Recorrências Lineares e Equações Diferenciais Lineares

uma breve apresentação de suas similaridades

Linear Recurrences and Linear Differential Equations

a brief presentation of their similarities

Antônio Manual da Silva **Andrade**
Escola de Ensino Fundamental e Médio Prof. Arruda (EEFM)

Marcos Ferreira de **Melo**
Universidade Federal do Ceará (UFC)

RESUMO

Este trabalho trata de elencar as diversas similaridades que há entre as Recorrências Lineares e as Equações Diferenciais Lineares. Tais semelhanças foram apresentadas pelo professor Marcos Melo (segundo autor deste artigo) aos seus alunos de Matemática Discreta, numa turma do curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT. Durante as aulas sobre Recorrências Lineares, mostrou-se que há uma grande similaridade entre um conteúdo de Matemática que se trabalha no Ensino Médio e outro que só é explorado no Ensino Superior. Visto que os alunos cursavam mestrado em Matemática, foi possível trabalhar com eles um tópico (em nível de Ensino Médio) de Matemática Discreta, destacando suas similaridades com uma parte importante da teoria de Equações Diferenciais (cujo assunto é de Ensino Superior). Os alunos da Disciplina observaram que a resolução de uma recorrência linear segue o mesmo procedimento adotado para se resolver uma equação diferencial linear. Com isso, apreciaram uma possibilidade de trazer problemas matemáticos mais profundos para o cotidiano de suas classes da educação básica. Destaca-se que tais discussões acabaram se transformando na dissertação de mestrado do professor Antônio Andrade (primeiro autor deste artigo).

Palavras-chave: Ensino de Matemática. Recorrências Lineares. Matemática Discreta. Equações Diferenciais Ordinárias.

ABSTRACT

This work brings a lot of similarities between Linear Recurrences and Linear Differential Equations. Those commonalities were presented by the professor Marcos Melo (second author of this paper) to his students in a class of Discrete Mathematics of the course Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT. During the classes about Linear Recurrences, it was highlighted the existence of a big similarity between a mathematics content of high school and another one which usually lies in the setting of higher education. As long as we worked with mathematics master students, it was possible to address to them a Discrete Mathematics subject (of high school level) and compare it with an important feature of the Differential Equations theory (a content related to advanced mathematics). The students of the class observed that when we are solving a linear recurrence, we are actually adopting the same procedure we use to find a solution for a linear differential equation. With this in mind, the students enjoyed an approach they can use in order to bring to their classes some deeper mathematics problems from high school perspective. Those discussions became part of the master thesis of the teacher Antonio Andrade (first author of this paper).

Keywords: Mathematics teaching. Linear recurrence. Discrete Mathematics. Ordinary Differential Equations.

1 INTRODUÇÃO

O Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT é um programa formado por uma rede de Instituições de Ensino Superior, no contexto da Universidade Aberta do Brasil (UAB)/Coordenação de Aperfeiçoamento Pessoal de Nível Superior (CAPES). O PROFMAT tem como público-alvo prioritário professores de Matemática em exercício na Educação Básica, especialmente em escolas públicas, com o objetivo principal de fomentar o domínio aprofundado de conteúdo matemático relevante para docência desses professores.

Nesse contexto, o perfil do acadêmico desse Mestrado é o de um profissional já inserido no sistema educacional, tratando-se, majoritariamente, de um professor que possui anos de experiência com ensino de Matemática na Educação Básica. Assim, ao discutir tópicos que seus alunos muitas vezes têm ensinado em suas classes, o docente do PROFMAT se depara com desafios que envolvem apresentar os conteúdos programados no curso levando em conta o conhecimento prévio de seus alunos, bem como enriquecer os tópicos em pauta com mais detalhes e ajudá-los a ver os assuntos por novos ângulos. Um fator importante para o docente é fazer pesquisas; por isso em vez de incluir em suas aulas apenas fatos básicos que vêm à mente, ele pode pesquisar fatos históricos menos conhecidos, apresentar resultados mais recentes e discutir aplicações práticas diferentes das rotineiramente trabalhadas. Tudo isso acaba contribuindo para que o estudante do programa em questão, que também é um professor em atuação/formação, tenha um olhar mais crítico e reflexivo sobre sua prática pedagógica, conforme destacado por Cararo, Loureiro e Klüber (2020) no contexto de formação de professores.

Falando sobre esse processo de ensino-aprendizagem em um curso de Mestrado Profissional, Moreira e Nardi (2009) observam que, tendo em vista que os mestrandos já são professores geralmente experientes, o papel do docente não é o de ensiná-los a ensinar, e sim o de dar ênfase à aprendizagem, à natureza do conhecimento, às novas abordagens no ensino, à elaboração de estratégias e recursos instrucionais inovadores a serem implantados em sala de aula e, ao mesmo tempo, à reflexão sobre sua metodologia. Segundo os autores, esse nível de ensino é um excelente fórum em que especialistas da educação e pesquisadores das chamadas “áreas duras” cooperam e contribuem para a melhoria do ensino no país.

A partir do exposto, visando a um aprofundamento do tópico Recorrências Lineares da disciplina Matemática Discreta, do PROFMAT da Universidade Federal do Ceará (UFC), campus Prof. Prisco Bezerra, Fortaleza, no ano de 2016, realizamos algumas exposições específicas na disciplina citada, apontando as grandes similaridades que há entre Recorrências Lineares e as Equações Diferenciais Lineares, uma parte destacada da importante teoria das Equações Diferenciais Ordinárias. Tal experiência de ensino destacou a possibilidade de se inserir no cotidiano da Educação Básica problemas físicos e matemáticos práticos e mais aprofundados que podem ser resolvidos por meio de uma estratégia quase idêntica à que é utilizada para resolver problemas básicos de Recorrências Lineares.

Com isso em mente, o objetivo deste artigo é apresentar os aspectos comuns que há entre as Recorrências Lineares e as Equações Diferenciais Lineares, contando com um exemplo concreto de como um tópico avançado pode ser introduzido no contexto do Ensino Médio. A seguir, apresentamos de forma sucinta o conteúdo acerca das Recorrências Lineares para posteriormente relacioná-lo com a teoria das Equações Diferenciais Lineares.

2 RECORRÊNCIAS LINEARES

Muitas sequências são definidas por intermédio de uma regra que permite calcular qualquer termo em função do(s) antecessor(es) imediato(s) (LIMA, E. L. et al, 2006). Por exemplo, uma progressão aritmética (x_n) de razão r e primeiro termo a pode ser definida pela recorrência $x_{n+1} = x_n + r$ $(n \geqslant 1)$, com $x_1 = a$. Outro exemplo bem conhecido é o de uma progressão geométrica (y_n) de razão q e primeiro b, que pode ser definida por $y_{n+1} = q.y_n$ $(n \geqslant 1)$, com $y_1 = b$. Esses exemplos são o que chamamos de recorrências de primeira ordem, visto que qualquer termo da sequência é dado em função do termo antecessor imediato. Quando um termo qualquer é dado em função dos dois termos antecessores imediatos, dizemos tratar-se de uma recorrência de segunda ordem. Um exemplo clássico de uma recorrência de segunda ordem é a sequência de Fibonacci (F_n), que é dada pela recorrência $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ $(n \geqslant 0)$, com $F_0 = 0$ e $F_1 = 1$.

É importante destacar que uma recorrência, isoladamente, não define a sequência. Por exemplo, a recorrência $x_{n+1} = x_n$ (progressão aritmética de razão zero) é satisfeita por qualquer sequência constante. Para que ela fique determinada, é necessário também o conhecimento do(s) primeiro(s) termo(s), e isso é garantido pelo teorema, que chamaremos de Teorema de Existência e Unicidade para recorrências, fazendo assim alusão à nomenclatura clássica da teoria de Equações Diferenciais.

TEOREMA DE EXISTÊNCIA E UNICIDADE PARA RECORRÊNCIAS: Uma recorrência de primeira ordem, $x_{n+1} = f(x_n)$, com uma condição inicial $x_1 = a$, tem sempre uma só solução. Do mesmo modo que uma recorrência de segunda ordem $y_{n+2} = g(y_{n+1}, y_n)$, com condições iniciais $y_1 = b$ e $y_2 = c$, sempre tem solução única. Uma demonstração para esse teorema pode ser dada através do uso do Princípio da Indução.

Ilustrando a utilidade desse teorema com os exemplos acima mencionados, observamos a obtenção, sem ambiguidade, das soluções de tais recorrências. Mais precisamente, temos: a) $x_n = a + (n-1)r$, $(n \geqslant 1)$ (fórmula do termo geral da progressão aritmética de razão r e primeiro termo a); b) $y_n = b.q^{n-1}$, $(n \geqslant 1)$ (fórmula do termo geral da progressão geométrica de razão q e primeiro b); c) $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$, $(n \geqslant 0)$ (fórmula dos números de Fibonacci).

O teorema não nos diz como obter tais soluções, apenas garante a existência e a unicidade delas. Entretanto, ao serem garantidas a existência e a unicidade da solução de uma recorrência, buscam-se estratégias que permitem a determinação de sua solução, o que é feito com êxito, em particular, para as chamadas Recorrências Lineares.

Uma recorrência de primeira ordem $x_{n+1} = f(x_n)$, é dita linear quando f é uma função do primeiro grau, ou seja, f é da forma $f(x) = ax + b$, com a e b constantes. Por exemplo, com $f(x) = x + r$, exibe-se uma progressão aritmética de razão r, e com a função $f(x) = qx$, constrói-se uma progressão geométrica de razão q. De forma semelhante, diz-se que uma recorrência de segunda ordem $y_{n+2} = g(y_{n+1}, y_n)$ é linear quando g é uma função de primeiro grau com duas variáveis, isto é, g é dada por $g(x, y) = ax + by + c$, para certas constantes a, b e c. Para melhor ilustrar a questão, basta observar que a sequência de Fibonacci foi apresentada com a função particular: $g(x, y) = x + y$.

O caso de uma progressão geométrica $y_{n+1} = q.y_n$ $(n \geqslant 1)$, com $y_1 = b$, é de resolução imediata, pois $y_n.y_{n-1}\ldots y_2.y_1 = (qy_{n-1})(qy_{n-2})\ldots(qy_1)y_1 = q^{n-1}(y_{n-1}\ldots y_2.y_1).b$, o que implica, quando $q \neq 0$, que $y_n = b.q^{n-1}$, para todo $n \geqslant 1$.

Para alcançar nossos objetivos, vamos nos concentrar no processo de resolução das Recorrências Lineares de segunda ordem, pois com elas podem ser resolvidos diversos problemas de Matemática Discreta, processo análogo ao procedimento adotado para encontrar solução de Equações Diferenciais Lineares de segunda ordem, que muitas vezes estão relacionadas a problemas físicos e matemáticos não triviais.

Assim como é feito na teoria de Equações Diferenciais, inicialmente trataremos das recorrências de segunda ordem homogêneas, que são recorrências da forma $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n =$

0. Admitiremos sempre que $q \neq 0$, pois se $q = 0$, a recorrência é, na realidade, uma progressão geométrica, cujo processo de resolução já foi discutido anteriormente.

Tendo em vista essa proximidade entre as progressões geométricas e as recorrências de segunda ordem homogêneas, Lováz et al (2003) sugerem que tais recorrências devem se comportar como uma progressão geométrica. Na prática, o que eles propõem, levando em conta a fórmula do termo geral de uma progressão geométrica, é que para resolver a equação de recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ busquem-se soluções da forma $x_n = cr^n$, em que c e r são constantes a serem determinadas. Ora, ao substituirmos $x_n = cr^n$ na recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$, obtemos $0 = x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = cr^{n+2} + p(cr^{n+1}) + q(cr^n) = cr^n(r^2 + pr + q)$, o que indica que r é uma solução da equação do segundo grau $r^2 + pr + q = 0$, a qual é chamada de equação característica associada à recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$. Se aplicarmos esse procedimento à sequência de Fibonacci, que é dada pela recorrência $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, buscaremos resolver a equação característica relacionada por $r^2 - r - 1 = 0$, cujas raízes são $r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, ambas presentes na fórmula dos números do matemático mencionado anteriormente. Esse fato é um caso particular do que chamaremos a seguir de Teorema Fundamental das Recorrências Lineares, uma consequência do Teorema de Existência e Unicidade.

TEOREMA FUNDAMENTAL DAS RECORRÊNCIAS LINEARES[1]: Sejam r_1 e r_2 as raízes da equação característica $r^2 + pr + q = 0$. Tem-se que a) se r_1 e r_2 são raízes reais e distintas, então todas as soluções da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ são da forma $x_n = c_1r_1^n + c_2r_2^n$, c_1 e c_2 constantes reais[2]; b) se $r_1 = r_2 = r$, então todas as soluções da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ são da forma $x_n = c_1r^n + c_2nr^n$, c_1 e c_2 constantes reais; c) se $r_1 = \rho(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ e $r_2 = \rho(\cos(\theta) - i\sin(\theta))$ são raízes complexas, então todas as soluções da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ são da forma $x_n = \rho^n(c_1\cos(n\theta) + c_2\sin(n\theta))$, c_1 e c_2 constantes reais.

Usando o item (a) desse teorema e as considerações que fizemos acima sobre as soluções da equação característica associada à sequência de Fibonacci, obtemos, levando em conta as condições iniciais $F_0 = 0$ e $F_1 = 1$, a fórmula geral dos números de Fibonacci $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$, $(n \geqslant 0)$, agora justificada.

Para ilustrar um pouco mais o que fizemos acima, resolvemos dois problemas práticos, usando Recorrências Lineares de segunda ordem: 1) Fixado um inteiro positivo n, de quantas maneiras pode-se cobrir um tabuleiro de xadrez $2xn$ usando dominós idênticos[3]? 2) Cinco vendedores de semelhante competência disputarão, sob as mesmas condições, o cargo de gerente da loja em que trabalham. Ao final de cada mês, um deles será indicado como o vendedor do mês, e quem for indicado por três meses consecutivos, assumirá o cargo de gerente. Qual é a probabilidade de ninguém assumir o cargo de gerente nos n primeiros meses?

Para resolver o problema 1, indiquemos por M_n o número de maneiras que queremos determinar. Note que $M_1 = 1$, pois para um tabuleiro $2x1$ só há uma maneira de cobri-lo usando 1 dominó. Para um tabuleiro $2x2$ há duas maneiras: dois dominós em pé ou dois deitados. Isso significa que $M_2 = 2$. Agora, para um tabuleiro $2xn$, com $n > 2$, vamos olhar para ele disposto na horizontal. Há duas opções: ou colocamos no tabuleiro o primeiro dominó em pé ou deixamos os dois primeiros deitados. Para o primeiro caso, existem M_{n-1} maneiras de completar o tabuleiro $2x(n-1)$ que resta. Para o segundo, temos M_{n-2} maneiras de completar o tabuleiro $2x(n-2)$

[1]Para uma demonstração deste teorema, consulte Lima E. *et al* (2006).
[2]Intuitivamente, a ideia é buscar uma solução em forma de uma progressão geométrica $x_n = c_0r^n$, observando que r deve resolver a equação característica associada.
[3]Um dominó é uma peça de tamanho $2x1$.

restante. Portanto, M_n é a solução da recorrência $M_n = M_{n-1} + M_{n-2}$ $(n \geqslant 3)$, com $M_1 = 1$ e $M_2 = 2$. Visto que a equação característica associada é $r^2 - r - 1 = 0$ (a mesma da sequência de Fibonacci), concluímos, usando o teorema acima com as condições iniciais $M_1 = 1$ e $M_2 = 2$, que

$$M_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$ [4]

Para resolução do problema 2, denotemos por P_n a probabilidade de nenhum vendedor assumir o cargo de gerente nos n primeiros meses. Tendo em vista que um vendedor assume o cargo de gerência só após ser indicado o do mês por três vezes consecutivas, nenhum dos cinco vendedores em questão poderá assumir o cargo de gerência nos primeiros dois meses, ou seja, $P_1 = P_2 = 1$. Calculemos agora P_{n+2}, com $n \geqslant 1$. Sabendo que os vendedores disputam o cargo sob as mesmas condições, qualquer um pode ser indicado como o vendedor do primeiro mês. Se no segundo mês o vendedor indicado for diferente daquele do primeiro mês (probabilidade 4/5), basta que a partir daí ninguém seja indicado três vezes consecutivamente (probabilidade P_{n+1}). Mas se o vendedor do segundo mês for o mesmo do primeiro (probabilidade 1/5), no terceiro mês deverá ser indicado um diferente (probabilidade 4/5) e doravante nenhum vendedor deve ser indicado em três meses consecutivos (probabilidade P_n). Essa discussão nos diz que P_n é a solução da recorrência

$$P_{n+2} = \frac{4}{5}P_{n+1} + \frac{1}{5}.\frac{4}{5}P_n \ (n \geqslant 1),$$

com $P_1 = P_2 = 1$. Para concluir, resolvemos a equação característica associada $r^2 - \frac{4}{5}r - \frac{4}{25} = 0$, encontramos as raízes $r_1 = \frac{2}{5}(1+\sqrt{2})$ e $r_2 = \frac{2}{5}(1-\sqrt{2})$, e concluímos que

$$P_n = \frac{5}{16}.\left(\frac{2}{5}\right)^n\left[(2+\sqrt{2})(1+\sqrt{2})^n + (2-\sqrt{2})(1-\sqrt{2})^n\right].$$

Para encerrar o que fizemos em comparação com o que aparece na teoria de Equações Diferenciais, discutimos as recorrências de segunda ordem não homogêneas, ou seja, as Recorrências Lineares da forma $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = f(n)$. Observa-se que se a_n é uma solução particular da equação $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = f(n)$, então a substituição $y_n = x_n - a_n$ transforma a equação em $y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n = 0$, o que nos indica que, para resolver uma equação de recorrência não homogênea, basta encontrar uma solução particular e acrescentá-la à solução geral da equação homogênea associada. Para ilustrar esse caso, consideramos o problema seguinte.

Problema 3: considere o experimento de lançar uma moeda repetidamente até se obterem duas caras seguidas. Sendo E_n o número de experimentos para os quais duas caras são obtidas até o n-ésimo lançamento, encontre uma relação de recorrência para E_n e uma fórmula para essa sequência. Use tal resultado para calcular a probabilidade de se obterem duas caras consecutivas, para o caso particular de o experimento ser realizado com até 10 lançamentos da moeda.

Inicialmente, note que $E_2 = 1$, pois o experimento consiste em obter uma cara no primeiro lançamento e outra no segundo lançamento. Em seguida, note que $E_1 = 0$, uma vez que para obter duas caras consecutivas em até três lançamentos há dois experimentos: uma cara no primeiro lançamento e outra no segundo; uma cara no segundo lançamento e outra no terceiro lançamento. A seguir, temos três situações a considerar: ou ocorre cara no primeiro lançamento e outra no segundo, ou ocorre coroa no primeiro lançamento (restando obter duas caras consecutivas dentre os $n-1$ lançamentos que restam) ou cara no primeiro lançamento e coroa no segundo (restando obter duas caras consecutivas dentre os $n-2$ lançamentos que restam). As três situações revelam que E_n é solução da recorrência não homogênea $E_n = E_{n-1} + E_{n-2} + 1$ $(n \geqslant 4)$, com $E_2 = 1$ e $E_3 =$

[4]Lembre-se que os números de Fibonacci são todos inteiros, embora a fórmula geral seja dada em termos de combinações de números irracionais.

2. Visto que $a_n = -1$ é uma solução particular dessa recorrência[5], $E_n = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n - 1$ é a solução geral da equação $E_n = E_{n-1} + E_{n-2} + 1$. Assim, tendo $E_2 = 1$ e $E_3 = 2$, concluímos que

$$E_n = \frac{1}{10}\left[\left(5+\sqrt{5}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(5-\sqrt{5}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] - 1.$$

Finalmente,

$$\frac{E_{10}}{2^{10}} = \frac{1}{2^{10}}\{\frac{1}{10}\left[\left(5+\sqrt{5}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{10} + \left(5-\sqrt{5}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{10}\right] - 1\} \approx 86{,}81\%$$

é a probabilidade de se obter duas caras consecutivas com até 10 lançamentos de uma moeda.

A seguir apresentamos, de forma breve, os resultados de Equações Diferenciais que são análogas às Recorrências Lineares apresentadas até aqui.

3 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES

Uma equação diferencial ordinária (EDO, por simplicidade) é uma relação funcional entre uma função (incógnita) e uma única variável independente e suas derivadas, além da própria variável independente. A ordem de uma EDO é definida como sendo aquela da mais alta derivada que ocorre na equação (OLIVEIRA e TYGEL, 2005). Por exemplo, a segunda lei de Newton indica que o movimento vertical de um corpo de massa m sob a ação da gravidade g é descrito pela EDO de segunda ordem $m\frac{d^2x}{dt^2} = -mg$, sendo $x = x(t)$ a posição da partícula num instante t. Integrando esta equação, obtemos a EDO de primeira ordem $\frac{dx}{dt} = - + c_{1,}$ em que c_1 é uma constante. Integrando mais uma vez, concluímos que $x(t) = \frac{-1}{2}gt^2 + c_1t + c_2$, sendo c_2 uma constante. Nota-se que se for fixada a velocidade inicial $\frac{dx}{dt}(0)$, fica determinada a constante $c_{1,}$ e o mesmo ocorre para a constante c_2, quando estiver dada a posição inicial $x(0)$. Isso ilustra que uma EDO não determina, por si só, a função, pois fixada a outras condições iniciais, temos uma solução diferente para a EDO $m\frac{d^2x}{dt^2} = -mg$.

No caso acima, vimos que, com uma condição inicial, foi possível resolver uma EDO de primeira ordem e, com duas condições iniciais, resolvemos uma de segunda ordem. Para o caso das recorrências de primeira e segunda ordem, este fenômeno (existência e unicidade a partir de condição(ões) inicial(is) fixada(s)) estava presente no que fora chamado de Teorema de Existência e Unicidade para recorrências. Entretanto, no caso das EDO, nem sempre é possível garantir que uma equação admita solução. Além disso, existem as que admitem mais de uma solução, mesmo estando fixada(s) a(s) condição(ões) inicial(is). A seguir exibimos uma condição que garante a existência e a unicidade de solução de uma EDO.

TEOREMA DE EXISTÊNCIA E UNICIDADE PARA EDO[6]: Seja $f\colon \Omega \to R$ uma função contínua definida num aberto Ω do plano (x, y). Suponhamos que a derivada parcial com relação à segunda variável, $\frac{\partial f}{\partial y}\colon \Omega \to R$, seja contínua também. Então, para cada $(x_0, y_0) \in \Omega$, existe um intervalo aberto I contendo x_0 e uma única função diferenciável $\phi\colon I \to R$ com $\left(x, \phi(x)\right) \in \Omega$, para todo $x \in I$, que é a solução da EDO

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

[5]Basta observar que se $a_n = -1$, então $a_{n-1} + a_{n-2} + 1 = -2 + 1 = -1 = a_n$.
[6]Para uma demonstração deste teorema, consulte Figueiredo e Neves (2001).

 v.6, n.1, p. 170-179, jun. 2021

$$y(x_0) = y_0.$$

Esse teorema garante que é possível resolver as EDO Lineares. A forma geral de uma EDO Linear de Primeira Ordem é $\frac{dy}{dx} = p(x)y + q(x)$, sendo $p: (a, b) \to R$ e $q: (a, b) \to R$ funções contínuas. A EDO $\frac{dy}{dx} = -gx + c_1$, que vimos anteriormente na discussão sobre o movimento vertical de um corpo de massa m sob a ação da gravidade g, é um exemplo de EDO Linear de Primeira Ordem.

Se $p, q, f: (a, b) \to R$ são funções contínuas, então uma EDO de segunda ordem da forma $\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = f(x)$, é chamada EDO Linear de Segunda Ordem. Quando p e q são constantes, dizemos tratar-se de uma EDO Linear de segunda ordem com coeficientes constantes. A EDO $m\frac{d^2x}{dt^2} = -mg$, também vista na discussão sobre o movimento vertical de um corpo de massa m sob a ação da gravidade g, é um exemplo de EDO linear de segunda ordem com coeficientes constantes.

A grande similaridade entre o método de resolução de uma EDO da forma $\frac{d^2y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + qy = f(x)$, com p e q constantes, e o modo como resolvemos uma recorrência da forma $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = f(n)$ foi o que motivou a presente experiência de trabalho. Inicialmente buscou-se a solução da EDO homogênea associada $\frac{d^2y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + qy = 0$. Devido às propriedades básicas da função exponencial[7], Figueiredo e Neves (2001) indicam que a busca pela resolução dessa EDO Linear homogênea deve ser realizada via uma função exponencial da forma $y = e^{rx}$, em que r é uma constante. Em um segundo momento, substituindo $y = e^{rx}$ na equação $\frac{d^2y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + qy = 0$, obtemos $0 = \frac{d^2y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + qy = (r^2 + pr + q)e^{rx}$, o que indica que r deve ser solução da equação do segundo grau $r^2 + pr + q = 0$, que é denominada equação característica associada à EDO $\frac{d^2y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + qy = 0$.

De modo análogo ao que vimos para Recorrência Lineares, temos, no contexto das EDO Lineares de segunda ordem com coeficientes constantes, um resultado que será chamado de Teorema Fundamental das EDO Lineares de Segunda Ordem, que também é uma consequência do Teorema de Existência e Unicidade.

TEOREMA FUNDAMENTAL DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS LINEARES DE SEGUNDA ORDEM[8]: Sejam r_1 e r_2 as raízes da equação característica $r^2 + pr + q = 0$. Tem-se que a) se r_1 e r_2 são raízes reais e distintas, então todas as soluções da EDO $\frac{d^2y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + qy = 0$são da forma $y = c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_2x}$, c_1 e c_2 constantes reais; b) se $r_1 = r_2 = r$, então todas as soluções da EDO $\frac{d^2y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + qy = 0$ são da forma $y = c_1e^{rx} + c_2xe^{rx}$, c_1 e c_2 constantes reais; c) se $r_1 = \alpha + i\beta$ e $r_2 = \alpha - i\beta$ são raízes complexas, então todas as soluções da EDO $\frac{d^2y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + qy = 0$ são da forma $y = e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x + c_2\sin\beta x)$, c_1 e c_2 constantes reais.

Com o caso não homogêneo, lida-se da mesma maneira como foi feito com as Recorrências Lineares não homogêneas. De fato, se $a = a(x)$ é uma solução particular da EDO $\frac{d^2y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + qy = f(x)$, então a mudança $y = a + z$ transforma a equação em $\frac{d^2z}{dx^2} + p\frac{dz}{dx} + qz = 0$, ou seja, a solução geral da EDO não homogênea $\frac{d^2y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + qy = f(x)$ é da forma $y(x) = a(x) + z(x)$, em que $a = a(x)$ é uma solução particular e $z = z(x)$ é a solução geral da EDO homogênea associada (dada pelo teorema fundamental).

---

[7]Por exemplo, $y = e^{rx}$ é tal que $\frac{dy}{dx} = re^{rx}$ e $\frac{d^2y}{dx^2} = r^2e^{rx}$.

[8]Para uma demonstração deste teorema, consulte Figueiredo e Neves (2001).

Nesse ponto da experiência, observamos que, com o uso deste teorema fundamental, diversos problemas físicos e matemáticos não triviais, modelados por EDO lineares de segunda ordem, podem ser facilmente resolvidos usando a mesma técnica de resolução de Recorrências Lineares de segunda ordem.

Por fim, podemos resumir o que foi feito ao longo da pesquisa por meio das seguintes tabelas, que trazem as similaridades existentes entre esses dois assuntos um tanto distintos entre si.

Tabela 1: Comparação entre recorrências e EDO com raízes reais distintas[9]

Recorrência/EDO	**Equação característica**	**Solução com raízes[10] reais** $r_1 \neq r_2$
$x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$	$r^2 + pr + q = 0$	$x_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n$
$\frac{d^2y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + qy = 0$	$r^2 + pr + q = 0$	$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$

Fonte: Autores

Tabela 2: Comparação entre recorrências e EDO com raízes reais iguais

Recorrência/EDO	**Equação característica**	**Solução com raízes iguais a** r
$x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$	$r^2 + pr + q = 0$	$x_n = c_1 r^n + c_2 n r^n$
$\frac{d^2y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + qy = 0$	$r^2 + pr + q = 0$	$y = c_1 e^{rx} + c_2 x e^{rx}$

Fonte: Autores

Tabela 3: Comparação entre recorrências e EDO com raízes complexas

Recorrência/EDO	**Equação característica**	**Solução com raízes complexas[11]**
$x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$	$r^2 + pr + q = 0$	$x_n = \rho^n\big(c_1\cos(n\theta) + c_2\sin(n\theta)\big)$
$\frac{d^2y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + qy = 0$	$r^2 + pr + q = 0$	$y = e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x + c_2\sin\beta x)$

Fonte: Autores

4 DESCRIÇÃO METODOLÓGICA E ANÁLISE DA EXPERIÊNCIA

O Teorema Fundamental das Recorrências Lineares mostra como resolver completamente uma recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$, enquanto o Teorema Fundamental das Equações Diferenciais Ordinárias Lineares de Segunda Ordem apresenta a resolução total de uma EDO $\frac{d^2y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + qy = 0$, sendo p e q constantes reais.

[9]Perceba a semelhança entre as soluções gerais x_n e y.
[10]Solução geral da recorrência/EDO com parâmetros reais c_1 e c_2 e raízes da equação característica.
[11]$r_1 = \alpha + i\beta = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ e $r_2 = \alpha - i\beta = \rho(\cos\theta - i\sin\theta)$.

Muitos problemas práticos de Matemática Discreta são formulados e resolvidos por meio de recorrência lineares, enquanto diversos problemas práticos de Equações Diferenciais são modelados por EDO lineares. A grande similaridade que há entre as resoluções dessas equações foi um dos motivos que nos levou a esta experiência de ensino: apresentar, num curso de Matemática Discreta, os fundamentos teóricos para a resolução de recorrências, tendo como ponto de vista os presentes na resolução de EDO.

Para alcançar nossos objetivos a pesquisa bibliográfica e o planejamento adequado[12] foram necessários para apresentar aos alunos as relevantes interseções entre as teorias citadas. Para tanto, eles foram expostos às duas teorias de maneira simultânea por meio de exercícios (alguns apresentados aqui neste artigo) e de resultados que expunham a similaridade entre as teorias.

Ao final dessas aulas expositivas os alunos puderam relembrar o que já haviam aprendido acerca da teoria das Equações Diferencias no contexto da disciplina de Matemática Discreta. Levados a refletir em seu próprio ensino, puderam também vislumbrar uma nova abordagem de ensino e uma nova estratégia instrucional.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Essa experiência de ensino proporcionou aos alunos uma oportunidade para refletir sobre o modo como conduzem suas aulas, sobretudo por estarem no Mestrado e possuírem certo domínio dos tópicos que são discutidos em Matemática Discreta. A forma como as Recorrências Lineares foram trabalhadas com eles os surpreendeu, pois jamais esperavam que seriam discutidos temas de Equações Diferenciais, algo que, a priori, encontrava-se em um contexto distante, na área de Análise Matemática.

Ter em vista que a equação característica associada a uma recorrência ou a uma equação diferencial é uma equação do segundo grau, apresenta novos horizontes ao estudo (muitas vezes mecânico e sem graça) de tais equações no Ensino Básico. Por exemplo, a dificuldade de contextualizar o estudo dos números complexos no Ensino Básico desaparece quando se propõe um problema prático por meio de uma recorrência (ou mesmo de equação diferencial) linear de segunda ordem, cuja equação característica admite raízes complexas[13]. Pensando que esses alunos/professores podem não só introduzir novos problemas de Matemática Discreta ou até mesmo de Equações Diferenciais (usando a linguagem da Física, por exemplo), mas repetir tal experiência utilizando outros tópicos do Ensino Básico, cremos que a atividade realizada contribuiu para a formação deles, fomentando nesses profissionais a necessidade da busca contínua por novas estratégias de ensino e pesquisa.

[12]Planejamento das aulas sobre recorrências lineares, de modo a não comprometer o calendário de apresentação dos demais conteúdos da disciplina.

[13]Lembre-se que as funções seno e cosseno são soluções reais da EDO $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$, cuja equação característica $r^2 + 1 = 0$ só possui raízes complexas.

REFERÊNCIAS

CARARO, E.F.F.; LOUREIRO, D.Z.; KLÜBER, T.E. Metodologias de Pesquisa em Investigações sobre a Formação de Professores que Ensinam Matemática. **Hipátia – Revista Brasileira de História, Educação e Matemática**, v. 5, n. 1, 2020.

FIGUEIREDO, D. G.; NEVES, A. F. **Equações Diferenciais Aplicadas.** 2. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2001. Coleção Matemática Universitária.

LIMA, E. L. et al. **A Matemática do Ensino Médio.** v. 2. 6 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. Coleção do Professor de Matemática.

LOVÁSZ, L. et al. **Matemática Discreta.** Rio de Janeiro: SBM, 2003. Coleção Textos Universitários.

MOREIRA, M. A.; NARDI, R. O mestrado profissional na área de Ensino de Ciências e Matemática: alguns esclarecimentos. **Revista Brasileira de Educação Científica e Tecnológica**, v. 2, n. 3, set/dez. 2009.

OLIVEIRA, E. C.; TYGEL, M. Métodos Matemáticos para Engenharia. Rio de Janeiro: SBM, 2005. **Coleção Textos Universitários**.

Submetido em maio de 2021.

Aprovado em junho de 2021.

Antônio Manual da Silva Andrade

Mestrado Profissional pela Universidade Federal do Ceará (UFC). Professor da Escola de Ensino Fundamental e Médio Prof. Arruda (EEFM), Sobral, CE, Brasil. ID Lattes: 6252771460701952.

Contato: antoniomanoelsilvaandrade@gmail.com.

Marcos Ferreira de Melo

Doutorado em Matemática pela Universidade Federal do Ceará (UFC). Professor da Universidade Federal do Ceará (UFC), Fortaleza, CE, Brasil. ID Lattes: 6252771460701952. Orcid ID: 0000-0002-7014-1066.

Contato: mcosmelo@mat.ufc.br.