Filosofia da Matemática em Teses Brasileiras
um levantamento bibliográfico entre 2015 e 2020

Mathematics Philosophy in Brazilian Theses
a bibliographic survey between 2015 and 2020

Maxwell Gonçalves **Araújo**
Instituto Federal de Goiás (IFGO)

Andrei L. Berres **Hartmann**
Prefeitura Municipal de Cândido Godoi (PMCG)

Luciana L. da Silva **Barbosa**
Instituto Federal de São Paulo (IFSP)

RESUMO

Mobilizados pela questão: “qual o foco das teses de doutorado que tematizam a Filosofia da Matemática produzidas no Brasil nos últimos cinco anos?”, objetivamos apresentar e discutir um levantamento bibliográfico sobre as produções brasileiras em nível de doutorado acerca da Filosofia da Matemática, defendidas entre 2015 e 2020. Utilizamos como corpus documental a BDTD e o Catálogo de Teses e Dissertações da Capes. Este estudo classifica-se como qualitativo, na forma de um levantamento bibliográfico. Através do termo de busca “Filosofia da Matemática” e refinamento dos dados, identificamos 27 trabalhos relacionados ao tema, que concentram-se na região Sudeste do Brasil e em duas instituições. Dentre essas pesquisas, sete apresentaram o termo procurado nas palavras-chave, sendo seis analisadas. A partir da leitura e análise das reflexões sobre a abordagem da Filosofia da Matemática presente nas teses, apontamos que a centralidade das produções esteve em assuntos distintos, como: Teorema da Incompletude de Gödel, Continuum, Conceito de Função Integrável e obra Philosophische Bemerkungen de Wittgenstein. Quanto à Filosofia da Matemática presente, destacamos o Conhecimento Transcendental de Kant, o Tractatus Logico-Philosophicus e o pensamento sobre a existência ou não de um objeto de Wittgenstein, além da argumentação de Leibniz em sua obra Monadologia.

Palavras-chave: Educação Matemática. Foco de teses de doutorado. Revisão de literatura.

ABSTRACT

Mobilized by the question: “what is the focus of doctoral theses produced in Brazil, in the last five years, with emphasis on Mathematics Philosophy?” we aim to present and discuss a bibliographic survey on Brazilian productions at the doctoral degree that are based on Mathematics Philosophy and were defended between 2015 and 2020. We used the BDTD and the Capes Catalog of Theses and Dissertations as our documentary corpus. This study is classified as qualitative, in the form of a bibliographic survey. Through the search term "Mathematics Philosophy" and by refining the data, we identified 27 studies related to the theme, which were concentrated in the Southeast region of Brazil and in two institutions. Among these surveys, seven presented the search term in the keywords and from those six were analyzed. Based on reading and analysis of the reflections on the Mathematics Philosophy approach presented in the theses, we point out that the centrality of the productions was in different subjects, such as: Gödel's Incompleteness Theorem, Continuum, Integral Function Concept and Wittgenstein's Philosophische Bemerkungen. Regarding the Mathematics Philosophy currently studied, we highlight Kant's Transcendental Knowledge, the Tractatus Logico-Philosophicus and the thought about the existence or not of an object presented by Wittgenstein, in addition to Leibniz's argumentation in his work Monadology.

Keywords: Mathematical Education. Focus of doctoral theses. Literature review.

1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Pesquisas recentes, a exemplo, as apresentadas por Nakano (2015), Rocha (2016), Batistela (2017), França (2017), Almeida (2019), Misse (2019) e Godoy (2019), têm discutido aspectos da Filosofia da Matemática. De acordo com Rocha (2016), a Filosofia da Matemática e a História da Matemática desempenham um papel importante no contexto educacional, sendo a preocupação da Filosofia da Matemática relacionada às questões passíveis de justificativas da História da Matemática.

Nossos primeiros estudos, reflexões e discussões sobre apontamentos realizados em alguns dos trabalhos supracitados foram desenvolvidos na disciplina de Filosofia da Matemática, do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática (PPGEM) da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" (Unesp), cursada durante o segundo semestre de 2020, no decorrer da pandemia mundial COVID-19.

Ao considerarmos os tópicos abordados nessa disciplina, como Intuicionismo de Brouwer, Continuidade, Infinito, Filosofia da Matemática de Lakatos e Teorema de Godel, além de estarem presentes em algumas teses previamente lidas, perguntamo-nos: qual o foco[1] das teses de doutorado que tematizam a Filosofia da Matemática produzidas no Brasil nos últimos cinco anos? A partir dessa pergunta, o presente artigo se constitui.

Assim, objetivamos apresentar e discutir um levantamento bibliográfico sobre as produções brasileiras em nível de doutorado acerca da Filosofia da Matemática, defendidas entre 2015 e 2020. Para a realização deste estudo teórico, utilizamos como *corpus* documental a Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações[2] (BDTD) e o Catálogo de Teses e Dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior[3] (Capes).

Neste texto, além desta seção inicial, trazemos mais seis seções. Na primeira, após esta introdução, apresentamos as considerações metodológicas, justificando a caracterização do estudo como um levantamento bibliográfico qualitativo, bem como a busca e seleção dos dados; posteriormente, realizamos uma descrição acerca do foco dos trabalhos eleitos para apreciação analítica, mobilizada pela pergunta de pesquisa; por meio dessa descrição, expomos algumas reflexões teóricas a partir das abordagens relacionadas à Filosofia da Matemática, presentes no corpus de análise; e, por fim, constam as considerações finais, seguidas das referências bibliográficas e de apêndice, que apresenta as produções encontradas.

2 CONSIDERAÇÕES METODOLÓGICAS

Com vistas a responder à pergunta de pesquisa e atender ao objetivo, este estudo caracteriza-se como qualitativo, na forma de um levantamento bibliográfico, conforme apresentado por Fiorentini e Lorenzato (2006). Em conformidade com Borba e Araújo (2020), a abordagem qualitativa de pesquisa permite a obtenção de informações mais descritivas, predominando a significância dada às ações realizadas. Depreendemos que nosso trabalho vai ao encontro do apontamento dos referidos autores, visto que pretendemos descrever elementos principais das teses, os quais nos possibilitam compreender tanto o foco da abordagem como a presença da Filosofia da Matemática no material selecionado para análise.

Para a realização do levantamento, por meio da palavra-chave "Filosofia da Matemática", utilizamos as plataformas de busca Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD) e o

---

[1] Neste artigo, compreendemos por "foco das teses" a centralidade dos estudos, sendo o tema principal, a pergunta de pesquisa e os objetivos traçados, além dos principais apontamentos e abordagens filosóficas.
[2] Disponível em: <http://bdtd.ibict.br/vufind/>. Último acesso em: 06 set. 2020.
[3] Disponível em: <https://catalogodeteses.capes.gov.br/catalogo-teses/#!/>. Último acesso em: 06 set. 2020.

Catálogo de Teses e Dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes), com o intuito de mapear teses defendidas entre 2015 e 2020 sobre o referido tema.

Em um primeiro momento, a busca de dados foi realizada na BDTD, no dia 01 de setembro de 2020. Inicialmente, foi possível identificar 74 trabalhos relacionados ao termo "Filosofia da Matemática", sendo 40 dissertações e 34 teses. Dentre as instituições que se destacaram, citamos a Universidade Estadual Paulista e a Universidade Estadual de Campinas, ambas com 11 pesquisas.

Com relação à distribuição das pesquisas por ano, localizamos produções realizadas entre 1988 e 2019, detalhadas no Quadro 1, a posteriori. Dentre essas, selecionamos 9 teses defendidas entre 2015 e 2020, utilizando os próprios recursos[4] da plataforma já informada, que atendiam ao recorte temporal estabelecido.

Com o objetivo de complementar os dados, foi realizada uma nova busca no Catálogo da Capes, no dia 05 de setembro de 2020, na qual, em um primeiro momento, obtivemos 104 resultados/estudos. Porém, identificamos, um impasse na plataforma, pois, a partir da busca com os recursos disponíveis[5], foram levantados 102 trabalhos. Desse modo, optamos por trabalhar com esse último número.

Com relação à distribuição por área de conhecimento, a plataforma de busca apresentou 39 trabalhos em Ensino de Ciências e Matemática, 21 em Filosofia, 19 em Educação, 16 em Ensino, 6 em Epistemologia e 1 em Matemática. No que diz respeito às instituições em que as investigações em cena foram realizadas, salientamos 36 trabalhos pela Universidade Anhanguera de São Paulo e 15 pela Universidade Estadual Paulista.

Também, por meio do recurso disponível no Catálogo da Capes, localizamos trabalhos realizados entre 1996 e 2019, distribuição detalhada no Quadro 1, além de 53 teses relacionadas à "Filosofia da Matemática", sendo 23 defendidas no período analisado (2015-2020).

Quadro 1: Distribuição geral das pesquisas por ano

Ano	BDTD	Catálogo Capes	Ano	BDTD	Catálogo Capes	Ano	BDTD	Catálogo Capes
1988	1	-	2004	2	1	2012	1	5
1993	2	-	2005	6	4	2013	5	13
1996	1	1	2006	3	1	2014	10	10
1999	-	1	2007	3	6	2015	6	10
2000	-	1	2008	3	2	2016	1	8
2001	-	2	2009	6	7	2017	5	9
2002	2	3	2010	4	5	2018	4	2
2003	1	2	2011	2	7	2019	6	2

Fonte: Autores (2021).

Com relação à distribuição apresentada no Quadro 1, observamos divergências entre os resultados exibidos pelas plataformas e uma maior complementação de dados, o que corrobora a importância de realizar este estudo em mais de um meio de coleta de dados. Esse fato pode ser perceptível, também, pela distribuição das pesquisas pelas instituições, pois conforme mencionamos,

[4] A BDTD contém, no lado esquerdo da tela, abas como instituições, repositório, programa, área do conhecimento e ano de defesa, as quais permitem refinar a busca de dados.

[5] No lado esquerdo da tela, é possível refinar a pesquisa, considerando os campos: tipo; ano; autor; orientador; banca; grande área conhecimento; área conhecimento; área avaliação; área concentração; nome programa; instituição; e biblioteca.

o Catálogo da Capes informou 36 trabalhos, cuja autoria é de egressos de doutorado da Universidade Anhanguera de São Paulo, ao passo que a BDTD não gerou resultados para essa instituição.

Ao comparar as produções obtidas nas duas plataformas, observamos a interseção de 5 pesquisas, a saber: Nakano (2015), Batistela (2017), Pimentel (2017), Misse (2019) e Godoy (2019). Assim, identificamos o total de 27 teses sobre "Filosofia da Matemática", defendidas entre 2015 e 2020. Apresentamos, no Quadro 2, uma síntese de dados sobre as pesquisas encontradas, envolvendo instituição de Ensino Superior, a região do país em que está situada, o Programa de Pós-graduação em que foi realizado o doutorado, a autoria e o ano de publicação da tese.

Quadro 2: Relação das teses mapeadas sobre "Filosofia da Matemática"

Autor	Programa de Pós-Graduação e IES	Autor	Programa de Pós-Graduação e IES
Sitoie (2018)	Ciências do Amb. e Sustent. na Amazônia (UFAM)	Souza (2015)	Educação Matemática (UNIAN)
Nakano (2015)	Filosofia (UFSCar)	Silva (2015)	
Castro (2016)	Educação (UFSCar)	Calil (2015)	
Cortese (2017)	Filosofia (USP)	Rolim (2015)	
Franzon (2015)	Educação Matemática (UNESP)	Cunha (2016)	
Oliveira (2015)		Xavier (2016)	
Correia (2015)		Sousa (2016)	
Batistela (2017)		Souza (2016)	
Missé (2019)		Rocha (2016)	
Godoy (2019)		França (2017)	
Pimentel (2017)	Filosofia (UFMG)	Santana (2017)	
Almeida (2017)	Filosofia (UNICAMP)	Liberal (2017)	
Almeida (2019)		Carvalho (2017)	
		Hermann (2018)	Ensino. de Ciênc. e Ed. Matemática (UEL)

Fonte: Autores (2021).

Inicialmente, destacamos o predomínio de trabalhos realizados junto à Universidade Anhanguera de São Paulo (UNIAN), 13 dentre os 27, e a Universidade Estadual Paulista (Unesp), com 6 produções, ambas localizadas na região sudeste do país. Ao considerarmos a distribuição das pesquisas por região, os dados coletados vão ao encontro de apontamentos apresentados pela Plataforma Sucupira e pela Capes. Segundo informações presentes na Plataforma[6], a região Sudeste é a que detém maior número de programas e cursos de pós graduação, 2003 e 3208 respectivamente. Também, essa região oferta praticamente metade dos cursos de doutorado acadêmico do Brasil, 1222 dentre os 2452 totais. Outros fatores que podem ser relevantes para o predomínio das pesquisas na região citada são apontados por Cirani, Campanario e Silva (2015) que indicam que o ensino senso estrito foi ampliado no país, com grande desigualdade na distribuição regional, e que essa expansão não ocorreu somente por iniciativas governamentais, mas também pela exigência da população brasileira por maior nível de escolarização.

Além do exposto, de acordo com o censo[7], atualizado do Diretório dos Grupos de Pesquisa no Brasil, o número de Instituições passou de 99, em 1993, para 531, em 2016, corroborando para um aumento exponencial de grupos de pesquisa no Brasil (4402 para 37640) nesse período, sendo 42,5% dos grupos localizados na região Sudeste. Esse mesmo censo revelou um aumento de 12% no número de doutores entre 2014 e 2016, e mais de 1100% entre 1993 e 2016.

[6] Disponível em: <https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/programa/quantitativos/quantitativoRegiao.jsf>. Último acesso em: 29 set. 2020.

[7] Disponível em: < http://lattes.cnpq.br/web/dgp/censo-atual/>. Último acesso em: 29 set. 2020.

Ademais, é pertinente abordar informações sobre os programas de pós-graduação em que as pesquisas foram desenvolvidas, os quais estão distribuídos em duas grandes áreas do conhecimento: Ciências Humanas e Multidisciplinar. Os trabalhos realizados na UNIAN e na Unesp foram desenvolvidos em Programas de Pós-Graduação em Educação Matemática e o trabalho realizado na Universidade Estadual de Londrina (UEL) em um Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. Todos eles estão relacionados à área de Ensino de Ciências e Educação Matemática e à grande área do conhecimento Multidisciplinar.

Em consonância com informações expostas por Cirani, Campanario e Silva (2015), de 1998 a 2011, a grande área Multidisciplinar teve um crescimento de 1083% em programas de pós-graduação *stricto sensu*, aumentando de 10 para 123 programas em nível de doutorado. Porém, Araújo-Jorge, Sovierzoski e Borba (2017) consideram que, embora tenha havido um crescimento em programas da área de Ensino, comparando as avaliações de 2010-2012 e 2013-2016, essa área distancia-se da área de Educação, sua geradora, por estar integrada à área Multidisciplinar, junto à Biotecnologia, Ciências Ambientais, Interdisciplinar e Materiais, ao invés de compor a grande área de Humanidades.

Algumas observações podem ser encontradas no estudo realizado por Reis et al. (2020), que apresenta dados importantes sobre a área de Ensino de Ciências e Matemática e Ensino. De acordo com esses autores, a área de Ensino de Ciências e Matemática foi criada em 2000 e ampliada em 2010, quando passou a ser chamada área de Ensino.

Por sua vez, os cinco trabalhos desenvolvidos em Programas de Pós-Graduação em Filosofia (NAKANO, 2015; CORTESE, 2017; PIMENTEL, 2017; ALMEIDA, 2017; ALMEIDA, 2019), além daquele realizado em um programa de Educação (CASTRO, 2016), estão alocados na grande área do conhecimento de Ciências Humanas. Nesse viés, informações, veiculadas pelo Diretório dos Grupos de Pesquisa, apontam que essa grande área de conhecimento detém o maior número de linhas de pesquisa no Brasil (18% do total de 147.392). Consideramos como fator positivo a realização de 5, dentre as 27 teses, em programas de Filosofia; o que nos proporciona apontar que o tema "Filosofia da Matemática" permite contribuições, tanto para matemáticos e educadores matemáticos, quanto para profissionais da área de Filosofia.

Assim, com base no exposto nesta seção, identificamos no *corpus* de análise seis teses que apresentaram o termo "Filosofia da Matemática" no título ou nas palavras-chave[8], a saber: Nakano (2015), Rocha (2016), Batistela (2017), França (2017), Misse (2019) e Godoy (2019). Realizada essa apuração, passamos à seção seguinte.

3 DESCRIÇÃO DO *CORPUS* DE ANÁLISE

Ao analisarmos os trabalhos de Nakano (2015), Rocha (2016), Batistela (2017), França (2017), Misse (2019) e Godoy (2019), a fim de identificar e compreender o foco de cada um, encontramos uma amostra heterogênea de abordagens relativas à Filosofia da Matemática. Cada tese traz uma perspectiva diferente, considerando seus objetivos pretendidos e problemas e serem respondidos. Nesse sentido, a seguir, dispomos o Quadro 3, que elucida o título e/ou o objetivo/pergunta de cada estudo, com vistas a subsidiar a apreciação analítica. A discussão dos trabalhos segue uma ordem cronológica de apresentação.

[8] Apesar da pesquisa de Almeida (2019) ter atendido a esses critérios, desconsideramo-la desta análise detalhada por estar escrita em língua inglesa. Entendemos que essa exclusão seria pertinente e adequada, a fim de privilegiar os estudos escritos em Língua Portuguesa.

Quadro 3: Teses abordadas

Título da Tese	Objetivo do trabalho ou pergunta de pesquisa
Um Estudo sobre Complementaridades presentes na Construção da Teoria dos Números Complexos	Analisar o caráter epistemológico do processo de construção da teoria dos números complexos, sob o ponto de vista do Princípio da Complementaridade na Educação Matemática
O Teorema da Incompletude de Gödel em Cursos de Licenciatura em Matemática	Apresentar uma proposta para inserção do teorema da incompletude de Gödel em cursos de Licenciatura em Matemática, buscando compreender como sentidos e significados deste teorema podem ser atualizados nestes cursos
Continuum: Matemática, Filosofia e Computação	Investigar e compreender o como o contínuo se presentifica, no trabalho com métodos numéricos, estando-se junto ao computador?
Um breve Panorama das Matemáticas Mistas e seus Desdobramentos	Contribuir bibliograficamente a respeito das matemáticas mistas no idioma português
Evolução do Conceito de Função Integrável	Descrever e analisar a evolução dos conceitos de integrais e funções integráveis por três diferentes e complementares pontos de vista: o histórico, o filosófico e o matemático
A Matemática das Philosophische Bemerkungen: Wittgenstein no contexto da Grundlagenkrise	Leitura e interpretação dos escritos de Wittgenstein sobre a matemática presentes nos “capítulos matemáticos” das Philosophische Bemerkungen

Fonte: Autores (2021).

Devido ao nosso limitado espaço para uma abordagem filosófica mais aprofundada, nossa discussão focaliza recortes de cada trabalho. Para tal, expomos um breve perfil dos aportes utilizados em cada um.

Iniciamos nossa discussão pela pesquisa intitulada “A Matemática das Philosophische Bemerkungen: Wittgenstein no contexto da Grundlagenkrise”, de Nakano (2015). Nessa pesquisa, Nakano (2015, p. 2) define dois objetivos, o primeiro de “fornecer uma leitura e interpretação dos escritos de Wittgenstein acerca da filosofia da matemática no início do seu “período intermediário”, além de buscar “desenvolver uma reflexão sobre a posição do autor a respeito da crise dos fundamentos da matemática que se instaurou no início do século XX” (NAKANO, 2015, p. 2). Para isso, o autor escolhe analisar a obra Philosophische Bemerkungen (PhBm) de Wittgenstein (1964).

A PhBm foi escrita no contexto de duas crises. A primeira, interna ao pensamento do autor, diz respeito a inconsistências encontradas no Tractatus Logico-Philosophicus[9], em que o autor se posiciona apenas em relação ao logicismo de Frege e Russell e é encarada pelo referido filósofo como uma crise nos fundamentos da lógica, pois era fruto de problemas incontornáveis que se manifestavam no momento da “aplicação da lógica”, no momento de revelar aquilo que a lógica não podia prescrever, a saber, a forma lógica dos objetos simples e das proposições elementares. Já a segunda crise, que recebeu o codinome de “Grundlagenkrise der Mathematik[10]”, diz respeito ao posicionamento de Wittgenstein diante das tendências filosóficas dominantes de sua época: o intuicionismo de Brouwer e Weyl; o formalismo de Hilbert; e o logicismo renovado de Ramsey.

[9] Obra cujo original foi publicado em 1921. Foi o único trabalho que Wittgenstein publicou em vida e é considerado um dos textos mais influentes, inspiradores e inovadores do pensamento moderno, mantendo seu predomínio em toda a discussão posterior sobre a filosofia da linguagem.
[10] Weyl, Hermann: Uber die neue Grundlagenkrise der Mathematik, em: ¨ Mathematische Zeitschrift, 10.1-2 (1921), pp. 39–79.

Em seu capítulo de conclusão, Nakano (2015) dedica-se a considerar em que medida as reflexões de Wittgenstein sobre a matemática nas PhBm tocam o solo da segunda crise. Neste sentido, o autor constrói relações entre a concepção de Wittgenstein e essas três escolas, limitando-se ao dito no "Tractatus", sem a intenção de exaurir o conteúdo do debate de Wittgenstein. Ao contrário disso, Nakano reconhece que seu intento propiciou o acesso a um ponto de vista privilegiado que permite a apreciação da postura de Wittgenstein face à crise que se instaurou na matemática de seu tempo. O pesquisador conclui seu estudo, demostrando que a perspectiva de Wittgenstein não se reduz a um sincretismo dessas três correntes filosóficas clássicas, mas "se constitui um pensamento original sobre a matemática que concebe essa crise como um produto de confusões conceituais a serem esclarecidas pelo trabalho filosófico" (NAKANO, 2015, p. 168). Assim, as concepções de Wittgenstein não surgiram como uma alternativa oposta as outras três, nem tampouco ao seu fracasso, diferentemente disso objetiva reconhecer que os problemas enfrentados carecem de sentido.

A segunda tese submetida à análise, "Evolução do Conceito de Função Integrável", Rocha (2016, p. 12) objetiva "descrever e analisar a evolução dos conceitos de integrais e funções integráveis por três diferentes e complementares pontos de vista: o histórico, o filosófico e o matemático". Além disso, a autora ilustra e fortalece a hipótese de seu estudo: "O progresso das Ciências e da Matemática foi concebido, até certo grau, como um processo de desenvolvimento de seus objetos e de sua particular noção de realidade" (ROCHA, 2016, p. 106).

No que que concerne às teorias que fundamentam o trabalho, Rocha (2016) apoia-se no referencial filosófico, com base na Semiótica, de Peirce, e no Princípio da Complementaridade na Educação Matemática. Já a perspectiva histórica e matemática empregada pela pesquisadora é tomada para apresentar uma evolução dos conceitos de "função de continuidade" e de "integrabilidade".

Rocha (2016) afirma que a evolução do conceito de função ocorreu paralelamente ao conceito de continuidade, beneficiando-se, também, das ideias desenvolvidas na Semiótica, a partir da construção de suas representações geométricas e algébricas. Já a evolução do conceito de integralidade teve sua origem junto ao método da quadratura de figuras planas, perpassando pelo método dos indivisíveis, de Cavalieri, culminando no cálculo de áreas limitadas pelos gráficos de certas funções, desenvolvido por Fermat.

Outro percurso apresenta os trabalhos de Cauchy e Riemann que apoiam-se na Geometria para desenvolver os conceitos "integral" e "integrabilidade", enquanto Newton e Leibniz atacam o problema via uma abordagem algébrica, por meio das antiderivadas. Percebe-se aí a presença de uma complementaridade de visões do problema: a visão geométrica e a visão algébrica, reflexo da complementaridade existente na Matemática entre a Geometria e a Álgebra, entre o contínuo e o discreto. Lebesgue, então, entra em cena para revolucionar a solução do problema, introduzindo a noção de medida de conjuntos, que generalizou a noção de distância euclidiana e ampliou o sentido do conceito, mostrando que o que interessa são as funções mensuráveis.

Esse trajeto histórico sobre as construções matemáticas dos objetos em foco evidencia a evolução de uma abordagem aritmética do conceito de função integrável para uma abordagem complementar algébrica. Percebe-se a mudança de uma abordagem intuitiva para uma abordagem complementar formal que partiu do método dos indivisíveis de Cavalieri para criar uma integral aritmética. Posteriormente, Newton estabeleceu o cálculo integral como a operação inversa da derivação, enquanto Leibniz construiu a integral definida para derivadas contínuas, atualmente conhecida como Teorema Fundamental do Cálculo. O resultado obtido por Leibniz foi abordado pela semiótica como uma representação para um cálculo de área, ampliando assim o conceito de integral.

A construção histórica dos conceitos de integrais e funções integráveis serviu para a autora comprovar a hipótese de que "o progresso das Ciências e da Matemática foi concebido, até certo grau, como um processo de desenvolvimento de seus objetos e de sua particular noção de realidade" (ROCHA, 2016, p. 16), durante a qual enfatizou-se as mudanças das intenções sobre este conceito. Tais mudanças são atribuídas às complementaridades existentes entre: a Aritmética e a Álgebra, Geometria e a Álgebra, contínuo e o discreto, intuição e o formalismo, rumo à construção de generalizações do conceito de funções integráveis.

O terceiro trabalho analisado, de autoria de Batistela (2017), toma como objeto de análise o Teorema da Incompletude de Gödel, cujo título é "O Teorema da Incompletude de Gödel em Cursos de Licenciatura em Matemática". O objetivo dessa tese é propor a inserção do Teorema da Incompletude de Gödel como objeto de estudo em cursos de Licenciatura em Matemática, buscando responder a seguinte questão: "como sentidos e significados do teorema da incompletude de Gödel podem ser atualizados em cursos de Licenciatura em Matemática?" (BATISTELA, 2017, p. 7).

Em busca de possíveis respostas à problemática em pauta, o percurso traçado apresenta o contexto matemático presente no surgimento do Teorema da Incompletude de Gödel, trazendo três correntes filosóficas que tinham como objetivo fundamentar toda a Matemática: o Formalismo, através da aritmética de Peano; o Logicismo, mediante da Lógica; e o Intuicionismo, por intermédio dos constructos finitistas. O Teorema da Incompletude de Gödel (TIG) surge como uma resposta negativa à proposta de demonstrar formalmente a consistência da aritmética, do que dependia o sucesso da proposta Formalista (BATISTELA, 2017).

Outra questão perseguida pela autora gira em torno do seguinte questionamento: como a Ciência Matemática continuou após a publicação do resultado do TIG? A proposta apresentada pelo grupo Bourbaki foi concebida como a maneira que a Matemática acolheu o teorema da incompletude, não negando nem mesmo assumindo uma impossibilidade de progredir na Matemática, ao contrário disso, aceitando que "o aparecimento de proposições indecidíveis, até mesmo na teoria dos números naturais, é inevitável" (BATISTELA, 2017, p. 7).

Após a apresentação e discussão das ideias matemáticas e filosóficas em torno do TIG, Batistela (2017) dispõe uma proposta para incluir o Teorema da Incompletude como um dos conteúdos trabalhados nos cursos de Licenciatura em Matemática, com o objetivo de atualizar sentidos e significados sobre a ação de produzir e ensinar Matemática. A proposta da pesquisadora em questão aproxima o tema dos conteúdos já previstos nos planos de curso. Em suas considerações, a autora afirma ser de grande importância incluir, na formação inicial de professores, um resultado tão significativo da Lógica Matemática, sobretudo quando são consideradas as consequências desse teorema acerca do alcance do método de produção da Matemática e sobre a concepção de Matemática ensinada.

Finalmente, a investigação desenvolvida por Batistela (2017) permite concluir que é necessário criar oportunidades para que os futuros professores vivenciem experiências que os conduzam ao pensar matematicamente, lançando mão tanto das intuições quanto do método axiomático dedutivo, além de perceberem as possibilidades de aplicação da matemática enquanto Ciência a diversas situações no mundo. Nesse sentido, a estudiosa cita as ideias de Imenes (1989) quando assevera que "em se tratando de concepções de professores dessa ciência em relação a ela própria [...] afirma que o ponto de vista de um professor está ligado à visão de Matemática que aprendeu em seus cursos" (BATISTELA, 2017, p. 13). Além disso, a autora compreende que, ao se abordar o TIG sob uma perspectiva filosófica, abre-se um espaço para que o profissional matemático ocupe a posição de protagonista em seu trabalho científico "uma vez que o encontro com um indecidível implica que aquele sistema formal não é capaz de decidir sobre a veracidade daquela afirmação ou da negação dela" (BATISTELA, 2019, p. 13), incumbindo, portanto, ao matemático realizar o juízo.

A próxima discussão refere-se à pesquisa realizada por França (2017), intitulada "Um estudo sobre complementaridades presentes na construção da teoria dos números complexos", a qual consiste numa pesquisa bibliográfica de natureza histórica e filosófica, tematizando a História dos números complexos. Para tanto, o referido pesquisador selecionou e analisou os trabalhos sobre o tema em pauta, publicados entre os séculos XV e XIX, buscando amparo no Princípio da Complementaridade na Educação Matemática para compreender e explicitar seus aspectos epistemológicos. O *corpus* de França (2017) constitui-se de trabalhos realizados por: Girolamo Cardano, Raphael Bombelli, René Descartes, Abraham De Moivre, Leonhard Paul Euler, Caspar Wessel, Jean-Robert Argand e Carl Friedrich Gauss, os quais contribuíram para a posterior representação geométrica dos números complexos no plano.

No que diz respeito às perspectivas filosóficas, França (2017) fundamenta-se nos juízos analítico e sintético de Kant, no conceitualismo de Bernard Bolzano, na Semiótica de Frege, e na ideia de signo de Pierce, com o objetivo de estudar as interpretações históricas e filosóficas da construção de conceitos matemáticos relacionados à Teoria dos Números Complexos.

França (2017) contextualiza seu trabalho na Educação Matemática, justificando que compreender o caráter epistemológico da produção matemática dessa teoria – enfatizando suas complementaridades – contribui para a formação do professor de matemática e para seu trabalho em sala de aula, pois proporciona a identificação de vários obstáculos que precisaram ser ultrapassados pelos matemáticos da época. Dentre esses obstáculos, o autor evidencia a aceitação de alguns tipos de números e seus aspectos operacionais, o tipo de abordagem científica aplicado à Matemática, a simbologia usada e a dificuldade de publicar e comunicar novos resultados. No que diz respeito às complementaridades identificadas, o estudo de França (2017) aponta para a complementaridade existente entre duas perspectivas de construção do conhecimento matemático, presentes no período analisado: a descoberta ou a criação. A primeira afirma que o conhecimento ocorre por meio de descobertas, ao passo que a segunda defende que acontece mediante criações da mente, o que pôde ser evidenciado pela "alternância entre os métodos empíricos do início do período da construção deste conceito e o formalismo racional que começava a predominar no final" (FRANÇA, 2017, p. 170).

O próximo trabalho analisado aproxima a Filosofia da Matemática da Computação, investigando como um objeto matemático se presentifica junto ao computador. A tese de Misse (2019), intitulada "Continuum: Matemática, Filosofia e Computação", tem como objetivo compreender o sentido de continuidade, atendo-se ao que dispõe-se sobre o referido tema na Filosofia da Matemática, na Matemática e na Ciência da Computação. Para tanto, o autor dedica-se a uma análise histórica, visando compreender: a evolução desse objeto e os diferentes modos que a matemática o concebe; e sua dimensão sob a perspectiva da Filosofia da Matemática, frisando alguns desdobramentos sobre essas compreensões quando se analisa o conceito do continuum dentro do ambiente computacional. O autor também contemplou, em sua análise, o conceito de infinito, por perceber que o modo que desenvolveu seu trabalho aproximou ambos os conceitos (continuum e infinito), os quais passaram a ser discutidos em conjunto. Dessa forma, sua investigação procura responder a seguinte questão: "Como o contínuo se presentifica no trabalho com métodos numéricos, estando-se junto ao computador?" (MISSE, 2019, p. 18), propondo um movimento de investigação filosófica com a intenção de expor suas compreensões do sentido de continuidade.

O percurso histórico constituído por Misse (2019) visita os pensamentos da filosofia grega atomista e a ideia dos mônadas de Leibniz, consideradas essenciais para a posterior formalização matemática do conceito de continuum. Depois, o autor aborda as teorias de Cantor e Dedekind, que se valeram das ideias de Leibniz para a construção dos Números Reais e a formulação da hipótese do continuum. A partir desse momento, a tese focaliza o contínuo no âmbito da Ciência Matemática, com vistas a compreender o processo de formalização da Análise através da estruturação dos números reais. A discussão realizada delineou aproximações entre os modelos desenvolvidos por Dedekind e por Cauchy, considerados matematicamente isomorfos, porém com diferenças epistemológicas acentuadas. Misse (2019) entende que a construção efetuada por Dedekind olha para ideia geométrica de reta, reconhecendo a presença de todos os números reais sobre ela, enquanto a concepção de Cauchy concebe os números em potência, de modo que qualquer número real pode ser escrito por meio de uma sequência de números racionais, estabelecendo assim a analogia que toma a diferença entre o infinito real e o infinito potencial, respectivamente.

O caminho escolhido por Misse (2019) considera duas perspectivas de Análise: as aproximações entre os modelos desenvolvidos por Dedekind e por Cauchy, culminando no estudo da Análise por meio do modelo de Cauchy-Weierstrass, e as estruturas infinitesimais. Quanto à compreensão dos números reais de uma perspectiva da Matemática, seu estudo concluiu que

> [...] as duas perspectivas de Análise se distanciam quando tematizamos o conceito de número". Para o modelo de Cauchy-Weierstrass temos os números como entidades pontuais, que podem ser tomadas de modo discreto, mas que, pela propriedade completa, se constitui numa entidade contínua. Já o modelo dos infinitésimos vê os números diante de uma interdependência de valores em uma vizinhança, do mesmo modo que Husserl compreende os instantes temporais como agoras-duração que, ao se estenderem, constituem uma estrutura contínua (p. 93).

Construída sua compreensão sobre o conceito de continuidade no âmbito da Ciência Matemática, Misse (2019) buscou a construção de sua concepção sobre a continuidade junto à Ciência da Computação. Tal jornada teve início em reflexões a respeito do que é o computador, sua estrutura e qual concepção de números é possibilitada diante dele. Partindo da ideia de que o conceito de continuidade está fundamentado nas construções realizadas sobre os Números Reais, o autor verificou a necessidade de visitar a maneira como esses números são modelados e armazenados pelo computador. O fato de que determinados números só podem ser representados por meio de arredondamentos ou truncamentos poderia ter levado o pesquisador a concluir que seria impossível representar os números reais junto ao computador. No entanto, a epistemologia subjacente ao trabalho de Cauchy, que também está presente no trabalho de Turing (1936), aponta para a possibilidade de se trabalhar com qualquer número real, de modo que os possíveis lapsos observados podem ser preenchidos e, portanto, todas as funções computáveis são contínuas. Dessa forma, Misse (2019, p.95) conclui que

> [...] foi possível evidenciar a presença da continuidade em modos de se trabalhar com o ferramental da computação" e que o exercício filosófico desenvolvido no trabalho permitiu "efetuar uma articulação de significados de diversas áreas, as quais buscaram compreensões sobre a continuidade no decorrer da História (p. 95).

Por fim, apreciamos o trabalho de Godoy (2019), cujo título é "Um breve panorama das matemáticas mistas e seus desdobramentos". O objetivo do autor é contribuir para o conjunto de produções bibliográficas em português a respeito das matemáticas mistas. Tal área envolve sua construção história e as contribuições dos conhecimentos produzidos nessa área para o desenvolvimento da Matemática, da Física, e das Tecnologias, sobretudo das máquinas construídas para impulsionar o desenvolvimento Industrial na Inglaterra. Para tanto, Godoy (2019) define seu contexto de investigação em função de um local: Inglaterra; e uma sociedade científica: Sociedade Lunar de Birmingham.

O percurso histórico, objeto de sua análise, tem início quando da introdução das "matemáticas mistas" como área de produção de conhecimento científico, termo esse que apareceu pela primeira vez junto à publicação de Francis Bacon, intitulada Proficience and Advancement of Learnings no ano de 1605, na qual definiu uma classificação para as ciências matemáticas enquanto "matemática pura" – Aritmética e Geometria – e "matemática mista" – Arquitetura, Astronomia, Cosmografia, Engenharia, Música e Perspectiva.

Em 1623, Bacon publica sua obra De Dignitate et Augmentis Scientiarum, na qual altera sua concepção da matemática para além da Metafísica. Godoy (2019) realça, como principal mudança, a possibilidade de as ciências matemáticas contribuírem com as ciências da Física. Compreendemos que tal mudança de perspectiva de Bacon surgiu a partir das descobertas feitas, entre 1605 e 1623, no campo das ciências físico-matemáticas.

A classificação dada por Bacon, que inclui a matemática como um ramo da Metafísica, repercutiu em questionamentos filosóficos. Já o fato da maioria dos resultados ser proveniente de dados coletados a partir de experiências físicas, gerou críticas quanto à veracidade desses resultados. Para contornar tal situação, surgiram iniciativas no sentido de expressar as demonstrações da matemática mista em função de objetos da matemática pura, principalmente fazendo uso da geometria. Outra forma encontrada foi aproximar as ciências matemáticas das ciências físicas, despontando, assim, as ciências físico-matemáticas como um desdobramento da matemática mista.

Diante desse novo cenário científico, uma nova classificação da matemática fazia-se necessária e, no ano de 1751, D'Alembert e Diderot publicaram uma série denominada "Encyclopédie", com o objetivo de reclassificar o conhecimento humano. A matemática continuaria ramificada na metafísica, mas agora dividida em matemática pura, matemática mista e ciências físico-matemáticas. Nessa nova classificação, matemática mista e as ciências físico-matemáticas contemplavam os mesmos tópicos: Acústica, Arte de Conjecturar (probabilidades), Astronomia Geométrica, Mecânica, Óptica e Pneumática. A diferença efetuava-se na flexibilidade de utilizar os resultados da matemática com as ciências físicas. Apesar de essa classificação criar duas categorias distintas sob o ponto de vista conceitual, as ciências físico-matemáticas e as matemáticas mistas eram consideradas ciências sinônimas, sendo compreendidas como uma aplicação da matemática pura para a resolução de problemas observados no mundo físico.

Outro fato apresentado no trabalho de Godoy (2019) refere-se ao desuso gradual do termo "matemática mista" no século XIX, como consequência do aparecimento da "matemática aplicada". Além disso, as críticas de Kant em relação aos conhecimentos puros, os quais não concebiam a matemática como ramo da metafísica, contribuíram para o desuso da "matemática mista" .

Godoy (2019) conclui seu trabalho analisando as contribuições da "matemática mista" que, em conjunto com as ciências físico-matemáticas, foram utilizadas no decurso histórico para solucionar diversos problemas envolvendo grandezas físicas. Isso demonstra a importância da matemática mista para avanços no desenvolvimento da sociedade, destacando o aprimoramento tecnológico motivado pelo crescimento do setor industrial após a Revolução Industrial.

A partir da exposição do foco das teses elencadas para apreciação analítica neste estudo, percebemos que diferentes objetos matemáticos foram tematizados, tendo como pano de fundo percursos históricos de suas construções matemáticas, bem como diferentes perspectivas filosóficas, buscando compreender sua evolução, seus sentidos, significados e complementaridades. A respeito das correntes filosóficas contempladas nos trabalhos analisados, a próxima seção explora um recorte das principais escolas discutidas, acentuando alguns de seus principais aspectos filosóficos.

4 ALGUMAS REFLEXÕES A RESPEITO DA FILOSOFIA DA MATEMÁTICA

Conforme discutimos no capítulo anterior, encontramos uma amostra heterogênea de abordagens relativas à Filosofia da Matemática. No entanto, diálogos podem ser estabelecidos entre alguns trabalhos encontrados no *corpus* de análise, conforme Quadro 4, a seguir.

Quadro 4: Teses e Abordagens Filosofias

Autor	Abordagem filosófica	Filósofo	Desenvolvimento teórico analisado
Nakano (2015)	Positivismo Lógico	Ludwig Joseph Johann Wittgenstein	Crise nos fundamentos e aplicação da lógica
Rocha (2016)	Semiótica	Charles Sanders Peirce	Trajeto histórico sobre as construções matemáticas dos objetos
Batistela (2017)	Lógica Matemática	Kurt Friedrich Gödel	Incluir, na formação inicial de professores, o Teorema da Incompletude de Gödel, um resultado tão significativo da Lógica Matemática
França (2017)	Intuicionismo	Immanuel Kant	Diálogo entre os juízos analítico e sintético, o conceitualismo, a Semiótica, e a ideia de signo
Missé (2019)	Racionalismo	Gottfried Wilhelm Leibniz	A evolução do Continuum e os diferentes modos que a matemática o concebe
Godoy (2019)	Empirismo	Francis Bacon	As matemáticas mistas como área de produção de conhecimento científico: as ciências físico-matemáticas

Fonte: Autores (2021).

Percebidas as principais centralidades das teses sobre Filosofia da Matemática, buscamos relações entre os teóricos citados e suas respectivas abordagens filosóficas. Pensando nessa "conversação", definimos uma linha não cronológica de ideias, destacadas sequencialmente de forma igual como possibilidades de intersecção de linhas de pensamento. Começamos por Wittgenstein.

Ludwig Joseph Johann Wittgenstei, em seu "Tractatus Logico-Philosophicus" (publicado em 1921), procura expor "a verdade dos pensamentos comunicados", cujas expressões lhe parecem intocáveis e definitivas. "Um pensamento correto a priori seria aquele cuja possibilidade condicionasse sua verdade", ou seja, "[...] só poderíamos conhecer a priori que um pensamento é verdadeiro se a verdade dêle fosse reconhecível a partir do próprio pensamento (sem objeto de comparação)" (WITTGENSTEIN, 1968, p. 61-62, grifo nosso).

"Espaço, tempo e côr (coloridade) são formas dos objetos" (WITTGENSTEIN, 1968, p. 58), ou seja, para o filósofo *o Espaço é o espaço lógico, em que o objeto existe caso não contrarie as 'leis lógicas'*. O Tempo é o tempo das proposições. Não podemos dizer, por exemplo, que "p" existe e não existe simultaneamente. Por fim, a Côr, em Wittgenstein, é tão material quanto o corpo. Da mesma forma que um corpo não pode ocupar dois lugares diferentes concomitantemente, ele não pode ter duas cores 'diferentes'. Porém, ao afirmar que algo é branco e não azul, o azul (excludente) deve fazer parte do campo semântico da minha afirmação, ou seja, deve ser uma cor significativa à minha proposição. "O modo pelo qual os objetos se vinculam no estado de coisas constitui a estrutura do estado de coisas. [...] A totalidade dos subsistentes estados de coisas é o mundo" (WITTGENSTEIN, 1968, p. 58). Os objetos estão ligados uns aos outros por meio de uma cadeia, a qual é determinada, única, formando uma estrutura. Essa 'garantia de unicidade da estrutura', nos dá a possibilidade da forma. A totalidade desses 'estados duradouros' (Formas) constituem o Mundo. Para o filósofo, as cores, por exemplo, possuem esta estrutura que, inicialmente, era analisada, para depois ser considerado o conceito de cor.

Immanuel Kant dispõe sobre Conhecimento Puro e Conhecimento Empírico e suas diferenças, considerando-se os conhecimentos e juízos a priori e os conhecimentos a posteriori. Para o teórico, "a crítica da razão acaba, necessariamente, por conduzir à ciência, ao passo que o uso dogmático da razão, sem crítica, leva, pelo contrário, a afirmações sem fundamento, a que se podem opor outras por igual verossímeis e, consequentemente, ao cepticismo" (KANT, 2001, p. 77). Com a publicação do livro "Crítica da Razão Pura", Kant desenvolve seus argumentos a respeito do Conhecimento Transcendental, que corresponde *"[...] a todo o conhecimento que em geral se ocupa menos dos objetos, que do nosso modo de os conhecer, na medida em que este deve ser possível a priori*" (KANT, 2001, p. 79). Ademais, o estudioso completa, frisando algo mais a respeito das várias Filosofias: "Um sistema de conceitos deste gênero deveria denominar-se filosofia transcendental. Mas esta filosofia é, por sua vez, demasiado ambiciosa para podermos começar por ela" (KANT, 2001, p. 79).

> Kant pensa a causalidade como a determinação por uma regra da sequência temporal dos fenômenos. Essa determinação se expressa em um princípio puro do entendimento, a "Segunda Analogia da Experiência". Cada um dos princípios puros do entendimento chamados de "Analogias da Experiência" trata da determinação objetiva de um dos aspectos da ordem do tempo, sendo eles: permanência, sucessão e simultaneidade. Na primeira edição da Crítica da Razão Pura, a Segunda Analogia, que diz respeito à determinação objetiva da sucessão temporal por uma regra, foi formulada de uma forma que evidenciava o ponto: "Tudo que acontece (começa a ser) pressupõe algo a que se segue de acordo com uma regra". Na segunda edição da Crítica da Razão Pura, a formulação é um tanto mais vaga nesse aspecto: "Todas as alterações ocorrem de acordo com a lei da conexão de causa e efeito" FAGGION, 2018, p. 29).

Gotfried Wilhelm Leibniz foi um polímata e filósofo alemão que publicou, em 1668, a primeira explicação clara e breve, de forma declarada, do princípio de razão suficiente (PRS), na obra "Demonstratio num Catholicarum Conspectus". Logo após, ainda em 1668, discorre sobre esse assunto na obra Confessio Naturae contra Atheistas. Já em 1670, publicou sua ideia em "Theoria Motus Abstracti", em 1672, em "Demonstratio Propositionum Primarum" e em "Existentia", em 1676. Além dessas obras, "Leibniz também menciona o PRS nos parágrafos § 44 e 196 da Teodiceia (1710) e no § 32 da "Monadologia" (1714)" (texto adaptado de SOUZA; FILHO, 2019, p. 2). Considerando, aqui, o que Leibniz dispõe em "Monadologia", revelamos:

> Os nossos raciocínios fundam-se sobre dois grandes princípios: o da contradição, pelo qual consideramos falso o que ele implica, e verdadeiro o que é oposto ao falso ou lhe é contraditório. E o da Razão Suficiente, pelo qual entendemos não poder algum fato ser tomado como verídico, sem que haja uma razão suficiente para ser assim e não de outro modo, embora frequentemente tais razões não possam ser conhecidas por nós (LEIBNIZ apud SOUZA; FILHO, 2019, p. 2).

É nessa obra que Leibniz afirma o Princípio da Não Contradição: uma tese não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo, ou seja,

> [...] *se uma proposição for verdadeira, então a sua contraditória é falsa, e se for falsa, a sua contraditória é verdadeira*. Por sua vez, o PRS estabelece que é necessária a pressuposição de uma causa ou razão suficiente para um evento qualquer ser considerado como verdadeiro ou existente, e, para ser assim e não de outra maneira. Segundo Leibniz, embora o PRS exija a indicação de condições,

> fundamentos ou razões, todavia, estas podem ser desconhecidas (SOUZA; FILHO, 2019, p. 2, grifos nossos).

Semelhantemente a Leibniz, Kant expõe esse assunto, afirmando que o princípio da não contradição "é um critério interno e negativo da verdade lógica e determina a possibilidade lógica de um conhecimento, pois prescreve apenas que o pensamento não se contradiga a si mesmo" (SOUZA; FILHO, 2019, p. 3). Por outro lado, "o PRS é um critério externo e positivo da verdade lógica e determina a realidade lógica do conhecimento, pois prescreve que o pensamento seja bem fundamentado logicamente" (SOUZA; FILHO, 2019, p. 3).

Já a Semiótica ou Teoria dos Signos de Charles Sanders Peirce explica o significado, a significação, a referência, a representação. Seu diálogo com as teorias de Wittgenstein e Leibniz fica claro quando observamos que

> Os relatos de Peirce são distintos e inovadores por sua amplitude e complexidade, e por capturar a importância da interpretação para a significação. Para Peirce, desenvolver uma teoria completa dos signos era uma preocupação filosófica e intelectual central. A importância da semiótica para Peirce é ampla. [...] Também *tratou a teoria dos signos como central para seu trabalho sobre lógica, como o meio para a investigação e o processo de descoberta científica*, e até mesmo como um meio possível para 'provar' seu pragmatismo (ATKIN, 2013, s. p., grifos nossos).

Kurt Friedrich Gödel foi um matemático, filósofo e lógico austríaco. Comparado, em importância para a História da Lógica, a Aristóteles, Tarski e Frege, publicou, em 1931, seus Teoremas da Incompletude, os quais restringem, intrinsicamente, quase todos os conjuntos de meios e processos axiomáticos empregados tanto na Filosofia da Matemática quanto na Lógica Matemática. Mediante seus teoremas, Gödel provou não ser possível atingir o que David Hilbert dispunha com seu Programa: formalizar a Matemática e demonstrar que a mesma é livre de contradições. Assim, como dito na sessão anterior: é necessário atualizar sentidos e significados sobre a ação de produzir e ensinar Matemática, [bem como] é necessário criar oportunidades para que os futuros professores vivenciem experiências que os conduzam ao pensar matematicamente, lançando mão tanto das intuições quanto do método axiomático dedutivo, além de perceberem as possibilidades de aplicação da matemática enquanto Ciência a diversas situações no mundo (BATISTELA, 2017).

Francis Bacon é considerado o pai da ciência e do empirismo moderno, sendo uma peça fundamental na transição do Renascimento para a Era Moderna. Em seu texto datado de 1607, "Cogitata et Visa", Bacon desenvolve suas ideias a respeito do seu método científico, o qual ficou conhecido por "indução". Francis rejeita o Silogismo, definindo sua proposta como um labor gradual e fidedigno que coleta dados e traz à tona a compreensão das coisas.

> Quando mais tarde ele desenvolveu seu método em detalhes, nomeadamente em seu Novum Organum (1620), ele ainda notou que *"[de] indução, os lógicos parecem dificilmente ter levado qualquer pensamento sério, mas eles passam por ela com um ligeiro aviso e se apressam para as fórmulas de disputa*" (BACON apud KLEIN; GIGLIONI, 2020, s. p., grifos nossos).
>
> *O método indutivo parte da experiência sensível e se move através da história* natural (fornecendo dados dos sentidos como garantia) para axiomas ou proposições inferiores, que são derivados das tabelas de apresentação ou da abstração de noções (KLEIN; GIGLIONI, 2020, s. p. , grifos nossos).

Após essas análises, averiguamos que "*a Matemática é uma ciência eminentemente dedutiva*" (BIANCONI, [?], p. 1, grifos nossos), o que nos remete à Lógica Matemática – uma parte dessa ciência que se ocupa em verificar se determinadas afirmações ou conjecturas são verdadeiras ou falsas,

> [...] o que significa que todo o trabalho matemático consiste em discursos que partem de premissas (ou hipóteses – declarações cujo valor verdadeiro é assumido) e seguem várias sentenças obtidas segundo algumas regras (as chamadas regras de inferência), até que a afirmação final resolva o problema proposto. *Até a resolução de equações tem esse caráter dedutivo*.

Nesse sentido, apresentamos, aqui, um exemplo, de resolução simples, que ilustra esse fato: resolver a seguinte equação linear 5x – 2 = 4x + 16. Obteremos a solução, quando, ao "isolarmos" a incógnita "x" no primeiro membro da equação, teremos, através das propriedades das operações básicas da matemática (adição, subtração, multiplicação e divisão), o seu resultado numérico no segundo membro, atingindo, assim, a solução do problema. A seguir, expomos o passo a passo da resolução:

1) 5x – 2 = 4x + 16 (equação a ser resolvida)
2) (–4x) + (5x – 2) = (–4x) + (4x + 16) (Propriedade da Igualdade)
3) (–4x + 5x) + (– 2) = (–4x + 4x) + (16) (Propriedade Associativa da Adição)
4) x – 2 = 16 (Resultado das Operações entre parênteses)
5) (x – 2) + 2 = 16 + 2 (Propriedade da Igualdade)
6) x + (– 2 + 2) = (16 + 2) (Propriedade Associativa da Adição)
7) x = 18 (Resultado das Operações entre parênteses e chegada à solução do problema) (texto adaptado de BIANCONI, [?], p. 2).

Diante disso, observamos que a natureza organizacional e lógica da matemática foi determinante nas teorias e abordagens filosóficas verificadas em nossa pesquisa. Essas características tornam o estudo da Filosofia da Matemática extenso e ímpar se comparada com outras abordagens que possuem funções diferentes, mas semelhanças formais, considerando-se seus aspectos filosóficos.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao nos propormos apresentar e discutir um levantamento bibliográfico sobre as produções brasileiras em nível de doutorado acerca da Filosofia da Matemática, defendidas entre 2015 e 2020, a partir do questionamento "qual o foco das teses de doutorado produzidas no Brasil, nos últimos cinco anos, que tematizam a Filosofia da Matemática?", observamos que a centralidade das produções esteve em assuntos distintos, como: Teorema da Incompletude de Gödel, Continuum, Conceito de Função Integrável, Matemáticas Mistas e obra a Philosophische Bemerkungen de Wittgenstein.

Como pontos que ilustram a Filosofia da Matemática e as convergências com relação a essa teoria presentes nos trabalhos, consideramos os argumentos de Kant (FRANÇA, 2017) a respeito do Conhecimento Transcendental, atribuindo este termo "[...] a todo o conhecimento que em geral se ocupa menos dos objetos, que do nosso modo de os conhecer, na medida em que este deve ser possível a priori" (KANT, 2001, p. 79) e as questões de Wittgenstein (NAKANO, 2015) em seu Tractatus Logico-Philosophicus (1921), no qual apresenta argumentos sobre o pensamento, afirmando que conhecer a priori se um pensamento é verdadeiro caso a verdade sobre ele fosse reconhecível sem objeto de comparação (WITTGENSTEIN, 1968).

Outro ponto de tendência de pensamento que merece destaque é a argumentação de Leibniz (tese de Misse, 2019) em sua obra Monadologia (1714), na qual afirma que se uma proposição for verdadeira, então a sua contraditória é falsa, e se for falsa, a sua contraditória é verdadeira. Também merece destaque a argumentação de Wittgenstein (NAKANO, 2015) com seu pensamento sobre a existência ou não de um objeto: Não podemos dizer, por exemplo, que existe e não existe ao mesmo tempo. Esses recortes nos fazem vislumbrar convergências de pensamento que nos remetem à Lógica Matemática e sua linguagem usual. Também, podem permitir indagações que sevirão de objetos para novos estudos.

Logo, esperamos que este texto contribua com discussões relacionadas à Filosofia da Matemática, sobretudo a pesquisadores preocupados sobre quando e onde as teses encontradas foram realizadas, bem como, principalmente sobre os principais temas abordados nesses trabalhos. A exemplo do exposto por Misse e Lammoglia (2020), ao abordarem um contexto histórico sobre a continuidade - tema abordado na tese de Misse (2019) -, observaram que ainda questões em aberto permanecem, possibilitando novas indagações sobre esse assunto.

Enfim, entendemos que investigações, discussões, artigos, dissertações e teses são necessárias para compreendermos aspectos da Filosofia da Matemática e os seus diversos focos. Nosso levantamento direciona aos Programas de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Estadual Paulista e Universidade Anhanguera de São Paulo, os quais têm realizado estudos nessa direção.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, E. L. B. **Análise das condições de verdade e dos requerimentos existenciais em axiomatizações da aritmética**. 2017. 138 p. Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Filosofia e Ciências Humanas, Campinas, SP. Disponível em: <http://www.repositorio.unicamp.br/handle/REPOSIP/330874>. Acesso em: 16 maio 2021.

ALMEIDA, H. A. **Contradições gratuitas**: em direção a uma interpretação nominalista de teorias contraditórias. 2019. 225 f. Tese (Doutorado em Filosofia) – Instituto de Filosofia e Ciências Humanas, Universidade Estadual de Campinas, Campinas. 2019.

ARAÚJO-JORGE, T. C.; SOVIERZOSKI, H. H.; BORBA, M. C. A Área de Ensino após a avaliação quadrienal da CAPES: reflexões fora da caixa, inovações e desafios em 2017**. Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia**, 10(3), 1-15, 2017. Disponível em: <https://periodicos.utfpr.edu.br/rbect/article/view/7744>. Acesso em: 28 set. 2020.

ATKIN A. **Peirce's Theory of Signs**. The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Summer 2013 Edition), Edward N. Zalta (ed.). Disponível em:https://plato.stanford.edu/archives/sum2013/entries/ peirce-semiótica /. Acesso em: 02 dez. 2020.

BATISTELA, R. de F. **O teorema da incompletude de Gödel em cursos de licenciatura em Matemática**. 2017. 139 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Rio Claro. 2017.

BIANCONI, R. **Introdução à Lógica Matemática**. Material de apoio pedagógico – USP. 70 páginas. Ano de publicação desconhecido. Disponível em: https://www.ime.usp.br/~mat/0349/Cap-1-5.pdf. Acesso em: 03 dez. 2020

BORBA, M. C.; ARAUJO, J. L. (Org). **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. 6. ed. 1. reimp. Belo Horizonte: Autêntica, 2020.

CASTRO, R. S. **Jogos de linguagem matemáticos da comunidade remanescente de quilombos da Agrovila de Espera, Município de Alcântara, Maranhão**. 2016. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2016. Disponível em: <https://repositorio.ufscar.br/handle/ufscar/8592>. Acesso em: 16 maio 2021.

CIRANI, C. B. S.; CAMPANARIO, M. de A.; SILVA, H. H. M da. A evolução do ensino da pós-graduação senso estrito no Brasil: análise exploratória e proposições para pesquisa. **Avaliação** (Campinas), Sorocaba, v. 20, n. 1, p. 163-187, mar. 2015. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1414-40772015000100163&lng=en&nrm=iso>. Acesso em: 28 set. 2020.

CORTESE, J. F. N. **O infinito em peso, número e medida**: a comparação dos incomparáveis na obra de Blaise Pascal. 2017. 571 p. Tese (Doutorado em Filosofia) - Universidade de São Paulo, SP.

FAGGION, A. **Causa – causalidade**. Estudos Kantianos, v. 6, n. 2. Marília, 2018. p. 29-32. Disponível em: https://revistas.marilia.unesp.br/index.php/ek/article/view/8680/5592#:~:text=Kant%20pensa%20a%20causalidade%20como,%2D%20gunda%20Analogia%20da%20Experi%C3%AAncia%E2%80%9D. Acesso em: 02 dez. 2020.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em Educação Matemática**: percursos teóricos e metodológicos. Campinas: Autores Associados, 2006.

FRANÇA, S. M. **Um estudo sobre complementaridades presentes na construção da teoria dos números complexos**. 2017. 181 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo. 2017.

GODOY, K. V. **Um breve panorama das matemáticas mistas e seus desdobramentos**. 2019. 360 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Rio Claro. 2019.

IMENES, Luiz Márcio Pereira. **Um Estudo sobre o Fracasso do Ensino e da Aprendizagem da Matemática**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1989.

KANT, I. **Crítica da razão pura**. 5. ed. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2001. Disponível em: <http://www.unirio.br/cch/filosofia/Members/dario.teixeira/teoria-do-conhecimento-2018-01/4-kant-critica-da-razao-pura/at_download/file>. Acesso em: 08 out. 2020. p. 62-83.

KLEIN, J.; GIGLIONI, G. **Francis Bacon**. The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Fall 2020 Edition), Edward N. Zalta (ed.). Disponível em: https://plato.stanford.edu/archives/fall2020/e ntries/francis-bacon/. Acesso em: 02 dez. 2020.

MISSE, B. H. L. **Continuum**: matemática, filosofia e computação. 2019. 100 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Rio Claro. 2019.

MISSE, B. H. L.; LAMMOGLIA, B. Uma Perspectiva Histórica do Conceito de Continuidade Matemática. **Hipátia**, v. 5, n. 1, p. 132-142, jun. 2020. Disponível em: < https://ojs.ifsp.edu.br/index.php/hipatia/article/view/1460>. Acesso em: 15 mar. 2021.

NAKANO, A. L. **A matemática das Philosophische bemerkungen**: Wittgenstein no contexto da Grundlagenkrise. 2015. 234 f. Tese (Doutorado em Filosofia) – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos. 2015.

PIMENTEL, R. **Limitações do holismo confirmativo na matemática**. 2017. 152 f. Tese (Doutorado em Filosofia) - Faculdade de Filosofia e Ciências Humanas, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte. 2017.

REIS, A. C. E.; WENDLING, C. M.; MIGUEL, K. S.; PERON, L. D. C.; BAR, M. V.; SANTOS, S. C. S.; MEIER, W. M. B.; CUNHA, M. B. Análise dos Periódicos Qualis/CAPES: traçando o perfil da área de ensino de ciências e matemática. **Hipátia**, v. 5, n. 1, p. 11-24, jun. 2020. Disponível em: < https://ojs.ifsp.edu.br/index.php/hipatia/article/view/1445>. Acesso em: 25 mar. 2021.

ROCHA, I. A. **Evolução do conceito de função integrável**. 2016. 113 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo. 2016.

SOUZA, L. E. R. de; FILHO, J. P. do V. O princípio da razão suficiente na Crítica da Razão Pura de Kant e suas aplicações: as analogias, as antinomias e os princípios regulativos. **doispontos**: Curitiba, São Carlos, volume 16, número 3. 2019, p. 1-15. ISSN 2179-7412. Disponível em: https://revistas.ufpr.br/doispontos/article/download/66683/40325. Acesso em: 05 dez. 2020.

TURING, A. M. On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem. **Proceedings of the London Mathematical Society**, Series 2, n.42, p 230-265. 1936.

WITTGENSTEIN, Ludwig: **Philosophische Bemerkungen**, ed. por Rush Rhees, Frankfurt: Suhrkamp, 1964.

WITTIGENSTEIN, L. **Tractatus Logico-Philosophicus**. São Paulo: Companhia Editora Nacional – Editora da USP, 1968.

Submetido em março de 2021.
Aprovado em julho de 2021.

Maxwell Gonçalves Araújo

Mestre em Educação em Ciências e Matemática pela Universidade Federal de Goiás (UFG). Docente do Instituto Federal de Goiás (IFG), Goiânia, SP, Brasil. ID Lattes: 4736043944821771. Orcid ID: 0000-0003-2828-6170.

Contato: maxwell.g.araujo@unesp.br.

Andrei Luís Berres Hartmann

Licenciado em Matemática pela Universidade Federal de Santa Maria (UFSM). Professor da rede municipal de ensino da cidade de Cândido Godoi, Cândido Godoi, RS, Brasil. ID Lattes: 7162712940733464. Orcid ID: 0000-0001-5240-7038.

Contato: andreiluis_spm@hotmail.com.

Luciana Leal da Silva Barbosa

Mestra em Ciência da Computação pela Universidade Estadual Paulista (Unesp). Docente do Instituto Federal de São Paulo (IFSP), Birigui, SP, Brasil. ID Lattes: 4495309054700716. Orcid ID: 0000-0002-0828-9924.

Contato: lleals@gmail.com.