Al-Khwarizmi e Omar Khayyam:
similaridades e diferenças entre álgebra e geometria

Al-Khwarizmi and Omar Khayyam:
similarities and differences between algebra and geometry

Rosângela Araújo da **Silva**[*]
Severino Carlos **Gomes**[**]
Bernadete Barbosa **Morey**[***]

Resumo

A época do império islâmico medieval entre os séculos IX e XV marcou a história da álgebra com diversos expoentes fundamentais para o futuro da matemática. Entre eles, destacam-se os tratados: O livro sobre o cálculo de álgebra e al-muqabala de al-Khwarizmi e o Tratado sobre as Demonstrações dos Problemas de Álgebra e al-Muqabala de Omar Khayyam. Neste sentido, o presente trabalho visa realizar um estudo preliminar entre os dois tratados algébricos buscando similaridades e diferenças entre eles e, se possível, estabelecer comparações entre os tratamentos algébricos e geométricos na resolução de equações polinomiais de segundo grau, com o intuito de posterior elaboração de atividades articulando História da Matemática e Ensino de Matemática. Para a realização do estudo investigativo tomaremos as ideias de Gil (2008) usando o método comparativo dentro da perspectiva de pesquisa documental e bibliográfica. Utilizamos para comparação um exemplo, que apesar das similaridades na resolução da equação apresentada, as diferenças apontam que enquanto al-Khwarizmi apresenta a resolução para o caso particular, Omar Khayyam se concentra na forma geral de resolução. **Palavras-chave**: História da Álgebra. Matemática Islâmica Medieval. Resolução de equações polinomiais. Tratado algébrico.

Abstract

The period of the medieval Islamic empire between the 9th and 15th centuries marked the history of algebra with several fundamental exponents for the future of mathematics. Among them, noteworthy are the treatises: The Book on Algebra and Al-Muqabala Calculus by al-Khwarizmi and the Treatise on the Proofs of the Problems of Algebra and al-Muqabala by Omar Khayyam. In this sense, the present work aims to carry out a preliminary study between the two algebraic treatises looking for similarities and differences between them and, if possible, to establish comparisons between the algebraic and geometric treatments in solving polynomial equations of the second degree, with the aim of further elaboration of activities articulating History of Mathematics and Teaching of Mathematics. To carry out the investigative study we will take the ideas of Gil (2008) using the comparative method within the perspective of documentary and bibliographic research. We use an example for comparison, which despite the similarities in the solution of the presented equation, the differences indicate that while al-Khwarizmi presents the solution for the particular case, Omar Khayyam focuses on the general form of solution. **Keywords**: History of Algebra. Medieval Islamic Mathematics. Solving polynomial equations. Algebraic treatise.

[*] Mestre em Matemática pela Universidade Federal do Ceará (UFC). Professora no Instituto Federal do Rio Grande do Norte (IFRN), Santa Cruz, RN, Brasil. Lattes.cnpq.br/3273901097621893. Orcid.org/0000-0002-9174-6232. rosangela.silva@ifrn.edu.br.

[**] Doutor em Educação pela Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN). Professor no Instituto Federal do Rio Grande do Norte (IFRN), Natal, RN, Brasil. Lattes.cnpq.br/3456901728902392. Orcid.org/0000-0002-8033-2675. severocarlosgomes@gmail.com.

[***] Pós-doutorado pela Laurentian University (LU), Sudbury, Canadá. Professora na Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN), Natal, RN, Brasil. Lattes.cnpq.br/7554818862651491. Orcid.org/0000-0003-3253-0383. bernadetemorey@gmail.com.

1 INTRODUÇÃO

A matemática islâmica durante a idade média propiciou diversos avanços em várias áreas do conhecimento, e em particular o desenvolvimento da álgebra. Em se tratando de álgebra, é imprescindível registrar os estudos de al-Khwarizmi (780-850) com seu tratado algébrico intitulado *Al-Kitab al-muhtasar fi hisab al-jabr wa-l-muqabala* (O livro sobre o cálculo de álgebra e al-muqabala) que nomeou a álgebra. Ainda no tocante aos primórdios da álgebra convém destacar os estudos de Omar Khayyam (1048-1131), que em seu tratado algébrico intitulado *Al-Risala fi-l-barahin ‘ala masa'il al-jabr wa-l-muqabala* (Tratado sobre as Demonstrações dos Problemas de Álgebra e al-Muqabala) classifica por tipos equações polinomiais e desenvolve novas contribuições principalmente com relação às equações de terceiro grau.

Nesse contexto, faz-se relevante algumas questões decorrentes dos estudos dos dois tratados mencionados, tais como: Quais as similaridades e as diferenças entre os estudos algébricos de al-Khwarizmi e de Omar Khayyam? É possível estabelecer comparações entre esses estudos?

Dessa forma, o presente relato tem o objetivo de apresentar o estudo preliminar entre os tratados algébricos de al-Khwarizmi e de Omar Khayyam, evidenciando similaridades e diferenças entre seus estudos algébricos. Tal trabalho é um dos estudos preliminares de análise do tratado algébrico citado de Omar Khayyam, objeto de pesquisa doutoral com foco na elaboração de atividades que articulem História da Matemática e Ensino de Matemática que comporão um minicurso para futuros professores.

Assim, esse texto se apresenta, além dessa breve introdução, com uma fundamentação teórica delineando a investigação, os aspectos metodológicos da pesquisa, alguns aspectos relevantes dos estudos de al-Khwarizmi e Omar Khayyam com apresentação de caso particular para ilustrar os resultados preliminares.

2 FUNDAMENTOS TEÓRICO-METODOLÓGICOS

No início do século VII, na península arábica teve início um movimento religioso, que envolveu os judeus, os cristãos e as vilas tradicionais beduínas. Surgia com o profeta Maomé o Islã, como nova religião, que em árabe significa submissão. Após a morte do profeta, inicia-se as conquistas e forma-se um império. Os árabes eram povos conquistadores que se interessavam pela cultura dos povos conquistados, com o intuito de assimilar, transmitir e ensinar. Um dos notáveis interesses foi sobre o sistema de numeração posicional de base dez e as equações algébricas que trouxeram da Índia (CASTILLO, 2009).

No início do império islâmico[1] o centro político era Damasco, cujos líderes após a morte de Maomé foram os califas (sucessores), esse primeiro califado pertencia a família Omíada. Entretanto, o califado em 750 foi passado para uma nova família os Abássidas. Durante o califado abássida de al-Mansur, ele ordenou a construção de Bagdá como sua nova capital, sob os auspícios de seus astrólogos, o trabalho começou em 30 de julho de 762. E realmente Bagdá prosperou. Entre 813 e 833 aconteceu o reinado do califa al-Mamun. Ele fundou ‘A Casa de Sabedoria’ em Bagdá, uma instituição de tradução e estudos que reunia diversos sábios da época (BERGREN, 2003).

[1] Para contextualização da época do império islâmico medieval veja Morey (2021).

Na efervescência cultural de Bagdá de al-Mamun surgiram os estudos de al-Khwarizmi (780-850)[2]. De acordo com Youschkevitch (1976), o seu tratado algébrico intitulado *Al-Kitab al-muhtasar fi hisab al-jabr wa-l-muqabala*, foi o precursor e nomeou a álgebra, tornando-a uma disciplina autônoma. O arabista russo ainda afirma que

> As obras de al-Khwarizmi, em particular seus tratados sobre aritmética e álgebra, exerceram uma influência preponderante no desenvolvimento posterior da matemática. Eles foram o ponto de partida para muitos trabalhos posteriores e partes deles foram retomadas em outras obras. (YOUSCHKEVITCH, 1976, p. 14, tradução nossa).

Não se trata de exagero, segundo Rashed (1994), atribuir a originalidade de conceber a álgebra ao sábio al-Khwarizmi. Em seu tratado algébrico há termos que são puramente algébricos, sejam eles: o desconhecido, designado sem distinção: raiz, coisa, e seu quadrado: mal.

Nesse trabalho usaremos como texto principal do tratado de al-Khwarizmi, uma tradução para o espanhol feita por Ricardo Moreno Castillo, intitulada El libro del Álgebra. Na introdução da obra Castillo expõe o título completo do tratado al-Mujtasar fi hisab al-jabr wa-l-muqabala e continua descrevendo-o dividido em três partes

> Uma propriamente algébrica que trata da resolução de equações, outra sobre alguns temas de geometria elementar, e a terceira sobre questões testamentárias. A palavra jabr quer dizer restaurar, no sentido médico de colocar um membro deslocado em seu lugar. No contexto das equações algébricas significa a transposição de termos: quando se elimina um elemento em um dos lados de uma equação, este tem que ser restaurado, colocando-o no outro lado, [...] (CASTILLO, 2009, p. 11-12, tradução nossa).

Dois séculos depois da morte de al-Khwarizmi, nasce o poeta, astrônomo e matemático Omar Khayyam (1048-1131)[3], nome pelo qual é conhecido no Ocidente. Ele foi para Samarcanda no Uzbequistão em 1070, onde foi apoiado pelo jurista Abu Tahir, momento que lhe propiciou escrever sua obra de álgebra mais famosa, o Tratado sobre Demonstração de Problemas de Álgebra. (ROSENFELD; YOUSCHKEVITCH, 2008)

Para este trabalho usaremos duas traduções do tratado algébrico de Omar Khayyam, quais sejam: a tradução para o russo, feita em 1953, por Boris Rosenfeld e a tradução para o inglês, feita em 2008, por Roshid Khalil. O tratado foi escrito por volta de 1070-1075 e afirma que

> [...] a arte da álgebra e almuqabala é uma arte científica, cujo assunto é o número absoluto e as quantidades mensuráveis, que são desconhecidos, mas atribuídos a alguma coisa conhecida, pela qual podem ser determinados. [...] A excelência desta arte reside no conhecimento dos métodos de estudo, através dos quais é possível compreender a forma de determinar os desconhecidos acima referidos, tanto numéricos quanto geométricos. (KHAYYAM, 1953, p. 17, tradução nossa).

Para desenvolvermos este estudo usaremos o método comparativo, que segundo Gil (2008) investiga indivíduos, classes, fenômenos ou fatos, com o intuito de ressaltar as diferenças e similaridades entre eles. Dessa forma, esse método irá possibilitar o estudo comparativo de fatos,

[2] Mais detalhes sobre sua vida, estudos e contexto histórico consulte Posada-Balvin (2021).
[3] Mais detalhes sobre sua vida, estudos e contexto histórico consulte Bandeira (2021)

separados pelo espaço e pelo tempo. Para tanto iremos usar também a pesquisa bibliográfica e a pesquisa documental. Nesse contexto, Gil (2008, p. 50) afirma que a “pesquisa bibliográfica é desenvolvida a partir de material já elaborado, constituído principalmente de livros e artigos científicos.” E “a pesquisa documental vale-se de materiais que não receberam ainda um tratamento analítico, ou que ainda podem ser reelaborados de acordo com os objetivos da pesquisa.”

Por fim, no intuito de elaborar atividades que articulem História da Matemática e Ensino de Matemática, este estudo comparativo nos possibilitará apresentar aos futuros professores o conhecimento genuíno produzido na época, com o intuito de realizar uma reflexão sobre como a História da matemática pode aprofundar os estudos, refutar ideias existentes e fazer inferências, e assim contribuir com o Ensino da Matemática ao exibir a historicidade dos eventos e os contextos em que estavam inseridos. (FRANSOLIN; SOUZA, 2019)

2.1 Os estudos de al-Khwarizmi

Relatos modernos de álgebra árabe, especialmente aqueles que descrevem o estudo algébrico de al- Khwarizmi no início do século IX, tendem a se concentrar nas soluções para seis equações quadráticas e lineares simplificadas e suas provas geométricas na perspectiva da resolução prática de problemas algébricos. As medidas de comprimento, área, peso ou tempo eram sempre numéricas. Não havia preocupação com análise dimensional.

O tratamento algébrico de al-Khwarizmi em *Kitāb al-jabr wa'l-muqābala* (Livro de Álgebra) passou a ser referência em se tratando da classificação e solução de seis tipos de equações quadráticas simplificadas e de regras para operar com raízes e polinômios. Ao tratamento teórico se segue uma coleção de trinta e nove problemas resolvidos. (OAKS, 2011)

Assim como na Europa Medieval, os números negativos e o zero ainda não eram reconhecidos na matemática islâmica. Com isso, al-Khwarizmi reduzia os problemas a seis tipos de equações, conforme Quadro 1. Para cada um desses tipos de equações havia uma regra, um método algébrico (ou geométrico) de resolução.[4]

Quadro 1: Tipos de equações de al-Khwarizmi

TIPO	LINGUAGEM RETÓRICA	NOTAÇÃO MODERNA
1	Quadrados equivalem a raízes	$ax^2 = bx$
2	Quadrados equivalem a números	$ax^2 = c$
3	Raízes equivalem a números	$bx = c$
4	Quadrados e raízes equivalem a números	$ax^2 + bx = c$
5	Quadrados e números equivalem a raízes	$ax^2 + c = bx$
6	Raízes e números equivalem a quadrados	$bx + c = ax^2$

Fonte: Castillo (2009).

2.2 Os estudos de Omar Khayyam

Nos tempos de Omar Khayyam (1048-1131) a álgebra islâmica não mais era somente vista como um método prático para resolução de problemas aritméticos. As técnicas algébricas também se

[4] Para discussão de exemplos dos tipos de equações de al-Khwarizmi ver Araújo (2019)

mostravam eficazes para resolver problemas da geometria que não podiam ser resolvidos com régua e compasso (OAKS, 2011).

O estudo sistemático das equações lineares e quadráticas para resolução de problemas práticos era ferramenta conhecida desde os tempos de al-Khwarizmi.

O mesmo não se pode afirmar sobre o estudo das equações cúbicas. Somente no século X, os algebristas do império islâmico passaram a estabelecer parâmetros para simplificar o estudo de alguns tipos de equações cúbicas recorrendo a artifícios para reclassificá-las em equações de grau inferior.

Por outro lado, para outros tipos de equações cúbicas, havia uma reinterpretação dos termos da equação em função de duas seções cônicas que se cruzam (ou não), e a solução para o problema está diretamente ligada a essa intersecção. Para Oaks (2011), esta técnica já estava bem estabelecida quando al-Khayyam concebeu sua ideia para sistematizá-la.

Nesse sentido, afirma Van Der Warden (1985), a álgebra de Omar Khayyam é estritamente geométrica. Ele primeiro resolve equações lineares e quadráticas pelos métodos geométricos explicados nos *Elementos* de Euclides, e a seguir mostra que as equações cúbicas podem ser resolvidas por meio de interseções de cônicas. Porém, o estudo de equações cúbicas foge momentaneamente do escopo do nosso trabalho. Ele será explorado em futuras oportunidades.

Voltemos nossos esforços para as equações quadráticas e para efeito de melhor compreensão, iremos exemplificar a resolução de equações do tipo 5 do Quadro 1.

3 ESTUDO DE CASO PARTICULAR

Para esse caso particular, vamos usar o tipo quadrados e números iguais a raízes, e apresentar as propostas de resolução de al-Khwarizmi e Omar Khayyam.

Consideraremos primeiro o problema como listado em Al-Jwarizmi[5] (2009, p. 29): "un cuadrado más veintiún dirhams es igual a diez de sus raíces", em notação moderna, $x^2 + 21 = 10x$. Vale salientar que à época somente raízes positivas da equação eram consideradas, pois os matemáticos islâmicos não conheciam números negativos nem o zero.

> La solución está em dividir por dos las raíces, y resulta cinco, lo multiplicas por sí mesmo y da veinticinco, restas el veintiuno que está com el cuadrado e da cuatro, calculas su raíz cuadrada e da dos, y los resta de la mitad del número de raíces (que es cinco) y da tres, y ésa es la raíz del cuadrado sobre el cual se suma, y el cuadrado es nueve. Y si quieres, sumas la raíz cuadrada sobre lá mitad del número de raíces (que es cinco) y da siete, y ésa es la raíz del cuadrado sobre el cual se suma, y el cuadrado es cuarnta y nueve. (AL-JWARIZMI, 2009, p. 29)

Reescrevendo essa descrição da resolução para a notação moderna, conforme Quadro 2.

Quadro 2: Descrição do método de al-Khwarizmi

PASSO	LINGUAGEM RETÓRICA	NOTAÇÃO MODERNA
1°	Dividir dez por dois é igual a cinco	$\mathbf{10 \div 2 = 5}$
2°	Multiplicar cinco por ele mesmo é igual a vinte e cinco	$\mathbf{5 * 5 = 5^2 = 25}$
3°	Subtrair vinte e um de vinte e cinco é igual a quatro	$\mathbf{25 - 21 = 4}$

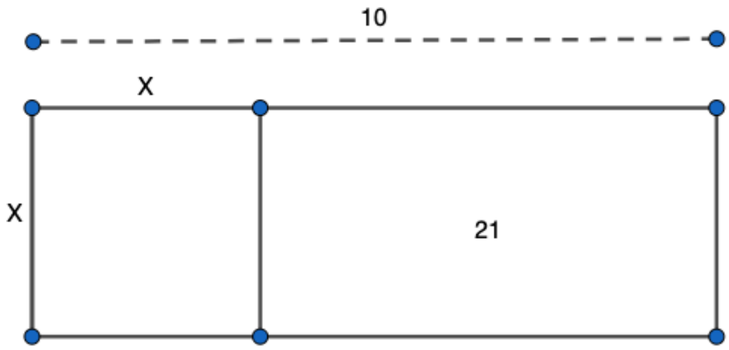
[5] Esta é a grafia em língua espanhola.

4°	Extrair a raiz quadrada de quatro é igual a dois	$\sqrt{4} = 2$
5°	Subtrair dois de cinco é igual a três	$5 - 2 = 3$
6°	Essa é uma raiz	$x = 3$
7°	Para a outra raiz	$2 + 5$
8°	Essa é outra raiz	$x = 7$

Fonte: Al-Jwarizmi (2009).

Seguido do método algébrico, al-Jwarizmi (2009) apresenta geometricamente a resolução da equação. Vejamos a resolução do caso $x < 5$ com as devidas adaptações. Considera-se primeiramente, um retângulo de área 10x dividindo-se em um quadrado de área x^2 e um retângulo representando o número 21 conforme Figura 1.

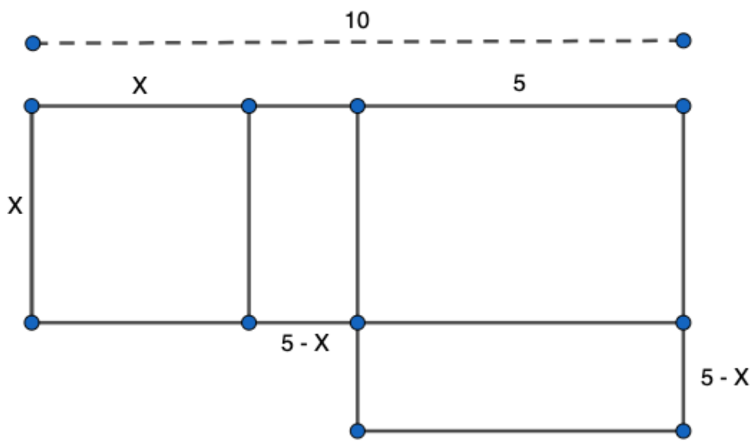
Figura 1: Retângulo de área 10X



Fonte: Adaptado de Al-Jwarizmi (2009).

Portanto, a Figura 1 representa a equação $x^2 + 21 = 10x$. Em seguida, toma-se o ponto médio do lado 10 do retângulo e constrói-se um quadrado de lado 5. Observe a Figura 2.

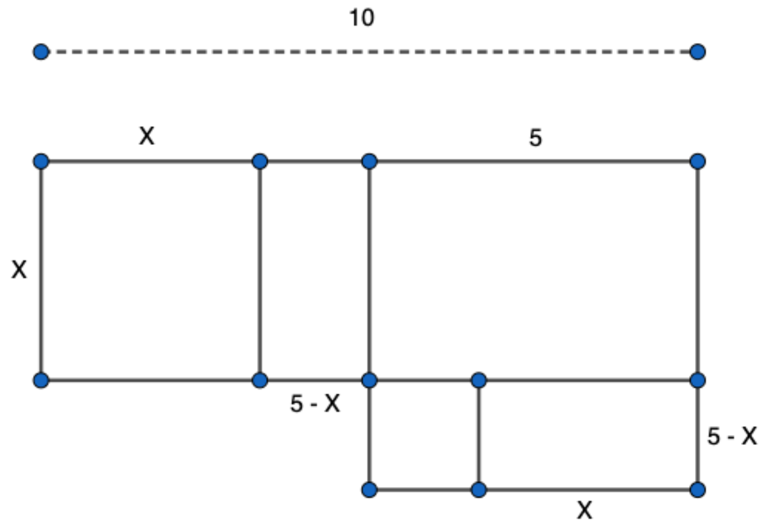
Figura 2: Construção do quadrado de lado 5



Fonte: Adaptado de Al-Jwarizmi (2009).

Observe que o retângulo correspondente ao número 21 da Figura 1 está subdividido em dois outros retângulos. Um de área $x(5 - x)$ e outro com $5x$. Ou seja, na Figura 2, o número $21 = x(5 - x) + 5x$. Ainda, surgiu um retângulo de área $5(5 - x)$. Neste retângulo, constrói-se um quadrado de lado $5 - x$, conforme Figura 3.

Figura 3: Subdivisão do quadrado de lado 5



Fonte: Adaptado de Al-Jwarizmi (2009).

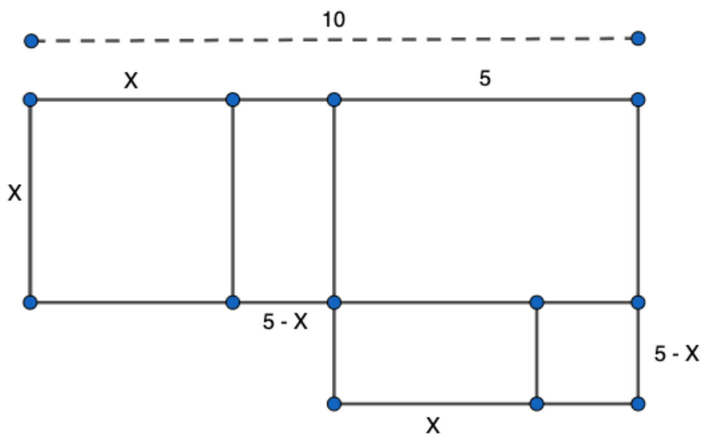
Portanto, o quadrado de lado 5 na Figura 3 está subdividido tal que sua área vale $25 = 5x + x(5 - x) + (5 - x)^2$. Como $21 = x(5 - x) + 5x$ na Figura 2, então $25 - 21 = (5 - x)^2$ e $5 - x = 2$. De onde segue $x = 3$.

Para a mesma equação: $x^2 + 21 = 10x$, na ótica de Omar Khayyam,

> […] subtraia o número do quadrado da metade do número das raízes e tire a raiz do resultado. Adicione (ou subtraia) o resultado à metade do número de raízes. O que obtemos depois de adicionar ou subtrair é a raiz [lado] do quadrado. (AL-KHAYYAM, 2008, p. 10, tradução nossa)

Aqui se observa que o processo é semelhante ao apresentado por al-Khwarizmi (Quadro 2), no entanto Khayyam trabalha de forma generalizada. A semelhança também se observa na resolução geométrica conforme apresentada em al-Khayyam (2008). A única diferença apresentada é na posição do quadrado de lado $(5 - x)$ (observe a Figura 3 e a Figura 4), o que praticamente nada diferencia da resolução de al-Khwarizmi.

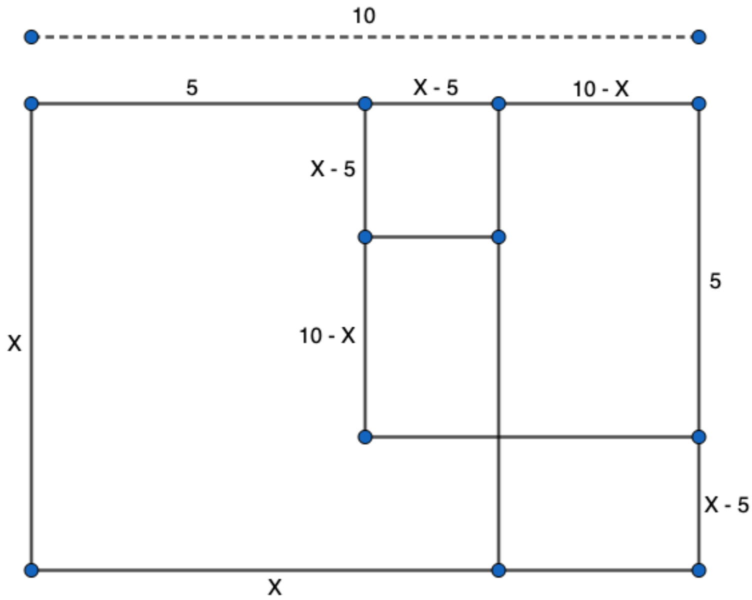
Figura 4: Subdivisão feita por Khayyam do quadrado de lado 5



Fonte: Adaptado de Al-Khayyam (2008).

Portanto, finalizamos o estudo do caso $x < 5$ para a resolução da equação em foco. Agora vejamos o caso em que o lado do quadrado desconhecido é maior que a metade de 10 de suas raízes com base nas informações de Henderson (2001). Ou seja, na Figura 5, tem-se $x > 5$.

Figura 5: Resolução geométrica para $X > 5$



Fonte: Adaptado de Henderson (2001).

Utilizando o mesmo procedimento como ilustrado da Figura 1 a Figura 3, observa-se agora que o quadrado de lado 5 encontra-se no interior do retângulo área 10x. Além disso, na Figura 5, de $x^2 + 21 = 10x$, tem-se que $21 = x(10 – x) = 5(10 – x) + (x – 5)(10 – x)$. Segue então, $5^2 = (x – 5)2 + 5(10 – x) + (x – 5)(10 – x)$. Ou seja, $25 = (x – 5)^2 + 21$. De onde surge $x = 7$.

É importante ressaltar que há diferenças nas maneiras de al-Khwarizmi e Omar Khayyam apresentarem as resoluções algébricas para o tipo quadrados e números iguais a raízes. Al-Khwarizmi mostra o exemplo/método e afirma que pode ser usado para casos semelhantes, e posteriormente, ele informa:

> E você deve saber que se, neste caso, ao dividir o número de raízes por dois e multiplicá-lo por si mesmo resultar em um número menor do que o de dirhams que estão com o quadrado, então o problema é impossível, e se for o mesmo para o número de dirhans, então a raiz quadrada é igual a metade do número de raízes, sem adicionar ou subtrair nada (AL-JWARIZMI, 2009, p. 29, tradução nossa).

Por outro lado, al-Khayyam (2008, p. 10, tradução nossa) começa a resolução do tipo em questão, afirmando que: "Neste caso, o número não deve exceder o quadrado da metade do número de raízes; caso contrário, o problema não tem solução." E segue mostrando a forma geral de resolução, cuja sequência seguimos para solucionar a equação do caso particular.

Portanto, após mostrarmos as resoluções de al-Khwarizmi e Khayyam vejamos algumas considerações sobre esse trabalho.

4 CONSIDERAÇÕES

Não é de espantar a similaridade do método algébrico/geométrico de resolução de al-Khwarizmi e de Omar Khayyam. A influência de Euclides e outros geômetras gregos conduziu os estudiosos islâmicos por esse caminho, tanto que Khayyam (1953) afirma que seu tratado somente será entendido pelos que conhecem os *Elementos* e os dois primeiros livros de *Dados*[6] de Euclides e as *Cônicas* de Apolônio.

Ainda, sobre a importância dos *Elementos* de Euclides para os matemáticos islâmicos medievais, segundo Katz (2010), o processo geométrico dos primeiros algebristas árabes medievais é devido exclusivamente a Euclides. Neste sentido, vale ressaltar que Abd al-Hamid Ibn Turk, contemporâneo de al-Khwarizmi, fazia uso de fatos geométricos euclidianos em estudos algébricos (OAKS, 2011). Em resultado de pesquisa, Muniz (2020, p. 49) afirma que

> Ibn Turk representava, por exemplo, casos particulares de equações polinomiais de 2o grau utilizando a geometria. O interesse pelo tema se justifica pelo espírito de época, em que outros estudiosos trabalhavam com álgebra também nessa perspectiva [...].

Em outras palavras, Ibn Turk buscava soluções para equações polinomiais de 2° grau a partir de figuras geométricas que as justificassem. Muniz (2020) destaca que essa característica usando recursos geométricos estava presente nos trabalhos de outros algebristas como al-Khwarizmi, al-Mahani (820-880), Thabit Ibn Qurra (836-901) e Abu Kamil (850-930).

Neste sentido, evidenciamos o trabalho de Omar Khayyam classificando equações lineares e quadráticas por tipos e mostrando as resoluções. Uma sistematização dos conhecimentos necessários para a continuidade dos seus estudos com equações cúbicas, visto que Khayyam apresentou como reduzir equações cúbicas para quadráticas e lineares de resoluções já conhecidas e mostrou soluções por meio da interseção de seções cônicas para equações cúbicas não redutíveis, sendo um avanço importante para a álgebra. O estudo do tratado algébrico de Khayyam está em sua fase inicial como parte de um projeto de pesquisa de doutoramento, assim como, será parte desse projeto a elaboração de atividades para futuros professores que articulem História da Matemática e Ensino de Matemática como componentes de um minicurso.

---

[6] Os livros *Dados* foram escritos como suplemento aos Livros I ao VI dos *Elementos* (KATZ, 2010).

Por fim, no presente trabalho ressaltamos um caso particular de equação quadrática para analisar o desenvolvimento dos procedimentos algébricos/geométricos de Al-Khwarizmi e Omar Khayyam evidenciando as similaridades ao aplicar o processo de resolução da equação proposta, e as diferenças ao mostrar que al-Khwarizmi apresenta o exemplo ou o método de resolução enquanto Omar Khayyam apresenta a forma genérica de resolução.

REFERÊNCIAS

AL-JWARIZMI. M. M. **El libro del Álgebra**. Tradução de Ricardo Moreno Castillo. Três Cantos: Nivola, 2009.

AL-KHAYYAM, O. **An Essay by the Uniquely Wise 'Abel Fath Omar Bin Al-Khayyam on Algebra and Equations: Algebra wa Al-Muqabala**. Tradução de Roshdi Khalil. Lebanon: Garnet Publishing Limited, 2008.

ARAÚJO, M. G. **Abu Ja'far Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi:** contribuições da álgebra para o ensino. 2019. 141f. Dissertação (Mestrado) - Programa de pós- graduação em ensino de ciências naturais e matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2019. Disponível em: https://repositorio.ufrn.br/handle/123456789/27790. Acesso em: 21 jul. 2021.

BANDEIRA, F. de A. Ghiyāth al-Dīn Abū'l-Fatḥ 'Umar ibn Ibrāhīm al-Naysābūrī al-Khayyām(1048-1131). In: PEREIRA, A. C. C.; MOREY, B. (Orgs.). **Estudiosos em Ciências e Matemática no Mundo Islâmico Medieva**l. Fortaleza: EdUECE, 2021.

BERGGREN, J.L. **Episodes in the mathematics of medieval islam**. New York: Springer-Verlag Inc., 2003.

CASTILLO, R. M. Introducción. In: AL-JWARIZMI. M. M. **El libro del Álgebra**. Tradução de Ricardo Moreno Castillo. Três Cantos: Nivola, 2009.

FRANSOLIN, J. B. L.; SOUZA, R. B. A história da matemática numa perspectiva para a formação humana dos futuros professores de matemática. **Hipátia**, v.4, n.1, p. 62-83, jun. 2019. Disponível em: https://ojs.ifsp.edu.br/index.php/hipatia/article/view/963/807. Acesso em: 21 jul. 2021.

GIL. A. C. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 6. ed. São Paulo: Atlas, 2008.

HENDERSON, David W. **Experiencing Geometry**: in Euclidean, Spherical, and Hyperbolic Spaces. 2. ed. New York: Prentice Hall, 2001.

KATZ, V. J. **História da Matemática**. Revisão de Jorge Nuno Silva. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2010.

KHAYYAM, O. **Математические Трактаты Омара Хайяма**. Tradução de Boris Abramovitch Rosenfeld. Moscou, 1953, p. 11-66.

MOREY, B. O Mundo Islâmico Medieval e os Estudos em Ciências e Matemática In: PEREIRA, A. C. C.; MOREY, B. (Orgs.). **Estudiosos em Ciências e Matemática no Mundo Islâmico Medieval**. Fortaleza: EdUECE, 2021.

MUNIZ. J. T. **Soluções de equações quadráticas por 'Abd al-Hamid Ibn Turk na formação inicial do professor de matemática**: uma perspectiva orientada pela história da matemática. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN), 2020. Disponível em: https://repositorio.ufrn.br/handle/123456789/2995. Acesso em: 21 jul. 2021.

OAKS, J. A. Al-Khayyām's Scientific Revision of Algebra. Suhayl, n. 10, 2011, p. 47-75.

POSADA-BALVIN, F. A. Abu Ja'Far Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi e a Casa da Sabedoria (780-850) [al-khwarizmi]. In: PEREIRA, A. C. C.; MOREY, B. (Orgs.). **Estudiosos em Ciências e Matemática no Mundo Islâmico Medieval**. Fortaleza: EdUECE, 2021.

RASHED, R. **The development of Arabic mathematics**: between arithmetic and algebra. Trad.: Angela Armstrong. Boston: Springer, 1994.

ROSENFELD, B. A.; YOUSCHKEVITCH, A. P. **Al-Khayyām** - Complete Dictionary of Scientific Biography. 2008. Disponível em: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/DSB/Khayyam.pdf. Acesso em: 16 out. 2020.

VAN DER WARDEN, B. L. **A History of Algebra**: From al-Khwarizmi to Emmy Noether. Berlin: Springer-Verlag, 1985.

YOUSCHKEVITCH, A. P. **Les Mathématiques Arabes**: VIIIe-XVe siècles. Trad.: M. Cazenazeet K. Jaouiche. Paris: VRIN, 1976.

Submetido em julho de 2021.
Aprovado em setembro de 2021.