

Al-Khwarizmi e Omar Khayyam:

similaridades e diferenças entre álgebra e geometria

Al-Khwarizmi and Omar Khayyam:

similarities and differences between algebra and geometry

Rosângela Araújo da **Silva**

Instituto Federal do
Rio Grande do Norte
(IFRN)

Severino Carlos **Gomes**

Instituto Federal do
Rio Grande do Norte
(IFRN)

Bernadete Barbosa **Morey**

Universidade Federal do
Rio Grande do Norte
(UFRN)

Resumo

A época do império islâmico medieval, entre os séculos IX e XV, marcou a história da Álgebra com diversos expoentes fundamentais para o futuro da Matemática, dentre eles, destacam-se: *O livro sobre o cálculo de álgebra e al-muqabala*, de al-Khwarizmi, e o *Tratado sobre as Demonstrações dos Problemas de Álgebra e al-Muqabala*, de Omar Khayyam. Nesse sentido, o presente trabalho visa realizar um estudo preliminar entre os dois tratados algébricos, buscando similaridades e diferenças entre eles e possíveis comparações entre os tratamentos algébricos e geométricos na resolução de equações polinomiais de segundo grau, com o intuito de posterior elaboração de atividades articulando a História da Matemática e o Ensino de Matemática. Para a realização do estudo investigativo, tomaremos as ideias de Gil (2008) do método comparativo na perspectiva de pesquisa documental e bibliográfica, utilizando, para tanto, um exemplo cujas diferenças, apesar das similaridades na resolução da equação apresentada, apontam para o fato de que enquanto al-Khwarizmi indica a resolução para o caso particular, Omar Khayyam se concentra na forma geral de resolução.

Palavras-chave: História da Álgebra. Matemática Islâmica Medieval. Resolução de equações polinomiais. Tratado algébrico.

Abstract

The period of the medieval Islamic empire between the 9th and 15th centuries marked the history of Algebra with several fundamental exponents for the future of Mathematics. Among them, noteworthy are: *The Book on Algebra and Al-Muqabala Calculus*, by al-Khwarizmi, and the *Treatise on the Proofs of the Problems of Algebra and al-Muqabala*, by Omar Khayyam. Hereupon, the present work aims to carry out a preliminary study between the two algebraic treatises, looking for similarities and differences between them and possible comparisons between the algebraic and geometric treatments in solving polynomial equations of second degree, aiming further elaboration of activities articulating History of Mathematics and Teaching of Mathematics. To carry out the investigative study, we will take the ideas of Gil (2008) of the comparative method in the perspective of documentary and bibliographic research, using, for this, an example, which despite the similarities in the solution of the presented equation, indicate the fact that while al-Khwarizmi indicates the solution for the particular case, Omar Khayyam focuses on the general form of solution.

Keywords: History of Algebra. Medieval Islamic Mathematics. Solving polynomial equations. Algebraic treatise.

1 INTRODUÇÃO

A Matemática Islâmica, durante a Idade Média, propiciou avanços em várias áreas do conhecimento, em particular o desenvolvimento da Álgebra, sobre a qual é imprescindível registrar os estudos de al-Khwarizmi (780-850), com seu tratado intitulado *Al-Kitab al-muhtasar fi hisab al-jabr wa-l-muqabala* (O livro sobre o cálculo de álgebra e al-muqabala) que deu nome à área. Ainda no tocante aos primórdios da Álgebra, convém destacar os estudos de Omar Khayyam (1048-1131), que no tratado *Al-Risala fi-l-barahin 'ala masa'il al-jabr wa-l-muqabala* (Tratado sobre as Demonstrações dos Problemas de Álgebra e al-Muqabala) classifica-a por tipos equações polinomiais e desenvolve novas contribuições principalmente com relação às equações de terceiro grau.

Nesse contexto, fazem-se relevantes algumas questões decorrentes dos estudos dos dois tratados mencionados, tais como: Quais as similaridades e as diferenças entre os estudos algébricos de al-Khwarizmi e de Omar Khayyam? É possível estabelecer comparações entre esses estudos? Dessa forma, o presente relato tem o objetivo de apresentar o estudo preliminar de pesquisa com foco na elaboração de atividades que articulem História da Matemática e Ensino de Matemática entre tais tratados, evidenciando lhes similaridades e diferenças para, em seguida, compor um minicurso para professores. Em seguida, apresenta-se a fundamentação teórica delineando a investigação, seus aspectos metodológicos e outros que sejam relevantes no estudo dos matemáticos em questão, com apresentação de caso particular para ilustrar os resultados preliminares.

2 FUNDAMENTOS TEÓRICO-METODOLÓGICOS

No início do século VII, na Península Arábica, teve início um movimento religioso, que envolveu judeus, cristãos e vilas tradicionais beduínas. Surgia, com o profeta Maomé, o Islã, como nova religião, cujo significado, em árabe, é “submissão”. Após a morte do profeta, iniciam-se as conquistas e a formação de um império. Os árabes eram conquistadores e se interessavam pela cultura dos povos logrados, com o intuito de assimilar, transmitir e ensinar. Uma grande contribuição que trouxeram foi o sistema de numeração posicional de base dez e as equações algébricas, oriundas da Índia (CASTILLO, 2009).

No início do Império Islâmico¹ o centro político era Damasco, quando os líderes, após a morte de Maomé, foram os califas (sucessores). Esse primeiro califado pertencia à família Omíada, porém, em 750, foi passado para um novo grupo, os Abássidas, no período em que al-Mansur ordenou a construção de Bagdá como sua nova capital, sob os auspícios de seus astrólogos, o trabalho começou em 30 de julho de 762, e, de fato, a cidade prosperou. Entre 813 e 833, aconteceu o reinado do califa al-Mamun, fundador da *A Casa de Sabedoria* em Bagdá, uma instituição de tradução e estudos, que reunia diversos sábios da época (BERGREN, 2003).

Na efervescência cultural de Bagdá de al-Mamun, surgiram os estudos de al-Khwarizmi (780-850)². Youschkevitch (1976), com seu tratado algébrico intitulado *Al-Kitab al-muhtasar fi hisab al-jabr wa-l-muqabala*, foi precursor e nomeou a Álgebra, tornando-a uma disciplina autônoma. Apesar dessa questão, o arabista russo ainda afirma que:

As obras de al-Khwarizmi, em particular seus tratados sobre Aritmética e Álgebra, exerceram uma influência preponderante no desenvolvimento posterior da Matemática. Eles foram o ponto de partida para muitos trabalhos posteriores e partes deles foram retomadas em outras obras (p. 14, tradução nossa).

¹ Para contextualização da época do império islâmico medieval veja Morey (2021).

² Mais detalhes sobre sua vida, estudos e contexto histórico consulte Posada-Balvin (2021).

Não se trata de exagero, segundo Rashed (1994), atribuir a originalidade de conceber a Álgebra ao sábio al-Khwarizmi, em seu tratado há termos puramente algébricos, sendo eles: o desconhecido, designado sem distinção: *raiz*, *coisa* e seu quadrado: *mal*.

Neste trabalho usamos como texto principal do documento de al-Khwarizmi, uma tradução para o espanhol feita por Ricardo Moreno Castillo, intitulada *El libro del Álgebra*. Na introdução da obra, Castillo (2009, p. 11-12) expõe o título completo do texto e o descreve:

Uma propriamente algébrica, que trata da resolução de equações, outra sobre alguns temas de geometria elementar e a terceira sobre questões testamentárias. A palavra *jabr* quer dizer restaurar, no sentido médico de colocar um membro deslocado em seu lugar. No contexto das equações algébricas significa a transposição de termos: quando se elimina um elemento em um dos lados de uma equação, este tem que ser restaurado, colocando-o no outro lado (tradução nossa).

Dois séculos depois da morte de al-Khwarizmi, nasce o poeta, astrônomo e matemático, Omar Khayyam (1048-1131)³, nome pelo qual é conhecido no Ocidente. Ele foi para Samarcanda-Uzbequistão em 1070, onde foi apoiado pelo jurista Abu Tahir, esse momento lhe propiciou escrever sua obra mais famosa, o *Tratado sobre Demonstração de Problemas de Álgebra*. (ROSENFELD; YOUSCHKEVITCH, 2008)

Para este trabalho usaremos duas traduções do tratado de Omar Khayyam, quais sejam: a feita para o russo, em 1953, por Boris Rosenfeld e feita para o inglês, em 2008, por Roshid Khalil. O tratado foi escrito por volta de 1070-1075 e afirma que:

[...] a arte da álgebra e almuqabala é uma arte científica, cujo assunto é o número absoluto e as quantidades mensuráveis, que são desconhecidos, mas atribuídos a alguma coisa conhecida, pela qual podem ser determinados. [...] A excelência desta arte reside no conhecimento dos métodos de estudo, através dos quais é possível compreender a forma de determinar os desconhecidos acima referidos, tanto numéricos quanto geométricos. (KHAYYAM, 1953, p. 17, tradução nossa).

Para desenvolvermos este estudo nos apoiamos no método comparativo, o qual, segundo Gil (2008), investiga indivíduos, classes, fenômenos ou fatos, com o intuito de ressaltar as diferenças e similaridades entre eles. Dessa forma, esse método possibilita o estudo comparativo de fatos, separados pelo espaço e tempo. Para tanto, fizemos uso de pesquisa bibliográfica e documental, a qual, segundo Gil (2008, p. 50) “é desenvolvida a partir de material já elaborado, constituído principalmente de livros e artigos científicos.”, enquanto “a pesquisa documental vale-se de materiais sem tratamento analítico ou, que ainda podem ser reelaborados de acordo com os objetivos da pesquisa” (Idem).

Por fim, no intuito de elaborar atividades que articulem História da Matemática e Ensino de Matemática, este estudo comparativo nos possibilitou apresentar, a futuros professores, o conhecimento genuíno produzido na época, com o intuito de realizar uma reflexão sobre como aquela pode aprofundar os estudos, refutar ideias existentes e fazer inferências, e assim contribuir com esta, no sentido de exibir a historicidade dos eventos e os contextos em que estão inseridos. (FRANSOLIN; SOUZA, 2019)

2.1 Os estudos de al-Khwarizmi

Relatos modernos de Álgebra árabe, especialmente aqueles que descrevem o estudo de al-Khwarizmi no início do século IX, tendem a se concentrar nas soluções para seis equações

³ Mais detalhes sobre sua vida, estudos e contexto histórico consulte Bandeira (2021)

quadráticas lineares simplificadas e suas provas geométricas, na perspectiva da resolução prática de problemas algébricos. As medidas de *comprimento*, *área*, *peso* ou *tempo* eram sempre numéricas, não havendo preocupação com análise dimensional.

O tratado de al-Khwarizmi em *Kitāb al-jabr wa'l-muqābala* (Livro de Álgebra) passou a ser referência, em se tratando da classificação e solução de seis tipos de equações quadráticas simplificadas e de regras para operar com raízes e polinômios. Ao tratamento teórico, se segue uma coleção de trinta e nove problemas resolvidos (OAKS, 2011).

Assim como na Europa Medieval, os números negativos e o zero ainda não eram reconhecidos na Matemática islâmica. Com isso, al-Khwarizmi reduzia os problemas a seis tipos de equações (Quadro 1), para cada uma delas havia uma regra, um método algébrico (ou geométrico) de resolução⁴.

Quadro 1: Tipos de equações de al-Khwarizmi.

TIPO	LINGUAGEM RETÓRICA	NOTAÇÃO MODERNA
1	Quadrados equivalem a raízes	$ax^2 = bx$
2	Quadrados equivalem a números	$ax^2 = c$
3	Raízes equivalem a números	$bx = c$
4	Quadrados e raízes equivalem a números	$ax^2 + bx = c$
5	Quadrados e números equivalem a raízes	$ax^2 + c = bx$
6	Raízes e números equivalem a quadrados	$bx + c = ax^2$

Fonte: Castillo (2009).

2.2 Os estudos de Omar Khayyam

Nos tempos de Omar Khayyam (1048-1131), a Álgebra islâmica não mais era somente vista como um método prático para resolução de problemas aritméticos, pois suas técnicas também se mostravam eficazes para resolver problemas da Geometria que não podiam ser resolvidos com régua e compasso (OAKS, 2011).

O estudo sistemático das equações lineares e quadráticas para resolução de problemas práticos era ferramenta conhecida desde os tempos de al-Khwarizmi. O mesmo não se pode afirmar sobre o estudo das equações cúbicas. Somente no século X, os algebristas do Império Islâmico passaram a estabelecer parâmetros para simplificar o estudo de alguns tipos de equações cúbicas recorrendo a artifícios para reclassificá-las em equações de grau inferior.

Por outro lado, para outros tipos de equações cúbicas, havia uma reinterpretação dos termos da equação em função de duas seções cônicas, podendo (ou não) se cruzarem, onde a solução para o problema está diretamente ligada a essa intersecção. Para Oaks (2011), essa técnica já estava bem estabelecida quando al-Khayyam concebeu sua ideia para sistematizá-la.

Nesse sentido, afirma Van Der Warden (1985), a Álgebra de Omar Khayyam é estritamente geométrica. Ele primeiro resolve equações lineares e quadráticas pelos métodos explicados nos *Elementos*, de Euclides e, a seguir, mostra que as equações cúbicas podem ser resolvidas por meio de interseções de cônicas, no entanto, seu estudo foge momentaneamente do escopo do nosso trabalho, logo, será explorado em futuras oportunidades.

⁴ Para discussão de exemplos dos tipos de equações de al-Khwarizmi, ver Araújo (2019).

Voltemos nossos esforços para as equações quadráticas, para efeito de melhor compreensão iremos exemplificar a resolução de equações do tipo 5 do Quadro 1.

3 ESTUDO DE CASO PARTICULAR

Para esse caso particular, usamos o tipo quadrados e números iguais a raízes, apresentando as propostas de resolução de al-Khwarizmi e Omar Khayyam.

Consideraremos primeiro o problema, como listado em Al-Kwarizmi⁵ (2009, p. 29): “un cuadrado más veintiún dirhams es igual a diez de sus raíces”, em notação moderna: $x^2 + 21 = 10x$. Vale salientar que à época somente raízes positivas da equação eram consideradas, pois os matemáticos islâmicos não conheciam números negativos ou zero.

La solución está em dividir por dos las raíces, y resulta cinco, lo multiplicas por sí mesmo y da veinticinco, restas el veintiuno que está com el cuadrado e da cuatro, calculas su raíz cuadrada e da dos, y los resta de la mitad del número de raíces (que es cinco) y da tres, y ésa es la raíz del cuadrado sobre el cual se suma, y el cuadrado es nueve. Y si quieres, sumas la raíz cuadrada sobre lá mitad del número de raíces (que es cinco) y da siete, y ésa es la raíz del cuadrado sobre el cual se suma, y el cuadrado es cuarenta y nueve (AL-KWARIZMI, 2009, p. 29)

A reescrita da descrição da resolução para a notação moderna pode ser vista no Quadro 2.

Quadro 2: Descrição do método de Al-Khwarizmi.

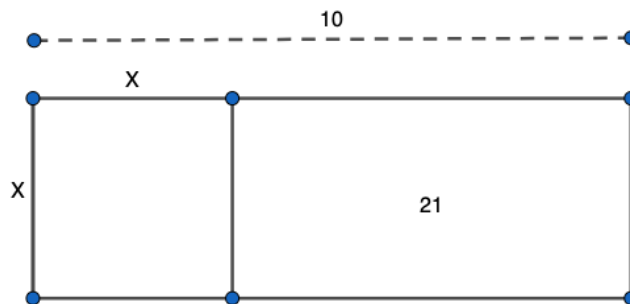
PASSO	LINGUAGEM RETÓRICA	NOTAÇÃO MODERNA
1	Dividir dez por dois é igual a cinco	$10 \div 2 = 5$
2	Multiplicar cinco por ele mesmo é igual a vinte e cinco	$5 * 5 = 5^2 = 25$
3	Subtrair vinte e um de vinte e cinco é igual a quatro	$25 - 21 = 4$
4	Extrair a raiz quadrada de quatro é igual a dois	$\sqrt{4} = 2$
5	Subtrair dois de cinco é igual a três	$5 - 2 = 3$
6	Essa é uma raiz	$x = 3$
7	Para a outra raiz	$2 + 5$
8	Essa é outra raiz	$x = 7$

Fonte: Al-Khwarizmi(2009).

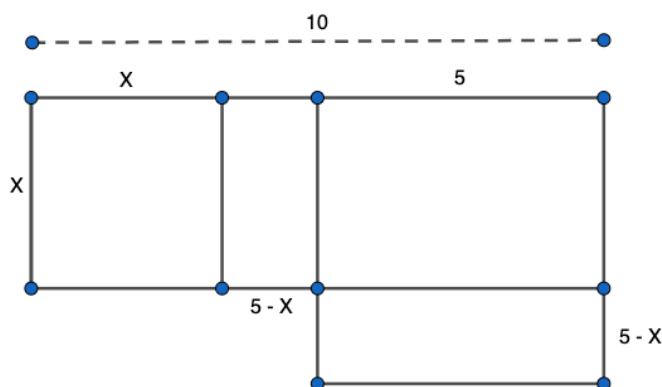
Seguido do método algébrico, Al-Khwarizmi(2009) apresenta geometricamente a resolução da equação. Vejamos a resolução do caso $x < 5$ com as devidas adaptações. Considera-se primeiramente um retângulo de área $10x$ dividido em outro de área 21 e em um quadrado de área x^2 conforme Figura 1, que, portanto, representa a equação $x^2 + 21 = 10x$. Em seguida, toma-se o ponto médio do lado 10 do retângulo e constrói-se um quadrado de lado 5, conforme Figura 2.

Observa-se que o retângulo correspondente ao número 21 da Figura 1 está subdividido em dois outros, um de área $x(5 - x)$ e outro com $5x$; ou seja, na Figura 2, o número $21 = x(5 - x) + 5x$. Ainda, surge um novo retângulo de área $5(5 - x)$, nele constrói-se um quadrado de lado $5 - x$, conforme Figura 3. Portanto, o quadrado de lado 5 (Figura 3) está subdividido, tal que sua área vale $25 = 5x + x(5 - x) + (5 - x)^2$. Como $21 = x(5 - x) + 5x$ (Figura 2), então $25 - 21 = (5 - x)^2$ e $5 - x = 2$, donde segue que $x = 3$.

⁵ Esta é a grafia em língua espanhola.

Figura 1: Retângulo de área $10x$.

Fonte: Adaptado de Al-Khwarizmi(2009).

Figura 2: Construção do quadrado de lado 5.

Fonte: Adaptado de Al-Khwarizmi(2009).

Para a mesma equação $x^2 + 21 = 10x$, na ótica de Omar Khayyam,

[...] subtraia o número do quadrado da metade do número das raízes e tire a raiz do resultado. Adicione (ou subtraia) o resultado à metade do número de raízes. O que obtemos depois de adicionar ou subtrair é a raiz [lado] do quadrado. (AL-KHAYYAM, 2008, p. 10, tradução nossa)

Aqui observa-se processo semelhante ao apresentado por al-Khwarizmi (Quadro 2), no entanto, Khayyam trabalha de forma generalizada. A compatibilidade também ocorre na resolução geométrica apresentada em al-Khayyam (2008). A única diferença notável é a posição do quadrado de lado $5 - x$ (Figuras 3 e 4), o que praticamente nada diferencia da resolução de al-Khwarizmi.

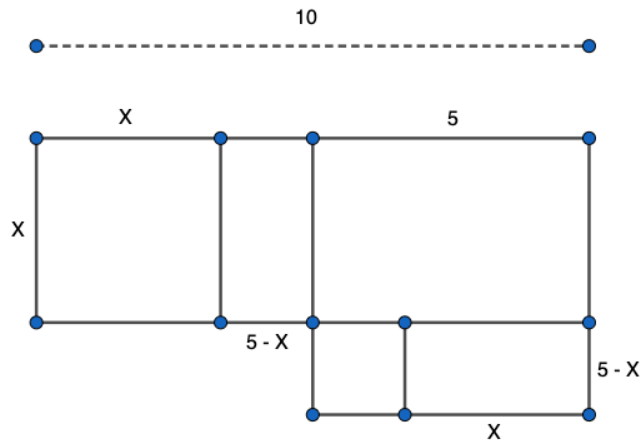
Portanto, finalizamos o estudo do caso $x < 5$, para a resolução da equação em foco. Agora vejamos o caso cujo lado do quadrado desconhecido é maior que a metade de 10 de suas raízes, com base nas informações de Henderson (2001), ou seja, em que se tem $x > 5$ (Figura 5).

Utilizando o mesmo procedimento, como ilustrado da Figura 1 a Figura 3, observa-se agora que o quadrado de lado 5 encontra-se no interior do retângulo área $10x$. Além disso, na Figura 5, de $x^2 + 21 = 10x$ tem-se $21 = x(10 - x) = 5(10 - x) + (x - 5)(10 - x)$. Segue, então, $5^2 = (x - 5)^2 + 5(10 - x) + (x - 5)(10 - x)$, ou seja, $25 = (x - 5)^2 + 21$, de onde surge $x = 7$.

É importante ressaltar há diferenças nas maneiras de Al-Khwarizmi e Khayyam apresentarem resoluções algébricas para o tipo *quadrados e números iguais a raízes*. Al-Khwarizmi mostra o exemplo/método e afirma que pode ser usado para casos semelhantes e, posteriormente, informa:

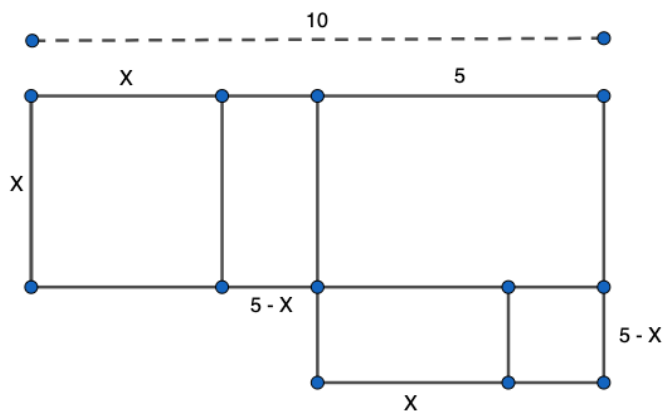
E você deve saber que se, neste caso, ao dividir o número de raízes por dois e multiplicá-lo por si mesmo resultar em um número menor do que o de dirhams que estão com o quadrado, então o problema é impossível, e se for o mesmo para o número de dirhams, então a raiz quadrada é igual a metade do número de raízes, sem adicionar ou subtrair nada (AL-KWARIZMI, 2009, p. 29, tradução nossa).

Figura 3: Subdivisão do quadrado de lado 5.



Fonte: Adaptado de Al-Khwarizmi(2009).

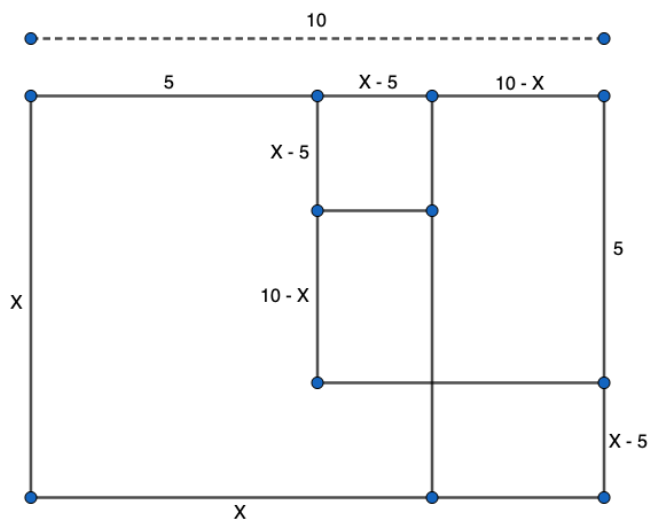
Figura 4: Subdivisão feita por Khayyam do quadrado de lado 5



Fonte: Adaptado de Al-Khayyam (2008).

Por outro lado, al-Khayyam (2008, p. 10, tradução nossa) começa a resolução do tipo em questão, afirmando que: “Neste caso, o número não deve exceder o quadrado da metade do número de raízes; caso contrário, o problema não tem solução.” E segue mostrando a forma geral de resolução, cuja sequência seguimos para solucionar a equação do caso particular.

Figura 5: Resolução geométrica para $x > 5$.



Fonte: Adaptado de Henderson (2001).

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Não é de espantar a similaridade do método algébrico/geométrico de resolução de al-Khwarizmi e de Omar Khayyam. A influência de Euclides e outros geômetras gregos conduziu os estudiosos islâmicos por esse caminho, tanto que Khayyam (1953) afirma que seu tratado somente será compreendido pelos que conhecem os *Elementos*, e os dois primeiros livros de *Dados*⁶ de Euclides e as *Cônicas* de Apolônio.

Ainda sobre a importância dos *Elementos* de Euclides para os matemáticos islâmicos medievais, o processo geométrico dos primeiros algebristas é devido exclusivamente a Euclides, segundo Katz (2010). Nesse sentido, vale ressaltar que Abd al-Hamid Ibn Turk, contemporâneo de al-Khwarizmi, fazia uso de fatos geométricos euclidianos em estudos algébricos (OAKS, 2011). Em resultado de pesquisa, Muniz (2020, p. 49) afirma que:

Ibn Turk representava, por exemplo, casos particulares de equações polinomiais de 2º grau utilizando a geometria. O interesse pelo tema se justifica pelo espírito de época, em que outros estudiosos trabalhavam com álgebra também nessa perspectiva.

Em outras palavras, Ibn Turk buscava soluções para equações polinomiais de 2º grau a partir de figuras geométricas que as justificassem. Muniz (2020) destaca que essa característica usando recursos geométricos estava presente nos trabalhos de outros algebristas, como al-Khwarizmi, al-Mahani (820-880), Thabit Ibn Qurra (836-901) e Abu Kamil (850-930).

Nesse sentido, evidenciamos o trabalho de Omar Khayyam, classificando equações lineares e quadráticas por tipos e mostrando suas respostas. Uma sistematização dos conhecimentos necessários para a continuidade dos seus estudos com equações cúbicas, visto que Khayyam apresentou um modo de reduzi-las para quadráticas e lineares de resoluções já conhecidas, e mostrou soluções por meio da interseção de seções cônicas para equações cúbicas não redutíveis, sendo um avanço importante para a Álgebra. O estudo do tratado de Khayyam está em sua fase inicial como parte de um projeto de pesquisa de doutoramento, assim como será parte desse projeto a elaboração de atividades para futuros professores que articulem História da Matemática e seu Ensino como componentes de um minicurso.

Por fim, no presente trabalho, ressaltamos um caso particular de equação quadrática para analisar o desenvolvimento dos procedimentos algébricos/geométricos de Al-Khwarizmi e Omar Khayyam, evidenciando as similaridades ao aplicar o processo de resolução da equação proposta, e as diferenças ao mostrar que al-Khwarizmi apresenta exemplo ou método para isso, enquanto Omar Khayyam apresenta a forma genérica resolução.

⁶ Os livros *Dados* foram escritos como suplemento aos Livros I ao VI dos *Elementos* (KATZ, 2010).

REFERÊNCIAS

- AL-KHAYYAM, O. **An Essay by the Uniquely Wise 'Abel Fath Omar Bin Al-Khayyam on Algebra and Equations**: Algebra wa Al-Muqabala. Tradução de Roshdi Khalil. Lebanon: Garnet Publishing Limited, 2008.
- AL-KWARIZMI, M. M. **El libro del Álgebra**. Tradução de Ricardo Moreno Castillo. Três Cantos: Nivola, 2009.
- ARAÚJO, M. G. **Abu Ja'far Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi**: contribuições da álgebra para o ensino. 2019. 141f. Dissertação (Mestrado) - Programa de pós-graduação em ensino de ciências naturais e matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2019.
- BANDEIRA, F. de A. Ghiyāth al-Dīn Abū'l-Fath 'Umar ibn Ibrāhīm al-Naysābūrī al-Khayyām(1048-1131). In: PEREIRA, A. C. C.; MOREY, B. (Orgs.). **Estudiosos em Ciências e Matemática no Mundo Islâmico Medieval**. Fortaleza: EdUECE, 2021.
- BERGGREN, J.L. **Episodes in the mathematics of medieval islam**. New York: Springer-Verlag Inc., 2003.
- CASTILLO, R. M. Introducción. In: AL-KWARIZMI, M. M. **El libro del Álgebra**. Tradução de Ricardo Moreno Castillo. Três Cantos: Nivola, 2009.
- FRANSOLIN, J. B. L.; SOUZA, R. B. A história da matemática numa perspectiva para a formação humana dos futuros professores de matemática. **Hipátia**, v.4, n.1, p. 62-83, jun. 2019.
- GIL, A. C. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 6. ed. São Paulo: Atlas, 2008.
- HENDERSON, David W. Experiencing Geometry. In: **Euclidean, Spherical, and Hyperbolic Spaces**. 2. ed. New York: Prentice Hall, 2001.
- KATZ, V. J. **História da Matemática**. Revisão de Jorge Nuno Silva. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2010.
- KHAYYAM, O. **Математические Трактаты Омара Хайяма**. Tradução de Boris Abramovitch Rosenfeld. Moscou, 1953, p. 11-66.
- MOREY, B. O Mundo Islâmico Medieval e os Estudos em Ciências e Matemática In: PEREIRA, A. C. C.; MOREY, B. (Orgs.). **Estudiosos em Ciências e Matemática no Mundo Islâmico Medieval**. Fortaleza: EdUECE, 2021.
- MUNIZ, J. T. **Soluções de equações quadráticas por 'Abd al-Hamid Ibn Turk na formação inicial do professor de matemática**: uma perspectiva orientada pela história da matemática. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN), 2020.
- OAKS, J. A. Al-Khayyām's. **Scientific Revision of Algebra**. Suhayl, n. 10, 2011, p. 47-75.
- POSADA-BALVIN, F. A. Abu Ja'Far Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi e a Casa da Sabedoria (780-850) [al-khwarizmi]. In: PEREIRA, A. C. C.; MOREY, B. (Orgs.). **Estudiosos em Ciências e Matemática no Mundo Islâmico Medieval**. Fortaleza: EdUECE, 2021.
- RASHED, R. **The development of Arabic mathematics**: between arithmetic and algebra. Trad.: Angela Armstrong. Boston: Springer, 1994.
- ROSENFELD, B. A.; YOUSCHKEVITCH, A. P. **Al-Khayyām** - Complete Dictionary of Scientific Biography. 2008.
- VAN DER WARDEN, B. L. **A History of Algebra**: From al-Khwarizmi to Emmy Noether. Berlin: Springer-Verlag, 1985.
- YOUSCHKEVITCH, A. P. **Les Mathématiques Arabes**: VIIIe-XVe siècles. Trad.: M. Cazenazeet K. Jaouiche. Paris: VRIN, 1976.

**Submetido em julho de 2021.
Aprovado em setembro de 2021.**

Rosângela Araújo da Silva

Mestre em Matemática pela Universidade Federal do Ceará (UFC). Docente do Instituto Federal do Rio Grande do Norte (IFRN), Santa Cruz, RN, Brasil. ID Lattes: 3273901097621893. Orcid ID: 0000-0002-9174-6232.

Contato: rosangela.silva@ifrn.edu.br.

Severino Carlos Gomes

Doutor em Educação pela Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN).
Docente do Instituto Federal do Rio Grande do Norte (IFRN), Natal, RN, Brasil. ID Lattes:
3456901728902392. Orcid ID: 0000-0002-8033-2675.

Contato: severocarlosgomes@gmail.com.

Bernadete Barbosa Morey

Doutorado em Educação Matemática pela Universidade Russa da Amizade dos Povos
(RUDN). Docente da Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN), Natal, RN
Brasil. ID Lattes: 7554818862651491. Orcid ID: 0000-0003-3253-0383.

Contato: bernadetemorey@gmail.com.