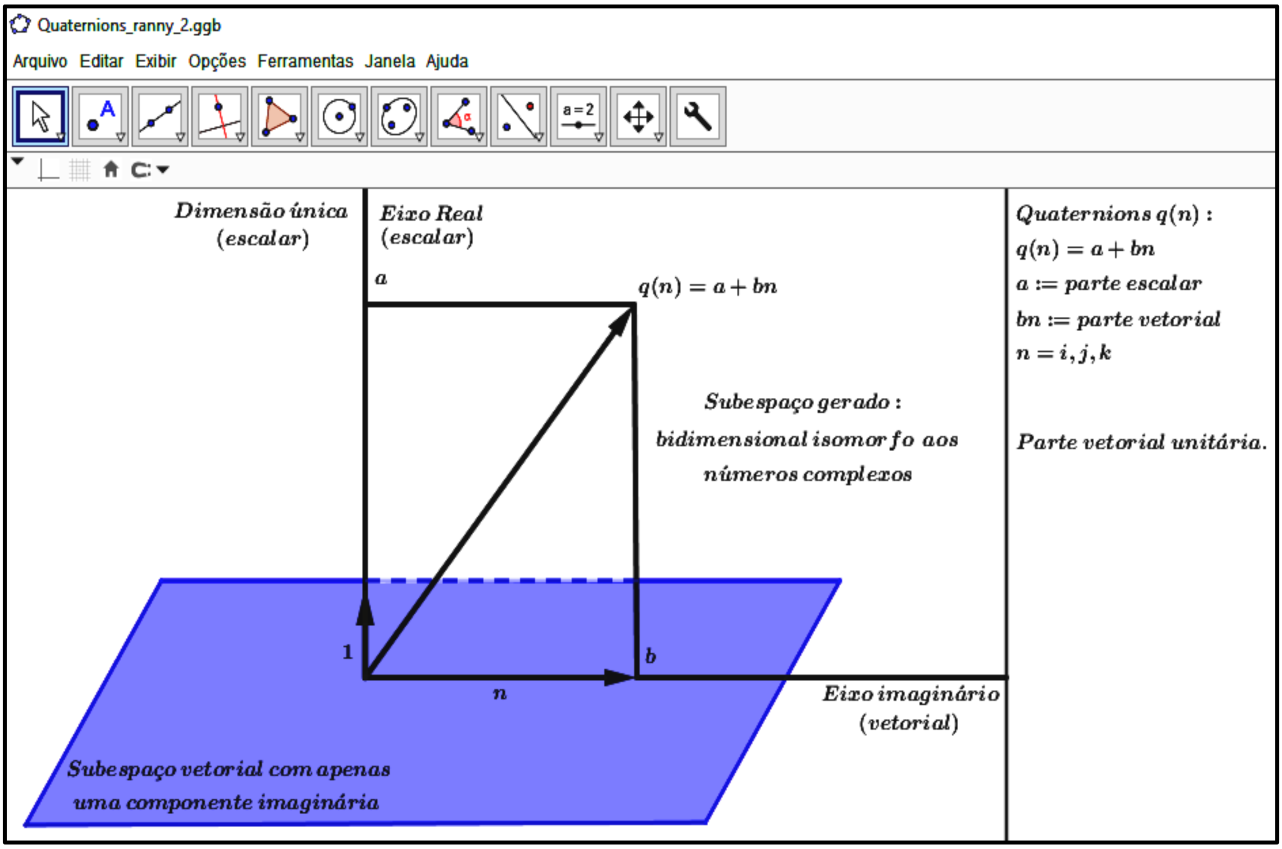
Fonte: Hamilton (1866, p. 157).

Figura 2: Vetores quaterniônicos no espaço quadrimensional.



Fonte: Oliveira (2018, p. 126).

Figura 3: Subespaço bidimensional dos quaternions isomorfo aos números complexos.



Fonte: Oliveira (2018, p. 126).

As figuras 2 e 3 dão suporte à visualização geométrica dos quaternions. Primeiramente, o quaternion é localizado em um espaço quadrimensional, ou seja, composta por quatro dimensões. Em seguida, evidencia-se que, assim como a representação algébrica dos quaternions é semelhante à forma algébrica dos números complexos bidimensionais, sua representação gráfica também assume como base a representação geométrica dos números complexos usuais.

Ademais, entender a composição algébrica dos quaternions permite classificá-lo em escalar puro ou vetorial puro. Assim sendo, um quaternion é puramente escalar quando tem parte vetorial nula, isto é, tem apenas um subespaço unidimensional. E o quaternion vetorial puro possui somente a parte vetorial, ou seja, com um subespaço vetorial com três dimensões. De modo geral, os quaternions são somas obtidas entre escalares e vetores usuais de um subespaço tridimensional. Nesse viés, pode-se imaginar uma representação quadrimensional para os quaternions, de maneira que, a parte escalar seria uma quarta dimensão (auxiliar).

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Pode-se compreender que este trabalho apresentou as principais acepções que fundamentou o desenvolvimento dos quaternions. Nesse sentido, foram destacados os aspectos preliminares referentes ao campo da Matemática, marcado pelas ideias revolucionárias que contestavam os fundamentados da Álgebra Clássica estabelecida como única e verdadeira naquele período.

Além disso, foi descrito o percurso heurístico de Hamilton em busca dos quaternions. E, por último, foi descrita a constituição da representação algébrica dos quaternions. Hamilton pretendia ultrapassar os limites da álgebra clássica e isso efetivou-se quando ele concentrou suas pesquisas em generalizar a dimensões superiores os números complexos bidimensionais. Nesse sentido, vale evidenciar que os números complexos reais, são aqueles que possuem parte imaginária nula. E essa noção também é estendida aos quaternions reais.

Ademais, pode-se salientar que os aspectos contextuais e temporais influenciam na formação do perfil heurístico de um matemático e no sentido que o corpo científico se institucionaliza. Apesar dos números tridimensionais não terem obtido sucesso na tradição extensiva algébrica, a concepção dos quaternions representou uma fase transitiva na Álgebra permitindo, assim, o desenvolvimento de outras álgebras como, por exemplo, a não-comutativa.

E, a investigação da história dos quaternions, através de uma releitura e reinterpretação numa perspectiva historiográfica atualizada, possibilitou explorar os campos epistêmicos de seu desenvolvimento histórico, até então, desvalorizados.

REFERÊNCIAS

HALICI, S. On Fibonacci Quaternions. **Adv. Appl. Clifford Algebras,** 22(2), p. 321-327, 2012.

HALICI, S. On Complex Fibonacci Quaternions. **Adv. Appl. Clifford Algebras**, 23, p. 105-112, 2013.

HAMILTON, W. R. Theory of Conjugate Functions, or Algebraic Couples; with a Preliminary and Elementary Essay on Algebra as the Science of Pure Time. **Transactions of the Royal Irish Academy**, V. 17, p. 293-422, 1837.

HAMILTON, W. R. **Elements of Quaternions.** London: Longmans, Green, & Company, 1866, 762p.

HORADAM. A. F. Complex Fibonacci Numbers Quaternions. **The Americal Mathematical Monthly***,* v. 70, n. 3, p. 289– 291, 1963. Disponível em: <https://doi.org/10.2307/2313129> Acesso em: 15 nov. 2019.

HORADAM, A. F. Quaternion Recurrence relations. **Ulam Quarterly,** 2(2), p. 23–33, 1993.

MENON, M. J. Sobre as origens das definições dos produtos escalar e vetorial. **Revista Brasileira de Ensino de Física***,* v. 31, n. 2, 2305, p. 1 – 11, 2009.

NEVES, R. C. **Os Quatérnios de Hamilton e o Espaço**. 2008. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro (IM/UFRJ). Rio de Janeiro: UFRJ, 2008, 112p.

NINAHUANCA, J. L. H. **Modulação em Amplitude Ortocomplexa usando a Álgebra de Quaternions**. 2015. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação. Campinas: UNICAMP, 2015, 64p.

OLIVEIRA, R. R. **Engenharia Didática sobre o Modelo de Complexificação da Sequência Generalizada de Fibonacci: Relações Recorrentes n-Dimensionais e Representações Polinomiais e Matriciais.** Dissertação de Mestrado Acadêmico. Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará – IFCE, Campus Fortaleza, 2018, 220p.

OLIVEIRA, R. R.; ALVES, F. R. V. A Fórmula de Binet e representações matriciais para os Quaternions Complexos de Fibonacci. **Revista Thema***,* v. 15, n. 3, p. 860-875, 2018.

PEREIRA, Carlos Almeida; et al. **Dicionário de Biografias Científicas***.* Volume II. Org.: Charles Coulston Gillispie. Tradução: Carlos Almeida Pereira; et al. Rio de Janeiro: Contraponto, 2007.

ROQUE, T. **História da matemática: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas.** Rio de Janeiro: Zahar, 2012, 509p.

SAITO, F. A Pesquisa Histórica e Filosófica na Educação Matemática. Edição Especial Temática: História, Filosofia e Educação Matemática Sinop. **Revista Even. Pedagóg.:** v. 9, n. 2 (24. ed.), p. 604-618, 2018.

SANGWINE, S. J.; ELL, T. A.; BIHAN, N. L. Fundamental Represantations and Algebraic Properties of Biquaternions or Complexified Quaternions. **Adv. Appl. Clifford Algebras***,* 21, p. 607-636, 2011.

SMITH, D. E. **A Source Book in Mathematics.** New York: Dover Publications, Inc., 1929.

Submetido em agosto de 2021.
Aprovado em setembro de 2021.