Uma versão da história do Cálculo Infinitesimal

A version of the history of the Infinitesimal Calculus

Gabriel Faria **Vieira**
Universidade Federal do Triângulo Mineiro (UFTM)

Mônica de Cássia **Siqueira Martines**
Universidade Federal do Triângulo Mineiro (UFTM)

RESUMO

Este artigo visa divulgar alguns resultados de uma pesquisa de iniciação científica em História e Epistemologia da Matemática, a qual objetivou conhecer uma parte da história do Cálculo Infinitesimal, apresentado primeiro por Leibniz, em seus artigos de 1684 de 1686 e, como foi desenvolvido posteriormente**.** A metodologia utilizada foi a análise documental, primeiramente em fontes terciárias, tais como a coleção de livros de História do Cálculo de Baron e Bos e, em seguida, buscou-se aprofundar o que nos foi mostrado no livro, buscando as fontes primárias (re)interpretando os cálculos apresentados. Trazemos uma breve contextualização sobre a situação do Cálculo no final do século XVII, mostramos alguns conceitos do Cálculo Infinitesimal de Leibniz, além de algumas de suas aplicações. Ao concluir este trabalho, pudemos perceber a importância do Cálculo como um novo método para traçar retas tangentes a uma curva num ponto dado e de calcular áreas abaixo das curvas, já que até então os cientistas da época utilizam vários métodos geométricos para solucioná-los, sem apresentar uma forma geral. Apesar do novo método atender a essa premissa, ainda apresentava problemas de rigor em relação aos conceitos matemáticos, o que levou, inicialmente, à certa desconfiança em relação a seu uso. Percebemos também que, além de Leibniz, diversos cientistas envolveram-se no desenvolvimento do Cálculo Infinitesimal, ajudando a moldá-lo para o Cálculo Diferencial e Integral que conhecemos atualmente.

Palavras-chave: História da matemática. História do cálculo. Cálculo Infinitesimal.

ABSTRACT

This article aims to divulge some results of a scientific initiation research in the history and epistemology of Mathematics, which aimed to know a part of the history of the Infinitesimal Calculus presented first by Leibniz in his articles from 1684 and 1686 and, as it was developed later. The methodology used was the documentary analysis, firstly in tertiary sources, such as the collection of books on the History of the Calculation of Baron and Bos, and then one sought to deepen what was shown in the book, looking for the primary sources, (re) interpreting the calculations presented. The article brings a brief contextualization about the situation of Calculus at the end of the 17th century, show some concepts of Leibniz's Infinitesimal Calculus, in addition to presenting some of its applications. At the end of this work, it was possible to see the importance of Calculus as a new method to solve problems of drawing tangent lines to a curve at a given point and of calculating areas below the curves, since until then scientists at the time used several geometric methods to solve them, without presenting a general way to solve such problems. Despite the new method being general, it still presented problems of rigor in relation to mathematical concepts, which led, initially, to a certain distrust in relation to its use. We also realized that, in addition to Leibniz, several scientists were involved in the development of the Infinitesimal Calculus, helping to shape it for the Differential and Integral Calculus that we know today.

Keywords: History of mathematics. History of calculus. Infinitesimal Calculus.

1 INTRODUÇÃO

O objetivo deste trabalho é mostrar alguns dos resultados da pesquisa de iniciação científica desenvolvida na área de História e Epistemologia da Matemática (MENDES, 2012), que propôs conhecer uma parte do Cálculo Infinitesimal apresentado por Leibniz, em artigos publicados em 1684 e 1686, na revista científica *Acta Eruditorum*[1], e como ele foi desenvolvido posteriormente, principalmente, pelos irmãos Jackob e Johann Bernoulli.

Apresentamos primeiramente os conceitos que, de acordo com Baron e Bos (1974a, p. 41-42), foram desenvolvidos por Leibniz utilizando os infinitesimais. Ainda segundo esses autores, alguns matemáticos, tais como os irmãos Jakob Bernoulli (1655 – 1705) e Johann Bernoulli (1667 – 1748), foram capazes de entender as publicações de Leibniz e utilizaram as técnicas do Cálculo Infinitesimal para resolver problemas. Johann, por sua vez, foi contratado pelo Marques de L'Hôpital[2] (1661 – 1704) para lhe dar aulas sobre o Cálculo, e, uma vez que havia aprendido, L'Hôpital publicou um livro sobre diferenciais do Cálculo Infinitesimal, utilizando as aulas e publicando as descobertas de Johann em seu nome.

As definições do Cálculo Infinitesimal constam nos referidos artigos de Leibniz, assim como as regras de diferenciação. Já suas aplicações pertencem ao livro de L'Hôpital, a um artigo feito por Johann Bernoulli e às lições dadas por este a L'Hôpital. Todas essas fontes encontram-se nos livros de História do Cálculo, de Baron e Bos, as quais utilizamos, e que foram traduzidas para nossa língua, constituindo-se, por esse motivo, em fontes terciárias. Também localizamos as fontes primárias e as usamos para compreendermos alguns dos cálculos apresentados na terciária.

A metodologia utilizada durante o desenvolvimento deste trabalho foi a análise documental de fontes históricas, a qual, de acordo com Lüdke e André (1986, p.38), pode ser utilizada como um recurso para tratar de dados qualitativos. Guba e Lincoln (*apud* LÜDKE; 1986, p.39) citam as vantagens em se trabalhar com esse tipo de método: os documentos são fontes estáveis, por isso não sofrem alterações e podem ser consultados sempre que necessário. Para a histórica da Matemática, é válido também destacar que:

> Outra vantagem dos documentos é que eles são uma fonte não reativa, permitindo a obtenção de dados quando o acesso ao sujeito é impraticável (pela sua morte, por exemplo) ou quando a interação com os sujeitos pode alterar seu comportamento ou seus pontos de vista. (LÜDKE, ANDRÉ, 1986, p. 39)

Trazemos primeiramente as definições dadas por Leibniz sobre diferenciais, de ordens superiores e integrais, seguidas das regras para multiplicação e divisão deles. Em seguida apresentamos algumas aplicações do Cálculo, como encontrar pontos extremos de uma curva e pontos de inflexão, ou ainda a curvatura em determinado ponto da curva e o método da integração por substituição.

2 DESENVOLVIMENTO

O Cálculo que estudamos teve grandes contribuições de Leibniz para seu desenvolvimento e foi publicado por esse autor em 1684, no entanto os problemas que o originaram são muito mais antigos. Por isso julgamos válido discorrer sobre sua história. Comentamos também sobre os anos iniciais que se seguiram a essa publicação, bem como seus divulgadores e o primeiro livro sobre cálculo publicado. Citamos também como Leibniz definiu alguns conceitos e algumas definições

[1] Revista Alemã fundada em 1682.

[2] Utilizaremos a grafia L'Hôpital, assim como adotada nos livros sobre história do cálculo de Baron e Bos.

dadas por L'Hôpital. Em seguida, apresentamos algumas de suas aplicações, das quais algumas trazem as respectivas demonstrações.

2.1 Uma história sobre o cálculo diferencial e integral

Os questionamentos que deram origem ao que hoje chamamos de "Cálculo Diferencial e Integral" têm início na Grécia antiga. Eram problemas relacionados, principalmente, à quadratura do círculo. Na busca por uma solução, a qual consistia em construir, com régua e compasso, um quadrado cuja área era igual à área de um círculo dado, é que surgem ideias de traçar retas tangentes às curvas e de calcular áreas abaixo das mesmas (BARON, BOS, 1974a).

Os séculos foram passando e vários estudiosos se debruçaram na busca de métodos gerais para se traçar retas tangentes e se calcular áreas abaixo de curvas. Somente por volta do final do século XVII e início do século XVIII, vemos o problema resolvido e uma luta épica sobre a prioridade da descoberta dos métodos gerais, entre dois cientistas: Newton e Leibniz. Entretanto, não entraremos em detalhes sobre esse desentendimento, pois não é o objetivo deste artigo (BARON, BOS, 1974b, 1974c).

O cálculo proposto por Leibniz teve como seus principais divulgadores os irmãos Bernoulli, os quais estavam entre os primeiros a conseguir entendê-lo e aplicá-lo. Estes, em conjunto com Leibniz, publicaram vários artigos na *Acta Eruditorum*, o que colaborou para a difusão do cálculo desse estudioso. Tais artigos não eram de fácil compreensão, pois mostravam sua aplicação e não os conceitos. Isso mudou com a publicação do livro *Analyse des Infiniments Petits*, escrito por L'Hôpital com base nas aulas que teve com Johann Bernoulli (BARON, BOS, 1974b, p.4).

Conforme Baron e Bos (1974b, p.5-6), tal livro causou grande controvérsia, pois L'Hôpital apenas mencionou Johann em seu início, não tendo declarado sua contribuição, e este, por sua vez, também não a exigiu quando o livro fora publicado. Somente o fez após a morte de L'Hôpital, mas não haviam provas de seu feito. Somente em 1921, quando foi achado um documento na biblioteca de Basiléia (Suíça), é que foi provada a contribuição de Johann para os conceitos presentes no livro de L'Hôpital. É também importante considerar que, à época, a credibilidade de Johann estava abalada devido às desavenças públicas com seu irmão Jakob, e isso colaborou para que o livro não lhe fosse creditado (BARON, BOS, 1974b).

2.2 Definições de diferencial e integral, por Leibniz

Segundo Baron e Bos (1974a, p.58), Leibniz definiu "diferencial como sendo a diferença infinitamente pequena entre dois valores consecutivos de y. Para uma curva traçada com relação a um eixo-x e um eixo-y, Leibniz considera a sequência das ordenadas y e a sequência correspondente das abscissas x". Portanto, dy é a diferença infinitamente pequena entre duas ordenadas y, e dx a diferença infinitamente pequena entre duas abscissas x.

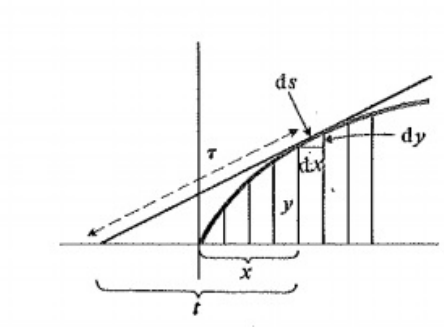
Para Leibniz, segundo Baron e Bos (1974a, p.58), as diferenciais eram "infinitamente pequenas", portanto, podiam ser comparadas entre si (a razão $\frac{dy}{dx}$ é finita), mas podiam ser desprezadas em relação às quantidades finitas ordinárias (por exemplo, $x + dx = x$)[3].

De acordo com Baron e Bos (1974a, p. 60), Leibniz definiu a integral como sendo a soma da área de retângulos infinitamente pequenos $y \cdot dx$ sob uma curva, representando-a pelo símbolo $\int$. Portanto, $\int ydx$ descreve a área abaixo da curva. Como não era indicado um intervalo de integração, também não eram explicitadas constantes de integração. Geralmente, a fronteira

[3] Números comuns, números naturais.

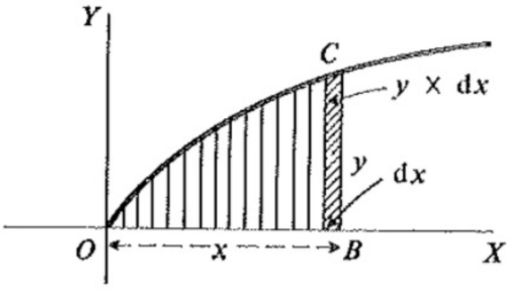
esquerda era a origem e $\int ydx$ indicava a área entre 0 e x. Também não existiam regras gerais pelas quais as integrais pudessem ser calculadas em todos os casos ou reduzidas a integrais conhecidas, porém havia uma série de métodos que poderiam ser utilizados em certos casos.

Figura 1: Representação das diferenciais $\boldsymbol{dx}$ e $\boldsymbol{dy}$.



Fonte: Baron e Bos (1974a, p.58)

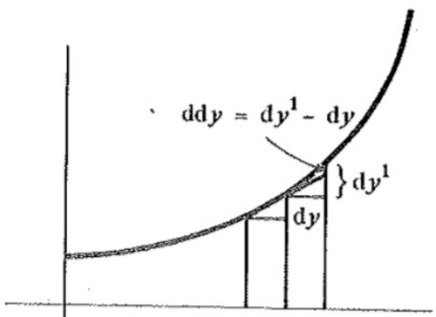
Figura 2: Representação da integral como a soma de infinitos retângulos $\boldsymbol{ydx}$.



Fonte: Baron e Bos (1974a, p.60)

Se os dy's consecutivos são diferentes, sua diferença é chamada por Leibniz de "diferencial de segunda ordem". Estas são infinitamente pequenas em relação às diferenciais de primeira ordem e denotadas por ddy. De maneira semelhante são formados ddx's,dds's etc. e diferenciais de ordens superiores. Porém, se os dx's ou dy's são iguais, então $ddx = 0$ e $ddy = 0$ (BARON, BOS, 1974a, p.60).

Figura 3: Representação de uma diferencial de 2ª ordem, por Leibniz.

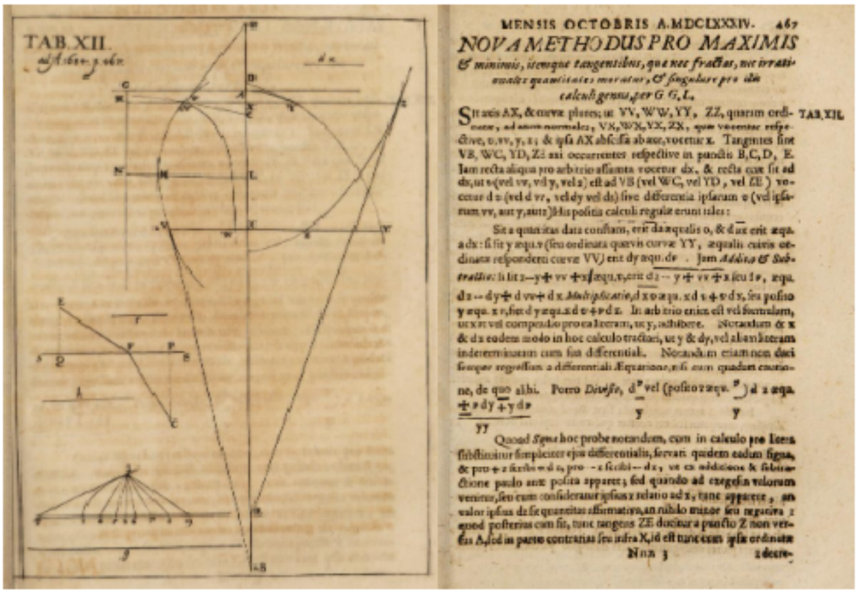


Fonte: Baron e Bos (1974a, p.60)

2.3 Operações envolvendo diferenciais e métodos do cálculo

Segundo Baron e Bos (1974a, p. 61-63), Leibniz publicou seu primeiro artigo sobre Cálculo Infinitesimal em 1684, no qual discursava sobre as diferenciais e dava algumas aplicações. O artigo trazia a definição de "diferencial", que havia sido modificada por Leibniz devido à sua insegurança sobre os infinitamente pequenos e algumas regras, tais como a do produto e a do quociente. Leibniz modificou a definição para que dx fosse um segmento de reta, e dy outro segmento de reta, tal que $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{\tau}$, onde $\tau \in \mathbb{R}$; posteriormente, ele assumiu novamente as diferenciais como "diferenças". Embora no artigo tenham sido apresentadas as regras do quociente e do produto de diferenciais, estas não eram (e ainda não são) de fácil compreensão. Portanto, trouxemos essas regras como definidas no livro *Analyse*, escrito por L'Hôpital.

Figura 4: Cópia do artigo de Leibniz, publicado em 1684.


TAB. XII.

MENSIS OCTOBRIS A. MDCLXXXIV. 467

NOVA METHODUS PRO MAXIMIS

Fonte: https://archive.org/details/s1id13206500/page/466/mode/2up

2.3.1 Regras de diferenciação para produtos e quocientes

Conforme Baron e Bos (1974a, p.59), os Infinitesimais foram assumidos no livro de L'Hôpital como um postulado, ou seja, uma verdade matemática que não necessitava de demonstração. Estas podiam ser desprezadas em relação a quantidades finitas ordinárias, o que implicava em: $x = x + dx$, $y = y + dy$, etc. Portanto, para a diferencial de um produto, temos:

$$\begin{aligned} d(xy) &= (x + dx)(y + dy) - xy = xy + xdy + ydx + dxdy - xy \\ &= xdy + dx(y + dy) = xdy + ydx. \end{aligned}$$

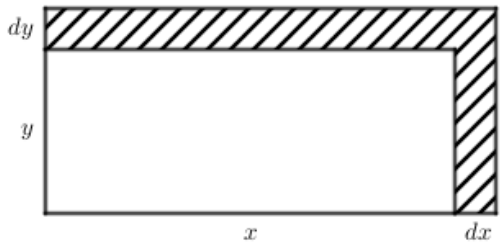
Podemos ver que L'Hôpital subtrai xy porque esta é a função nos produtos x, y originais, que está sendo subtraída do produto dos x e y com seus respectivos incrementos (é a definição de diferencial como a diferença da função produto nesses pontos (x, y) e $(x + dx, y + dy)$. Daí, como definido anteriormente no livro, é utilizada a definição $y + dy = y$, chegando-se à regra do produto para diferenciais. Pode-se também interpretar o produto de forma geométrica, o que acabou contribuindo para a aceitação das diferenciais ou nele como um acréscimo na área de um retângulo, no qual estaríamos interessados apenas na área do acréscimo, portanto eliminando xy. Como $dxdy$ é o produto de duas diferenciais, isto é, o produto de dois infinitamente pequenos, é tão próximo de 0 que se pode considerá-lo como tal. Portanto, como $dxdy = 0$, temos que $d(xy) = ydx + xdy$.

L'Hôpital (*apud* BARON, BOS, 1974b, p.9-10) traz também a regra da diferencial do quociente:

$$d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{y + dy}{x + dx} - \frac{y}{x} = \frac{xy + xdy - xy - ydx}{x^2 + xdx} = \frac{xdy - ydx}{x(x + dx)} = \frac{xdy - ydx}{x^2}$$

Aqui, o autor novamente subtrai a quantidade ordinária envolvida na operação, e utiliza novamente sua definição de “infinitamente pequenos”, pela qual $x + dx = x$, chegando assim à regra do quociente. Novamente, há uma explicação geométrica para a diferencial do quociente. Temos dois segmentos finitos, x e y, os quais sofrem acréscimos infinitamente pequenos, respectivamente dx e dy. Estamos interessados em saber apenas quantas vezes o segmento dx cabe no segmento dy, e não em quantas vezes o segmento x cabe em y; portanto, eliminamos $\frac{y}{x}$. Assim, como xdx é infinitamente pequeno em relação à x^2, podemos considerá-lo 0. Portanto, como $xdx = 0$, $d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{xdy - ydx}{x^2}$.

Figura 5: A regra do produto interpretada de forma geométrica.



Fonte: autores

Enquanto estudávamos tais regras, tivemos algumas dúvidas sobre como trabalhar com os infinitamente pequenos, pois nos pareceu estranho que uma quantidade pudesse simplesmente desaparecer no resultado. Para isso, consultamos *Analyse...* e confirmamos que, como estes eram considerados infinitamente pequenos, poderiam desaparecer ao final da operação pois são muito próximos à 0.

2.3.2 Valores extremos de uma curva

De acordo com Baron e Bos (1974c, p.3), os meios para determinar valores extremos sempre estiveram ligados aos métodos de tangentes, as quais, por sua vez, estavam ligadas com teorias de diferenciação. Durante o início da difusão do cálculo diferencial, a determinação de valores extremos foi reconhecida como uma aplicação útil e importante. L'Hôpital descreveu em *Analyse...* como encontrar os valores máximos e mínimos de uma curva, cujo método nos propusemos a estudar. O autor considera as curvas MDM ilustradas como na Figura 7.

De acordo com L’Hôpital (*apud* BARON; BOS, 1974c, p. 4-5), conforme a abscissa AP aumenta, se a ordenada PM aumenta a diferencial Rm será positiva. Caso PM diminua, Rm será negativo, sendo DE o extremo de tais curvas. L’Hôpital utiliza a lei da continuidade (muito frequente na época, sem mais rigores), segundo a qual as quantidades variáveis não saltam, podendo apenas variar gradualmente. Dessa forma, para que tais quantidades mudem de positivo para negativo, é necessário que passem por 0 ou ∞, bastando igualar a diferencial da curva a um destes.

O primeiro caso é parecido com o que utilizamos atualmente, que consiste em igualar a primeira derivada à 0. Para o segundo caso, L'Hôpital (*apud* BARON; BOS, 1974c, p.7) cita como exemplo para a aplicação do critério $dy = \infty$ a equação da curva $y - a = a^{\frac{1}{3}}(a - x)^{\frac{2}{3}}$.

Nessa mesma perspectiva, tomamos a primeira diferencial:

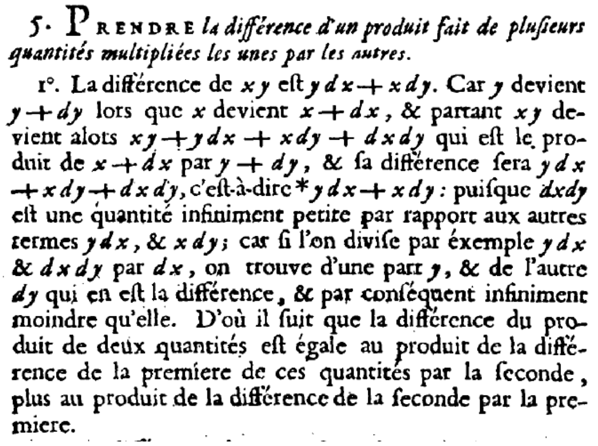
$$dy = a^{\frac{1}{3}}\left(\frac{-2}{3}(a - x)^{\frac{-1}{3}}\right)dx \Rightarrow dy = \frac{-2a^{\frac{1}{3}}}{3(a - x)^{\frac{1}{3}}}dx \Rightarrow dy = \frac{-2dx\sqrt[3]{a}}{3\sqrt[3]{a - x}}$$

Ainda segundo L'Hôpital (1974c, p.7), igualando-a a 0, teremos $-2dx\sqrt[3]{a} = 0$, o que não é interessante, pois não seria fácil encontrar os valores extremos da curva baseado nesse raciocínio. Seguindo as orientações de L'Hôpital, devemos igualar a equação a ∞, o que consiste em fazer o mesmo com o denominador da equação, levando-o a 0. Note-se que já havia a ideia de que números reais divididos pelos cada vez mais próximos de 0 tenderiam para o infinito, embora não houvesse o conceito de limite. Portanto:

$$3\sqrt[3]{a-x} = 0 \Rightarrow \sqrt[3]{a-x} = 0 \Rightarrow a - x = 0 \Rightarrow x = a.$$

Enfim, segundo L'Hôpital (*apud* BARON; BOS, 1974c, p.7), o extremo dessa curva (ordenada DE) está em $x = a$.

Figura 6: Trecho do livro original de *Analyse*, de L'Hôpital, que explica a regra do produto.

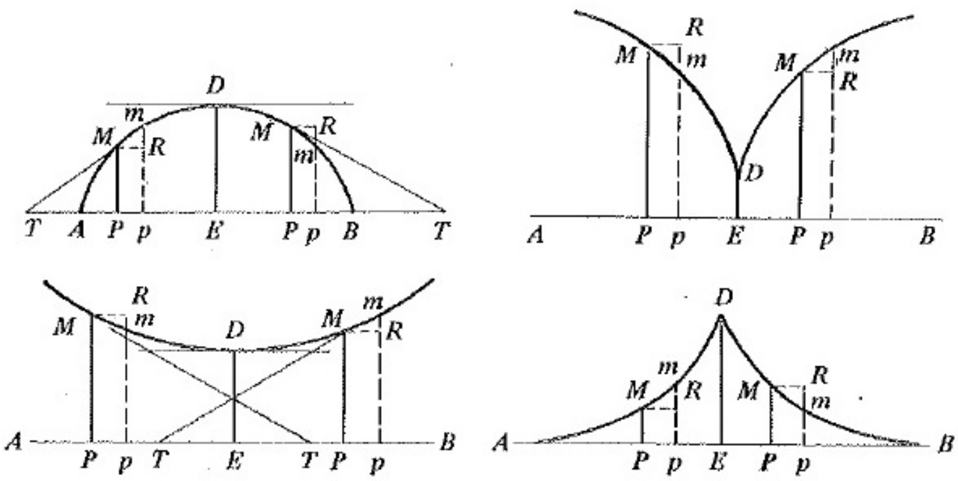


5. PRENDRE *la différence d'un produit fait de pluſieurs quantités multipliées les unes par les autres.*

1°. La différence de xy eſt $ydx + xdy$. Car y devient $y + dy$ lors que x devient $x + dx$, & partant xy devient alors $xy + ydx + xdy + dxdy$ qui eſt le produit de $x + dx$ par $y + dy$, & ſa différence ſera $ydx + xdy + dxdy$, c'eſt-à-dire * $ydx + xdy$: puiſque $dxdy$ eſt une quantité infiniment petite par rapport aux autres termes ydx, & xdy ; car ſi l'on diviſe par exemple ydx & $dxdy$ par dx, on trouve d'une part y, & de l'autre dy qui en eſt la différence, & par conſéquent infiniment moindre qu'elle. D'où il ſuit que la différence du produit de deux quantités eſt égale au produit de la différence de la premiere de ces quantités par la ſeconde, plus au produit de la différence de la ſeconde par la premiere.

Fonte: *Analyse des Infiniment Petits*, 1696, p. 4

Figura 7: Exemplo mencionado por L'Hôpital: extremos de uma curva.



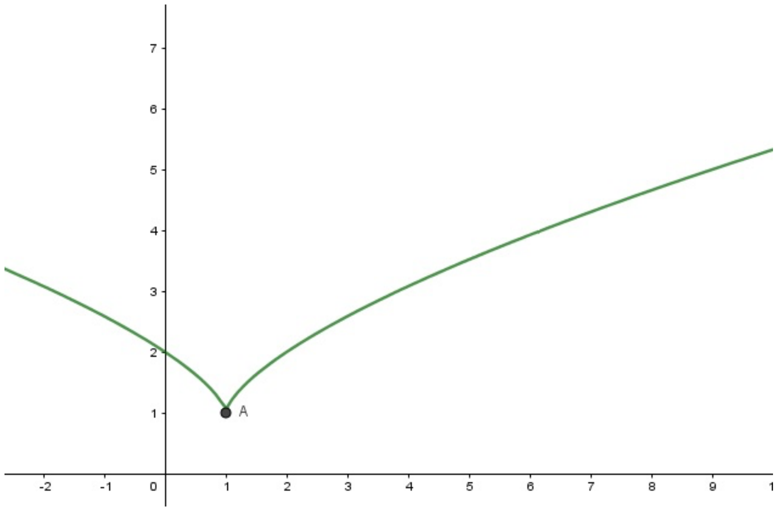
Fonte: Baron e Bos (1974c, p.4)

2.3.3 Pontos de inflexão

Segundo Baron e Bos (1974c, p.8), L'Hôpital definiu e obteve um método para calcular tais pontos, utilizando diferenciais de segunda ordem. Ele nos dá uma curva AFK, assim representada como na Figura 9.

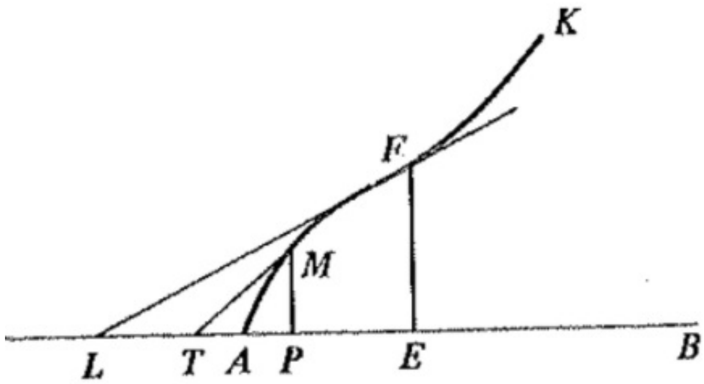
De acordo com L'Hôpital (*apud* BARON; BOS, 1974, p. 8), temos a linha reta AB como seu diâmetro (ou eixo) e as ordenadas PM, EF etc. paralelas entre si. Considerando F como o ponto de inflexão, traçamos a ordenada EF e a MP, sendo que M é um ponto qualquer da curva. Traçamos também as tangentes à curva, passando por F e por M. Em seguida, aumentamos a ordenada AP, isto é, avançamos no sentido positivo do eixo AB. Se a curva possuir um ponto de inflexão, até então AT, a distância entre o momento em que se começou a avançar e o ponto onde a tangente à M corta a reta AB, aumenta continuamente até que passe pela ordenada EF. A partir disso, a distância AT diminui.

Figura 8: Ilustração para $\mathbf{a} = \mathbf{1}$, onde o extremo seria $\mathbf{A} = (\mathbf{1}, \mathbf{1})$.



Fonte: autores

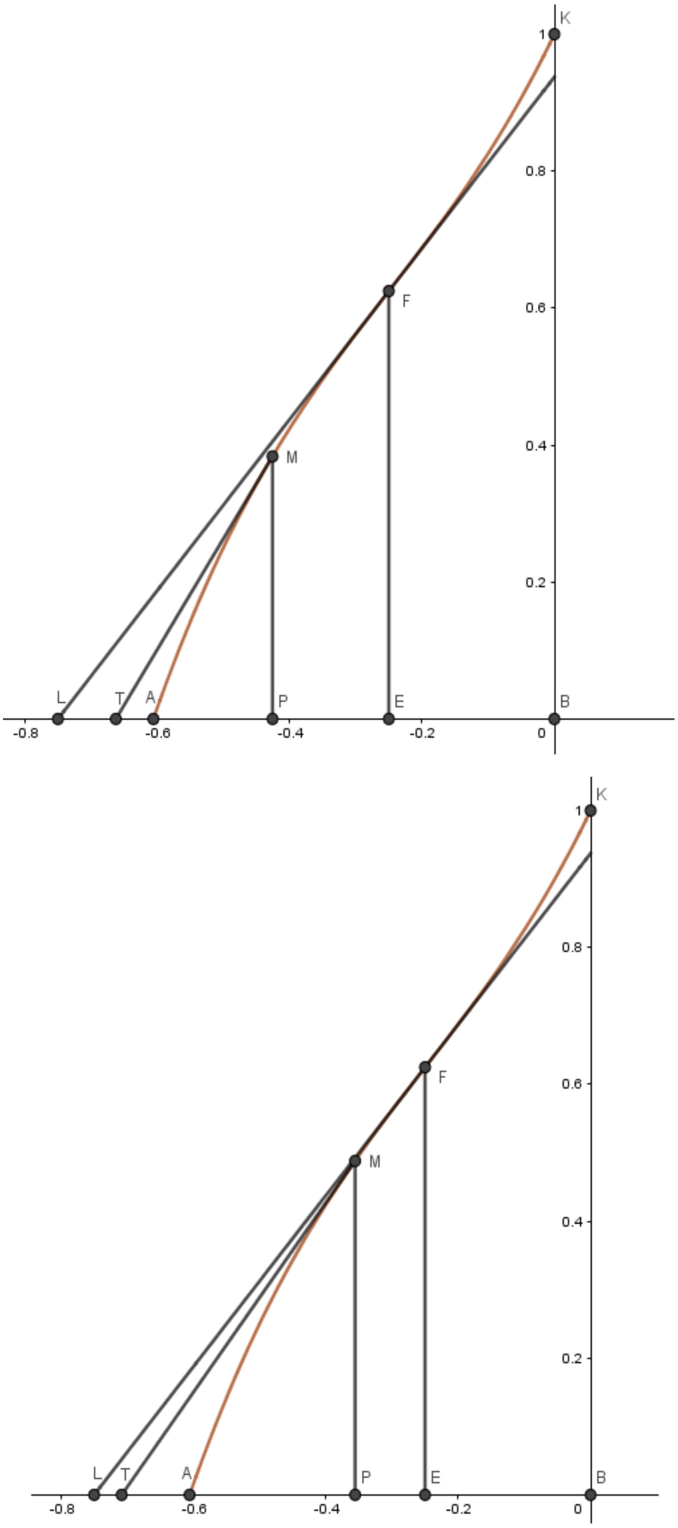
Figura 9: O exemplo dado por L'Hôpital sobre como encontrar pontos de inflexão.



Fonte: Baron e Bos, 1974c, p.8

Em seguida, o pesquisador afirma, em relação à Figura 9, que se chamarmos AE de x e EF de y, teremos $\mathrm{AL} = \mathrm{y} \cdot \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dy}} - \mathrm{x}$. Isso porque EL corresponde à subtangente, a qual, por seu turno, corresponde ao segmento pertencente a um eixo, com início no ponto onde a tangente o toca e terminando no ponto do eixo ortogonal ao de tangência; em termos modernos, seria equivalente a uma decomposição de forças de um vetor. A subtangente é dada por $\mathrm{EL} = \mathrm{y} \cdot \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dy}}$ (BARON; BOS, 1974b, p.10); subtrai-se AE (correspondente à x) e temos AL. Ele afirma também que as sucessivas distâncias dx's são constantes, concluindo que o ponto de inflexão corresponde ao extremo de AL, devendo, assim, encontrar esse extremo utilizando o método proposto por ele mesmo.

Figura 10: Representação do momento em que a distância $\mathbf{AT}$ chega em seu extremo em $\mathbf{AL}$, ou seja, na tangente do ponto de inflexão.



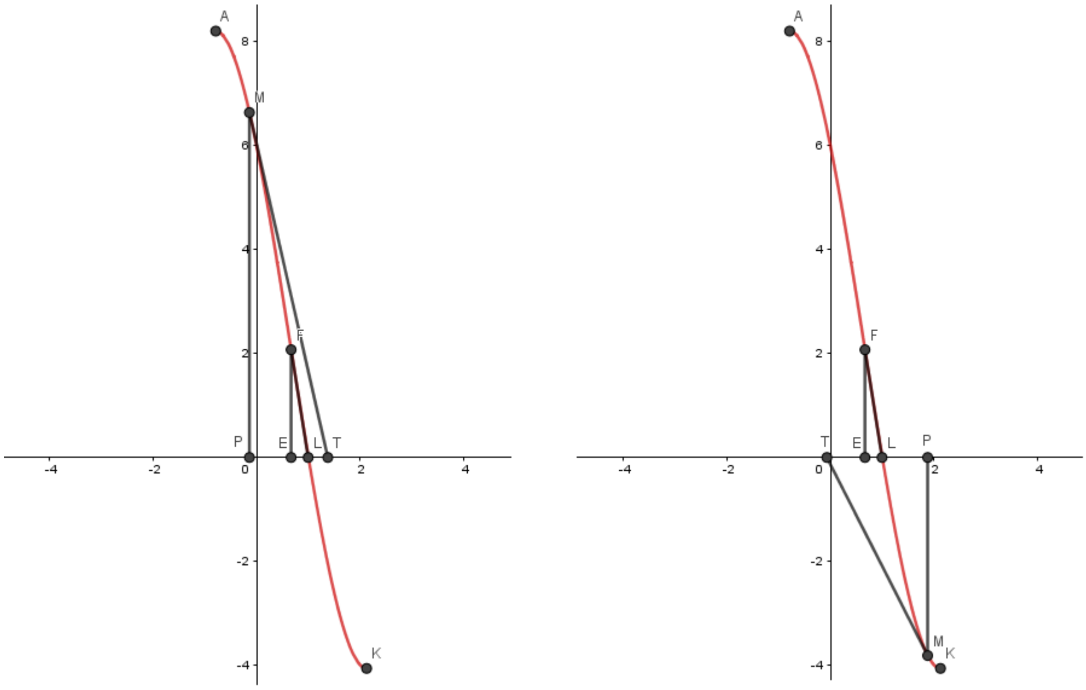
Fonte: autores

Por fim, usando a regra da diferencial, do produto e da soma, temos:

$$\mathrm{d(AL)} = \mathrm{d}\left(\mathrm{y}\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dy}} - \mathrm{x}\right) = \left(\mathrm{dy}\cdot\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dy}} + \mathrm{y}\left(\frac{-\mathrm{dxddy}}{\mathrm{dy}^2}\right)\right) - \mathrm{dx} = \mathrm{dx} - \frac{\mathrm{ydxddy}}{\mathrm{dy}^2} - \mathrm{dx} = \frac{-\mathrm{ydxddy}}{\mathrm{dy}^2}.$$

Como dx foi considerada constante, não pode ser 0, o que nos leva à $\frac{-\mathrm{yddy}}{\mathrm{dy}^2} = 0 \Longrightarrow -\mathrm{yddy} = 0 \Longrightarrow \mathrm{yddy} = 0$. L'Hôpital considera y diferente de 0, o que implica em $\mathrm{ddy} = 0$. Assim, descreve-o como método para encontrar pontos de inflexão e igualar a segunda derivada à 0. Entretanto, deve-se atentar ao fato de que extremos locais podem alterar o comportamento da curva, fazendo com que T ultrapasse L (Figura 11). Quando M se aproxima de F, um ponto de inflexão, o T, aproxima-se de L, atinge-o e começa a se afastar; entretanto, quando M aproxima-se de K, um extremo da curva, T ultrapassa L, contrariando o argumento de L'Hôpital, ao afirmar que L seria o ponto mais à esquerda da tangente. Assim, embora o argumento esteja correto algebricamente, geometricamente existem equívocos.

Figura 11: Quando o ponto $\mathbf{M}$ se aproxima do ponto $\mathbf{K}$, um extremo da curva, $\mathbf{T}$ ultrapassa $\mathbf{L}$



Fonte: autores

2.3.3 Raio de Curvatura

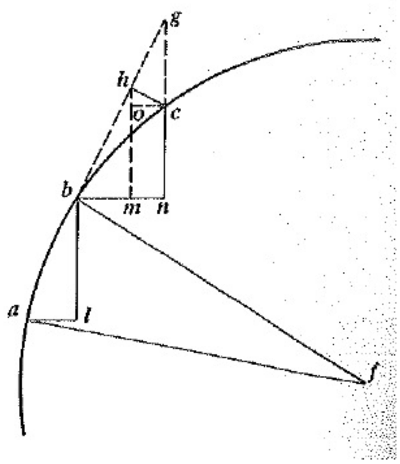
De acordo com Baron e Bos (1974c, p.10), a questão de curvatura foi estudada por Huygens (por volta de 1600) quando estava trabalhando com relógio pendular, embora ele não tenha apresentado uma regra geral para calcular o raio de curvatura. Tal fórmula foi publicada por Jakob Bernoulli, em 1694, com símbolos e notações leibnizianos, o qual a derivou quando buscava resolver um problema relacionado à forma de barras elásticas, conforme representação presente na Figura 12.

Em relação à Figura 12, é importante destacar que Bernoulli considerou como um ponto na Evoluta (centro de curvatura) da curva f como a posição limite de encontro das retas normais à curva em a e b, que, por sua vez, consistem no raio do círculo tangencial (círculo onde o raio é o de curvatura e o centro, o de curvatura).

Supõe-se, segundo Bernoulli (*apud* BARON; BOS, 1974c, p. 11), que tanto ab como ac sejam infinitamente pequenos. Além disso, o ângulo $\mathrm{a\hat{f}b}$ é congruente ao ângulo $\mathrm{g\hat{b}c}$ e, $\mathrm{bh} \equiv \mathrm{bc}$. A partir disso são construídas as linhas al, bn e co, são paralelas entre si e correspondentes às abscissas; portanto, como correspondem a elas e são infinitamente pequenas (pois ab e bc são), constituem diferenciais de x (dx's). Ao mesmo tempo são construídos também os segmentos bl, hom e gcn, paralelos entre si e correspondentes às ordenadas e, pelo mesmo motivo das abscissas, são diferenciais de y (dy's). Considera-se, enfim, que os dx's são iguais entre si.

Bernoulli (*apud* BARON; BOS, 1974c, p. 11) apresenta a seguinte relação: $\frac{\mathrm{gc}}{\mathrm{bc}} = \frac{\mathrm{gc}}{\mathrm{hc}} \cdot \frac{\mathrm{hc}}{\mathrm{bc}}$, que é possível porque o triângulo bng é semelhante ao triângulo chg (os ângulos reto e $\mathrm{h\hat{c}g}$ são congruentes), assim como o triângulo hcb é semelhante ao triângulo abf (como são isósceles, possuem dois lados proporcionais e $\mathrm{a\hat{f}b} \equiv \mathrm{h\hat{b}c}$). Assim, utilizando novamente a semelhança de triângulos, Bernoulli faz a seguinte manipulação: $\frac{\mathrm{gc}}{\mathrm{hc}} \cdot \frac{\mathrm{hc}}{\mathrm{bc}} = \frac{\mathrm{bg}}{\mathrm{bn}} \cdot \frac{\mathrm{ab}}{\mathrm{bf}} = \frac{\mathrm{ab}}{\mathrm{al}} \cdot \frac{\mathrm{ab}}{\mathrm{bf}}$. Novamente é utilizada a semelhança de triângulos, em que se deduz que o triângulo bng é semelhante ao triângulo alb ($\mathrm{b\hat{a}l} \equiv \mathrm{g\hat{b}n}$), pois ab é infinitamente pequeno, e os ângulos retos são equivalentes.

Figura 12: Ilustração sobre como derivar a fórmula do cálculo da curvatura.



Fonte: Baron e Bos (1974c, p. 11)

Ainda nessa perspectiva, como tratam-se de diferenciais, e como os dx's são constantes, ocorre a seguinte substituição: $\frac{\mathrm{gc}}{\mathrm{bc}} = \frac{\mathrm{gc}}{\mathrm{hc}} \cdot \frac{\mathrm{hc}}{\mathrm{bc}} = \frac{\mathrm{bg}}{\mathrm{bn}} \cdot \frac{\mathrm{ab}}{\mathrm{bf}} = \frac{\mathrm{ab}}{\mathrm{al}} \cdot \frac{\mathrm{ab}}{\mathrm{bf}} = \frac{\mathrm{ds}}{\mathrm{dx}} \cdot \frac{\mathrm{ds}}{\mathrm{z}} = \frac{\mathrm{ds}^2}{\mathrm{zdx}}$, em que ds consiste na diferencial do comprimento de arco e z no raio do círculo tangencial. Observe-se que: $\mathrm{gc} = \mathrm{gn} - \mathrm{nc} = \mathrm{bl} - \mathrm{nc}$; dessa forma, como gc pode ser escrita como a diferença de duas diferenciais, temos que gc é uma diferencial de 2ª ordem e: $\mathrm{gc} = \mathrm{gn} - \mathrm{nc} = \mathrm{bl} - \mathrm{nc} = \mathrm{ddy}$. Como bc também é infinitamente pequeno, corresponde à diferencial do comprimento de arco. Portanto: $\frac{\mathrm{gc}}{\mathrm{bc}} = \mathrm{ddy}/\mathrm{ds}$. Comparando as igualdades, temos que: $\frac{\mathrm{ds}^2}{\mathrm{zdx}} = \frac{\mathrm{ddy}}{\mathrm{ds}} \Longrightarrow \mathrm{z} = \frac{\mathrm{ds}^3}{\mathrm{dxddy}}$, correspondente ao raio do círculo tangencial, o qual fornece a curvatura.

Baron e Bos (1974c, p. 13-14) trazem um exemplo sobre como utilizar a fórmula dada por Bernoulli para encontrar a curvatura. No exemplo, consideram a curva $\mathrm{ay} = \mathrm{x}^2$ e o ponto (a, a). Desse modo, temos que: $\mathrm{ay} = \mathrm{x}^2 \Longrightarrow \mathrm{ady} = 2\mathrm{xdx}$ e $\mathrm{addy} = 2\mathrm{dxdx} + 2\mathrm{xddx}$. Mas como dx é considerado constante, $\mathrm{ddx} = 0$ e: $\mathrm{addy} = 2\mathrm{dxdx}$. Assim, com ds como a diferencial do comprimento de arco, temos que $\mathrm{ds} = \sqrt{\mathrm{dx}^2 + \mathrm{dy}^2} = \sqrt{\mathrm{dx}^2 + \left(\frac{2\mathrm{x}}{\mathrm{a}}\mathrm{dx}\right)^2} = \mathrm{dx}\sqrt{1 + \left(\frac{2\mathrm{x}}{\mathrm{a}}\right)^2}$. Utilizando a fórmula da curvatura, temos:

$$\mathrm{z} = \frac{\mathrm{ds}^3}{\mathrm{dxddy}} = \frac{\mathrm{dx}^3\left(\sqrt{\left(1 + \left(\frac{2\mathrm{x}}{\mathrm{a}}\right)^2\right)}\right)^3}{\mathrm{dx} \cdot \frac{2}{\mathrm{a}}\mathrm{dx}^2} = \frac{\mathrm{dx}^3\left(\sqrt{\left(1 + \left(\frac{2\mathrm{x}}{\mathrm{a}}\right)^2\right)}\right)^3}{\frac{2}{\mathrm{a}}\mathrm{dx}^3} = \frac{\mathrm{a}}{2}\left(\sqrt{\left(1 + \left(\frac{2\mathrm{x}}{\mathrm{a}}\right)^2\right)}\right)^3$$

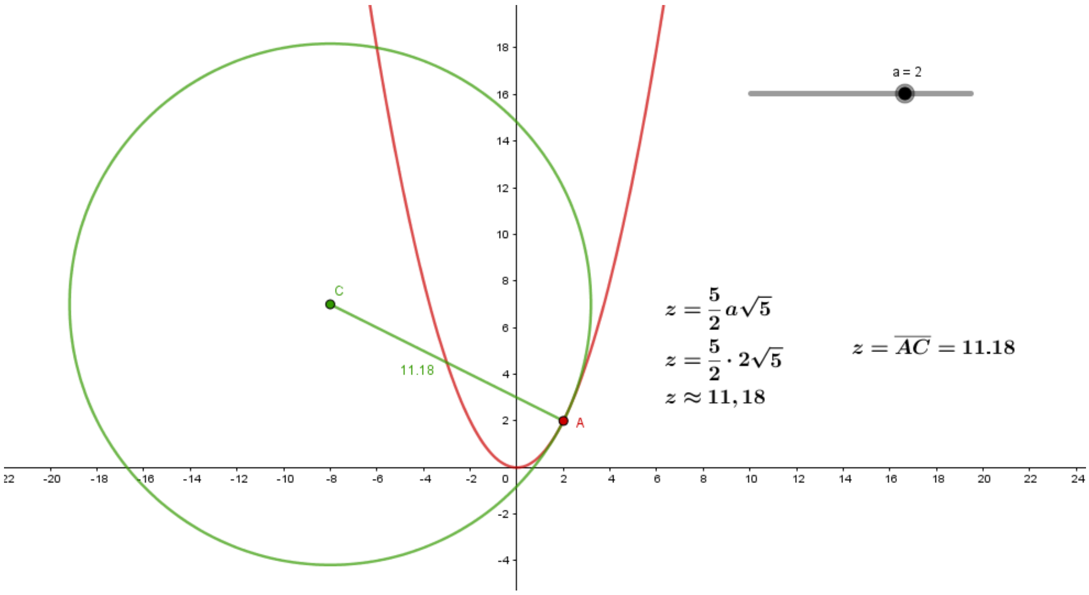
Segundo Baron e Bos (1974c, p.14), substituímos $\mathrm{x} = \mathrm{a}$, obtendo:

 v.6, n.1, p. 109-123, jun. 2021

$$z = \frac{a}{2}\left(\sqrt{\left(1+\left(\frac{2a}{a}\right)^2\right)}\right)^3 = \frac{a}{2}\left(\sqrt{1+2^2}\right)^3 = \frac{a}{2}\left(\sqrt{5}\right)^3 = \frac{5}{2}a\sqrt{5}.$$

Na Figura 13, z corresponde ao raio de curvatura, isto é, ao do círculo dela. Por sua vez, o círculo de curvatura corresponde, de acordo com Thomas (2012, p. 194), ao que tangencia uma curva em um determinado ponto P (ambos possuem a mesma reta tangente no ponto P). Sua curvatura é a mesma que a da curva em P e situa-se no lado côncavo desta. O método utilizado para ilustrar a Figura 13 foi o seguinte: primeiramente, utilizamos a fórmula encontrada por Baron e Bos que resulta em $5\sqrt{5} \approx 11{,}18$. Em seguida, optamos pela ferramenta Círculo Osculador, do GeoGebra, seguida pela ferramenta Raio, que fornece o raio de um determinado círculo; em nosso caso, do círculo osculador, que resultou em $11{,}18$.

Figura 13: Ilustração do exemplo anterior, para $\mathbf{a = 2}$



Fonte: autores

2.3.4 O Método da Substituição para Integrações

Baron e Bos (1974c, p.14) apontam que, na época aqui considerada, embora houvesse regras que permitissem diferenciar qualquer quantidade variável proposta (considerando que a curva fosse diferenciável), não se possuía uma maneira fixa de calcular integrais. Essa falta de regras constituía um dos maiores empecilhos no estudo do Cálculo Infinitesimal. Então, Newton e Leibniz estudaram diversas curvas com o intuito de construir tabelas indicando integrais destas e verificar quais tipos poderiam ser integradas. Embora não existissem regras para a integração, havia uma série de métodos e técnicas que poderiam ser usados para integrar curvas, destacando-se o método da substituição.

Segundo Johann Bernoulli (*apud* BARON; BOS, 1974c, p. 15), pode ser que houvesse muitas quantidades diferentes envolvidas na expressão que se desejava integrar, o que dificultava sua resolução. Nesse caso, Bernoulli explicou ao marquês de L'Hôpital que poderíamos tomar um termo dessa expressão e a igualar a outra variável qualquer, de modo a simplificar a integração. Em seguida, explicou que todos os outros termos envolvidos na expressão deveriam ser mudados em função da nova variável, incluindo as diferenciais. Somente após a integração era possível desfazer a substituição, chegando-se na integral desejada inicialmente.

Bernoulli (*apud* BARON; BOS, 1974, p. 15) cita como exemplo o cálculo da integral de $(\mathrm{ax}+\mathrm{xx})\mathrm{dx}\sqrt{\mathrm{a}+\mathrm{x}}$. Substituindo-se o termo $\sqrt{\mathrm{a}+\mathrm{x}}$ por y, temos que: $\sqrt{\mathrm{a}+\mathrm{x}}=\mathrm{y} \Longrightarrow \mathrm{a}+\mathrm{x}=\mathrm{yy} \Longrightarrow \mathrm{x}=\mathrm{yy}-\mathrm{a}$, resultando na diferencial: $\mathrm{dx}=2\mathrm{ydy}$. O autor explica que, fazendo as substituições necessárias, chegamos a: $(\mathrm{ax}+\mathrm{xx})\mathrm{dx}\sqrt{\mathrm{a}+\mathrm{x}}=[\mathrm{a}(\mathrm{yy}-\mathrm{a})+(\mathrm{yy}-\mathrm{a})(\mathrm{yy}-\mathrm{a})]2\mathrm{ydy}\cdot\mathrm{y}=(\mathrm{ayy}-\mathrm{a}^2+\mathrm{y}^4-2\mathrm{ayy}+\mathrm{a}^2)2\mathrm{yydy}=2\mathrm{y}^6\mathrm{dy}-2\mathrm{ay}^4\mathrm{dy}$. Calculando-se a integral, obtemos: $\int 2\mathrm{y}^6\mathrm{dy}-2\mathrm{ay}^4\mathrm{dy}=\frac{2}{7}\mathrm{y}^7-\frac{2}{5}\mathrm{ay}^5$. Dessa forma é possível desfazer a substituição: $\frac{2}{7}\mathrm{y}^7-\frac{2}{5}\mathrm{ay}^5=\frac{2}{7}\left(\sqrt{\mathrm{x}+\mathrm{a}}\right)^7-\frac{2}{5}\mathrm{a}\left(\sqrt{\mathrm{x}+\mathrm{a}}\right)^5=\frac{2}{7}(\mathrm{x}+\mathrm{a})^3\sqrt{\mathrm{x}+\mathrm{a}}-\frac{2}{5}\mathrm{a}(\mathrm{x}+\mathrm{a})^2\sqrt{\mathrm{x}+\mathrm{a}}$, resultando em: $\int(\mathrm{ax}+\mathrm{xx})\mathrm{dx}\sqrt{\mathrm{a}+\mathrm{x}}=\frac{2}{7}(\mathrm{x}+\mathrm{a})^3\sqrt{\mathrm{x}+\mathrm{a}}-\frac{2}{5}\mathrm{a}(\mathrm{x}+\mathrm{a})^2\sqrt{\mathrm{x}+\mathrm{a}}$.

Baron e Bos (1974, p. 16-17) explicam as diferenças do método de substituição utilizado por Bernoulli e o utilizado atualmente, valendo-se da notação atual para isso. Primeiramente, é descrito o método moderno, exemplo do qual se vale para resolvê-lo. Consideremos as funções $\mathrm{f(x)}$, $\mathrm{g(x)}$ e $\mathrm{k(x)}$, nas quais $\mathrm{f(x)}=\mathrm{g[k(x)]k'(x)}$. Se $\mathrm{G(x)}$ for a primitiva de $\mathrm{g(x)}$, pela Regra da Cadeia, temos que: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\left[\mathrm{G[k(x)]}\right]=\mathrm{G'[k(x)]k'(x)}=\mathrm{g[k(x)]k'(x)}$. Logo, se $\mathrm{F(x)}$ for a primitiva de $\mathrm{f(x)}$, então $\mathrm{F(x)}=\mathrm{G[k(x)]}$. Porém, se $\mathrm{k(x)}=\mathrm{y}$, temos que $\mathrm{k'(x)}=\mathrm{dy}$, resultando em: $\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}}\mathrm{g[k(x)]k'(x)dx}=\int_{\mathrm{k(a)}}^{\mathrm{k(b)}}\mathrm{g(y)dy}=\mathrm{G(y)}|_{k(a)}^{k(b)}$.

De acordo com Baron e Bos (1974, p. 16-17), resolvendo o exemplo dado por Bernoulli com essa simbologia, temos que: $\mathrm{f(x)}=(\mathrm{ax}+\mathrm{x}^2)\sqrt{\mathrm{a}+\mathrm{x}}$; se tomarmos $\mathrm{y}=\mathrm{k(x)}=\sqrt{\mathrm{a}+\mathrm{x}}$, veremos que $[\mathrm{k(x)}]^2=\mathrm{a}+\mathrm{x}\Longrightarrow\mathrm{x}=[\mathrm{k(x)}]^2-\mathrm{a}$. Podemos concluir também que $\mathrm{k'(x)}=\frac{1}{2}(\mathrm{a}+\mathrm{x})^{\frac{-1}{2}}$, obtendo-se:

$$\begin{aligned}\mathrm{f(x)}&=\mathrm{g[k(x)]k'(x)}=(\mathrm{a}+\mathrm{x})\sqrt{\mathrm{a}+\mathrm{x}}\cdot 2\sqrt{\mathrm{a}+\mathrm{x}}=2\mathrm{x}(\mathrm{a}+\mathrm{x})(\mathrm{a}+\mathrm{x})\\&=2[[\mathrm{k(x)}]^2-\mathrm{a}][[\mathrm{k(x)}]^2]^2=2[\mathrm{k(x)}]^6-2\mathrm{a}[\mathrm{k(x)}]^4.\end{aligned}$$

Logo,

$$\mathrm{g(y)}=2\mathrm{y}^6-2\mathrm{ay}^4 \text{ e } \int\mathrm{g(y)dy}=\int(2\mathrm{y}^6-2\mathrm{ay}^4)\mathrm{dy}=\frac{2}{7}\mathrm{y}^7-\frac{2}{5}\mathrm{ay}^5=\mathrm{G(y)}.$$

Por fim, temos que $\mathrm{F(x)}=\mathrm{G[k(x)]}=\frac{2}{7}(\mathrm{a}+\mathrm{x})^{\frac{7}{2}}-\frac{2}{5}\mathrm{a}(\mathrm{a}+\mathrm{x})^{\frac{5}{2}}$.

Ainda nessa linha de raciocínio, nota-se o uso da substituição de uma maneira diferente, na qual $\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}}\mathrm{g(x)dx}=\int_{\mathrm{h(a)}}^{\mathrm{h(b)}}\mathrm{g[k(x)]k'(x)dx}$, se $\mathrm{h[k(x)]}=\mathrm{x}$. Assim, utilizando essa simbologia, temos que $\mathrm{g(x)}=(\mathrm{ax}+\mathrm{x}^2)\sqrt{\mathrm{a}+\mathrm{x}}$. Se tomarmos $\mathrm{h(x)}=\sqrt{\mathrm{a}+\mathrm{x}}$, obtemos $\mathrm{h[k(x)]}=\mathrm{x}\Leftrightarrow\sqrt{[\mathrm{a}+\mathrm{k(x)}]}=\mathrm{x}\Leftrightarrow\mathrm{a}+\mathrm{k(x)}=\mathrm{x}^2\Leftrightarrow\mathrm{k(x)}=\mathrm{x}^2-\mathrm{a}$, e, portanto $\mathrm{k'(x)}=2\mathrm{x}$. Substituindo na integração, confirmamos que:

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{x}g(x)dx&=\int_{0}^{(a+x)^{\frac{1}{2}}}\left[a(x^2-a)+(x^2-a)^2\sqrt{a+(x^2-a)}\right]2xdx\\&=\int_{0}^{(a+x)^{\frac{1}{2}}}[(ax^2-a^2+x^4-2ax^2+a^2)x]2xdx\\&=\int_{0}^{(a+x)^{\frac{1}{2}}}2x^2(x^4-ax^2)dx\\&=\int_{0}^{(a+x)^{\frac{1}{2}}}2x^6-2ax^4dx=\frac{2}{7}x^7-\frac{2}{5}ax^5|_{0}^{(a+x)^{\frac{1}{2}}}\\&=\frac{2}{7}\left[(a+x)^{\frac{1}{2}}\right]^7-\frac{2}{5}a\left[(a+x)^{\frac{1}{2}}\right]^5=\\&=\frac{2}{7}(a+x)^{\frac{7}{2}}-\frac{2}{5}a(x+a)^{\frac{5}{2}}.\end{aligned}$$

3 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com este trabalho, pudemos perceber a potência do Cálculo Infinitesimal desenvolvido por Leibniz, o que, em grande parte, deve-se à sua notação, a qual facilitou as operações envolvidas. No entanto, embora a perspectiva leibniziana tenha representado um avanço para a Matemática, só foi parcialmente aceita, pois a partir dela o Cálculo poderia ser explicado utilizando-se a Geometria Euclidiana, embora apresentasse maior relação com a Álgebra do que os métodos geométricos utilizados até então, que derivavam parte dos geômetras gregos e parte da Geometria Analítica, de Descartes.

É interessante também observar como o Cálculo Infinitesimal deu origem ao atual Cálculo Diferencial e Integral, o qual originou-se e desenvolveu-se sem os conceitos de “função” e “limite”, que surgiriam depois, embora a busca por definir aquela tenha sido assídua nesse período, como podemos constatar em Zuffi (2016). Tal ausência era suprida, parcialmente, utilizando-se os Infinitesimais, o que causou grande desconfiança por parte dos cientistas da época. Um dos maiores problemas, por exemplo, eram as diferenciais de ordens superiores, pois consistiam em quantidades menores do que as que já eram infinitamente pequenas. Leibniz adotou a seguinte postura em relação aos Infinitesimais: acreditava que serviam como símbolos para exemplificar o que poderia ser explicado pelo método da exaustão.

Devido a tais problemas, o Cálculo Infinitesimal sofreu diversas críticas ao longo dos séculos, até que os conceitos de “limite” e “derivada” pudessem ser relacionados. As principais estavam relacionadas ao uso dos Infinitesimais, pois não havia como garantir a existência destes, embora seu uso levasse a resultados corretos.

Podemos concluir que o Cálculo Infinitesimal apresentado por Leibniz, apesar das críticas, consistiu numa importante ferramenta matemática, que pôde ser utilizada na resolução de diversos problemas ao longo dos séculos, mesmo que alguns de seus conceitos não sejam tão precisos sob o ponto de vista da Matemática atual.

REFERÊNCIAS

BARON, Margaret E., Bos, H.J.M. Unidade 3: Newton e Leibniz. In: **Curso de História da Matemática:** origens e desenvolvimento do cálculo. Tradução de José Raimundo Braga Coelho, Rudolf Maier e Maria José M.M. Mendes. Brasília: Universidade de Brasília, 1985, c1974a.

BARON, Margaret E., Bos, H.J.M. Unidade 4: O cálculo no século XVIII - Fundamentos. In: **Curso de História da Matemática:** origens e desenvolvimento do cálculo. Tradução de José Raimundo Braga Coelho, Rudolf Maier e Maria José M.M. Mendes. Brasília: Universidade de Brasília, 1985, c1974b.

BARON, Margaret E., Bos, H.J.M. Unidade 5: O cálculo no século XVIII - Técnicas e aplicações. In: **Curso de História da Matemática:** origens e desenvolvimento do cálculo. Tradução de José Raimundo Braga Coelho, Rudolf Maier e Maria José M.M. Mendes. Brasília: Universidade de Brasília, 1985, c1974c.

L'HÔPITAL, Guillaume-François-Antoine de. ***Analyse des infiniment petits, pour l'intelligence des lignes courbes***. Paris: A Paris, de L'Imprimerie Royale, 1696.

LÜDKE, Menga; ANDRÉ, Marli E. D. A. Métodos de coleta de dados: observação, entrevista e análise documental. In: LÜDKE, Menga; ANDRÉ, Marli E. D. A. **Pesquisa em Educação**: Abordagens Qualitativas. São Paulo: Epu, 1986. Cap. 3. p. 25-44.

MENDES, Iran Abreu. Pesquisas em história da

Educação Matemática no Brasil em três dimensões. **Quipu**, 2012. Vol. 14, núm. 1, pp. 69-92.

THOMAS, George B. *et al*. **Cálculo.** Vol. 2. 12. ed. São Paulo: Pearson, 2012.

ZUFFI, Edna Maura. Alguns aspectos do desenvolvimento histórico do conceito de função. **Hipátia**, 2016. Vol. 1, núm.1, pp. 1-10.

Submetido em agosto de 2020.

Aprovado em novembro de 2020.

Gabriel Faria Vieira

Licenciado em Matemática pela Universidade Federal do Triângulo Mineiro (UFTM), Uberaba, Minas Gerais, Brasil. ID Lattes: 8316885136414563.

Contato: gabriel170898123@gmail.com

Mônica de Cássia Siqueira Martines

Doutora em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista (Unesp). Professora Adjunta da Universidade Federal do Triângulo Mineiro (UFTM), Uberaba, Minas Gerais, Brasil. ID Lattes: 6625047361725116 Orcid ID: 0000-0002-3143-9206

Contato: monica.siqueiramartines@uftm.edu.br