Problemas aritméticos e algébricos em livros didáticos do Ensino Médio:
possíveis abordagens geométricas

Arithmetic and algebraic problems in high school textbooks:
possible geometric approaches

Nickson Deyvis da Silva **Correia**[*]
Universidade Federal de Alagoas (Ufal)
Viviane de Oliveira **Santos**[**]
Universidade Federal de Alagoas (Ufal)

Resumo

Este estudo tem por objetivo apresentar possíveis abordagens geométricas para problemas aritméticos e algébricos propostos em Livros Didáticos (LDs) destinados ao Ensino Médio. Essas abordagens são resultado da pesquisa *Aspectos históricos da Aritmética e Álgebra nos LDs do Ensino Médio: relações com a Geometria* do *Grupo de Pesquisa História da Matemática e Educação Matemática* da Universidade Federal de Alagoas. Nesta pesquisa, percorremos uma sequência de estudos relacionados à História da Matemática e à da Educação Matemática no Brasil com base em livros, teses, dissertações, artigos, documentos legislativos e LDs. Selecionamos para este estudo alguns problemas aritméticos e algébricos apresentados nestes últimos, dos anos de 1955, 1959, 1962, 1970, 1997, 2005, 2016 e 2020, propondo uma abordagem geométrica a partir de noções didáticas provenientes da História da Matemática. É comum que alguns estudantes sejam considerados bons em Álgebra e Aritmética, mas tenham dificuldades em Geometria. Assim, acreditamos que este trabalho, que relaciona tais disciplinas por meio de resoluções de problemas, possa contribuir com práticas diárias do professor de Matemática, pois pode subsidiar estratégias de interpretação de conteúdos e problemas em suas aulas. **Palavras-chave**: História da Educação Matemática. Resolução de problemas. Álgebra. Aritmética. Geometria.

Abstract

This study aims to present possible geometric approaches to arithmetic and algebraic problems proposed in textbooks (LD) intended for High School. These approaches are the result of research *Historical aspects of Arithmetic and Algebra in high school textbooks: relations with geometry* of the *Grupo de Pesquisa História da Matemática e Educação Matemática* at the Federal University of Alagoas. In this research, we covered a sequence of studies related to the History of Mathematics and the History of Mathematics Education in Brazil based on books, theses, dissertations, articles, legislative documents and textbooks. We selected, for this text, some arithmetic and algebraic problems presented in LD from 1955, 1959, 1962, 1970, 1997, 2005, 2016 and 2020, proposing a geometric approach from notions given in a newer, older or originating textbook of the History of Mathematics. It is common for some students to be considered good at Algebra and Arithmetic but have difficulties with geometry. Thus, we believe that this work that relates arithmetic, Algebra and Geometry through resolution of problems can contribute to the daily practices of the Mathematics teacher, as it can support strategies to address content and problems in their classes. **Keywords**: History of Mathematics Education. Resolution of problems. Algebra. Arithmetic. Geometry.

[*] Graduado em Matemática Licenciatura pela Universidade Federal de Alagoas (Ufal). Mestrando em Ensino de Ciências e Matemática pela Ufal, Maceió, Alagoas, Brasil. ID Lattes: 4375220031510388. Orcid ID: 0000-0002-9060-9316. Contato: nickson.correia@im.ufal.br

[**] Doutora em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista "Julio de Mesquita Filho" (Unesp). Docente da Universidade Federal de Alagoas (Ufal), Maceió, Alagoas, Brasil. ID Lattes: 7168613854793428. Orcid ID: 0000-0002-4425-3806. Contato: viviane.santos@im.ufal.br

1 INTRODUÇÃO

Segundo Baroni e Nobre (1999), a história de problemas e conceitos, como sendo tema de investigação científica relativa à História da Matemática, é um item mencionado pelo prof. Dr. Hans Wussing, um dos mais respeitados pesquisadores em História da Matemática do mundo – ganhador do Prêmio Kenneth O. May em 1993. Além disso, de acordo com Valente (2014), dentre as diferentes perspectivas dos trabalhos de História da Educação Matemática no Brasil, têm-se aqueles que tratam a temática como um subconjunto da História da Matemática e aqueles que a relacionam a da Educação Matemática com a História Oral e a Educação Matemática. Na primeira perspectiva, os trabalhos consideram o saber matemático e seu desenvolvimento no tempo, também levando em conta questões relacionadas ao ensino, no entanto, admitem que a diferença entre a produção matemática e a Matemática escolar deve-se à adaptação a crianças e adolescentes (uma questão didática). A segunda é relacionada à construção de possibilidades de alternativas diferenciadas para o ensino dessa ciência, colocando o licenciado/licenciando da área em contato com relatos de práticas pedagógicas de antigos professores, sistematizações ou recriações. O autor ressalta que essas e outras perspectivas travam diálogos com a produção historiográfica, condicionando necessidades didáticas impostas pela Educação Matemática.

Segundo Dassie e Costa (2014), no fazer historiográfico da Educação Matemática, as fontes possuem um papel importante e, dentre elas, temos LD. Batista (1999, p. 534) define-o como "Aquele livro ou impresso empregado pela escola, para desenvolvimento de um processo de ensino ou de formação". Para Chervel (1990, *apud* VALENTE, 2008, p. 141), é o "texto já bem conhecido e transformado em referência para todo historiador das disciplinas escolares" logo, trata o estudo desses materiais como um grande revelador da trajetória histórica de uma determinada disciplina escolar. Couto e Jucá (2019) completam que um estudo utilizando LD como objeto de pesquisa propicia ao pesquisador construir uma história de determinada disciplina, uma vez que se pode perceber as modificações que esta sofreu ao longo do tempo.

Outra fonte para a História da Educação Matemática são os documentos, os quais, para Samara e Tupy (2010), podem ser registros escritos como cartas, livros, relatórios, diários etc., e registros que não utilizam o alfabeto como signo gráfico, como fotos, filmes, músicas, objetos, memórias, espaços, entre outros. Dentre os escritos, encontramos os legislativos, tais como leis, decretos, resoluções etc. Segundo Mattos e Abdounur (2014), os legislativos influenciam os historiadores na escolha de demais documentos que possibilitem a atribuição de significado ao âmbito historiográfico.

Consoante a tais considerações, desenvolvemos a pesquisa *Aspectos históricos da Aritmética e Álgebra nos LDs do Ensino Médio: relações com a Geometria* no *Grupo de Pesquisa História da Matemática e Educação Matemática* da Universidade Federal de Alagoas. Neste estudo, de abordagem documental[1], o foco principal foi estudar conteúdos e problemas de Aritmética e Álgebra dos LDs que se relacionam com a Geometria. Dentre os resultados obtidos, apresentamos aqui possíveis abordagens geométricas em problemas aritméticos e algébricos presentes em materiais destinados ao Ensino Médio.[2]

Dentre diversos trabalhos na linha de LD como objeto de pesquisa, destacamos Oliveira (2008) que, em sua dissertação de mestrado, realiza alguns apontamentos sobre estudos

[1] "[...] é aquela em que os dados obtidos são estritamente provenientes de documentos, com o objetivo de extrair informações neles contidas, a fim de compreender um fenômeno." (KRIPKA; SCHELLER; BONOTTO, 2015, p. 244).

[2] Ressaltamos que este artigo é uma versão ampliada do trabalho *Abordagens geométricas em problemas aritméticos e algébricos propostos em livros didáticos do Ensino Médio*, publicado nos Anais do *XIV Seminário Nacional de História da Matemática* (ver CORREIA; SANTOS, 2021), com mais problemas aritméticos e algébricos, abordagens geométricas e discussões.

categorizados em tipo histórico e pragmático. São eles: (i) o tipo histórico, relativo ao ensino em uma instituição de: Matemática escolar praticada por uma comunidade em um recorte de tempo, escolarização de uma disciplina, mudanças provocadas por documentos legislativos, disciplinarização de um conteúdo e como se constituem as diferentes abordagens para o ensino de um conteúdo matemático no decorrer dos tempos; (ii) o tipo pragmático, relacionado aos estudos descritivos/comparativos que comumente não estabelecem conexões entre os conteúdos apresentados nas obras com as condições sociais e educacionais; (iii) estudos históricos que tratam as diferentes abordagens para o ensino de um conteúdo matemático, propostas no decorrer dos anos; nessa perspectiva não deixam de ser do tipo pragmático, pois funcionam como recursos didáticos para o ensino atual.

Assim, um trabalho do tipo histórico e pragmático voltado a apresentar abordagens geométricas em problemas aritméticos e algébricos propostos em LD, destinados ao Ensino Médio, passa a ter uma importância para o estudante e para o professor de Matemática, visto que é bastante comum estudantes serem considerados bons na Álgebra e nas operações numéricas, contudo, apresentarem dificuldades na Geometria, e isso geralmente ocorre porque tais disciplinas são entendidas isoladamente, o que não acontece ao longo da história (D'AMBROSIO, 2007). Embora não sejam os únicos materiais de referência do professor de Matemática, os LDs, em muitas situações, se configuram como um material complementar e decisivo, tanto para as propostas metodológicas de suas aulas (o que ensinar, como ensinar) quanto para conhecimentos específicos da disciplina (CARLINI; CAVALARI, 2017). Muitos problemas neles propostos por privilegiam resoluções algébricas e, destes, poucos exigem o raciocínio dedutivo ou demonstração, o que acarreta para o estudante concepções inadequadas no que diz respeito ao aprimoramento de conceitos geométricos (ALMOULOUD *et al.*, 2004). Ademais, uma das práticas diárias do professor de Matemática é fazer análise de estratégia de solução de problemas diversos.

Logo, acreditamos que este trabalho vem a somar com as práticas diárias de quem leciona, pois pode servir de apoio para estratégias na abordagem de conteúdos em suas aulas, bem como na execução de debates e pesquisas futuras.

2 PROCESSOS METODOLÓGICOS

Segundo Oliveira (2008), os trabalhos do tipo histórico e pragmático comumente não trazem explícita uma discussão metodológica. Contudo, percorremos uma sequência de estudos relacionados à História da Matemática e à História da Educação Matemática no Brasil que viabilizou chegarmos a possíveis abordagens de teor geométricos ou problemas aritméticos e algébricos em LDs voltados à etapa de ensino em questão.

De início adotamos também textos, teses e artigos, que possibilitaram compreender um pouco das principais pesquisas em História da Matemática relacionadas a aspectos históricos das matemáticas, da Antiguidade até os dias atuais, em especial a problemas aritméticos e algébricos, e à História da Matemática no Brasil. Entre esses textos, destacamos D'Ambrosio (2008), que diz ser importante o professor de Matemática conhecer sobre o assunto para entender a dinâmica do encontro cultural de gerações, o desafio no mundo escolar, os programas escolares, os livros adotados, entre outros.

Sendo assim, com base em Mattos e Abdounur (2014), também estudamos o Sistema Educacional Brasileiro nos períodos Brasil Império (1822 – 1889), República Velha (1889 – 1930), Era Vargas (1930 – 1945), República Populista (1945 – 1964), Ditadura Militar (1964 – 1985) e Nova República (1985 – dias atuais), compreendendo decretos, portarias, reformas, leis, resoluções e programas curriculares que estabeleceram mudanças na organização, objetivos e currículos da

Matemática do Ensino Médio ao longo dos anos. Esse estudo possibilitou compreender a distribuição dos conteúdos aritméticos e algébricos em cada mudança realizada e também que o Ensino Médio nem sempre recebeu esse nome, uma vez que também já foi chamado de Ensino Secundário, Curso Colegial e Ensino de 2º grau.

Nesse contexto, Correia (2020) aponta que estudar as principais mudanças ocorridas no Sistema Educacional Brasileiro, em especial as que impulsionaram o Ensino de Matemática que vivenciamos atualmente, possibilita compreender que o ensino das áreas Aritmética, Álgebra e Geometria não eram relacionadas entre si, e que cada ano era destinado a somente um desses domínios, prática mudada com o passar dos anos. O autor completa que a reforma de Francisco Campos foi a responsável por unificar tais áreas e por popularizar a disciplina que conhecemos hoje como Matemática, e destaca também as reuniões e debates que impulsionaram mudanças significativas no ensino dessa disciplina, bem como a fiscalização das comissões e programas nacionais dos LDs.

Em seguida, iniciamos a coleta de LDs referente ao Ensino Secundário, Curso Colegial, Ensino de 2º grau e Ensino Médio para que pudéssemos estudar os conteúdos aritméticos e algébricos com ênfase em compreender de que modo tais temas, e seus respectivos problemas, são apresentados e propostos para a resolução. Seguindo algumas instruções de Chervel (1990), visitamos o Repositório Institucional da Universidade Federal de Santa Catarina (RIUFSC) e também acervos pessoais de professores de Matemática que autorizaram o acesso e disponibilizaram obras para esta pesquisa. Encontramos vários, contudo, para não trabalhar com um número demasiadamente alto, estabelecemos alguns critérios para seleção, como trabalhar apenas com obras: a) publicadas após o Decreto nº 4.244 (BRASIL, 1942) estabelecido por Gustavo Capanema no comando do Ministério da Educação e Saúde em 1942, responsável por dividir o Ensino Secundário em Curso Ginasial e Curso Colegial, sendo este o pontapé inicial da estrutura que conhecemos hoje como Ensino Médio; b) de volume único ou, no caso de ser composta por vários volumes, a coleção completa independentemente da edição, uma vez que é difícil estudar com precisão os aspectos da Aritmética e Álgebra em uma obra didática incompleta.

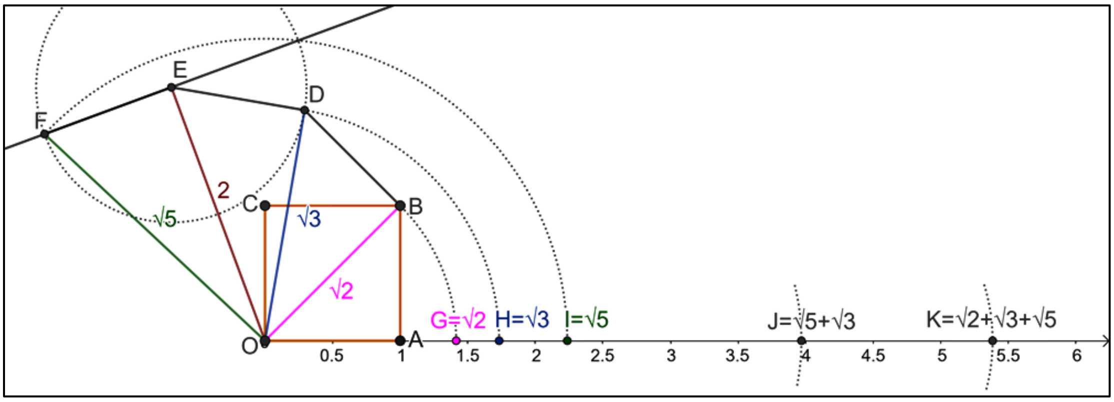
De posse dos LDs, iniciamos a leitura dos conteúdos, verificando a apresentação, os problemas propostos, os métodos e se estavam relacionados à Geometria. Para isso, seguimos uma ordem cronológica, da coleção mais antiga para a mais nova,a fim de identificar se houve mudança ou não no modo de abordar a Aritmética e a Álgebra, constatando que a relação desses temas foram crescentes com o passar dos anos. Em seguida, selecionamos as ideias levantadas nesses materiais para propormos abordagens geométricas, sejam elas provenientes de noções dadas em uma obra didática mais nova, bem como mais antiga ou da História da Matemática, remetendo ao estudo inicial desta pesquisa.

3 ABORDAGENS GEOMÉTRICAS

Realizamos abordagens de vários problemas e conteúdos geométricos nos LDs, mas para não repetir os temas tratados, selecionamos algumas obras que analisadas neste estudo. Os materiais escolhidos foram os seguintes: *Matemática 2º ciclo* (ROXO *et al.*, 1955, 1959); *Curso de Matemática para os primeiro, segundo e terceiro anos dos cursos clássico e científico* (BEZERRA, 1962); *Matemática* (QUINTELLA, 1970); *Matemática* volume único (IEZZI *et al.*, 1997); *Matemática Dante* (DANTE, 2005); *Matemática para compreender o mundo* (SMOLE; DINIZ, 2016a, 2016b); e *Conexões – Matemática e suas tecnologias* (EDITORA MODERNA, 2020a, 2020b)

Abordamos, a seguir, o problema 1, que trata de números aproximados: “Calcular a soma $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$, com o menor erro possível.” (BEZERRA, 1962, p. 22, adaptação nossa). O problema é referente ao primeiro ano do Curso Colegial e para solucioná-lo aritmeticamente, de acordo com a obra, basta utilizar os valores aproximados, isto é, considerando $\sqrt{2} = 1{,}4143$, $\sqrt{3} = 1{,}7321$ e $\sqrt{5} = 2{,}2361$, então a soma é $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5} = 5{,}3825$. Para resolvermos usando uma abordagem geométrica, nos baseamos na relação das triplas pitagóricas $a^2 = b^2 + c^2$, sendo b e c as medidas dos catetos e a a medida da hipotenusa de um triângulo retângulo. Além disso, optamos pelo desenho geométrico, conforme mostra a figura a seguir:

Figura 1: Resolução da soma $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ com o menor erro possível

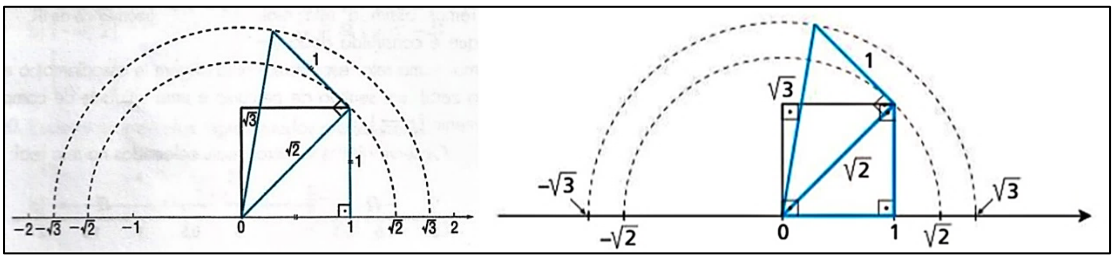


Fonte: Correia; Santos (2021, p. 995)

De início, em uma semirreta de origem O, construímos um quadrado de lados medindo 1, traçando sua diagonal OB que mede $\sqrt{2}$. Em seguida, utilizando a relação das triplas pitagóricas, traçamos os segmentos de retas que medem $\sqrt{3}$ e $\sqrt{5}$, marcando os valores de $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ e $\sqrt{5}$ na semirreta de origem O. Logo, chamamos os valores $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ e $\sqrt{5}$, marcados na semirreta, de G, H e I, respectivamente. Com o raio OH, traçamos um arco com centro I, chamando de J a interseção desse arco com a semirreta. Com o raio OG, traçamos um arco com centro J, chamando de K a interseção desse novo arco com a semirreta. A distância de O até K será a soma $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ com o menor erro possível.

Parte dessa abordagem geométrica já vem sendo apresentada em LDs mais recentes, exemplo disso é *Matemática Dante* (DANTE, 2005) e *Conexões – Matemática e suas tecnologias* (EDITORA MODERNA, 2020a), representadas nesta figura, respectivamente:

Figura 2: O uso da relação das triplas pitagóricas para representar números irracionais na reta numérica

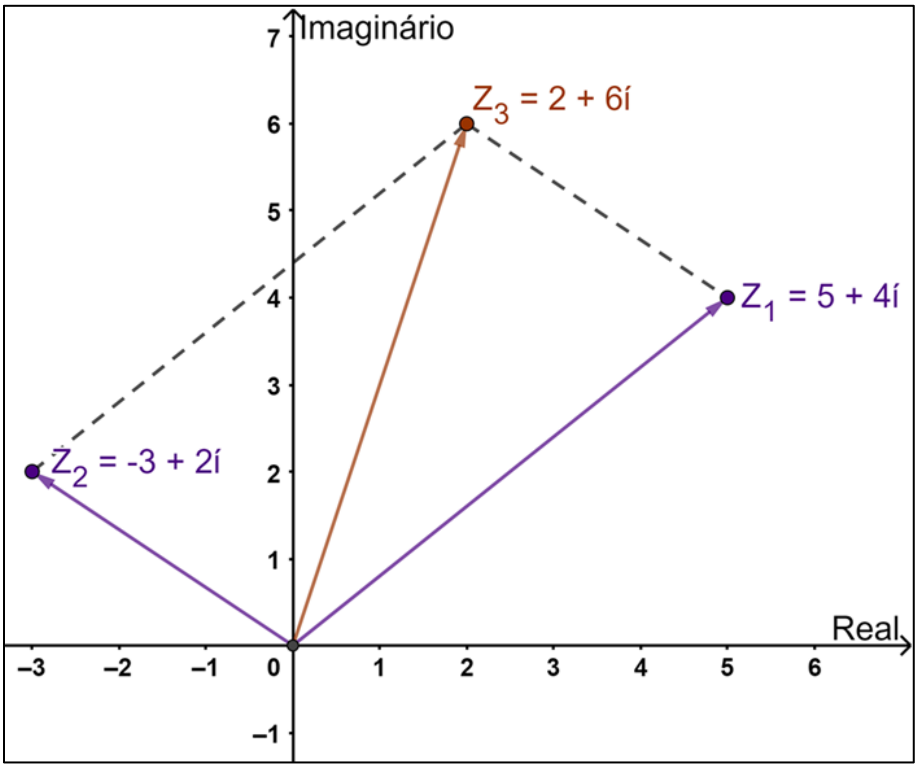


Fonte: Dante (2005, p. 19); Editora Moderna (2020a, p. 52)

Além da relação das triplas pitagóricas, essa abordagem permite trabalhar com figurase com as principais noções geométricas como ponto, vértice, segmento de reta, perpendicularidade, arcos, entre outros. Para Silva (2006), o desenho geométrico é um facilitador no entendimento dessas relações , bem como das conexões que ocorrem na Aritmética e na Álgebra. O autor completa que inviabilizar tais competências na Educação Básica é desperdiçar oportunidades, pois não promove, de modo eficiente, o raciocínio lógico, raciocínio espacial, criatividade, além do progresso do indivíduo.

O problema 2, a seguir, é relativo aos números complexos propostos por Quintella (1970, p. 148): "Efetuar [...] $(5+4i)-(3-2i)$" . Ele é referente ao terceiro ano do Curso Colegial e para resolvê-lo, de acordo com a obra, basta efetuar as operações aritméticas de modo que os números reais sejam operados entre si, assim como os números imaginários sejam operados mutuamente, isto é $(5+4i)-(3-2i)=(5-3)+(4i+2i)=2+6i$. Embora Quintella (1970, p. 146) defina que "Número complexo é um par ordenado de números reais" e apresente o plano complexo, sendo este composto pelo eixo Ox (o eixo real) e pelo eixo Oy (o eixo imaginário), a obra não faz uso dessa representação geométrica para resolvê-lo . Dessa forma, optamos em resolver a questão a partir da interpretação a seguir,, que em algumas obras mais recentes recebe o nome de "plano de Argand-Gauss"[3]:

Figura 3: Representação geométrica de Z_3



Fonte: Elaborada pelos autores (2021)

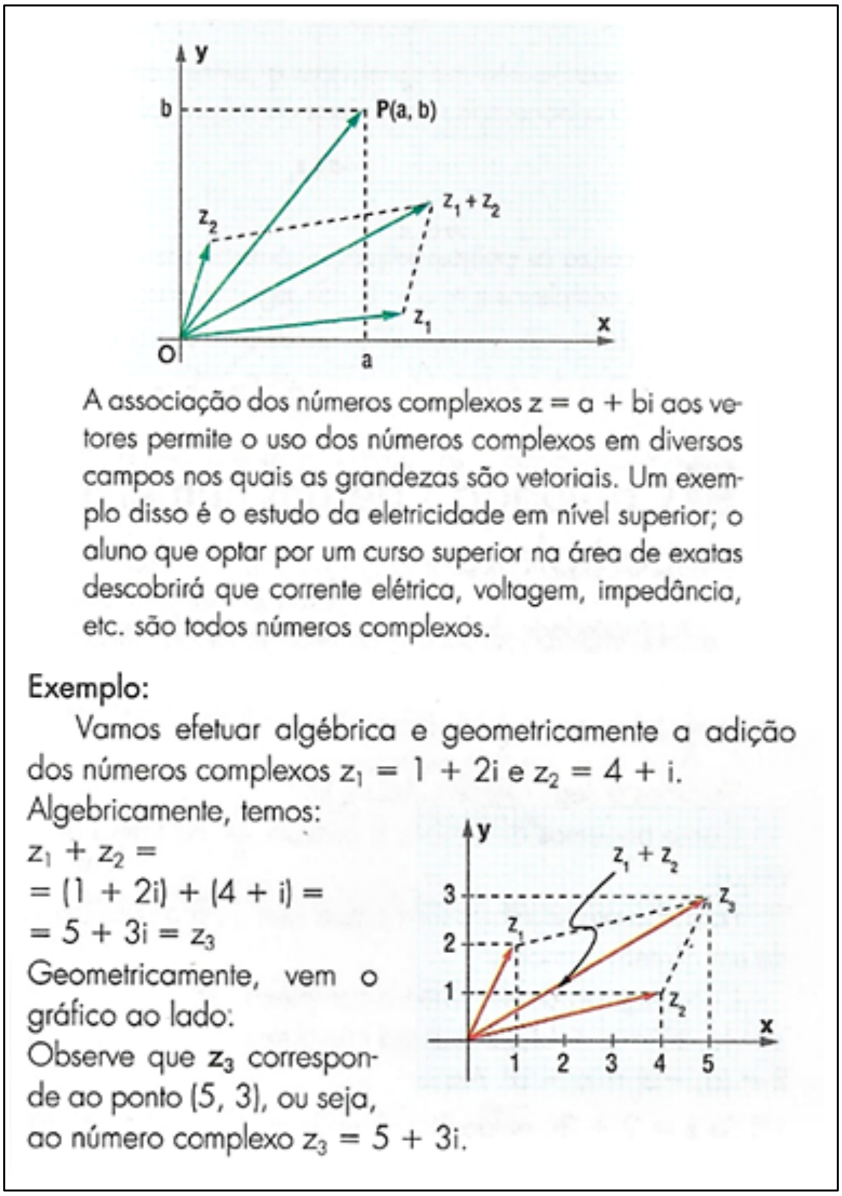
A figura 3 mostra que o número complexo $z=a+bi$ corresponde a um único ponto (a,b), no plano complexo (ou plano de Argand-Gauss), tomamos $Z_1=5+4i$, $Z_2=-3+2i$ e

[3] Em *Matemática volume único* (IEZZI *et al*., 1997) consta que o plano de Argand-Gauss recebe esse nome devido aos trabalhos de Jean Robert Argand (1768 – 1822) e Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855) voltados a estabelecer uma interpretação geométrica para os números complexos. Em *Matemática para compreender o mundo* (SMOLE; DINIZ, 2016b) consta que foi graças ao plano de Argand-Gauss que os números complexos passaram a ser concretos e visíveis, sendo aceitos pelos demais matemáticos, permitindo o desenvolvimento do estudo e o cálculo com esses números. De acordo com Roque e Carvalho (2012), de fato essa representação geométrica favoreceu a aceitação dos números complexos no universo dos números, no entanto os autores ressaltam que Caspar Wessel (1745 – 1818) também contribuiu para essa representação. Essa informação é apresentada em uma seção complementar na obra *Matemática para compreender o mundo* (SMOLE; DINIZ, 2016b, p. 185, destaque das autoras): "[...] Cauchy (1789 – 1857), matemático francês [...] divulgou para o mundo a representação gráfica dos números complexos no plano cartesiano. Ele deu a essa representação o nome de *diagrama de Wessel-Argand-Gauss*, três matemáticos que, de modo independente um do outro, deram o passo que permitiu a aceitação generalizada desses números [...]".

determinados na imagem . Em seguida, tratando Z_1 e Z_2 em termos de vetores, com extremidades na origem do sistema de coordenadas cartesianas, traçamos um paralelogramo, cuja sua diagonal é o vetor Z_3. Assim, temos $Z_3 = Z_1 + Z_2$, ou seja, $Z_3 = 2 + 6i$.

A abordagem com números complexos já vem sendo tratada em LDs mais recentes, exemplo disso é *Matemática Dante* (DANTE, 2005), retratada na imagem a seguir:

Figura 4: Representação geométrica de operações com números complexos na obra *Matemática Dante*



A associação dos números complexos $z = a + bi$ aos vetores permite o uso dos números complexos em diversos campos nos quais as grandezas são vetoriais. Um exemplo disso é o estudo da eletricidade em nível superior; o aluno que optar por um curso superior na área de exatas descobrirá que corrente elétrica, voltagem, impedância, etc. são todos números complexos.

Exemplo:

Vamos efetuar algébrica e geometricamente a adição dos números complexos $z_1 = 1 + 2i$ e $z_2 = 4 + i$.

Algebricamente, temos:

$z_1 + z_2 =$

$= (1 + 2i) + (4 + i) =$

$= 5 + 3i = z_3$

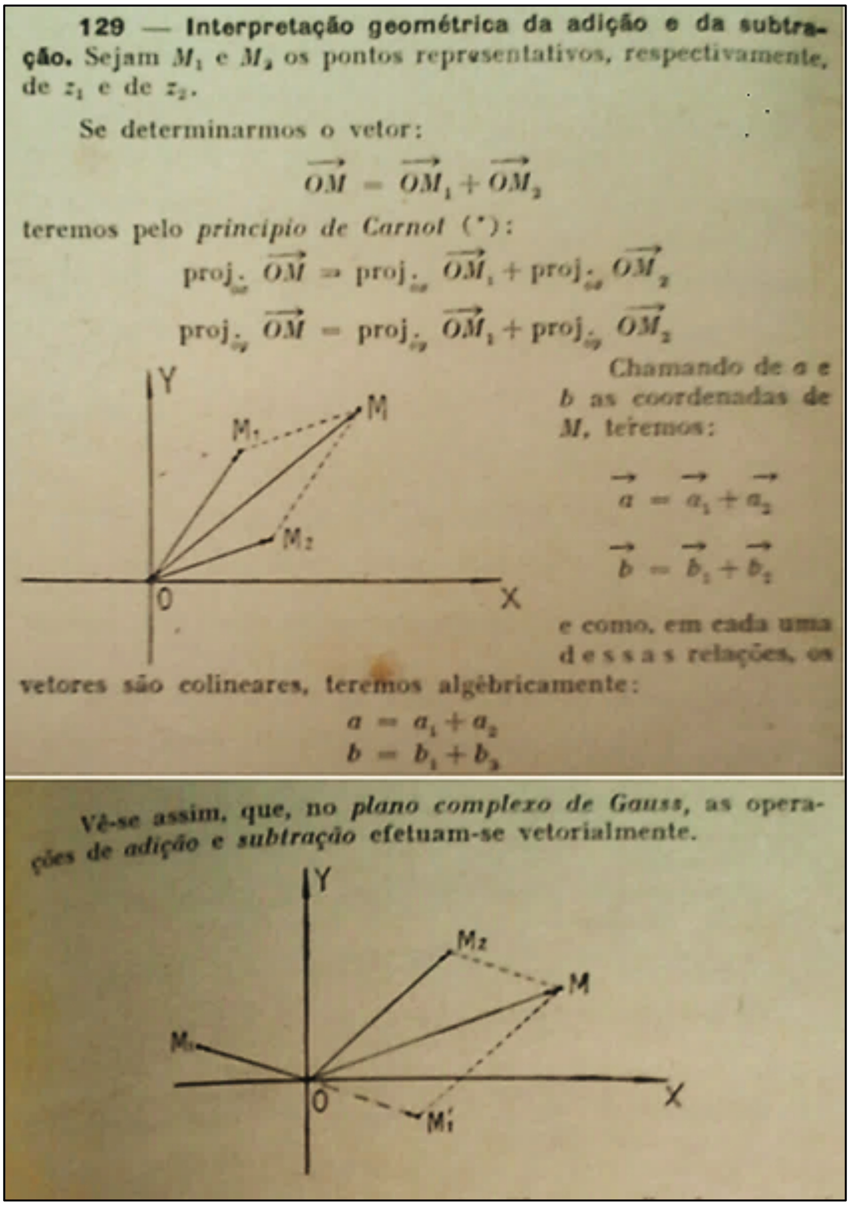
Geometricamente, vem o gráfico ao lado:

Observe que z_3 corresponde ao ponto (5, 3), ou seja, ao número complexo $z_3 = 5 + 3i$.

Fonte: Dante (2005, p. 435)

No entanto, vale destacar que *Matemática 2º Ciclo* (ROXO *et al.*, 1955), apesar de ser mais antiga que *Matemática* (QUINTELLA, 1970), apresenta uma perspectiva geométrica de operações com números complexos, conforme se observa na imagem:

Figura 5: Representação geométrica de operações com números complexos



129 — Interpretação geométrica da adição e da subtração. Sejam M_1 e M_2 os pontos representativos, respectivamente, de z_1 e de z_2.

Se determinarmos o vetor:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}$$

teremos pelo *princípio de Carnot* (*):

$$\text{proj}_{\vec{ox}}\ \overrightarrow{OM} = \text{proj}_{\vec{ox}}\ \overrightarrow{OM_1} + \text{proj}_{\vec{ox}}\ \overrightarrow{OM_2}$$

$$\text{proj}_{\vec{oy}}\ \overrightarrow{OM} = \text{proj}_{\vec{oy}}\ \overrightarrow{OM_1} + \text{proj}_{\vec{oy}}\ \overrightarrow{OM_2}$$

Chamando de a e b as coordenadas de M, teremos:

$$\vec{a} = \vec{a_1} + \vec{a_2}$$

$$\vec{b} = \vec{b_1} + \vec{b_2}$$

e como, em cada uma dessas relações, os vetores são colineares, teremos algèbricamente:

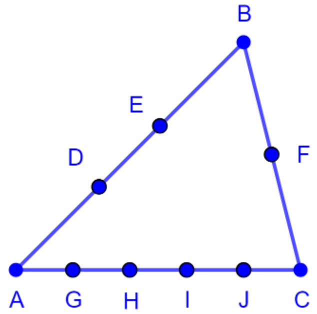
$$a = a_1 + a_2$$
$$b = b_1 + b_2$$

Vê-se assim, que, no *plano complexo de Gauss*, as operações de *adição e subtração* efetuam-se vetorialmente.

Fonte: Roxo *et al.* (1955, pp. 158-159)

No problema 3, temos: "Nesta figura, o número de triângulos que se obtém com vértices nos pontos D, E, F, G, H, I e J é:" (Iezzi *et al.*, 1997, p. 436) e como resultado:

Figura 6: Problema de análise combinatória

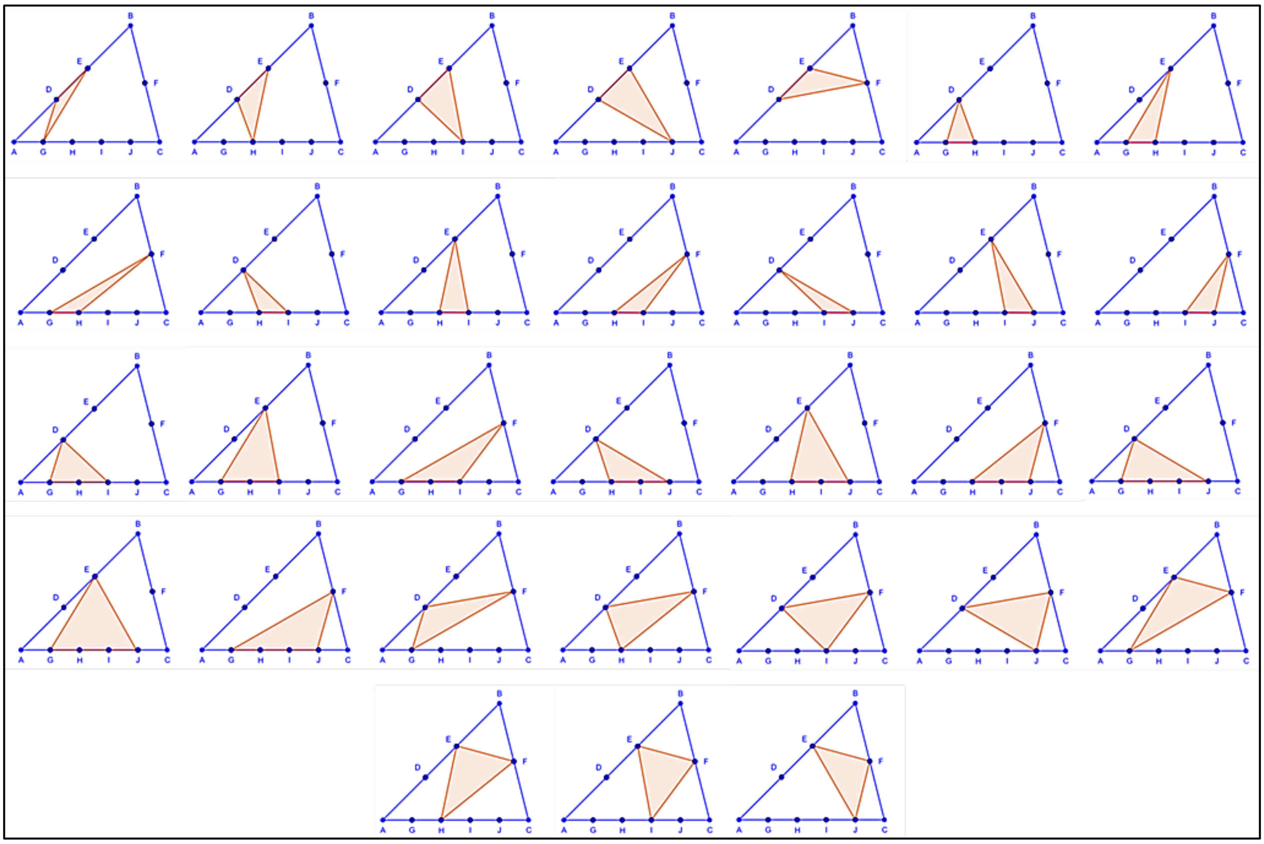


Fonte: Adaptado de Lezzi *et al.* (1997, p. 436)

Trata-se de um problema de análise combinatória referente ao segundo ano do Ensino Médio e para resolvê-lo algebricamente basta utilizar a fórmula $C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$, uma vez que a ordem dos vértices não altera o resultado, obtendo 31 triângulos, embora também possamos resolver esse problema com noções de Geometria.

Logo, partindo do pressuposto que, para se obter um triângulo, deve-se ter três pontos distintos e não colineares, temos: 1° caso - com base em DE, os possíveis triângulos são DEG,DEH,DEI,DEJ,DEF, ou seja, 5 triângulos; 2º caso - dois pontos na base $AC = \{GH, HI, IJ, GI, GJ, HJ\}$, os possíveis triângulos são GHD, HID, IJD, GID, GJD, HJD, GHE, HIE, IJE, GIE, GJE, HJE, GHF, HIF, IJF, GIF, GJF, HJF, ou totalizando 18; 3º caso - com base em EF, os possíveis triângulos são EFG, EFH, EFI, EFJ e com base em DF, são DFG, DFH, DFI, DFJ, isto é , 8, somando 31 ao todo. Esses polígonos podem ser observados na imagem seguinte:

Figura 7: Visualizando os 31 triângulos identificados



Fonte: Elaborada pelos autores (2021)

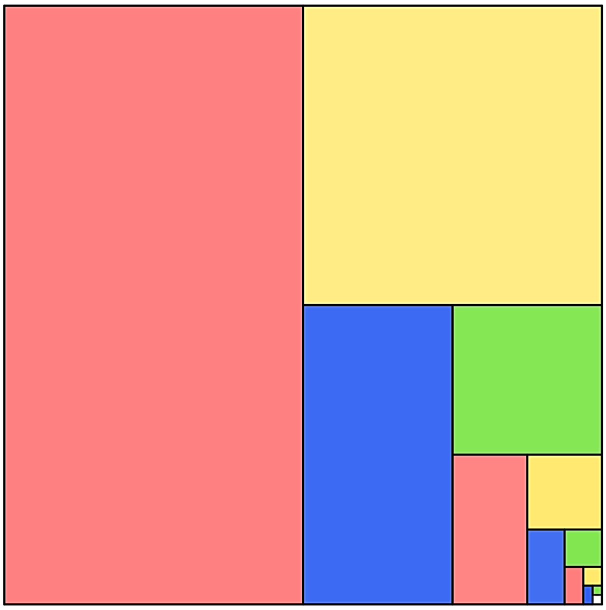
Segundo Almouloud *et al.* (2004), a operação de fracionar uma figura em subfiguras,reagrupando-as convenientemente, isto é, organizando uma ou várias categorias diferentes para a mesma, criando outra, a partir dda figura de origem, proporciona tratamentos como a obtenção de medidas de áreas por soma das contidas em partes elementares, ou ainda evidenciar a equivalência de subfiguras, dentre outras propriedades geométricas. Sendo assim, além de trabalhar combinações e possibilidades, essa abordagem permite tratar vários aspectos dos triângulos, tais como: equivalência, classificação quanto a lados e ângulos, assim por diante.

Embora proposto em um livro de 1997, verificamos que questões semelhantes ao Problema 3 já foram propostas por obra mais antiga, como é o caso de *Matemática 2º Ciclo* (ROXO *et al.*, 1959, p. 25): “Num plano marcam-se 12 pontos, de modo que três não fiquem sôbre [sic] a mesma reta. Quantos triângulos podem ser formados unindo-se 3 quaisquer desses 12 pontos?” e “Num plano marcam-se 12 pontos, dos quais 5 estão sôbre [sic] a mesma reta. Quantos triângulos podem ser formados unindo-se 3 quaisquer desses 12 pontos?”. O mesmo constatamos em obra mais atual, como é o caso de *Conexões – Matemática e suas tecnologias* (EDITORA MODERNA, 2020b, p. 120): “Considere 7 pontos distintos sobre uma reta e 4 pontos, também distintos, sobre uma reta, paralela à primeira. Quantos triângulos podemos obter ligando 3 quaisquer desses 11 pontos?”. Apesar de ambas sugerirem utilizar a fórmula $C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$, tais problemas podem ser abordados geometricamente, seguindo a resolução do Problema 3, trabalhando assim combinações, possibilidades e aspectos das figuras formadas.

Já o Problema 4 trata de progressão aritmética, referente ao primeiro ano do Ensino Médico, proposto no livro de Dante (2005, p. 149, adaptação nossa): “Calcular o limite da soma dos termos da progressão geométrica da soma $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots, n \in N^*$”. Para resolvê-lo de modo algébrico, a obra propõe utilizar a fórmula $S_n = \frac{a_1}{1-q}$, sendo $a_1 = \frac{1}{2}$ e $q = \frac{1}{2}$. Seguindo essa sugestão, obtemos como resultado o valor 1, considerando que também pode ser solucionado de modo geométrico.

Consideramos um quadrado de área igual a 1 e pintamos $\frac{1}{2}$ dessa área. Em seguida, colorimos $\frac{1}{4}$ do que restou, depois $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$ e assim sucessivamente:

Figura 8: Resolução do limite da soma $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots, n \in N^*$

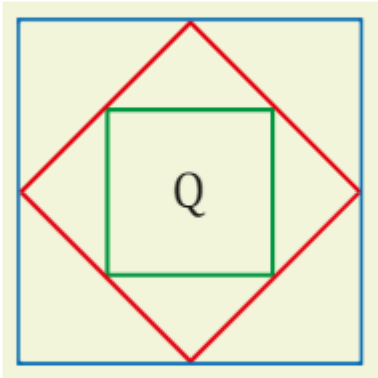


Fonte: Correia; Santos (2021, p. 997)

Ao continuarmos tal procedimento, nos aproximamos da área total do quadrado, que é 1, sendo este o limite da soma $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots, n \in N^*$.

Na figura a seguir apresentamos o Problema 5 “Dado um quadrado Q de lado $1cm$, são construídos outros quadrados de modo que, a partir do 2º, os pontos médios dos lados de cada um deles sejam os vértices do quadrado anterior. Veja o desenho ao lado. [...] qual é a área do 5º quadrado construído?” (SMOLE; DINIZ, 2016a, p.174).

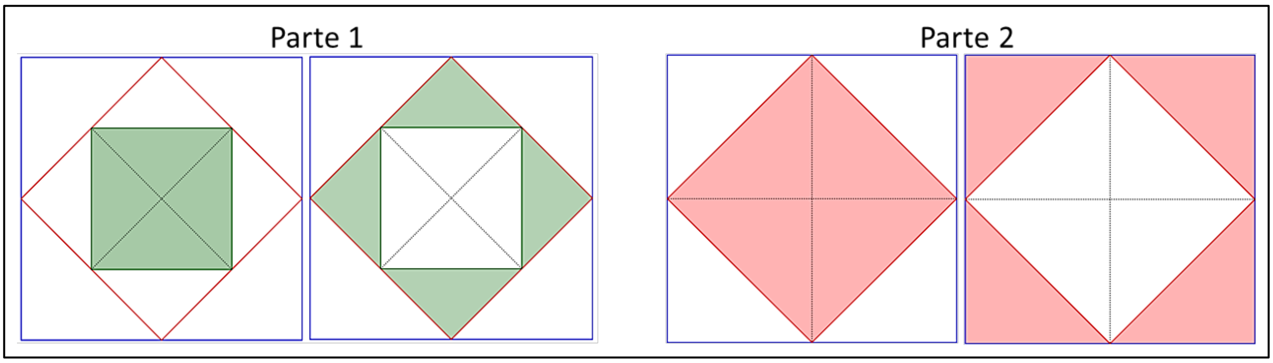
Figura 9: Figura do Problema 5



Fonte: Smole; Diniz (2016a, p.174)

Nota-se que o enunciado envolve conteúdo sobre função exponencial, referente ao primeiro ano do Ensino Médio, proposto no livro de Smole e Diniz (2016a). Para resolvê-lo, a obra induz relacionar esse conteúdo à progressão geométrica, permitindo estabelecer ligações entre propriedades de funções relativas e o crescimento e decrescimento, conforme apresentado na imagem:

Figura 10: Resolução do Problema 5



Fonte: Correia; Santos (2021, p. 998)

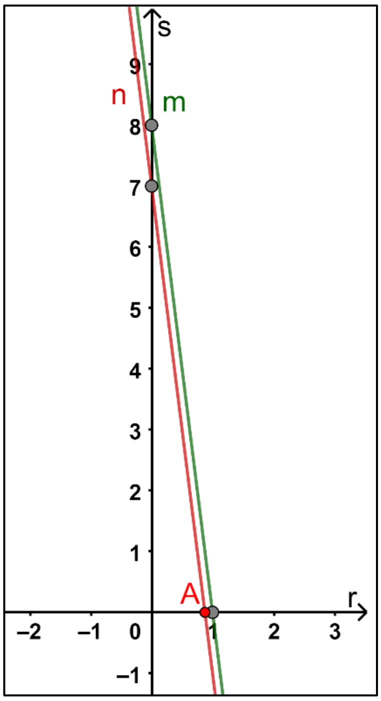
Considerando o quadrado Q de área $1cm^2$, temos que a área vermelha é maior que a superfície Q, uma vez que o quadrado Q está contido no desenho da parte 2. Dividindo Q em quatro partes e realizando o esquema da Parte 1 (Figura 10), a dimensão do desenho vermelho é $2cm^2$. Repetindo o mesmo processo para o quadrado azul, a resposta para sua área é $4cm^2$. Assim por diante, temos que o quarto polígono terá área de $16cm^2$ e o quinto, $32cm^2$.

Essa abordagem geométrica é semelhante à do Problema 3, no sentido de que utilizamos a operação de fracionar uma figura em subfiguras e, em seguida, reagrupamos estas últimas convenientemente, de modo a verificar que região em branco equivale à interna colorida. Desse modo, além de estimular raciocínio lógico, criatividade e argumentação visual, esse raciocínio estimula também a aprendizagem de outras propriedades geométricas, como ponto médio, equivalência e classifcação de triângulos,quanto a seus lados e ângulos, dentre outras possibilidades.

O Problema 6 refere-se a conjuntos, em especial, o dos números racionais: “Represente uma reta ordenada com os números racionais a seguir: $\frac{7}{8}; \frac{9}{4}; -\frac{3}{5}$” (EDITORA MODERNA, 2020a, p. 50, adaptação nossa). Para resolvê-lo de modo algébrico, a obra indica que podemos encontrar um número racional compreendido entre outros dois racionais, utilizando a média aritmética entre eles, por exemplo, um número entre $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{2}$ é $\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}{2} = \frac{5}{12}$. Isso significa dizer que na reta ordenada devemos marcar $\frac{5}{12}$ entre $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{2}$. É evidente que o objetivo deste problema é trabalhar uma noção de ordem entre $\frac{7}{8}$, $\frac{9}{4}$ e $-\frac{3}{5}$ sem se preocupar com o valor exato na reta ordenada. Tendo isso em questão, nossa abordagem geométrica vai no sentido contrário, pois apresenta-se uma reta ordenada com os números racionais $\frac{7}{8}$, $\frac{9}{4}$ e $-\frac{3}{5}$ posicionados de acordo com seus valores numéricos.

Dada a reta r ordenada, na qual traçamos a linha s, de modo perpendicular com r, tanto r como s devem possuir a mesma unidade de medida; assim desenhamos uma reta m de modo que intercepte r em 1 e s em 8 e em seguida, uma n paralela à m, de forma que intercepte s em 7. Chamamos de A o ponto correspondente à intersecção da reta n com a reta r. A representação do número racional $\frac{7}{8}$ na reta r está no ponto A, como pode ser verificado na imagem:

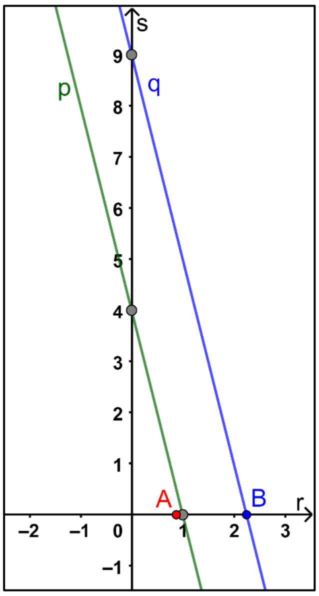
Figura 11: Posicionando o número racional $\frac{7}{8}$ em uma reta r



Fonte: Elaborada pelos autores (2021)

Além disso, para marcarmos $\frac{9}{4}$ em r, seguimos o mesmo procedimento, isto é, traçamos uma reta p de modo que interceptasse r em 1 e s em 4. Em seguida, desenhamos uma reta q paralela à p, de forma que intercepte s em 9. Por fim, chamamos de B o ponto correspondente à intersecção da reta q com a r. A representação do número racional $\frac{9}{4}$ na linha r está no ponto B:

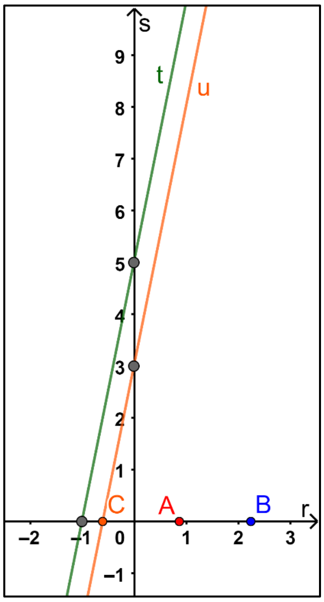
Figura 12: Posicionando o número racional $\frac{9}{4}$ em uma reta r



Fonte: Elaborada pelos autores (2021)

Para marcarmos $-\frac{3}{5}$ em r e finalizarmos a resolução deste problema, seguimos o mesmo procedimento, no entanto traçamos uma reta t de modo que intercepte r em -1 e s em 5. Em seguida, tracejamos uma reta u paralela à t, de forma que intercepte s em 3. Por fim, chamamos de C o ponto correspondente à intersecção da reta u com a r. A representação do número racional $-\frac{3}{5}$ em r está no ponto C:

Figura 13: Posicionando o número racional $-\frac{3}{5}$ em uma reta r

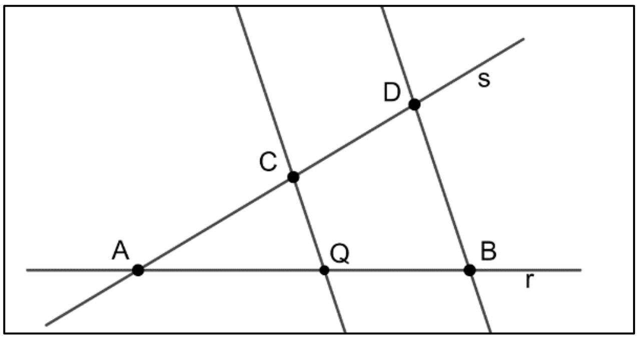


Fonte: Elaborada pelos autores (2021)

Além de marcar os números racionais na reta ordenada de acordo com seus valores numéricos, observamos que essa abordagem também permite tratar o conteúdo de semelhança de triângulos, visto que é a explicação matemática por trás da resolução exposta. Sendo assim, pode-se trabalhar razão, proporção, teorema fundamental da semelhança, casos de semelhança e congruência, relações métricas, dentre outros conteúdos.

Ademais, ressaltamos alguns trabalhos, como o de Silva Jr. (2013) e Oliveira (2017), que utilizam tal perspectiva para a marcação de números racionais na reta numérica. Silva Jr. (2013), demonstra como marcar o número racional $\frac{a}{b}$ numa reta r:

Figura 14: Marcação do número $\frac{a}{b}$ na reta r

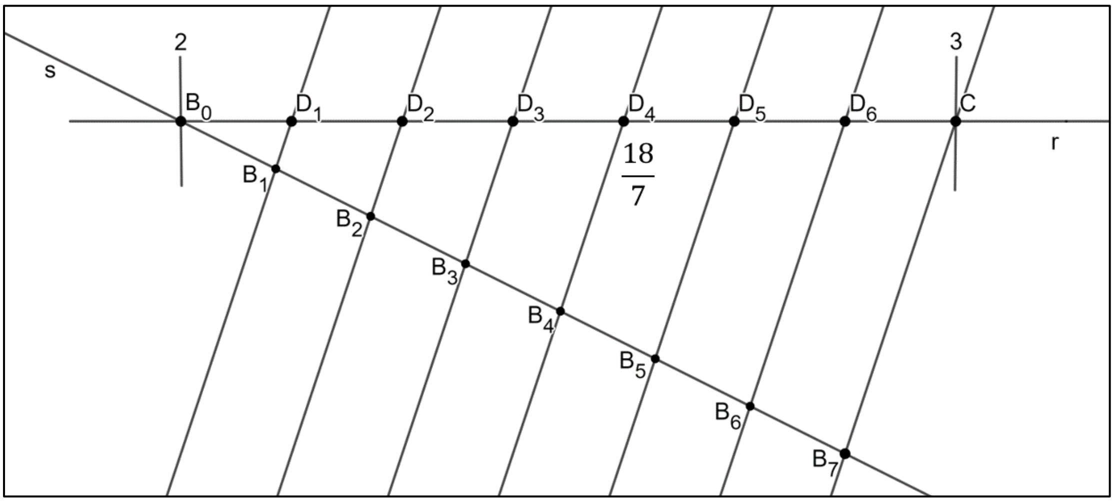


Fonte: Adaptado de Silva Jr. (2013, p. 16)

Sua demonstração consiste em: (i) sobre uma reta r, traçar o segmento $AB = a$; (ii) por A tracejar a reta s, concorrente a r, e marcar o segmento unitário AC; (iii) em seguida, sob s marcar o fragmento $AD = b$; (iv) construir uma reta que passa por B e D; (v) delinear uma paralela a BD, passando por C e intersectando AB; (vi) nomear esse ponto de "intersecção de Q", em que a distância de A a Q é $\frac{a}{b}$. A explicação matemática está na semelhança entre os triângulos ADB e ACQ: "$\frac{|AD|}{|AC|} = \frac{|AB|}{|AQ|}$. Isso significa que: $\frac{b}{1} = \frac{a}{|AQ|}$. Logo $\frac{a}{b} = |AQ|$" (SILVA Jr., 2013, p. 16)

Oliveira (2017), por sua vez, demonstra geometricamente como marcar o número racional $\frac{18}{7}$ numa reta r:

Figura 15: Marcação do número $\frac{18}{7}$ na reta r



Fonte: Adaptado de Oliveira (2017, p. 34)

Tal demonstração consiste em: (i) verificar noções básicas de frações, cujo número fique entre 2 e 3, visto que $\frac{14}{7} < \frac{18}{7} < \frac{21}{7}$; (ii) desse modo, marcar 2 e 3 na reta r e indicar os pontos B_0 e C neles, respectivamente; (iii) traçar, pelo ponto B_0, uma reta arbitrária s, distinta de r, marcar sobre s os pontos $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ e B_7 tais que, para $0 \leq i \leq 6$, os comprimentos B_iB_{i+1} tenham mesma medida; (iv) em seguida, desenhar a reta B_7C e as paralelas à B_7C passando por B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 e B_6; (v) se D_i, para $1 \leq i \leq 6$, é a intersecção da respectiva paralela com o segmento B_0C, então os pontos D_1, D_2, D_3, D_4, D_5 e D_6 dividem B_0C em sete partes iguais e, assim, $\frac{18}{7}$ está localizado em D_4 (OLIVEIRA, 2017).

Diante disso, podemos perceber que ambos autores utilizam a reta s sem ser perpendicular a r. Ou seja, é mais uma forma de abordar geometricamente o Problema 6, assim como outros que venham a ser semelhantes.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Embora este artigo apresente parte dos resultados oriundos de uma pesquisa mais ampla, cujo foco principal foi estudar tópicos e problemas de aritmética e álgebra dos LDs que se relacionam com a Geometria, ressaltamos que o trajeto metodológico percorrido foi suficiente para nos levar à uma sequência de estudos relacionados à História da Matemática e à História da Educação Matemática no Brasil, viabilizando chegarmos a vários resultados, dentre eles as possíveis abordagens geométricas de problemas aritméticos e algébricos propostos no material em questão.

Ao apresentarmos tais análises, percebemos que as mesmas são uma fonte de recursos didáticos para o professor de Matemática, de modo que possibilitam enxergar que há conteúdos que podem ser relacionados com a Geometria. Exemplos disso são: o problema da soma de números irracionais resolvido por meio do desenho geométrico que oportuniza trabalhar principais noções como ponto, vértice, segmento de reta, perpendicularidade, arcos, entre outros, bem como o raciocínio lógico, a criatividade e o progresso do indivíduo no tópico da demonstração; o problema da soma de números complexos, resolvido por meio do plano complexo de Argand-Gauss, que elucida a regra do paralelogramo, bem como a marcação cartesiana de pontos e vetores; o problema das combinações simples de pontos para formar triângulos distintos, resolvido por meio da operação de fracionar uma figura em subfiguras e agrupá-las convenientemente, fornecendo tratar da obtenção de medidas de áreas pela soma das grandezas de partes elementares, evidenciaando a equivalência de subfiguras, entre outras propriedades geométricas; o problema do cálculo do limite da soma dos termos de uma progressão geométrica, resolvido por meio de agrupamentos de retângulos que possibilita aprimorar o ato da demonstração matemática, bem como a argumentação visual para tal resultado obtido; o problema de função exponencial resolvido também por meio da operação de fracionar uma figura em subfiguras e agrupá-las convenientemente, oportunizando o raciocínio lógico, criatividade, argumentação visual e trabalhar outras propriedades geométricas; e o problema da marcação de números racionais em uma reta ordenada, solucionado por meio da semelhança de triângulos.

Apesar de ser um recorte de várias perspectivas feitas na pesquisa, acreditamos que as abordagens geométricas dos problemas expostos neste artigo podem ser utilizadas em diversos problemas, sejam nos mesmos conteúdos aritméticos e algébricos ou em outros temas não explorados aqui. Isto ganha mais importância quando pensamos que nem todos os estudantes compreendem facilmente o tratamento de um assunto ou um problema, sendo assim, um material complementar para as práticas diárias do professor de Matemática é uma alternativa de compreensão para o estudante.

Desse modo, acreditamos ser importante relacionar as áreas de Aritmética, Álgebra e Geometria, levando em consideração os aspectos históricos da Matemática e da Educação Matemática no Brasil, visto que isso possibilita compreender de modo eficaz a trajetória histórica da disciplina, percebendo as modificações que sofreu ao longo dos anos, suas diferentes abordagens no ensino e descrições e comparações desses aspectos.

Como já mencionado anteriormente, percebemos ter sido crescente a relação de alguns temas vinculados à Geometria nos LDs com o passar dos anos. Exemplo disso são as abordagens sob essa perspectiva de conteúdos, problemas e resoluções apresentadas por essas obras e evidenciadas ao longo deste texto. Contudo sabemos que o presente estudo tem limitações, como se pautar em dados coletados de apenas algumas coleções. Sendo assim, é imprescindível expandir a pesquisa para outros amteriais dessa natureza, para que possamos, de fato, observar se tal relação vem crescendo com o passar dos anos.

5 REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S; MANRIQUE, A. L; SILVA, M. J. F. da; CAMPOS, T. M. M. A geometria no ensino fundamental: reflexões sobre uma experiência de formação envolvendo professores e alunos. **Revista Brasileira de Educação**, s/v, n. 27, 2004. Doi: 10.1590/S1413-24782004000300007. Acesso em: 17 jul. 2021. p. 94-108.

BARONI, R. L. S; NOBRE, S. **A Pesquisa em História da Matemática e suas relações com a Educação Matemática**. In: BICUDO, M. (Org.). Pesquisa em Educação Matemática: Concepções & Perspectivas. 1. ed. São Paulo: Editora da Unesp, 1999, p. 129-136.

BATISTA, A. A. G. Um objeto variável e instável: textos, impressos e livros didáticos. In: ABREU, M. (Org.). **Leitura, História e História da Leitura**. Campinas: Mercado das Letras, 1999.

BEZERRA, M. J. **Curso de Matemática para os primeiro, segundo e terceiro anos dos cursos clássico e científico**. 7. ed. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1962.

BRASIL. Lei nº 4.244, de 9 de abril de 1942. Lei orgânica do ensino secundário. **Diário Oficial da União**. Rio de Janeiro, 1942. Disponível em: https://www2.camara.leg.br/legin/fed/declei/1940-1949/decreto-lei-4244-9-abril-1942-414155-publicacaooriginal-1-pe.html. Acesso em: 28 nov. 2020.

CARLINI, E. M. P; CAVALARI, M. F. As funções didáticas desempenhadas pela história da matemática nos livros didáticos de matemática do Ensino Médio. **Hipátia**, v. 2, n. 2, p. 71-88. 2017. Disponível em: https://ojs.ifsp.edu.br/index.php/hipatia/article/view/756. Acesso em: 26 jul. 2021.

CHERVEL, A. História das disciplinas escolares: reflexões sobre um campo de pesquisa. **Teoria & Educação**, Porto Alegre, s/v, n. 2, p.177-229. 1990.

CORREIA, N. D. da S. **Álgebra e aritmética em livros didáticos de 1879 a 2018**: uma possível abordagem usando geometria. 2020. 100f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática Licenciatura) – Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2020. Disponível em: www.repositorio.ufal.br/handle/riufal/7780. Acesso em: 17 jul. 2021.

CORREIA, N. D. da S.; SANTOS, V. de O. Abordagens geométricas em problemas aritméticos e algébricos propostos em livros didáticos do Ensino Médio. In: XIV Seminário Nacional de História da Matemática. **Anais**...Uberaba, Universidade Federal do Triângulo Mineiro, p. 990-1000. 2021. Disponível em: https://www.sbhmat.org/download/download?ID_DOWNLOAD=18. Acesso em: 21 out. 2021.

COUTO, A. P. N. P; JUCÁ, R. S. Uma análise de dois manuais de aritmética que circularam em Belém no período de 1900 a 1910. **HISTEMAT**, v. 5, n. 3, 2019. p. 152-177. Disponível em: http://histemat.com.br/index.php/HISTEMAT/article/view/283. Acesso em: 10 out. 2020.

D'AMBROSIO, B. S. Reflexões sobre a História da Matemática na Formação de Professores. In: NOBRE, S. (Org.). **Revista Brasileira de História da Matemática-an international journal on the History of Mathematics**, Especial nº 1–Festschrift Ubiratan D'Ambrosio, 2007. p. 399-406.

D'AMBROSIO, U. **Uma história concisa da Matemática no Brasil**. Petrópolis: Vozes, 2008.

DANTE, L. R. **Matemática** - volume único. São Paulo: Ática, 2005.

DASSIE, B; COSTA, D. A. da. Livros didáticos como fonte: o que dizem as pesquisas brasileiras do I ENAPHEM. In: VALENTE, W. R. (Org.). **História da educação matemática no Brasil**: problemáticas de pesquisa, fontes, referências teórico-metodológicas e histórias elaboradas. São Paulo: Livraria da Física, 2014, p. 200-209.

EDITORA MODERNA (Org.). **Conexões –** Matemática e suas tecnologias: grandezas, álgebra e algoritmos. 1. ed. São Paulo: Moderna, 2020a.

EDITORA MODERNA (Org.). **Conexões –** Matemática e suas tecnologias: estatística e probabilidade. São Paulo: Moderna, 2020b.

IEZZI, G; DOLCE, O; DEGENSZAJN, D. M; PÉRIGO, R. **Matemática** - volume único, manual do professor. São Paulo: Atual, 1997.

KRIPKA, R; SCHELLER, M; BONOTTO, D. L. Pesquisa Documental: considerações sobre conceitos e características na pesquisa qualitativa. **Atas Ciaiq2015**, v. 2, n. 1, p. 243-247. 2015. Disponível em: https://proceedings.ciaiq.org/index.php/ciaiq2015/article/view/252/248. Acesso em: 17 jul. 2021.

MATTOS, A. C. de; ABDOUNUR, O. J. Documentos legislativos: fontes para a história da educação matemática. In: VALENTE, W. R. (Org.). **História da educação matemática no Brasil**: problemáticas de pesquisa, fontes, referências teórico-metodológicas e histórias elaboradas. São Paulo: Livraria da Física, 2014, p. 210-224.

OLIVEIRA, F. D. **Análise de textos didáticos:** três estudos. 2008. 222 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2008. Disponível em: http://hdl.handle.net/11449/91113. Acesso em: 17 jul. 2021.

OLIVEIRA, M. M. de. **Conceitos de análise matemática na reta para bem**

compreender os números reais no ensino médio. 2017. 90f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT) – Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande, 2017. Disponível em: http://dspace.sti.ufcg.edu.br:8080/jspui/handle/riufcg/2293. Acesso em: 17 jul. 2021.

QUINTELLA, A. **Matemática** – terceiro ano colegial. 17. ed. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1970.

ROQUE, T; CARVALHO, J. B. P. **Tópicos de História da Matemática**. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

ROXO, E; CUNHA, H; PEIXOTO, R; NETTO, D. **Matemática 2º Ciclo** – 2ª série. 9. ed. São Paulo: Livraria Francisco Alves, 1959.

ROXO, E; CUNHA, H; PEIXOTO, R; NETTO, D. **Matemática 2º Ciclo** – 3ª série. 4. ed. São Paulo: Livraria Francisco Alves, 1955. Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/xmlui/handle/123456789/135743. Acesso em: 20 mar. 2021.

SAMARA, E. de M; TUPY, I. S. S. T. **História & Documento e metodologia da pesquisa**. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2010.

SILVA, C. I. D. N. da. **Proposta de aprendizagem sobre a importância do desenho geométrico e da geométrica descritiva**. 2006. 103f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Pontifícia Universidade Católica do Paraná, Curitiba, 2006. Disponível em: www.biblioteca.pucpr.br/tede/tde_busca/arquivo.php?codArquivo=620. Acesso em: 17 jul. 2021.

SILVA Jr., L. P. da. **Construções geométricas por régua e compasso e números construtíveis**. 2013. 47f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT) – Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande, 2013. Disponível em: http://dspace.sti.ufcg.edu.br:8080/jspui/handle/riufcg/2225. Acesso em: 17 jul. 2021.

SMOLE, K. S; DINIZ, M. I. **Matemática para compreender o mundo 1**. São Paulo: Saraiva, 2016a.

SMOLE, K. S; DINIZ, M. I. **Matemática para compreender o mundo 3**. 1. ed. São Paulo: Saraiva, 2016b.

VALENTE, W. R. Livro didático e educação matemática: uma história inseparável. **Zetetiké**, Unicamp, v. 16, n. 30, 2008. p. 139-161. Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/xmlui/handle/123456789/160373. Acesso em: 17 jul. 2021.

VALENTE, W. R. Os diálogos trans, inter e intra da história da educação matemática no Brasil. In: VALENTE, W. R. (Org.). **História da educação matemática no Brasil**: problemáticas de pesquisa, fontes, referências teórico-metodológicas e histórias elaboradas. São Paulo: Livraria da Física, 2014.

Submetido em agosto de 2021.
Aprovado em outubro de 2021.