

Contribuições das Navegações Portuguesas para a Geometria da Superfície Terrestre

Contributions of Portuguese Navigations to the Earth Surface Geometry

Carla P. **Ferreira dos Santos**
Secretaria de Educ. do Estado de
São Paulo (SEDUC-SP)

Lucas Antônio **Caritá**
Instituto Federal de São Paulo
(IFSP)

Marta Cilene **Gadotti**
Universidade Estadual Paulista
(UNESP)

RESUMO

As tentativas de dedução do V postulado de Euclides promoveram o desenvolvimento de novas geometrias denominadas de não euclidianas. Entre elas, pode-se citar a Geometria Esférica, a qual encontra como elemento subjacente a superfície de uma esfera, sendo a forma mais simples de Geometria Elíptica (proposta por Riemann). Tal geometria, já era conhecida e utilizada por matemáticos gregos, antes mesmo de sua formalização, no estudo de Astronomia. No entanto, os portugueses, com sua potência marítima, diante dos desafios da navegação, proporcionaram grande desenvolvimento e aplicabilidade de técnicas da Geometria Esférica e seus elementos para localização terrestre. Nesse contexto, este texto tem por objetivo apresentar de maneira reflexiva o desenvolvimento da geometria da superfície terrestre enfatizando as contribuições advindas das navegações portuguesas. A pesquisa foi realizada através de um estudo bibliográfico e o texto foi redigido com intuito de trazer acontecimentos históricos de forma reflexiva, discutindo a criação das geometrias não euclidianas, a saga portuguesa para o aprimoramento da localização terrestre e como os conhecimentos buscados pelos portugueses contribuiu com a tecnologia atual para localização na superfície terrestre.

Palavras-chave: Geometria Esférica. Geometrias não euclidianas. Navegações portuguesas. História da matemática.

ABSTRACT

Attempts to deduce the Euclid's fifth postulate promoted the development of new geometries called non-Euclidean. Among them we can mention Spherical Geometry, which finds the surface of a sphere as the underlying element, being the simplest form of Elliptical Geometry (proposed by Riemann). Such geometry was already known and used by Greek mathematicians, even before its formalization, in the study of Astronomy. However, the Portuguese, with their maritime power, faced with the challenges of navigation, provided great development and applicability of techniques of Spherical Geometry and its elements for terrestrial location. In this context, this text aims to reflectively present the development of the geometry of the Earth's surface, emphasizing the contributions arising from Portuguese navigation. The research was carried out through a bibliographic study and the text was written in order to bring historical events in a reflexive way, discussing the creation of non-Euclidean geometries, the Portuguese saga for the improvement of the terrestrial location and how the knowledge sought by the Portuguese contributed with current technology for location on the Earth's surface.

Keywords: Spherical geometry. Non-euclidean geometries. Portuguese navigations. History of mathematics.

1 INTRODUÇÃO

Os seres humanos, nos primórdios, já percebiam a geometria existente na natureza, mas a consideravam apenas como uma forma de expressar as coisas do mundo ao redor. Segundo Eves (1992), pelas necessidades humanas, se passa a conjecturar formas geométricas simples como: retângulos, quadrados e triângulos, assim como conceitos de vertical, horizontal, paralelismo e perpendicularismo. Muito provavelmente, a observação para a concepção de curvas e círculos também possa ter ocorrido por meio da visualização do contorno do Sol, da Lua, das formas do arco-íris e das sementes de flores e frutos.

Com o passar do tempo, o homem elevou a geometria “intuitiva” ao status de Ciência. Acredita-se que este fato ocorreu no antigo Egito. Quanto a isso, Heródoto do século V a.C. defendeu a seguinte tese:

Eles diziam que este rei [Sesóstris] dividiria a terra entre os egípcios de modo a dar a cada um deles um lote quadrado de igual tamanho e impondo-lhes o pagamento de um tributo anual. Mas a qualquer homem despojado pelo rio de uma parte de sua terra teria de ir a Sesóstris e notificar-lhe o ocorrido. Ele então mandava homens observarem e medirem o quanto a terra se tornara menor, para que o proprietário pudesse pagar sobre o que restara, proporcionalmente ao tributo total. Dessa maneira parece-me que a geometria teve origem, sendo mais tarde levada até a Helade. (EVES, 1992, p. 3)

Observa-se então que a geometria passou de uma mera observação para uma geometria colocada em prática. Contudo, essa movimentação de construção de uma geometria de modo científico não se deu apenas no Egito. Ao redor dos principais rios que cercavam os povos antigos, a geometria se desenvolveu de maneira semelhante, na região dos rios Tigre e Eufrates, na Mesopotâmia, o Indo e o Ganges, na região centro-sul da Ásia, o Hwang Ho, e o Yangtzé na Ásia oriental.

O próximo passo para seu desenvolvimento foi a passagem da geometria já considerada científica para a geometria demonstrativa. As mudanças econômicas e políticas dos últimos séculos do segundo milênio antes de Cristo fizeram com que o poder do Egito e da Babilônia diminuíssem. A partir disso, os gregos passaram a ser protagonistas de uma nova maneira de estudar a geometria. Eles acreditavam que não cabia mais somente uma geometria empírica e assim a geometria sofreu uma transição.

As principais fontes de informação acerca da geometria descritiva grega não datam exatamente de sua época de produção. A principal fonte a qual se tem acesso é chamada de sumário Eumediano de Proclus, no qual há vários comentários sobre o trabalho desenvolvido pelo matemático Euclides. Vale ressaltar que Proclus viveu no século V d.C., mais de um milênio depois do início da geometria grega.

Pode-se destacar três grandes geômetras gregos: Euclides (323-283 a.C.), Arquimedes (288-212 a.C.) e Apolônio (262-194 a.C.). Eles também foram responsáveis por fornecer uma nova maneira ao discurso da matemática descritiva pelo desenvolvimento da axiomática formal.

Dos trabalhos performados pelos matemáticos citados acima, o que mais se destaca foi intitulado “Os Elementos”, escrito por Euclides. Segundo Eves (1992), apesar de os matemáticos modernos darem ênfase ao trabalho que foi desenvolvido por Euclides, os trabalhos escritos por Arquimedes e Apolônio não possuem menor importância. Estes trabalhos se completam e fornecem a base geométrica que é amplamente utilizada hoje. Arquimedes, em um dos seus trabalhos de geometria sólida, escreveu pela primeira vez as fórmulas para as áreas da superfície e da calota esférica, assim como a fórmula para o cálculo do volume da esfera. Por sua vez,

Apolônio foi um astrônomo de méritos, desenvolvendo estudos em vários temas matemáticos e adquiriu fama pelos estudos das Seções Cônicas. Também merecem menção: Menelau (100 d.C.), Cláudio Ptolomeu (85-165 d.C.) e Pappus (320 d.C.), que continuaram o trabalho dos anteriores.

O objetivo deste artigo é apresentar de maneira reflexiva o desenvolvimento da geometria da superfície terrestre, enfatizando as contribuições advindas das navegações portuguesas. Afinal, qual a importância da Geometria Esférica para os navegantes e como se deu seu desenvolvimento até os dias de hoje? Para iniciar tal reflexão, a seguir se encontra uma breve história sobre o estudo das geometrias não euclidianas.

2 AS GEOMETRIAS NÃO-EUCLIDIANAS

Esse novo campo da geometria se deu devido às tentativas de deduzir o postulado das paralelas (ou quinto postulado) de Euclides, que está contido em seu livro “Os Elementos”. Tal postulado diz: “É verdade que, se uma reta ao cortar duas outras, forma ângulos internos, no mesmo lado, cuja soma é menor do que dois ângulos retos, então as duas retas, se continuadas, encontrar-se-ão no lado onde estão os ângulos cuja soma é menor do que dois ângulos retos”. Matemáticos da antiguidade e Idade Média (como: Proclus, Nasiredin, John Wallis) acreditavam que este postulado fosse na verdade um teorema e tentaram demonstrá-lo, porém não obtiveram sucesso. O começo do século XIX encontrou os geômetras ainda na busca de uma “prova” para o quinto postulado de Euclides, porém também sem sucesso. Outros matemáticos propuseram a negação deste postulado, possibilitando a criação de novas geometrias. Dentre estes matemáticos, destacam-se o húngaro Jano Bolyai (1802-1860), o russo Nikolai Lobachevsky (1793-1856), o alemão Felix Klein (1849-1925) e o italiano Georg Friedrich Riemann (1826-1866).

Essas novas geometrias foram nomeadas em 1871 pelo matemático Klein: Geometria Hiperbólica, Geometria Parabólica e Geometria Elíptica. São também chamadas de geometrias não euclidianas, pelo fato de não mais serem explicadas pelos fundamentos desenvolvidos por Euclides. O postulado das paralelas de Euclides tinha suas limitações, por exemplo, ele deixava de ser útil quando se tratava de determinar a posição da mais distante nebulosa da constelação da Ursa Maior. Então, para aperfeiçoar os métodos de medir distâncias inacessíveis por meio de ângulos e distâncias desconhecidas, observou-se que era necessário o estudo do “elemento” chamado círculo.

A navegação sem “terra à vista” só foi possível quando os homens passaram a se orientar pela posição das estrelas. Um fato histórico que Hogben (1970) traz é que foram os fenícios que transformaram a estrela Polar na estrela Polar dos marinheiros. Os fenícios também popularizaram o uso do calendário. Naquela época, os homens já utilizavam a latitude e a longitude, porém, não havia ainda a representação em mapas devido à superfície esférica da Terra.

Acredita-se que a crença da esfericidade da Terra seja bem mais antiga do que se pensa. De acordo com Hawking (2005), os matemáticos Aristóteles (384-322 a.C.) e Ptolomeu (87-150 a.C.) já incorporavam em suas deduções que a Terra era uma esfera e não um plano. De acordo com os estudos de Aristóteles, durante eclipses lunares, a sombra na Lua era sempre redonda e ao observar um navio se afastando oceano adentro, o casco desaparecia antes das velas. Com isso Aristóteles conjecturou que a Terra era de fato esférica. Da mesma forma, após sua morte, Ptolomeu continuou os estudos do modelo de universo que predizia com mais precisão os movimentos dos astros. Hogben (1970) também disserta que Pitágoras (570-495 a.C.) já falava sobre este conceito em seus ensinamentos, assim como Demócrito (460-370 a.C.). Outros

matemáticos gregos da antiguidade que observaram e conjecturaram sobre a esfericidade da Terra e o movimento dos astros que podemos citar são: Pitágoras (572-497 a.C.), Filolaus de Cretona (470-390 a.C.), Eudóxio de Cnidos (408-344 a.C.), Aristarco de Samos (310-230 a.C.), Eratóstenes (276-194 a.C.) e Hiparco (160-125 a.C.). Todos estes matemáticos foram responsáveis por fundamentar o movimento dos astros, a esfericidade terrestre, o comprimento do raio da Terra, explicaram as fases da Lua, conceitos que foram utilizados até o renascimento, no século XVI. Vale ressaltar que, durante a época desses matemáticos, a Matemática estava passando por um processo de formalização, ou seja, estava começando a ser apresentada de maneira formal com axiomas, lemas e teoremas.

No século XIX, o naturalista A.R. Wallace (1823-1913), nome associado ao de Darwin, sugeriu o seguinte método para medir o raio da circunferência da Terra:

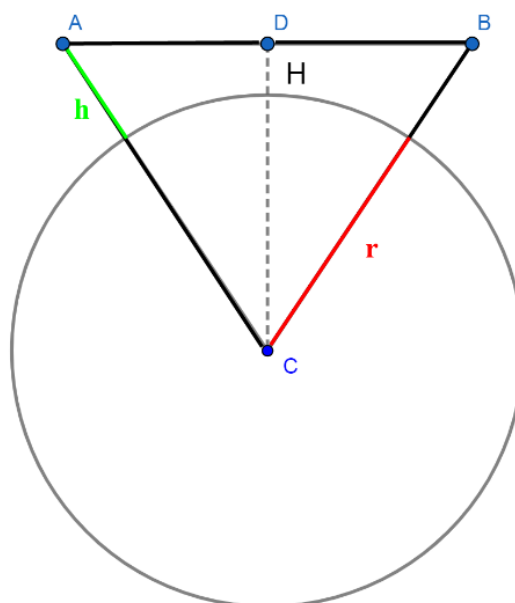
Com as extremidades superiores A e B, separadas por uma distância medida AB num canal reto, são fincadas no solo até ficarem ambas à mesma altura h sobre o nível das águas. Exatamente a meio das duas estacas, finca-se uma terceira de maneira que sua extremidade superior D, fique sobre a linha de visão de A para B. Como a superfície da Terra é, pois, a das águas do canal é de fato encurvada, a altura H de D sobre o nível das águas será um pouco menor que h (HOGBEN, 1970, p. 176).

Verifiquemos este método de A. R. Wallace sobre a possibilidade de se calcular o raio da Terra. Para isso, são necessários os seguintes resultados:

1. Se dois lados de um triângulo são congruentes, os ângulos que lhes são opostos também são; e, se dois ângulos são congruentes os lados opostos também são;
2. O quadrado da hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma dos quadrados dos catetos.

A Figura 1 exhibe os dois pontos A e B como extremos superiores de duas estacas de altura h fincadas verticalmente na Terra, que possui raio r . O ponto D é o extremo superior de uma estaca, com altura H , localizada exatamente no meio do caminho das duas estacas anteriores, também fincada verticalmente, de modo que ADB estejam alinhados.

Figura 1: Como calcular o raio da Terra segundo Wallace (1823-1913)



Fonte: os autores

Matematicamente, pode-se expressar que $AC = r + h = BC$. O triângulo ABC é um triângulo isósceles, então $AD = \frac{1}{2}AB = DB$. Assim, CD é perpendicular a AB e DBC é um triângulo retângulo. Então:

$$\begin{aligned} DB^2 + DC^2 &= BC^2 & DB^2 + H^2 - h^2 &= 2r(h - H) \\ DB^2 + (r + H)^2 &= (r + h)^2 & r &= \frac{DB^2 + H^2 - h^2}{2(h - H)} \\ DB^2 + r^2 + 2rH + H^2 &= r^2 + 2rh + h^2 \\ DB^2 + H^2 - h^2 &= 2rh - 2rH \end{aligned}$$

Como a distância de DB é muito grande comparada à altura das estacas, pode-se aproximar r desprezando o termo $H^2 - h^2$. Então:

$$r = \frac{\frac{1}{2}DB^2}{h - H} = \frac{\frac{1}{8}AB^2}{h - H}$$

Perceba que é possível calcular o raio da Terra utilizando apenas elementos dos quais se conhecem as dimensões¹. Logo, no século XIX, existiam possibilidades de cálculos com a geometria esférica da Terra.

Com essa breve discussão acerca da origem da Geometria Esférica e como os homens a usavam intuitivamente, a seguinte pergunta pode, então, surgir: Como a Geometria Esférica foi importante para os navegantes e como essa se desenvolveu até os dias de hoje?

3 A GEOMETRIA ESFÉRICA E OS NAVEGANTES PORTUGUESES

De acordo com Penteado (2011), os portugueses no século XVI veneravam toda a matemática e manuscritos desenvolvidos na antiguidade, mesmo assim, isso não os impedia de criticar e melhorar estas obras diante dos novos problemas que teriam que solucionar. O português Pedro Nunes (1502-1578) desenvolveu seus trabalhos sobre navegação e cartas náuticas observando detalhadamente as verdades dos escritos da Antiguidade Clássica. Esta foi uma característica dos renascentistas portugueses ligados à cultura dos descobrimentos. Pedro Nunes não era navegador, mas realizou leituras das obras clássicas de Aristóteles, Arquimedes (287-212 a.C.), Copérnico (1473-1543), Ptolomeu, Euclides, Paccioli (1445-1517), Vitruvius (séc. I a.C.) e as melhorou. Também traduziu o "Tratado da Esfera" do autor Johannes de Sacrobosco (1195-1256), sobre o qual falaremos mais adiante.

Segundo Albuquerque (1987), alguns navegantes da época levavam consigo conhecimentos obtidos com os textos clássicos. Porém, empiricamente percebiam que havia algumas contradições e fatos que na realidade não funcionavam como esperado. Assim, os homens passaram a ter necessidade de rever conhecimentos geográficos, matemáticos e astronômicos das obras da Antiguidade Clássica e esta revisão se desenvolveria à luz da experiência e experimentação.

Nos séculos XV e XVI, os portugueses não possuíam os mesmos conhecimentos matemáticos já disseminados em toda a Europa, caso que se observa, por exemplo, no fato dos algarismos hindu-arábicos serem utilizados na maioria dos países da Europa no século XII e em

¹ Outro procedimento semelhante para se calcular o raio da Terra foi elaborado por Eratóstenes (200 a.C.). Tendo conhecimento que ao meio-dia do Solstício de Verão, na cidade egípcia de Siena, os raios solares eram verticais, Eratóstenes foi até Alexandria, localizada aproximadamente 800 km distante de Siena para medir a inclinação dos raios solares naquela cidade. Através de um método que pode ser conferido, por exemplo, em Crease (2006), ele conseguiu determinar o raio da Terra. É interessante ressaltar que este é mais um de vários métodos distintos (alguns dos quais bem antigos) cujos objetivos são o mesmo: tirar conclusões a respeito da forma da Terra.

Portugal isso apenas ocorreu a partir do século XV (MARCOLIN, 2013). Ubiratan D'Ambrosio, em entrevista para Marcolin (2013), justifica esse fato devido ao país ter se fechado após a expulsão dos invasores mouros no século XII.

Sabe-se que a navegação na época dos descobrimentos dependia basicamente de conhecimentos astronômicos e estes, por sua vez, eram fundados na matemática. Assim, de acordo com Marcolin (2013), os portugueses e os espanhóis praticavam neste período a aritmética, a geometria e a astronomia ainda desenvolvidas na antiguidade.

Mesmo ante os desafios da falta de tecnologias mais avançadas para aquele período histórico, os portugueses conseguiram ser bem-sucedidos graças a Dom Henrique no século XV, que foi o patrono dos descobrimentos, ao desenvolver técnicas e tecnologias marítimas na região de Sagres. D'Ambrosio, ainda em entrevista para Marcolin (2013), diz que “o desenvolvimento da caravela, navio estável, ágil, rápido e mortífero, foi um grande avanço tecnológico”.

Perante a lista de conquistas portuguesas, podem ser citadas: Ceuta foi conquistada em 1415, Gil Eanes superou o cabo Bojada em 1434, Bartolomeu Dias dobrou o cabo da Boa Esperança em 1488, Vasco da Gama abriu caminho para as Índias em 1499, Pedro Alvares Cabral chegou ao Brasil em 1500 e Fernão Dias descobriu passagem para o oceano Pacífico em 1520. De acordo com Marcolin (2013), mesmo sem conhecimento matemático avançado, os portugueses romperam barreiras devido ao conhecimento empírico, pois entre os navegantes alguns conheciam astronomia, outros sabiam calcular distâncias e outros entendiam de cartografia.

A troca de informações científicas entre os reinos era difícil nesse momento em Portugal, porém ainda atraía algumas personalidades importantes como: em 1475, Colombo e seu irmão Bartolomeu Colombo tiveram um encontro em Lisboa; em 1480 o alemão Martín Beháim (1459-1507) foi à região portuguesa e introduziu a trigonometria no país. Beháim, em 1492, ao retornar para Nuremberg, sua cidade de origem, apresentou o Erdapfel, o primeiro globo terrestre conhecido.

Dadas as devidas apresentações, pode-se discorrer e conjecturar a respeito de como a astronomia e a matemática foram de fato aplicadas nas navegações portuguesas.

4 OS PORTUGUESES E A DETERMINAÇÃO DA LONGITUDE

Comandados pelo infante Dom Henrique, os portugueses adaptaram inicialmente processos de navegação utilizados para navegar pelo Mediterrâneo. Esta técnica era chamada de rumo e estima e usava a longitude do lugar pela altura do meridiano do Sol ou de outras estrelas.

Pereira (2014) define latitude e longitude da seguinte maneira²: a latitude é definida dependente da superfície de referência utilizada e longitude é medida em graus, de zero a 180°, para Leste ou para Oeste, a partir do Meridiano de Greenwich, e não há uma posição natural para marcar a longitude. Latitude é o ângulo entre o plano do equador e a superfície de referência. A Latitude mede-se para Norte e para Sul do Equador, entre 90° sul, no Polo Sul, e 90° norte, no Polo Norte. A Latitude pode ser facilmente determinada a partir da Estrela Polar. A Estrela Polar³ tem esse nome porque é a única que permanece sempre fixa no firmamento num ponto coincidente com a projeção do eixo da Terra.

² Baseado num contexto atual da Geografia, sabendo que o meridiano de Greenwich não havia sido nomeado no século XV.

³ A Estrela Polar destaca-se no céu no Hemisfério Norte da Terra; a partir do Hemisfério Sul pode-se utilizar o Cruzeiro do Sul como referência no céu.

Estes conceitos são necessários para se entender o pensamento dos navegantes na resolução do problema de definir a longitude no século XV e XVI. Canas (1995) cita em seu trabalho que a coordenada geográfica longitude era uma das mais difíceis de serem determinadas, pois era preciso informação rigorosa a respeito do horário local, o que implicava técnicas de relojoaria mais sofisticadas, que até então não existiam.

Ante todas as dificuldades de navegação sem terra à vista, o padre Jesuíta Cristovão Bruno escreveu, em 1628, a obra “A arte de navegar”. Padre Bruno era italiano de origem, porém viveu em Portugal, onde lecionou nos colégios de Coimbra e Santo Antão da Companhia de Jesus. Além dessa obra, Bruno escreveu mais dois trabalhos dedicados à navegação denominados “Regimento que P.e. Cristovão Bruno da Companhia de Jesus, por ordem de S.M. dá aos pilotos das naus⁴ da Índia para fazerem a experiência sobre a invenção de leste ao oeste” e “Tratado da arte de navegar pelo R. do P.E. Cristovão Bruno da Companhia de Jesus”. Não se tem certeza sobre a sua ligação com o mar e a marinha, também não há relatos sobre quais funções possa ter desempenhado a bordo.

A obra “A Arte de Navegar”, escrita por padre Bruno, é dividida em duas partes, sendo que a primeira fala “Dos princípios e fundamentos comuns a toda a arte de navegar” e a segunda é sobre “Caminho do Leste a Oeste” (CANAS, 1995).

Nesta seção, será destacada apenas a segunda parte, dado o objetivo da reflexão aqui exercitada. Essa segunda parte ainda foi subdividida em dois tratados.

O primeiro tratado explica o que é a longitude e problemas existentes à sua determinação. Ao iniciar seus pensamentos para sanar os problemas da longitude, Bruno primeiramente apontou os erros mais frequentes cometidos pelos navegantes em seus cálculos. Em sua primeira elucidação, utilizando resultados geométricos já conhecidos, a semelhança de arcos entre dois pontos da esfera celeste, concluiu que, havendo a estrela Polar como ponto fixo, facilmente se determina o meridiano no lugar, ou seja, a direção Norte-Sul. Porém, o problema da determinação da longitude persistia, pois não existe um “ponto fixo” a Leste ou Oeste. Padre Bruno completa ainda: “Se vê que havendo no céu algum ponto fixo de Leste a Oeste facilmente se saberá o seu comprimento e por falta dele nos falta essa ciência, pois todos os planetas e estrelas continuamente se movem de Leste para Oeste” (CANAS, 1995, p.252).

O problema em questão era o erro dos cálculos de rumo e estima quando o ponto de chegada eram rumos afastados do Norte ou do Sul.

O segundo erro apontado por Cristovão Bruno derivava do fato de se estimar a altura do Sol. O erro era pequeno, porém quando somado à observação de outros astros que eram necessários em uma viagem náutica, os rumos ficavam fora de seu objetivo de chegada a Leste ou a Oeste. Outro fator citado por Bruno é o fato de se perder a precisão na planificação das cartas de navegar, dado que a Terra é esférica, o que também acarretava em novos erros de cálculos. Com todas essas indagações a respeito dos erros cometidos, no segundo tratado, Bruno explica e exemplifica diversos métodos para a determinação da longitude.

O primeiro método para determinar a longitude era por meio dos eclipses lunares. Esse método consistia em, a partir da observação dos eclipses da Lua, dado que ocorrem ao mesmo tempo em qualquer lugar da Terra, calcular a diferença de horários entre dois pontos diferentes. Na prática, tornava-se necessária uma tabela contendo dados de eclipses. Outro fator necessário era estimar a hora e, para esse problema, Bruno aconselhou utilização do Globo terrestre criado

⁴ Denominação genérica dada a navios de grande porte com capacidade de 200 pessoas até o século XV usados em viagens de grande percurso.

por Tycho Brahe (1546-1601). Esse globo possuía um círculo horário em torno do Polo e era dividido em vinte e quatro horas. Outra forma para estimar a hora seria pelo astrolábio⁵. Cristóvão Bruno ainda aconselha que para determinação da altura das estrelas não seja utilizada a balestilha⁶. É proposta para obtenção de alturas, a utilização de um quadrante⁷, no qual possa se fixar a altura quando bem apontado, sendo esse o método mais seguro para determinar tal medida.

O segundo método para determinar a longitude utilizava um relógio. Poderia ser relógio de areia (ampulheta) ou até um relógio d'água.

Uma das hipóteses apresentadas consistia em utilizar um relógio de areia que medisse uma hora. Tirava-se a altura do Sol, navegava-se essa hora, indicada pelo relógio, após o que se tirava novamente a altura. A diferença entre a altura observada é quinze graus, o que seria o que o Sol tinha variado, era a diferença de longitude (CANAS, 1995, p.258).

Porém, o método de utilizar a observação do Sol em uma hora também tinha suas falhas, pois havia casos em que o Sol não variava quinze graus em uma hora. Outro problema observado era a precisão dos relógios afetada pelo balanço do mar e pelo material utilizado em sua construção. No caso da areia, observou-se que nos primeiros minutos ela caía mais rápido, pelo fato da quantidade de areia existente na parte superior do recipiente ser grande e exercer maior pressão. No caso da água, devido às variações de temperatura, ela também poderia variar de quantidade dentro do recipiente. O objetivo desse método era que, por meio da diferença de horas entre o local de partida e o de chegada, fosse inferida a diferença de longitude.

No terceiro e último método, Cristóvão Bruno sugeriu o uso das retardações da Lua. Por meio das fases da Lua e da posição relativa entre a Lua e o Sol, percebe-se que, em cada uma das suas fases, a Lua vai se “atrasando” quatro quintos de hora diários. O Sol, por outro lado, também sofre movimento de retardação, cerca de um grau por dia. Para determinar a longitude por esse método, era necessária uma tabela da diferença das distâncias entre o Sol e a Lua e, também, observar a hora em que o Sol se põe e compará-la com a tabela. Se o valor observado for menor que o tabelado, estará o barco mais a Leste. Se o valor for maior, mais a Oeste. Os possíveis erros observados nesse método foram os erros de paralaxe e da refração dos astros, que podiam enganar o observador em suas medições. Canas (1995) ainda cita em seu texto que os gregos tinham noção que a diferença da longitude podia ser calculada pela diferença de horários entre dois locais. Apesar dos conselhos e sugestões de Cristóvão Bruno, o problema de determinar com rigor a diferença entre horários locais permaneceu, o que acarretou na permanência da dificuldade para determinar a longitude até o século XVIII.

Dentre os estudos científicos disponíveis aos portugueses na era das navegações, ainda se destacam “O Tratado da Esfera”, traduzido por Pedro Nunes para o português e contendo seus comentários acerca dos temas ali tratados. A obra, originalmente escrita por Sacrobosco, foi uma das obras sobre astronomia mais difundidas em toda Europa no século XII, segundo Penteadó (2011). Essa era dividida em quatro capítulos, sendo que o primeiro trata da forma da Terra (esfera, centro e eixo), o segundo “círculos dos quais se compõe a esfera material”

⁵ Segundo Almeida (2019, p. 304), o astrolábio é “uma espécie de bússola que os marinheiros usavam com o objetivo de saber a orientação espacial, com referência à posição do sol”.

⁶ Segundo Batista e Pereira (2017, p.42), a balhastilha é “um instrumento náutico, caracteristicamente considerado simples do ponto de vista físico. [...] A função da Balestilha era basicamente medir a altura do astro em relação à linha que delimita o mar do horizonte, ou a distância entre dois astros [...], sendo essa medida de caráter angular”.

⁷ O quadrante é na sua forma mais rudimentar, e tal como o nome indica, um instrumento que consiste num quarto de círculo graduado ao qual está fixo um fio de prumo.

(PENTEADO, 2011), o terceiro descreve o movimento dos astros e a influência do clima e o último capítulo “os círculos e movimentos dos planetas, e sobre as causas dos eclipses” (PENTEADO, 2011). A obra compunha o estudo do *quadrivium* (estudo da Música, Aritmética, Astronomia e Geometria) e abordava o tema de navegação e astronomia sob um olhar matemático, de forma que pudessem ser colocados em prática pelos marinheiros. Pedro Nunes tinha a preocupação de fazer uma exposição cuidadosa para que todos pudessem entender claramente suas obras. Ante a tradução, Nunes criticava a obra e a aperfeiçoava:

Vendo eu que o Tratado da Esfera e a Teoria do Sol e da Lua, com o primeiro livro de Geografia de Ptolomeu são aqueles princípios que deve ter qualquer pessoa que deseja saber alguma coisa de Cosmografia. Por carecerem disso os que não sabem latim os tirei em nossa linguagem. Acrescentei-lhes algumas anotações para que se pudesse entender mais facilmente. No final coloquei uns tratados que compus sobre a carta de marear e o regimento da altura, porque não sou tão confiado de minhas coisas que acreditasse que por si queriam vê-las, e indo nesta companhia alguma hora por acerto se abrirá o livro neles” (PENTEADO, 2011, p.100).

As obras de Cristovão Bruno e Pedro Nunes foram ambas voltadas à determinação da longitude e latitude, nas quais podia-se encontrar sugestões para a resolução desse problema⁸.

A necessidade de determinar a longitude vinha de longa data, desde 1494, tendo a primeira referência feita em 1505 em “*Esmeraldo de Situ Orbis* de Pacheco Pereira” (CANAS, 1995). Todas as indagações surgiram com a assinatura do Tratado de Tordesilhas. O texto do tratado previa um prazo de dez meses para determinar um meridiano que dividisse o mundo em duas zonas de influência. Canas (1995) ainda complementa que, pelo fato de existirem grandes dificuldades para obtenção da longitude, havia prêmios em dinheiro a quem solucionasse tal problema e talvez esse tenha sido o que motivou Bruno a escrever seu tratado.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Enfim, o problema da determinação de uma localização de forma mais precisa apenas foi solucionado no século XVIII com o modelo nº 4 de John Harrison (1693-1776), que numa viagem de nove semanas à Jamaica apenas se atrasou cinco segundos. Tudo se resolveu com a tecnologia do cronômetro de Harrison (que era relojoeiro), com o qual se tornou possível conhecer duas coordenadas de qualquer local. Mesmo após a criação de tantos recursos para a localização, ainda não havia ferramentas que funcionavam para todas (ou a maioria) das condições climáticas.

Com os avanços das ondas de rádio e a corrida espacial entre a União Soviética e o Estados Unidos, foram lançados os primeiros satélites na órbita do planeta. Logo, esse movimento possibilitou as primeiras pesquisas para desenvolver um software de localização para uso militar chamado NAVSTAR/GPS (*Navigation Satellite with time Ranging/ Global Position System*), sendo a autoria atribuída a três americanos: o astrofísico Ivan Getting, o engenheiro Bradford Parkinson e o físico Roger L. Easton. Tal tecnologia, posteriormente, foi aberta a civis. Hoje, o GPS trata-se de um conjunto de 24 satélites orbitando a Terra, a uma altura aproximada de 20.200 km acima do nível do mar, permitindo a receptores conhecerem sua posição em qualquer lugar sobre a Terra com muita precisão. O sistema de GPS é dividido em três segmentos: os Satélites, as Estações de Gerenciamento e os aparelhos utilizados pelos usuários (PEREIRA, 2014).

⁸ Vide: Penteado (2014) para detalhes de resoluções propostas.

As estações são localizadas estrategicamente nas proximidades da linha do Equador, no Colorado (EUA), Havaí (no Pacífico), Kwajalein (Ilhas Marshal, no Pacífico), Ilha de Ascensão (no Atlântico Sul) e Ilha de Diego Garcia (no Índico). As estações rastreiam, calibram e sincronizam os relógios dos satélites. Todas as informações compiladas são passadas aos usuários da tecnologia, fornecendo dados precisos de localização.

Os problemas de navegação estudados pelos portugueses séculos atrás tiveram grande contribuição para a tecnologia atual de localização terrestre.

REFERÊNCIAS

- ALBUQUERQUE, L. **As Navegações e a Sua Projeção na Ciência e na Cultura**. 1. ed. Lisboa: Gradiva, 1987.
- ALMEIDA, J. J. S. A Abordagem da Trigonometria no Livro Didático do 9º Ano do Ensino Fundamental. **Hipátia**, v.4, n.2, p.295-311, dez. 2019.
- BATISTA, A. N. S.; PEREIRA, A. C. C. A Balestilha: um instrumento náutico como recurso para abordar conceitos matemáticos. **Hipátia**, v.2, n.1, p.40-51, jun. 2017.
- CANAS, A. C. Os portugueses e a determinação da longitude. **Anais do Clube Militar Naval**, CXXV, p. 249–273, 1995.
- CREASE, R. P. **Os dez mais belos experimentos científicos**. Rio de Janeiro: Zahar, 2006.
- EVES, H. **Tópico de História da Matemática para uso em sala de aula**. 1. ed. São Paulo: Atual, 1992.
- HOGBEN, L. **Maravilhas da Matemática: Influência e função da matemática nos conhecimentos humanos**. 2. ed. Porto Alegre: Globo, 1970.
- HAWKING, S. **Os gênios da Ciência: Sobre os ombros de gigantes**. 1. ed. São Paulo: Elsevier, 2005.
- MARCOLIN, N. Os reis dos mares. **Pesquisa Fapesp**, v. 212, p. 86–87, 2013.
- PENTEADO, A. M. **Pedro Nunes e a distinção de dois tipos de trajetórias na navegação: a linha de rumo e o círculo máximo**. Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual Paulista (UNESP), 2011.
- PEREIRA, E. H. U. **A matemática do GPS**. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Piauí (UFPI), 2014.

Submetido em agosto de 2020.

Aprovado em janeiro de 2021.

Carla Patrícia Ferreira dos Santos

Mestrado Profissional em Matemática pela Universidade Estadual Paulista (Unesp). Professora da Secretaria Estadual de Educação do Estado de São Paulo (SEDUC-SP), Limeira, SP, Brasil. ID Lattes: 3630437430884713

Contato: carlapatriciafs@hotmail.com.

Lucas Antônio Caritá

Doutorado em Física e Astronomia pela Universidade do Vale do Paraíba (Univap). Docente do Instituto Federal de São Paulo (IFSP), São José dos Campos, SP, Brasil. ID Lattes: 5743604308403513. Orcid ID: 0000-0002-9518-3414.

Contato: prof.carita@ifsp.edu.br.

Marta Cilene Gadotti

Doutorado em Matemática pela Universidade de São Paulo (USP). Docente da Universidade Estadual Paulista (Unesp), Rio Claro, SP, Brasil. ID Lattes: 8019260752597126. Orcid ID: 0000-0002-1971-8632.

Contato: mc.gadotti@unesp.br.