UMA PERSPECTIVA HISTÓRICA DO CONCEITO DE CONTINUIDADE MATEMÁTICA

MATHEMATIC CONTINUITY CONCEPT A HISTORICAL PERSPECTIVE

MISSE, Bruno Henrique Labriola[1]
LAMMOGLIA, Bruna[2]

RESUMO

Neste artigo apresentamos um levantamento bibliográfico sobre o contínuo, constituindo um panorama histórico desse objeto matemático e as considerações sobre o período que cada marco se insere. A complexa rede histórico-cultural que constitui um conhecimento é demasiada extensa em termos de perspectivas, sendo inalcançável sua apresentação em totalidade, portanto ressaltamos que se trata de um panorama, dentre outros possíveis, realizado no âmbito de uma pesquisa mais ampla sobre a continuidade matemática. Entendendo o ato de pesquisar como dinâmico, uma investigação pode ser elaborada sob o enfoque de diversas metodologias e solos teóricos, contudo, entendemos que no seu desenvolvimento devemos sempre levar em consideração o contexto histórico que a envolve. O contexto do contínuo que apresentamos remonta ao primado da Ciência Matemática difundida no Ocidente, a Grécia antiga, quando as primeiras questões, das quais se tem notícia, são postas sobre a continuidade e como foi se constituindo a formalização desse conceito pelos séculos seguintes. O último marco do nosso panorama se dá no início do século XX, com a crítica sobre a Análise Matemática feita por Hermann Weyl com base no conceito de continuidade. A elaboração de um contexto histórico pode abrir possibilidades de interpretação do objeto de pesquisa e lançar luz em caminhos a se percorrer.

Palavras-chave: Contínuo. Contexto Histórico. Pesquisa Qualitativa.

ABSTRACT

In this article we present a bibliographical survey about the continuum, constituting a historical overview of this mathematical object and the considerations about the period that each landmark is inserted. The complex historical-cultural network that constitutes knowledge is too extensive in terms of perspectives, and its presentation is totally unattainable, so we emphasize that it is a panorama, among other possible ones, carried out within the scope of a broader research on mathematical continuity. Understanding the act of research as dynamic, an investigation can be carried out under the focus of several methodologies and theoretical grounds, however, we understand that in its development we must always take into account the historical context that surrounds it. The context of the continuum that we present goes back to the primacy of Mathematical Science widespread in the West, ancient Greece, when the first questions, of which we are aware, are asked about the continuity and how the formalization of this concept was constituted for the following centuries. The last milestone of our panorama occurs at the beginning of the 20th century, with the criticism of Mathematical Analysis made by Hermann Weyl based on the concept of continuity. The elaboration of a historical context can open possibilities of interpretation of the research object and shed light on paths to be taken.

Keywords: Continuity. Historical Context. Qualitative Research.

[1] Doutor em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” (UNESP). Docente no Instituto Federal Catarinense (IFC), Rio do Sul, Santa Catarina, Brasil. Endereço eletrônico: brunohlmisse@gmail.com.

[2] Doutora em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” (UNESP). Docente no Instituto Federal de São Paulo (IFSP), Salto, São Paulo, Brasil. Endereço eletrônico: brunalammoglia@gmail.com.

1 INTRODUÇÃO

Neste artigo assumimos a concepção de que a Matemática é uma área de pesquisa quase inesgotável, estando sempre aberta e em constante *construção*[3]. Nesse sentido, podemos entendê-la como uma ciência milenar cuja origem se confunde com própria origem da vida humana. E, apesar de ser significativa a sua evolução por tudo o que já se foi demonstrado e consolidado, ainda há questões em aberto que motivam e desafiam pesquisadores a produzirem novos conhecimentos. Embora possamos encontrar diferentes vertentes para a Matemática, iremos nos ater, no que concerne ao desenvolvimento deste artigo, à Ciência Matemática que é desenvolvida nas comunidades científicas e acadêmicas.

Historicamente, observamos um movimento de consolidação de conceitos matemáticos que, por caminhos distintos, se avolumaram para produzir o que conhecemos hoje como a Ciência Matemática. Entendemos que a produção deste conhecimento se dá por meio de uma comunidade que se volta intencionalmente a um interesse comum, e por meio de um processo histórico e cultural produz o que chamaremos de conhecimento, a partir de construções intuitivas e dedutivas, em um movimento de articulação de ideias, sentidos e significados, da observação do mundo no qual estamos vivendo e daquilo que já foi produzido por outros membros da comunidade.

O conhecimento matemático que nos é apresentado no âmbito do ensino formal, desde os anos iniciais da Educação Básica até o Ensino Superior está em grande parte subsidiada pela cultura europeia e americana. Deste modo quando, aqui neste artigo, nos referimos à Matemática, estamos dizendo desta Matemática produzida sócio historicamente em uma comunidade acadêmica que nos é transmitida pela tradição europeia, à qual chamaremos de Ciência Matemática Ocidental.

Entendemos que outras vertentes da produção Matemática poderiam ser adotadas. Contudo, nosso foco de pesquisa repousa sobre esse modo de ser da Ciência da Matemática que é amplamente difundida no Ocidente e que, a partir de processos dialéticos foi adquirindo confiabilidade para servir de parâmetro para que a Pesquisa e a Ciência evoluíssem.

Cada geração de pensadores enfrentou seus próprios desafios, sejam eles lógicos, filosóficos, éticos, ou de outra natureza, homens e mulheres dedicados à superação desses questionamentos se debruçavam sobre o conhecimento, histórico e culturalmente desenvolvido à época, buscando dar sentido aos questionamentos, para que fosse possível encontrar respostas plausíveis para eles. Notadamente no século XIX, houve um abalo na concepção de Ciência e nos fundamentos da Matemática que deu origem a um movimento que permitiu a novas concepções mostrarem-se e a novos conhecimentos se constituírem.

No final do século XIX, principalmente na Europa e América do Norte, começam a surgir questionamentos quanto à aplicabilidade do método cartesiano em situações das Ciências Sociais, e sobre como o conceito de verdade científica pouco diz para as pesquisas que investigam fenômenos da vida cotidiana. Em contraste à pesquisa quantitativa e ao método cartesiano, começa a se constituir o campo da pesquisa qualitativa, buscando trazer a realidade como parte importante do experimento científico, e da produção do conhecimento. Dentre as inúmeras contribuições nesse sentido, destacamos o trabalho de Edmund Husserl publicado em 1936, *A crise das ciências europeias e a fenomenologia transcendental* (HUSSERL, 2008). Após muitos anos de reflexão e diálogos acadêmicos, o autor, entre outras contribuições dessa importante obra, tece discussões histórico-teleológicas sobre a Ciência, expondo críticas quanto

[3] O termo construção é usado aqui em sentido amplo fazendo alusão ao processo de desenvolvimento do edifício da Matemática. Não temos a intenção de assumir uma postura construtivista sobre o conhecimento matemático.

aos seus fundamentos e propondo o estudo filosófico para superá-los. Azevedo (2011) nos esclarece que:

> Foi preciso uma superação de pré-juízos históricos milenares, para que se empreendesse uma verdadeira análise intencional, uma fenomenologia em sentido próprio, para que se retirasse do anonimato o "mundo-da-vida" e, com isso, para que a filosofia pudesse centrar e investigar o problema transcendental. As análises histórico-teleológicas têm a função, portanto, de explicitar quais são esses pré-juízos. (AZEVEDO, 2011, p. 16).

Para além das críticas filosóficas e metodológicas apresentadas, também é notório um abalo na estrutura dos fundamentos da Matemática na viragem do século XX. Eves (2004) caracteriza esse período como a terceira crise nos fundamentos da matemática. Para esse autor a História da Matemática registra que "os fundamentos da matemática sofreram três crises profundamente perturbadoras" (EVES, 2004, p. 673). A primeira remonta à antiguidade clássica, sendo desencadeada com a descoberta de grandezas incomensuráveis; a segunda ocorreu no final do século XVII após a invenção do Cálculo por Newton e Leibniz e a aplicação do conceito de infinitésimos, que ainda se mostrava como um conceito vago e carente de formalização; e a terceira teve início em 1897, segundo Eves (2004, p. 674) a "crise eclodiu com a descoberta de paradoxos ou antinomias nas bordas da teoria dos conjuntos de Cantor".

Os paradoxos na teoria dos Conjuntos fizeram com que houvesse dúvidas quanto à estrutura da própria Matemática. O esforço de propor à teoria dos conjuntos, um conjunto axiomático suficientemente restrito que servisse para eliminar os paradoxos conhecidos, foi engendrado por vários matemáticos. "A primeira tentativa nesse sentido foi feita por Zermelo em 1908; seguiram-se aprimoramentos feitos por Fraenkel (1922, 1925), Skolem (1922, 1929), von Neumann (1924, 1928), Bernays (1937-194) e outros" (EVES, 2004, p. 675-676). Todas essas tentativas são criticadas, principalmente pelo fato de não garantirem a inexistência de paradoxos, mas sim restringirem os paradoxos apresentados a fim de superá-los.

As mudanças matemáticas que ocorreram a partir do século XIX, são repletas de simbolismo algébrico e se distanciam de uma compreensão intuitiva pela falta de semelhanças com o mundo físico. Contudo, para que compreendamos esse conhecimento abstrato produzido por aqueles que se aventuraram pelos meandros da Matemática, principalmente no último século, ainda se faz necessária a compreensão de elementos intuitivos, como medida, continuidade, ordenação, grandeza e tantos outros.

Entendemos que a compreensão desses elementos intuitivos está sempre presente na produção de conhecimento matemático, e para buscar tal compreensão é necessário, entre outras coisas, que assumamos uma postura filosófica procurando pelos desdobramentos dos conceitos em diversas perspectivas. Para isso, dentre as possibilidades que se mostram no ato de investigar filosoficamente, acreditamos que devemos sempre olhar para o panorama histórico que cerca nosso objeto de pesquisa.

Enquanto seres mundanos nosso modo de olhar é sempre perspectival, ou seja, sempre que focamos algo, podemos ver apenas partes daquilo focado. Quando olhamos para o panorama histórico, estamos olhando para uma perspectiva da história, uma vez que somos sujeitados à cultura, ao tempo e ao conhecimento de nossa época. Contudo, as diferentes formas de algo se mostrar, são ainda constitutivas daquilo que se tematiza. Nesse sentido, entendemos o panorama histórico como o complexo emaranhado de fatos, de culturas, de seres que estão no mundo juntos ao nosso objeto de estudos, circundando-o e o constituindo. Assim, assumimos que ao tematizar a história estaremos sempre apresentando uma perspectiva dela, um panorama possível dentre incontáveis outros panoramas. Todos faces da mesma história.

Segundo Bicudo (2011, p. 23-24) qualquer que seja o objeto, o objetivo e a modalidade de uma pesquisa, ela envolve uma interrogação, que é entendida por essa autora como expressão da “perplexidade do investigador diante do mundo, a qual se manifesta inclusive como força que o mantém alerta, buscando e inquirindo, não se conformando com respostas quaisquer”. Concordamos com a autora que a complexa relação da interrogação com o interrogado e aquele que interroga não deve ser menosprezada, uma vez que a pesquisa, os sujeitos e o investigador estão em constante movimento no fluxo temporal e por isso tal relação é dinâmica e repleta de história. Portanto, entendemos que na constituição do trajeto de uma pesquisa deve estar presente o contexto histórico tanto do pesquisador quanto daquilo que é pesquisado e também os fatos que constituem a própria história do desenvolvimento da pesquisa que se está realizando.

Neste artigo apresentaremos o levantamento bibliográfico realizado no âmbito de uma pesquisa mais ampla sobre a continuidade matemática. O conteúdo que será exposto constitui um panorama histórico desse objeto matemático e as considerações sobre o período que cada marco se insere. Conforme já mencionado, entendemos que a complexa rede histórico-cultural que constitui um conhecimento é demasiada extensa em termos de perspectivas, sendo inalcançável sua apresentação em totalidade. Desse modo, queremos aqui apresentar um caminho trilhado, sem pretensão de dotá-lo como único.

O levantamento foi se dando a partir de registros disponíveis em livros de História da Matemática, em teses defendidas sobre o tema continuidade e em livros de Matemática que abordam esse tema e suas diferentes perspectivas, todos referenciados neste artigo. As articulações foram emergindo em um movimento dinâmico de pesquisa que tem como norteador a busca por compreensões sobre a continuidade em diferentes dimensões.

2 UM CONTEXTO HISTÓRICO DO CONCEITO DE CONTINUIDADE EM MATEMÁTICA

Historicamente, é possível ver que a discussão sobre a continuidade repousa, em um primeiro momento, sobre os antigos gregos. Embora os problemas sobre o infinito e a continuidade estejam intimamente ligados na antiguidade clássica, e a filosofia grega tenha se dedicado a discussão do assunto, em nossa pesquisa iremos destacar os elementos que mais contribuíram para a constituição da continuidade nos dias de hoje. Nesse sentido, ponderamos que há uma gama de discussões teóricas, ensaios e problematizações desenvolvidas no decurso da história, contudo muitas contribuições se perdem no mover-se do tempo. Não objetivamos discorrer sobre os motivos que permeiam esse fato, mas nos importa ressaltar que estamos sujeitos a ele, sempre que buscamos pesquisar sobre o contexto histórico de algo.

Quando nos voltamos à antiguidade clássica, encontramos um movimento de construção de provas dedutivas, que deram origem ao modelo axiomático adotado hoje pela Matemática. Historiadores defendem que nessa época havia a necessidade de justificar processos os quais poderiam ser repetidos indefinidamente. Hoje podemos ver que essa busca estava pautada em justificar uma abstração suficientemente estável que pudesse generalizar um processo, de modo que não fosse preciso repeti-lo indefinidamente, mas que se extrapolasse seu resultado, após um grande número de repetições, ou seja, objetivava-se um modo de fazer com que essas repetições se tornassem demonstrações de propriedades matemáticas. Esse modo de pensar pode ter sido o precursor da pesquisa sobre a continuidade.

De modo destacado está o *método de exaustão*[4] cujo desenvolvimento se atribui a Eudoxo (408 – 355 a.C), que é uma formalização de um processo de repetição infinita que estava sendo questionado por alguns matemáticos da época. Eves (2004) afirma que, possivelmente, esse método tenha sido uma resposta da escola Platônica para os paradoxos de Zenão (c. 450 a.C.), que apresentavam dificuldades lógicas para explicar o movimento, caso fosse aceito o processo de divisões sucessivas de uma distância *ad infinitum*.

Em Sbardellini (2005) é possível ver que, contemporaneamente ao método de exaustão, outros filósofos e matemáticos abordavam as problemáticas de variações contínuas e da existência de um elemento fundamental, formulando a doutrina *atomística*, cujo maior representante é Demócrito (460 – 370 a.C). Esse filósofo, além de conseguir determinar algumas fórmulas para volumes de pirâmides, questiona a igualdade das infinitas seções circulares paralelas de um cone.

A questão posta pela filosofia atomista diz que se essas seções fossem iguais, então o sólido que elas formariam seria um cilindro e não um cone. Contudo, se fossem diferentes, então estaríamos diante de um sólido com degraus. "Outros problemas matemáticos de natureza infinitesimal são imputados a Demócrito, o que o credencia, historicamente, como o primeiro a perseguir essa noção" (SBARDELLINI, 2005, p. 17).

Quando buscamos compreender o contexto histórico de um objeto, percebemos que há conexões entre fatos ocorridos mesmo havendo séculos de distância entre eles. No processo de produção do conhecimento, que estamos adotando neste artigo, é imprescindível que as ideias sejam dialogadas no bojo do conhecimento previamente produzido, isso faz com que os avanços de outras épocas sejam trazidos para a discussão, embora muitas vezes não sejam dados os devidos créditos, pois o conhecimento já se encontra numa objetividade consensual, que não traz autoria, mas sim existência.

Podemos citar, por exemplo, que tanto o método de Eudoxo, quanto os problemas de Demócrito foram rediscutidos na Idade Moderna, período que remonta ao século XVII, quando matemáticos como Cavalieri[5], Kepler[6] e Leibniz[7] se debruçaram sobre problemas de continuidade e infinito.

Segundo Silva (2007), além de outras mudanças que marcam uma revolução na Matemática nesse período, destaca-se a "inusitada disposição dos matemáticos para se envolverem com o infinito sob diversas formas" (SILVA, 2007, p. 77).

O trabalho com métodos infinitários realizado por diversos cientistas da época e o desenvolvimento posterior do Cálculo Infinitesimal, efetuado por Leibniz e Newton[8], abre novos questionamentos sobre o contínuo e o infinito. Do mesmo modo que Zenão apresentou paradoxos

[4] O método de exaustão admite que uma grandeza possa ser subdividida indefinidamente e sua base é a proposição: Se de uma grandeza qualquer se subtrai uma parte não menor que sua metade, do restante subtrai-se também uma parte não menor que sua metade, e assim por diante, se chegará por fim a uma grandeza menor que qualquer outra predeterminada da mesma espécie. (EVES, 2004. p. 419)

[5] Bonaventura Cavalieri (1598 – 1647), de origem italiana foi aluno de Galileu e atuou como professor de matemática da Universidade de Bolonha. Seus trabalhos estão ligados a Matemática, Ótica e Astronomia, sua grande contribuição à Matemática é o tratado *Geometria indivisibilibus,* no qual ele apresenta seu método dos indivisíveis (EVES, 2004. p. 425).

[6] Johann Kepler (1571 – 1630), de origem alemã, foi aluno e sucessor de TychoBrahe, seus trabalhos estão ligados à astronomia, e principalmente, ao problema do movimento dos planetas em torno do Sol (EVES, 2004. p. 356).

[7] Gottfried W. Leibniz (1646 – 1716), de origem alemã, foi um pensador, que estudou diversas áreas, como direito, matemática, lógica e filosofia. Como matemático atuou em diversas áreas e divide o título de fundador do Cálculo Diferencial e Integral com Newton (EVES, 2004, p. 442).

[8] Sir Isacc Newton (1642 – 1727), de origem inglesa, foi um cientista renomado em diversas áreas e divide o título de fundador do Cálculo Diferencial e Integral com Leibniz (EVES, 2004, p. 437).

sobre os métodos gregos, os matemáticos do século XVII foram criticados pelo caráter vago e pouco rigoroso de seus métodos, que solicitavam conceitos e ideias intuitivas, muito distintas do que já se havia pensado matematicamente e, por esse motivo muitos desacreditam na validade dessas teorias, de modo que a fundamentação rigorosa para o cálculo foi buscada por muito tempo e só foi possível, conforme Silva (2007) no século XIX, com Weierstrass[9], Dedekind[10] e Cantor[11].

Além dos nomes que citamos acima, é notório no século das revoluções, o XVII, a aplicação da Álgebra no tratamento de alguns problemas da Geometria e a disposição para a discussão sobre o infinito. Os eventos desse século levaram Torricelli[12] a descobrir um sólido ilimitado, portanto, infinito, que tem volume finito (HERRERA, 2012)[13], e essa descoberta abalou a estrutura aparentemente sólida da corrente simbolista que regia a Matemática nessa época.

Silva (2007) aponta que a descoberta de Torricelli não abalou apenas a Matemática, mas também a Filosofia, afirmando que “o que é contraditório para as grandezas finitas pode ser da própria essência das grandezas infinitas; o que repugna a nossa intuição finita pode ser a verdade do infinito” (SILVA, 2007, p. 84).

Ao longo da história podemos observar que a natureza contra intuitiva do infinito perturbou o pensamento de vários matemáticos, de modo que muitas outras questões concernentes ao infinito são levantadas nessa época, mas só serão respondidas mais tarde, depois de uma revolução na Filosofia da Matemática que teve início com Kant[14] e Leibniz.

Se mostrou necessário pesquisarmos sobre infinito, pois entendemos que há uma estreita relação entre o infinito e o contínuo. De modo claro, dizemos que ao estudarmos a continuidade, adentramos por questionamentos que solicitam a presença do infinito, para que possamos dizer de propriedades contínuas. De forma análoga, para inferirmos sobre o infinito, é necessário trazer à luz um movimento contínuo que esboce uma tendência a ser verificada, portanto podemos dizer que a busca por compreensões sobre o infinito repousa na compreensão da continuidade e em seus modos de ser.

Ao assumir essa perspectiva, nos é claro que um estudo sobre a continuidade não pode se restringir apenas ao âmbito matemático buscando apenas diferentes definições e estruturas que já foram dadas ao contínuo, mas solicita a busca pela compreensão da característica de um ente matemático. E, para essa jornada, devemos nos distanciar criticamente da Matemática e nos colocarmos em posição de estranhamento, estamos, assim, entrando nos meandro da Filosofia da Matemática.

[9] Karl T. W. Weierstrass (1815 – 1897), de origem alemã, trabalhou muitos anos como professor antes de se dedicar a pesquisa em matemática avançada, “tornando-se provavelmente o maior professor de matemática avançada que o mundo já teve” (EVES, 2004. p. 611).

[10] Julius W. R. Dedekind (1831 – 1916), de origem alemã, atuou na Universidade Göttingen, seus trabalhos estão associados à fundamentação dos Números Reais pelo método dos cortes, que em sua homenagem, recebem o nome de cortes de Dedekind (EVES, 2004. p. 608).

[11] George F. L. P. Cantor (1845 – 1916), de origem russa, desenvolveu pesquisas na área de Filosofia, Física e Matemática. Mostrou profundo interesse pela teologia medieval e seus argumentos intrincados sobre o contínuo e o infinito. (EVES, 2004. p. 615)

[12] Evangelista Torricelli (1608 – 1647), de origem italiana, foi aluno de Galileu e seu trabalho está relacionado à Física, à teoria de projéteis e ao movimento dos fluídos. Em Matemática, sua contribuição foi o uso de infinitesimais na Geometria. (EVES, 2004. p. 396)

[13] Nesse trabalho podemos encontrar a demonstração feita por Torricelli sobre a finitude do volume do sólido, a autora do artigo busca elucidar os estilos de demonstrações matemáticas do século XVII e toma o trabalho desenvolvido por Torricelli como exemplo.

[14] Emmanuel Kant (1724 – 1729) filósofo alemão fundador do Idealismo Transcendental está associado à Filosofia Foral.

No âmbito da Filosofia da Matemática, Leibniz aparece como representante do espírito lógico-analítico, abrindo espaço para uma nova perspectiva da Matemática, regida por um rigor lógico e pelos métodos infinitários. Seu trabalho e os de Weierstrass e Hilbert[15] são o ponto de partida para discutir os fundamentos da aritmética e o conceito de verdade (SILVA, 2007).

Segundo Piauí (2010), o contínuo é tratado na Filosofia Leibniziana como sendo um dos labirintos da razão.

> Existem dois famosos labirintos onde nossa razão se perde muitas vezes; um diz respeito à grande questão do livre e do necessário, sobretudo quanto à produção e quanto a origem do mal; o outro consiste na discussão da continuidade (continuité) [ou do continuum] e dos indivisíveis que constituem seus elementos, e no qual deve entrar a consideração do infinito. O primeiro embaraça praticamente todo o gênero humano, o outro influencia somente os filósofos (LEIBNIZ, 1969, p. 29 apud PIAUÍ, 2010. p. 17).

Entendemos que Leibniz, como outros autores, considera a ideia de contínuo como uma questão que deve ser cuidadosamente estudada e que pode levar a ambiguidades lógicas, uma vez que, seguindo o exposto pelos autores citados, nossa intuição finita estranha as possibilidades de ser do infinito.

Um estudo aprofundado sobre a filosofia de Leibniz foge ao escopo deste artigo, mas devido a sua importância na produção de conhecimento sobre a continuidade apontamos, de modo resumido, que existem duas faces do labirinto do contínuo e que por isso devemos nos ater a duas estruturas: uma diz da composição do contínuo e a outra sobre sua completude. Segundo Piauí (2010) com relação à composição do contínuo, Leibniz recorre ao conceito de Mônada[16], como sendo a partícula última e constituinte do todo. E, quanto à completude, Leibniz faz uma discussão sobre o tempo, o espaço e o corpo, cujo propósito é contrapor esses conceitos com os defendidos por Descartes e Newton, argumentando que há uma incompreensão nas teorias desses autores, tendo como fator principal a estrutura do contínuo.

Muitas das teorias de Leibniz foram ganhando relevância com o passar do tempo, de modo que podemos dizer que suas contribuições para as Ciências não foram imediatas, mas suas ideias geraram frutos importantes para o desenvolvimento de novas perspectivas, principalmente para os matemáticos do século XIX.

O final do século XIX é marcado por uma série de contestações quanto à veracidade e aos fundamentos da Matemática. Sob a perspectiva tradicional da História da Matemática que estamos adotando neste artigo, esse período é chamado de "A Crise dos Fundamentos", que tem como marco temporal a Teoria dos Conjuntos de Cantor que é vista como precursora desses questionamentos. Segundo Silva (2007, p. 13) a teoria de Cantor surge "da necessidade de um tratamento adequado do contínuo aritmético, mas tornou-se logo uma teoria de totalidades infinitas consideradas abstratamente".

No movimento de superar os questionamentos apresentados, buscava-se por formalizar conceitos matemáticos de modo que não fosse necessário o uso de ideias intuitivas, mas sim de objetos da álgebra abstrata, os quais poderiam evitar os paradoxos apresentados à época. Desse modo foi se constituindo um período conhecido como *Aritmetização da Análise*. Em Eves (2004, p.

---

[15] David Hilbert (1862 – 1943), de origem alemã, é um dos maiores matemáticos de todos os tempos, seus trabalhos visam à fundamentação da Matemática, trabalhando com teoria dos números algébricos, fundamentos de Geometria, cálculo de variações, entre outros (EVES, 2004. p. 684).

[16] No Leibnizianismo, átomo inextenso com atividade espiritual, componente básico de toda e qualquer realidade física ou anímica, e que apresenta as características de imaterialidade, indivisibilidade e eternidade. (HOUAISS, 2007).

609 - 611) encontramos um desenvolvimento detalhado desse processo, contudo destacamos alguns fatos que nos evidenciam importantes contribuições para o contexto histórico que estamos desenvolvendo.

Segundo Eves (2004), Gauss apresentou, entre outras coisas, a primeira consideração efetivamente adequada a respeito da convergência de uma série infinita em 1812. Porém, foi Cauchy que conseguiu desenvolver uma primeira teoria de limites, com uma formalidade aceitável, para definir de forma satisfatória os conceitos de continuidade, diferenciabilidade e integração definida.

Entretanto, no final do século XIX, começaram surgir exemplos de funções que contrariavam a proposta apresentada por Cauchy. Para Eves (2004, p. 610), essas criações “pareciam contrariar a intuição humana e tornavam cada vez mais evidente que Cauchy não tinha atingido o verdadeiro âmago das dificuldades na procura de uma fundamentação sólida para a Análise”.

Na perspectiva histórica tradicional, a dificuldade em fundamentar a Análise estava, em determinada medida, associada ao fato de que os conceitos necessários solicitavam uma compreensão de estrutura dos Números Reais, a qual ainda não se tinha. Segundo Misse (2019), uma das perspectivas para a formalização da Análise foi proposta pelo matemático alemão Karl Weierstrass, que defendeu um programa em que o próprio sistema dos Números Reais fosse formalizado, possibilitando a consequente formalização da Análise, seguindo uma dinâmica coerentemente lógica.

Caminhavam nesse sentido os trabalhos de Cantor e Dedekind, que, ao estudarem problemas de sequências infinitas, perceberam que a estrutura dos Números Reais solicitava um estudo mais efetivo, e, adotando a perspectiva de Weierstrass, se debruçam sobre sua formalização. A perspectiva desses autores apontara que para a formalização dos Reais era necessária uma discussão sobre o contínuo. Com esse objetivo, Cantor e Dedekind apresentaram modelos para formalizar matematicamente os Números Reais baseados propriedades evidentes para a intuição, como por exemplo, *Números naturais, quocientes e convergência de séries.*

Embora seja possível construir os Números Reais de diversas maneiras, essas construções são feitas com base em muitos recursos lógicos e algébricos. Todavia, encontramos em Misse (2019) uma abordagem mais conceitual que nos permite compreender as ideias que sustentam diferentes demonstrações formais. Segundo esse autor “a ideia é que a partir dos Números Naturais podemos obter os Inteiros e que, pelo quociente dos Inteiros, construímos os Números Racionais” (MISSE, 2019, p. 37), e a partir da estrutura dos Racionais, pode-se definir os Reais por diferentes maneiras.

Cantor e Dedekind seguiram caminhos epistemologicamente distintos para essa construção. Enquanto Dedekind associou os números aos pontos de uma reta geométrica, Cantor buscou a convergência algébrica das sequências numéricas. Ambas as ideias solicitam a ideia de continuidade de modo que ao definir os Números Reais associados o conceito de continuidade.

Porém, ao realizar esse processo, pela primeira vez na História da Matemática, Cantor observou que os Números Reais constituem um conjunto não enumerável. Ficou evidente, para ele, a existência de diferentes tipos de infinito e isso levou sua pesquisa para outra direção, notadamente, a *Teoria dos Conjuntos Transfinitos*. Com essa teoria podemos apresentar uma concepção aritmética do contínuo por meio da *Hipótese do Continuum*.

A hipótese de Cantor sobre o *Continuum* supõe que a quantidade de Números Reais é a menor quantidade infinita maior que a infinidade dos números inteiros positivos. Essa hipótese levanta dúvidas jamais imaginadas em Matemática, uma vez que Cantor afirma que existem vários infinitos, os *infinitos transfinitos*, que podiam ser tratados matematicamente, e um *infinito absoluto* sempre maior que qualquer outro infinito.

Podemos entender que a pesquisa de Cantor estava focada em encontrar um número que corresponderia à menor das quantidades que fosse, evidentemente, maior que a infinidade dos números naturais[17], pois acredita que esse número corresponderia à quantidade do contínuo aritmético.

Seus esforços e de outros matemáticos, notadamente Hilbert, em busca desse número ou para a demonstração de sua existência não foram recompensados. Somente no século XX, muitos anos após sua formulação, foi demonstrada que a *Hipótese do Contínuo* não pode ser verificada por meios matemáticos.

Silva (2007) apresenta o desfecho da saga da *hipótese do contínuo*, dizendo que, mesmo com os avanços matemáticos oriundos dos trabalhos de Hilbert e Gödel[18], no que diz respeito à formalização da Matemática por meios axiomáticos, em 1963 Cohen[19] mostrou que mesmo a teoria dos conjuntos "é incapaz de demonstrar a *verdade da hipótese do contínuo*, a menos que essa teoria seja inconsistente, o que seria um desastre ainda maior" (SILVA, 2007, p. 116).

É importante entender que as dúvidas de Cantor sobre a continuidade se inserem em um movimento chamado Aritmetização da Análise. Nesse período histórico muitos matemáticos buscaram encontrar meios de dar fundamentos sólidos para a Análise Matemática Real, para que fosse possível estabelecer os conceitos de função, continuidade, derivação e integração, de forma não ingênua, e livre de paradoxos. A discussão sobre o contínuo é retomada por Weyl em seu livro lançado em 1918, *Das Kontinuum*[20]. Silva (2007, p. 180), ao discutir essa obra aponta que o autor se dedica a um dos "mais intrigantes problemas matemáticos de todos os tempos, o contínuo precisamente".O autor afirma, ainda, que Weyl reconhece que muitos dos paradoxos apresentados no decorrer da história são quebra-cabeças gerados pelo contínuo.

Precisamos destacar que os trabalhos de Weyl ainda são influenciados pelo espírito da crise dos fundamentos, mas num momento no qual os matemáticos se dedicavam à busca por novas perspectivas para formalização de conceitos. Ocupam papel de destaque nessa época os trabalhos de Hilbert, Einstein, Gödel e Husserl.

Aluno de Hilbert e de Husserl[21], Weyl faz críticas aos fundamentos da Matemática como seus mestres e, em sua obra, segue a linha de pensamento apresentada por Husserl em seminário ministrado em Göttingen nos anos de 1904 e 1905 "sobre a constituição intencional do *fluxo contínuo* do tempo da experiência vivida".

Weyl se vale das ideias apresentadas por Husserl sobre o fluxo do tempo para dizer do contínuo aritmético dos números reais, dizendo que, do mesmo modo que os instantes temporais não existem na experiência, mas são antes idealizações, os Números Reais denotam a mesma situação limite para a continuidade aritmética.

---

[17] Um fato matemático é que é possível estabelecer uma bijeção entre os números naturais e inteiros, do mesmo modo que é possível estabelecer uma bijeção entre os naturais e os racionais. Sendo assim, dizemos que os conjuntos dos números Naturais, Inteiros e Racionais são contáveis, e possuem todos, a mesma quantidade infinita de números.

[18] Kurt Gödel (1906 – 1978), de origem austríaca, dedicou-se ao estudo dos fundamentos da lógica e da Matemática, e seu trabalho mais conhecido é o Teorema da Incompletude.

[19] Paul J. Cohen, nascido em 1934, debruçou-se sobre a *hipótese do contínuo* provando que ela "é independente dos postulados da teoria dos conjuntos e, portanto, não pode ser deduzida a partir desses postulados" (EVES, 2004. p 666).

[20] Dispomos da versão traduzida por Stephen Polllard e Tomas Bole (WEYL, 1994).

[21] Edumund G. A. Husserl (1859 – 1938), de origem alemã, foi um matemático e filósofo que estabeleceu a Fenomenologia como corrente filosófica. Em Matemática, seus trabalhos estão ligados à Filosofia da Matemática e aos fundamentos da Ciência Matemática.

A linha temporal que permeia o desenvolvimento do conceito de continuidade ganha então uma cisão, na qual se mostram perspectivas distintas de formalização da Análise e consequentemente, modos diferentes de se conceber a continuidade. Os trabalhos de Abraham Robinson[22], publicados na década de 1960, para fundamentar a Análise via infinitésimos e o recente advento das tecnologias digitais, que permitiram o desenvolvimento de Métodos Numéricos para a resolução de problema, deram origem ao que chamamos de Análise Não-*Standard*.

Finalizamos nosso contexto histórico, apresentando esse último grande marco na história da produção de conhecimento matemático sobre o contínuo e a continuidade, até os dias de hoje. As teorias de Robinson e da *Computable Analysis* ainda não fazem parte da cultura que é disseminada pela academia científica, contudo, lembramos que, a Matemática, como toda Ciência, está aberta para novas compreensões e em constante construção.

3 CONSIDERAÇÕES

Apresentamos neste artigo um contexto histórico sobre a continuidade, abarcando os fatos importantes que marcaram o desenvolvimento desse conceito e algumas interpretações que podemos fazer ao buscar por desdobramentos de tais fatos. Entendemos que esse movimento é importante na constituição de uma pesquisa, uma vez que qualquer objeto de investigação está imerso em história, a qual deve ser analisada.

Justificamos a importância de se conhecer os fatos que constituem um contexto histórico de conceitos matemáticos, pois nesse movimento é possível compreender quais os elementos intuitivos que possibilitaram a formalização que é praticada nos dias de hoje. Devemos, contudo, ter ciência de que há lacunas em todos os possíveis contextos que façamos, seja por omissão de ideias, ou por delimitação de espaço-tempo-cultura. O que não inviabiliza o movimento de pesquisa histórica, porém, faz com que o pesquisador precise estar atento às perspectivas distintas que circundam o objeto de estudos.

Entendemos, ainda, que a busca e constituição de um contexto histórico no desenvolvimento de uma pesquisa possibilita o encadeamento de ideias do pesquisador em conjunto com aquelas dos autores pesquisados, fazendo com que a investigação ganhe sentido à medida que aquilo que é pesquisado vai sendo mais bem compreendido.

No caso do exposto neste artigo, um contexto histórico sobre a continuidade, nós percebemos que, embora esse tema tenha sido alvo de discussões desde os gregos antigos, ainda permanecem questões em aberto. Compreendemos, também, sobre como diferentes posturas filosóficas, que implicam em mudanças conceituais, alteram as compreensões sobre esse tema. Vemos avanços teóricos consideráveis desde as questões atomistas e uma formalização muito mais precisa do que aquela apresentada pelos matemáticos do século XVII, mas ainda nos assolam dúvidas quanto à constituição do contínuo como ente matemático, ou se é possível encontrar a cardinalidade do contínuo, como defendia Cantor.

Enfim, as questões postas e tantas outras que se apresentam quando entramos nos meandros da continuidade matemática seguem sendo investigadas por nós e serão apresentadas oportunamente à comunidade científica.

[22] Abraham Robinson (1918 – 1974), de origem alemã, trabalhou nos Estados Unidos da América, onde desenvolveu importantes contribuições à Análise Matemática, criando um sistema rigoroso para o trabalho com infinitésimos e participando do desenvolvimento da Análise Não-Standard.

REFERÊNCIAS

AZEVEDO, E. L. **A crise das Ciências Europeias e a Fenomenologia Transcendental de Edmund Husserl:** uma apresentação. 2011. 126 p. Dissertação (Mestrado em Filosofia) - Programa de Pós-Graduação em Filosofia, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2011.

BICUDO, M. A. V. A pesquisa qualitativa olhada para além dos seus procedimentos. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). **Pesquisa qualitativa segundo a visão fenomenológica**. São Paulo: Cortez, 2011.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.

HERRERA, R. M. Histórias de Matemáticas: El sólido hiperbólico agudo. **Pensamiento Matemático**. Madrid, Espanha n. 2, p. 1-11, abr. 2012. Disponível em: <http://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/3891846.pdf> Acesso em: 08 jun. 2020

HOUAISS. **Dicionário eletrônico da Língua Portuguesa**. Editora Objetiva. Versão 2.0a, abr. 2007

HUSSERL, E. **A Crise das Ciências Europeias e a Fenomenologia Transcendental:** Uma Introdução à Filosofia Fenomenológica. Lisboa, Phainomenon e Centro de Filosofia da Universidade de Lisboa, (Tradução Diogo Falcão ferrer). 2008.

MISSE, B. H. L. **CONTINUUM:** Matemática, Filosofia e Computação. 2019. 100p. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” Unesp, Rio Claro, 2019.

PIAUÍ, W. S. Leibniz e as Duas Faces do Labirinto do Contínuo: uma introdução. **Argumentos**, Fortaleza, ano 2, n. 3, p. 16-24. 2010. Disponível em: <http://www.periodicos.ufc.br/index.php/argumentos/article/viewFile/200/200>. Acesso em 08 jun 2020.

SBARDELLINI, L. A. **O CONTINUUM, OS REAIS E CONCEITO DE HOMOGEINIDADE.** Tese (Doutorado em Filosofia), Instituto de Filosofia e Ciências Humanas, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2005.

SILVA, J. J. **Filosofia da Matemática**. São Paulo: Editora Unesp, 2007.

WEYL, H. **The Continuum:** A critical examination of the fundation of Analysis. Mineola/N.Y. – EUA. Dover Publications, 1994

Submetido em 11 de Setembro de 2019.
Aprovado em 02 de Maio de 2020.