O ENSINO DE GEOMETRIA UTILIZANDO O OBJETO MATEMÁTICO POLIEDROS DUAIS

LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA UTILIZANDO EL OBJETO MATEMÁTICO POLIEDROS DUALES

MOHR, Ana Regina da Rocha[1]
JELINEK, Karin Ritter[2]
SILVA, Patrícia Lima da[3]

RESUMO

Este trabalho se constitui como um relato de experiência proveniente de um trabalho de pesquisa que teve por objetivo propor uma alternativa para o ensino de Geometria, por meio da utilização de um objeto matemático ainda pouco explorado no ambiente escolar, a saber: os Poliedros Duais. A proposta aqui relatada se constituiu como uma pesquisa participante, realizada com 20 estudantes do 3º ano do Ensino Médio de uma escola pública, e intentou a verificação, por meio de construções, da existência de apenas cinco tipos de poliedros regulares, bem como a construção do tetraedro regular e seu dual e do hexaedro regular e seu dual. Embora tenha se ressaltado a dificuldade em encontrar fontes de pesquisas confiáveis que tratassem dos poliedros duais, foi possível estruturar um conjunto de atividades que contribuísse para alcançar o objetivo proposto, visto que encontrou-se uma alternativa para o ensino dos Poliedros Duais. Ao longo do estudo também se percebeu que, algumas vezes, as expressões “poliedros de Platão” e “poliedros regulares” são utilizadas como sinônimos em algumas literaturas, o que entendemos não ser adequado uma vez existem poliedros de Platão que não são regulares.

Palavras-chave: Ensino de Matemática. Geometria. Poliedros Duais.

RESUMEN

Este trabajo se constituye como un relato de experiencia proveniente de un trabajo de investigación que tuvo por objetivo proponer una alternativa a la enseñanza de la Geometría en la que se utilice un objeto matemático que todavía está poco explorado en el ambiente escolar, a saber: los Poliedros Duales. La propuesta aquí relatada se constituyó como una investigación participante, realizada con 20 estudiantes del 3º año de la Enseñanza Secundaria de una escuela pública, y propuso la verificación por medio de construcciones de la existencia de sólo cinco tipos de poliedros regulares, así como la construcción del tetraedro regular y su dual y del hexaedro regular y su dual. Aunque se haya resaltado la dificultad en encontrar fuentes de investigación confiables que trataran sobre los poliedros duales, fue posible estructurar un conjunto de actividades que contribuyera a alcanzar el objetivo propuesto, visto que fue posible encontrar una alternativa a la enseñanza de los Poliedros Duales. A lo largo del estudio también se percibió que, a veces, las expresiones “poliedros de Platón” y “poliedros regulares” se utilizan como sinónimos en algunas literaturas, lo que entendemos que no es adecuado una vez que existen poliedros de Platón que no son regulares.

Palabras clave: Enseñanza de Matemática. Geometría. Poliedros Duales.

[1] Mestre em Ensino de Ciências Exatas pela Universidade Federal do Rio Grande (FURG). Professora da Rede Básica de Ensino do Rio Grande do Sul, Santo Antônio da Patrulha, RS, Brasil. Endereço-eletrônico: ar.mohr@hotmail.com.
[2] Doutora em Educação pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS). Docente do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas do Instituto de Matemática, Estatística e Física da Universidade Federal do Rio Grande (FURG), Santo Antônio da Patrulha, RS, Brasil. Endereço eletrônico: karinjelinek@furg.br.
[3] Mestre em Matemática pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRS). Técnica Matemática do Instituto de Matemática, Estatística e Física da Universidade Federal do Rio Grande (FURG), Santo Antônio da Patrulha, RS, Brasil. Endereço eletrônico: patriciasilva@furg.br.

1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

A palavra Matemática, como utilizada hoje, começou a aparecer somente no século XIV. "No grego, matema (ou matemata) significa algo como aprender e explicar. Todos os pensadores, artesãos e produtores gregos, que hoje são lembrados como os pioneiros da Matemática, buscavam sobreviver no seu ambiente e transcendê-lo" (D'AMBROSIO, 2011, p.19).

De maneira semelhante, surgem os primórdios da Geometria. Desde os tempos mais antigos, os povos vêm desenvolvendo o pensamento geométrico, muitas vezes de forma inconsciente. Essas pessoas deixaram muitos vestígios sobre seus conhecimentos nessa área e muito do que se conhece hoje sobre Geometria se deve a eles. Segundo Roque, "os mesopotâmicos e egípcios realizavam cálculos com medidas de comprimentos, áreas e volumes, e alguns de seus procedimentos aritméticos devem ter sido obtidos por métodos geométricos, envolvendo transformações de áreas" (ROQUE, 2012, p. 93).

Portanto, a Geometria é uma área da Matemática que estuda diversos objetos e situações que têm relação com o cotidiano, surgindo, dessa forma, a oportunidade de apreciar as particularidades da Matemática. Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) afirmam que o ensino de Geometria

> deve possibilitar aos alunos o desenvolvimento da sua capacidade de desenvolver problemas práticos do cotidiano, como, por exemplo, orientar-se no espaço, ler mapas, estimar e comparar distâncias percorridas, reconhecer propriedades de formas geométricas básicas, saber usar as diferentes unidades de medida. Também é um estudo em que os alunos podem ter oportunidade especial, com a certeza, não a única, de apreciar a faceta da matemática que trata de teoremas e argumentações dedutivas. (BRASIL, 2006, p.75).

Dessa maneira, para auxiliar no ensino da Geometria, convém que haja a busca por alternativas que possam torná-lo mais atrativo, desenvolvendo a iniciativa, o raciocínio dedutivo e o pensamento crítico, a fim de minimizar as dificuldades encontradas pelos alunos e professores, visto que o ensino dessa área da Matemática acabou por ficar afastado dos currículos por um longo período. Passos e Nacarato (2014, p. 01) destacam que:

> Depois de longo período de abandono quase absoluto no final do século XX, o ensino de geometria na educação básica começa a fazer parte de debates e estudos acadêmicos, gerando muitas discussões em congressos nacionais e internacionais de Educação Matemática, e deu lugar a muitas pesquisas de mestrado e doutorado, tanto no Brasil como no exterior. O ensino de geometria nas escolas, até então relegado às últimas páginas dos livros didáticos, volta a compor, de forma mais integrada e ao longo das unidades, a maioria dos livros didáticos de matemática quando esses passam a contemplar, de certo modo, orientados pelos Parâmetros Curriculares Nacionais.

Diante disso, a fim de auxiliar nessas discussões sobre o ensino de Geometria, este trabalho teve como objetivo propor uma alternativa para o ensino de Geometria, por meio da utilização de um objeto matemático ainda pouco explorado no ambiente escolar: os poliedros duais. A ideia da atividade foi criar a possibilidade de uma aula prática, investigativa e de construção, além de permitir aos alunos a construção de seu próprio material de estudo.

Os dados experimentais deste estudo foram obtidos por meio de uma intervenção pedagógica, realizada com 20 alunos de uma turma do 3º ano do Ensino Médio, em uma escola pública da rede estadual do Rio Grande do Sul no ano de 2018. Inicialmente, realizou-se no laboratório de informática a manipulação do *software Poly*[4] *Pro* com o objetivo de os alunos conhecerem e analisarem os poliedros regulares. Em seguida, os alunos comprovaram a existência de apenas cinco tipos de poliedros regulares através da construção e da análise das alternativas possíveis. No segundo momento da intervenção pedagógica, foram feitas as construções dos poliedros regulares com polígonos.

No terceiro momento, foi feita a construção do tetraedro, do hexaedro e do octaedro com canudos (optou-se, neste estudo, por construir apenas esses três poliedros regulares em função do grau de dificuldade das outras construções e do tempo proposto para a atividade). No quarto momento, a professora levou alguns poliedros duais para os alunos manipularem e explicou alguns conceitos relacionados a esses poliedros. Durante a explicação, e por meio de alguns questionamentos, os alunos conseguiram identificar que era possível associar alguns poliedros já construídos e realizaram a construção do tetraedro e do hexaedro e de seus respectivos duais.

Dessa maneira, este estudo está estruturado em seções. A primeira seção refere-se aos poliedros de Platão e aos poliedros regulares, destacando que existe diferença entre eles. A segunda seção refere-se aos poliedros duais, a terceira apresenta os procedimentos metodológicos e a última traz os resultados obtidos com este estudo e as considerações finais.

2 POLIEDROS DE PLATÃO E POLIEDROS REGULARES

Segundo Boyer (1999), Platão expôs suas ideias sobre os poliedros regulares pela primeira vez em um diário intitulado *Timaeus*[5]*,* presumivelmente nome de um pitagórico, que serviu como principal interlocutor. Nesse diário, os poliedros regulares foram chamados de “corpos cósmicos” ou “sólidos platônicos” devido à explicação sobre os fenômenos científicos.

Boyer (1999) ainda complementa que os cinco poliedros regulares que, mais tarde, foram nomeados poliedros de Platão eram associados aos elementos da natureza: o tetraedro ao fogo; o hexaedro à terra; o icosaedro à água; e o octaedro ao ar. No entanto, o dodecaedro foi associado ao universo, pois Platão o considerava o quinto elemento do universo em razão da admiração que os pitagóricos possuíam por esse poliedro.

Para Dolce e Pompeo (1993, p. 130),

> um poliedro é chamado poliedro de Platão se, e somente se, satisfazer às seguintes condições: a) todas as faces têm o mesmo número de arestas; b) todos os ângulos poliédricos têm o mesmo número de arestas; c) vale a relação de Euler ($V – A + F = 2$).

Mas vale ressaltar que os poliedros de Platão não são apenas os cinco tipos de poliedros regulares. Assim, “existem cinco, e somente cinco, classes de poliedros de Platão” (DOLCE; POMPEO, 1993, p. 130). O autor caracteriza classe como um conjunto de poliedros que satisfazem às condições para serem considerados um poliedro de Platão. Dessa forma, nota-se, por exemplo, que um prisma reto de base quadrada satisfaz a todas as condições apresentadas, portanto, é um poliedro de Platão. Porém, se todas as suas faces não forem quadradas, ele não pode ser

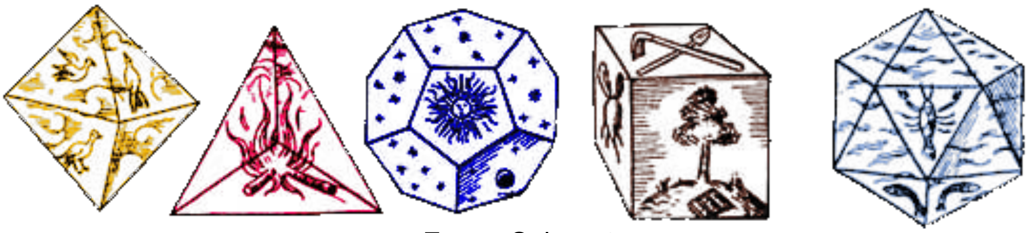
[4] *Poly* é um programa *shareware* desenvolvido em junho de 2003, sendo de responsabilidade da empresa Pedadoguery *Software* Inc., que disponibiliza gratuitamente no endereço digital <http\\:www.peda.com/poly/> uma versão avaliativa completa.

[5] *Timaeus* é um dos diálogos de Platão, principalmente na forma de um longo monólogo do personagem-título, escrito por volta de 360 a.C. O trabalho apresenta a especulação sobre a natureza do mundo físico e os seres humanos (BOYER, 1999).

considerado um poliedro regular, visto que “um poliedro convexo é regular quando: a) suas faces são polígonos regulares e congruentes; b) seus ângulos poliédricos são congruentes” (DOLCE; POMPEO, 1993, p. 132). Os poliedros regulares possuem a seguinte propriedade: “existem cinco, e somente cinco, tipos de poliedros regulares. [...] Todo poliedro regular é um poliedro de Platão, mas nem todo poliedro de Platão é um poliedro regular” (DOLCE; POMPEO, 1993, p. 133).

Portanto, a existência de apenas cinco tipos de poliedros regulares justifica-se em função de seus ângulos poliédricos, visto que, para formar um ângulo poliédrico, são necessárias, no mínimo, três faces, sendo que a soma de seus ângulos não pode ser igual ou maior do que 360°. A Figura 1 traz os cinco poliedros regulares com a ilustração dos elementos associados, por Platão, a cada um deles.

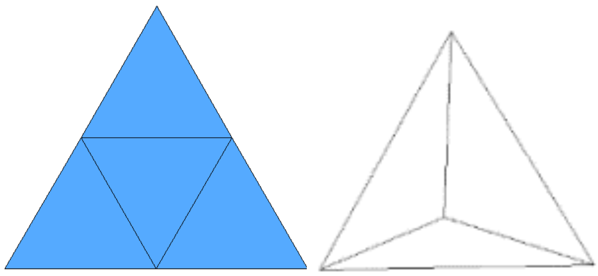
Figura 1: Poliedros de Platão



Fonte: Sulman[6]

Buscando analisar a Relação de Euler para tais poliedros, tem-se que o tetraedro regular é composto por triângulos equiláteros, conforme se pode observar na Figura 2. Em cada vértice do tetraedro concorrem três arestas. O tetraedro possui quatro faces, quatro vértices e seis arestas.

Figura 2: Tetraedro regular



Fonte: *Software Poly Pro*

O hexaedro regular é o único poliedro regular cujas faces são quadradas, conforme se pode notar na Figura 3. Em cada vértice do hexaedro concorrem três arestas, e todas as faces desse poliedro possuem quatro arestas. O hexaedro possui seis faces, oito vértices e doze arestas.

Outro poliedro que também é formado por triângulos equiláteros é o octaedro regular. Ele é composto por oito faces triangulares, seis vértices e doze arestas, sendo que, em cada vértice do octaedro, concorrem quatro arestas, conforme mostra a Figura 4.

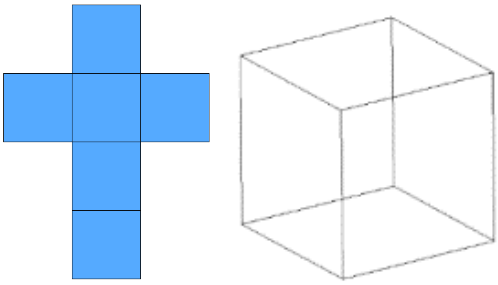
O dodecaedro regular é um poliedro composto por faces pentagonais regulares, como se pode verificar na Figura 5. Em cada vértice do dodecaedro concorrem três arestas, e todas as faces

[6] Site Pitágoras e o Pitagorismo. Disponível em: <http://filovida.org/wp-content/uploads/2015/11/solidos-de-platon.gif>. Acesso em: 28 mar. 2018.

desse poliedro possuem cinco arestas. O dodecaedro possui doze faces, vinte vértices e trinta arestas.

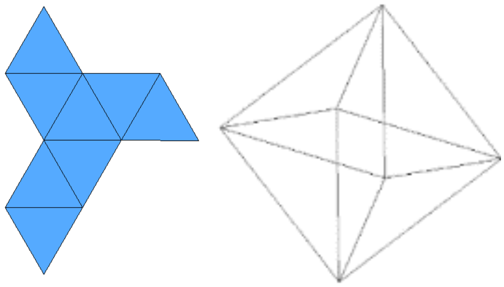
O icosaedro regular também é um poliedro composto por faces triangulares equiláteras, conforme se pode observar na Figura 6. Em cada vértice do icosaedro concorrem cinco arestas, e todas as faces desse poliedro possuem três arestas. O icosaedro possui vinte faces, doze vértices e trinta arestas.

Figura 3: Hexaedro regular



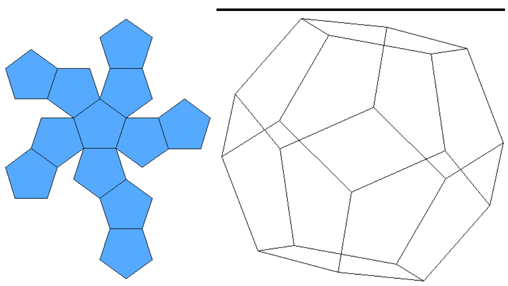
Fonte: *Software Poly Pro*

Figura 4: Octaedro regular



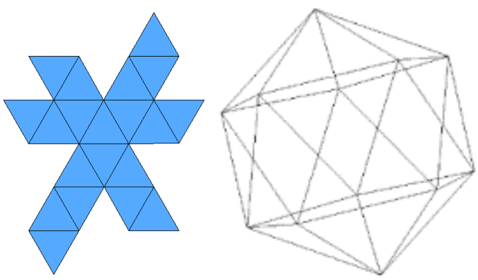
Fonte: *Software Poly Pro*

Figura 5: Dodecaedro regular



Fonte: *Software Poly Pro*

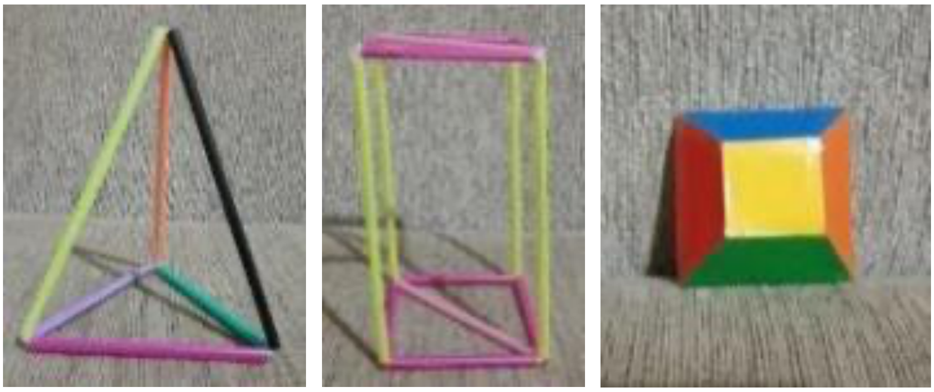
Figura 6: Icosaedro regular



Fonte: *Software Poly Pro*

Assim, apresentam-se os cinco tipos de poliedros regulares existentes. Cada um desses cinco tipos de poliedros regulares pertence a uma das cinco classes de poliedros de Platão. A Figura 7 mostra alguns poliedros de Platão que não são regulares a fim de ilustrar o fato de que nem todo poliedro de Platão é regular.

Figura 7: Tetraedro não regular, hexaedros não regulares



Fonte: Elaborado pelas autoras

A primeira imagem é a de um tetraedro com apenas três faces congruentes. Esse fato não o torna um poliedro regular, mas ele continua sendo um poliedro de Platão. Esse poliedro é conhecido como pirâmide de base triangular. Isso também acontece com as seguintes imagens dessa figura, que pertencem à classe do hexaedro. A segunda imagem, conhecida como tronco de pirâmide de base quadrada, possui todas as suas faces formadas por quadriláteros: quatro trapézios congruentes entre si e dois quadrados não congruentes. A última imagem é conhecida como prisma de base quadrada. Ele possui quatro faces congruentes e duas bases congruentes entre si.

3 POLIEDROS DUAIS

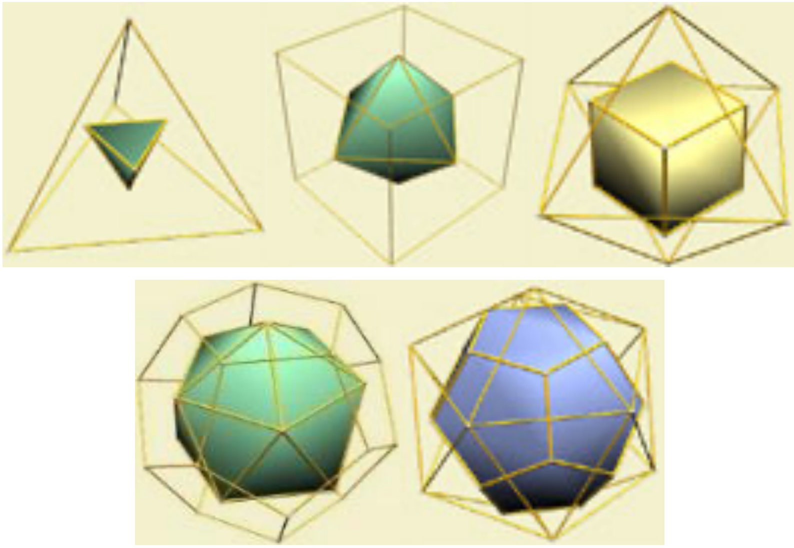
O dual de um poliedro é o nome dado ao poliedro que se obtém quando se une através de segmentos de reta o centro das faces adjacentes de um poliedro. Dessa forma, cria-se um poliedro dentro de outro poliedro, de modo que os vértices do poliedro interior coincidam com o centro das faces do poliedro exterior. Logo, “consideram-se dois poliedros como duais quando um está inscrito no outro, de tal forma que os vértices do poliedro inscrito são os centros das faces[7] do poliedro circunscrito” (KALEFF, 2003, p. 105). Ou seja, construir o poliedro dual de um poliedro regular é inscrever um poliedro em outro de modo que os vértices do poliedro inscrito coincidam com os centros das faces do poliedro original. A Figura 8 mostra os poliedros regulares com seus respectivos duais.

Observa-se, então, que o dual do tetraedro é o próprio tetraedro. O dual do hexaedro é o octaedro, bem como o dual do octaedro é o hexaedro. O dual do dodecaedro é o icosaedro, da mesma forma que o dual do icosaedro é o dodecaedro. Os poliedros duais são também chamados recíprocos, pois o número de faces do dual corresponde ao número de vértices do original, assim como o número de vértices corresponde ao número de faces do original. Então, um poliedro e seu

[7] Note que todo polígono regular possui uma circunferência inscrita, cujo centro pode ser determinado pelo encontro das bissetrizes internas. Esse ponto é chamado centro do polígono ou centro da face do poliedro regular.

dual têm o mesmo número de arestas, porém, o número de vértices e de faces fica invertido, exceto no tetraedro, no qual coincidem.

Figura 8: Poliedros regulares e seus duais



Fonte: Atractor: Poliedros[8]

4 CAMINHOS METODOLÓGICOS E RELATO DA ATIVIDADE DESENVOLVIDA

Este estudo é uma pesquisa participante que, para Gerhardt e Silveira (2009, p. 40), caracteriza-se "pelo envolvimento e identificação do pesquisador com as pessoas investigadas". O estudo teve por objetivo propor uma alternativa para o ensino de Geometria, por meio da utilização de um objeto matemático ainda pouco explorado no ambiente escolar: os poliedros duais. O estudo foi realizado em uma Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio, localizada na mesorregião Metropolitana de Porto Alegre e na microrregião de Gramado-Canela, mais precisamente no Vale do Paranhana. A escola tem uma boa infraestrutura e conta com 14 salas de aula, biblioteca, refeitório, laboratório de informática com acesso à internet, laboratório de Ciências, sala de projeção e vídeo. Para apoio pedagógico, a escola tem duas coordenadoras, duas orientadoras e uma profissional na sala do Atendimento Educacional Especializado - AEE.

A intervenção pedagógica foi realizada com uma turma de 20 alunos de 3º ano do Ensino Médio no ano de 2018, da qual uma das autoras era professora, e as atividades tiveram uma duração de 12 períodos de 48 minutos cada. Durante as aulas, os alunos utilizaram o *software Poly Pro* para visualizar e conhecer os poliedros. Para a construção dos poliedros, foram usados como material didático canudos, linhas, cartolina, régua, cola, fita adesiva e tesoura.

As atividades realizadas foram adaptadas do site da Universidade Federal Fluminense - UFF[9] e do livro "Vendo e entendendo poliedros: do desenho ao cálculo através de quebra-cabeças e outros materiais concretos[10]".

[8] Site Atractor. Disponível em: <http://www.atractor.pt/mat/Polied/>. Acesso em: 28 mar. 2018.

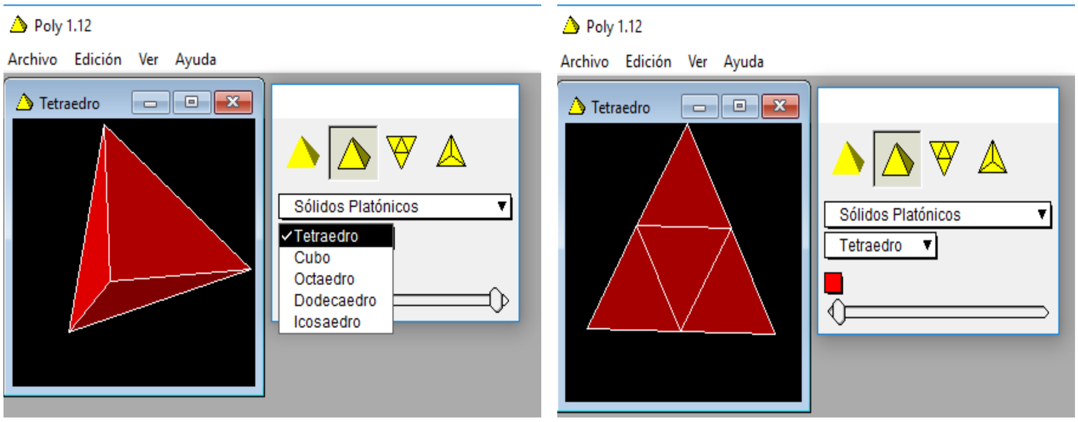
[9] Endereço eletrônico: <http://www.uff.br/cdme/platonicos/platonicos-html/solidos-platonicos-br.html>. Acesso em: 18 mar.2018.

[10] KALEFF, A. M. *Vendo e entendendo poliedros: do desenho ao cálculo através de quebra-cabeças e outros materiais concretos.* 2 ed. Editora UFF, 2003.

4.1 Comprovação da existência de apenas cinco tipos de poliedros regulares

A primeira atividade teve como objetivo comprovar a existência de apenas cinco tipos de poliedros regulares. No primeiro momento, os alunos foram levados para o laboratório de informática, em que cada aluno utilizou um *netbook*[11] com o *software Poly Pro* pré-instalado. Nos primeiros minutos, eles tiveram um tempo livre para conhecer melhor os comandos do aplicativo. Na segunda etapa da aula, os alunos foram direcionados a manipular os poliedros regulares que, no software, estão na categoria dos sólidos platônicos. A Figura 9 mostra a interface desse *software*.

Figura 9: Interface do *software Poly Pro* na categoria dos sólidos platônicos



Fonte: *Software Poly Pro*

Durante a manipulação dos poliedros no *software,* os alunos preencheram o Quadro 1.

Quadro 1: Dados sobre os sólidos platônicos

Poliedro Regular	Forma das faces	Nº de faces (F)	Nº de vértices (V)	Nº de arestas (A)	F + V – A = 2	Nº de faces que se encontram em cada vértice
Tetraedro	triângulos	4	4	6	4 + 4 – 6 = 2	3
Hexaedro	quadrados	6	8	12	6 + 8 – 12 = 2	3
Octaedro	triângulos	8	6	12	8 + 6 – 12 = 2	4
Dodecaedro	pentágonos	12	20	30	12 + 20 – 30 = 2	3
Icosaedro	triângulos	20	12	30	20 + 12 – 30 = 2	5

Fonte: Elaborado pelas autoras

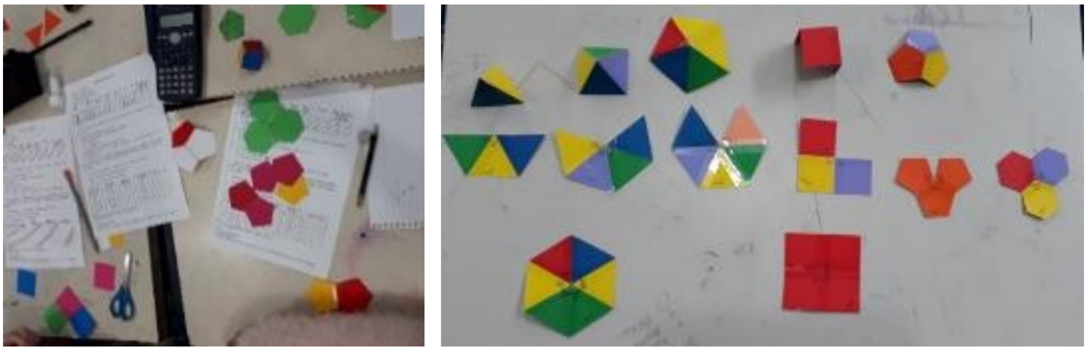
No segundo momento, após realizar o preenchimento do Quadro1, foram realizados alguns questionamentos, como: “O que é um ângulo poliédrico ou bico poliédrico[12] e qual a sua relação

[11] A escola foi beneficiada com 60 *netbooks* e armários móveis pelo Governo do Estado do Rio Grande do Sul no ano de 2015. A entrega dos *netbooks* é referente aos projetos Laboratórios Móveis e Um Computador por Aluno.
[12] Para Machado (1989), bico poliédrico são ângulos poliédricos e faces planas, sendo necessário, para formar um bico poliédrico, unir, no mínimo, três polígonos por um de seus lados, mas podendo utilizar mais de três polígonos, se necessário. É importante lembrar que a soma dos ângulos internos desse bico não pode ser igual ou maior do que 360°.

com o número de faces que se encontram em cada vértice?"; "Será que existe mais algum poliedro regular?"; "Será possível construir um poliedro com um bico poliédrico composto por seis triângulos?"; "E com quatro quadrados?"; "E se fossem quatro pentágonos?"; "Será possível construir um poliedro regular com hexágonos?".

Nesse momento, os alunos apenas responderam aos questionamentos e anotaram suas respostas em uma folha, sem que fossem realizadas quaisquer discussões a respeito delas, visto que a proposta da atividade era que eles, na próxima aula, por meio de construções, pudessem analisar se suas hipóteses estavam corretas. Assim, depois de responderem aos questionamentos, os alunos foram divididos em grupos e vários polígonos regulares foram entregues para cada grupo (triângulos, quadrados, pentágonos e hexágonos). Depois, foi proposto trabalhar com o conceito de bico poliédrico e solicitado que construíssem, por meio de hipóteses, todas as possibilidades de construção de bicos poliédricos com aqueles polígonos. A Figura 10 mostra alguns bicos poliédricos formados pelos alunos.

Figura 10: Bicos poliédricos formados com polígonos



Fonte: Elaborado pelas autoras

Depois de construir e analisar os possíveis bicos poliédricos formados, os alunos retomaram a folha com as respostas dos questionamentos anteriores e fizeram algumas conjecturas a respeito das suas construções. Comprovaram a existência de apenas cinco tipos de poliedros regulares, pois, inicialmente, imaginavam poder existir um número maior deles. Em um primeiro momento, trabalhar com hipóteses não foi uma atividade fácil, visto que não estavam acostumados com esse tipo de interpretação.

Mas, logo após as primeiras conjecturas, já se familiarizaram com a estratégia, conseguindo-se observar resultados positivos frente à proposta. Portanto, eles perceberam que existem apenas cinco possíveis bicos poliédricos com polígonos regulares de mesmo tipo, pois, para formar um bico poliédrico, é necessário unir, no mínimo, três polígonos por um de seus lados e a soma dos ângulos internos desse bico não pode ser igual ou maior do que 360º.

Sendo assim, constataram não ser possível construir mais nenhum tipo de poliedro regular, pois não é possível construir mais do que cinco tipos de bico poliédrico. Logo, não é possível construir um bico poliédrico usando seis triângulos, nem com quatro quadrados, nem com três pentágonos e nem com três hexágonos. As atividades desenvolvidas nessa seção tiveram duração de dois períodos de 48 minutos cada.

4.2 Construção dos poliedros regulares com polígonos

Nesse momento, os alunos construíram, usando a ideia de bico poliédrico, os cinco poliedros regulares, utilizando aqueles polígonos regulares entregues anteriormente, conforme mostra a

Figura 11.

Figura 11: Os cinco sólidos regulares construídos com polígonos

Fonte: Elaborado pelas autoras

Com a intenção de posteriormente realizar a constatação geométrica, foi solicitado aos alunos que preenchessem o Quadro 2.

Quadro 2: Verificação geométrica da existência de apenas 5 poliedros regulares

Polígono regular	Valor do ângulo interno	Números de polígonos usados	Soma dos ângulos internos	Poliedro formado
Triângulos	60°	3	180°	Tetraedro
Triângulos	60°	4	240°	Octaedro
Triângulos	60°	5	300°	Icosaedro
Triângulos	60°	6	360°	Não existe
Quadrados	90°	3	270°	Hexaedro
Quadrados	90°	4	360°	Não existe
Pentágonos	108°	3	324°	Dodecaedro
Pentágonos	108°	4	432°	Não existe
Hexágonos	120°	3	360°	Não existe

Fonte: Elaborado pelas autoras

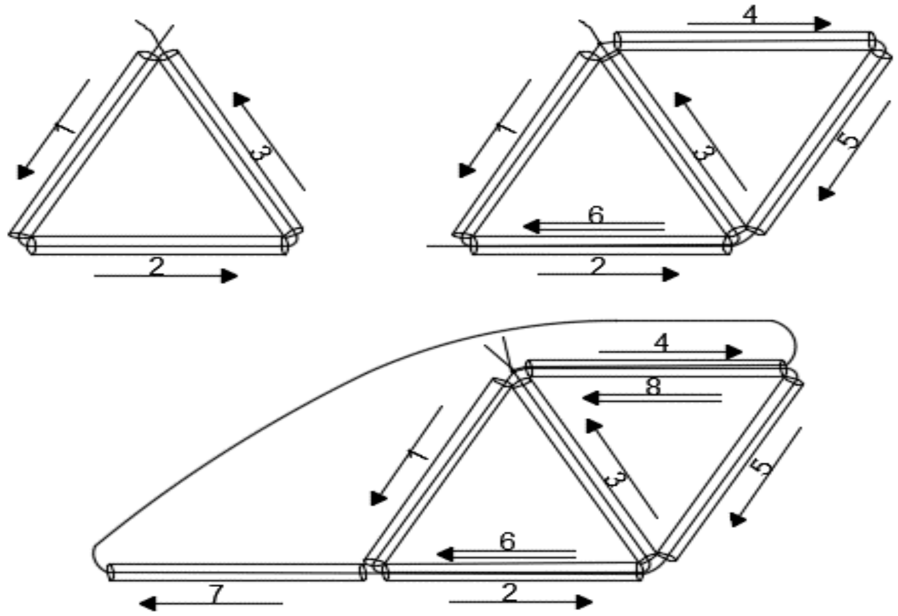
Com os resultados obtidos, foi possível constatar, geometricamente, a existência de apenas cinco tipos de poliedros regulares. As atividades desenvolvidas nessa seção tiveram duração de dois períodos de 48 minutos cada.

4.3 Construção do esqueleto do tetraedro regular, hexaedro regular e octaedro regular com canudos

Após as constatações da existência de apenas cinco tipos de poliedros regulares e suas construções com polígonos, foi apresentado aos alunos o modelo de esqueleto dos poliedros. Segundo Kaleff (2003), existem dois tipos de representações concretas que auxiliam no reconhecimento e na análise das propriedades dos poliedros: o modelo casca, que representa a superfície do poliedro, e o modelo esqueleto, que representa a estrutura das arestas do poliedro.

Essa atividade teve como objetivo a construção dos esqueletos de alguns poliedros regulares analisando o porquê do hexaedro se deformar, não conseguindo manter a estrutura de um poliedro rígido. Para realizar as seguintes construções, foi utilizado o esquema fornecido em Kaleff (2003). O primeiro poliedro construído foi o tetraedro regular. Para essa construção, os alunos precisaram de um metro de linha, seis pedaços de 15 cm de comprimento de canudos de mesma cor (optou-se, em função do tempo, já estabelecer as medidas, visto que se teve a intenção de mais tarde utilizar esses poliedros para a construção dos poliedros duais). A Figura 12 mostra os passos a serem seguidos para essa construção.

Figura 12: Esquema do Tetraedro regular



Fonte: Adaptado de Kaleff (2003, p.134)

Essa foi a primeira construção utilizando canudos e linhas. Apesar de os alunos ainda não terem trabalhado com canudos, todos conseguiram realizar a construção. O esquema foi entregue em uma folha, e a professora acompanhou as construções, certificando-se de que todos os estudantes construíram esse poliedro.

O segundo poliedro construído foi o octaedro regular. Para essa construção, foram necessários dois metros de linha, doze pedaços de 12 cm de comprimento de canudos de mesma cor. Inicialmente, com esses canudos e o fio de linha, foram construídos quatro triângulos e, na sequência, esses triângulos foram unidos dois a dois. Os próximos passos foram realizados conforme a Figura 13.

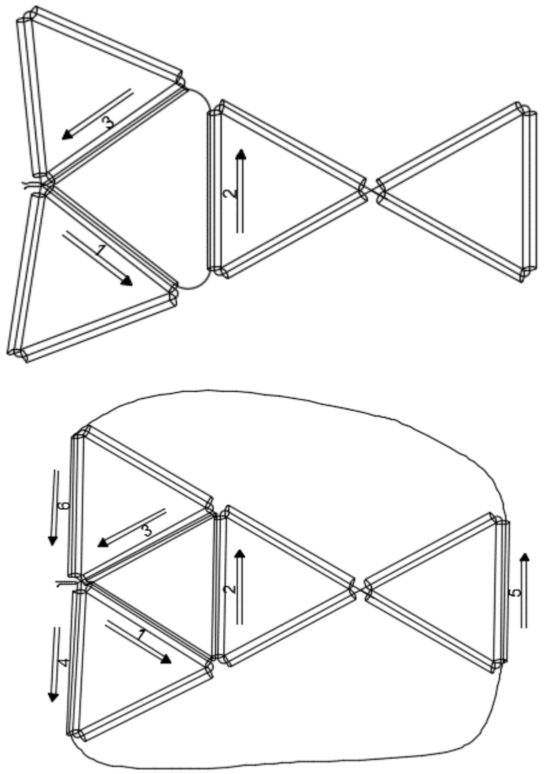
Nessa construção, os alunos já estavam familiarizados com os materiais utilizados e não houve grandes dificuldades para realizar a tarefa proposta.

O terceiro poliedro construído foi o hexaedro regular. Para essa construção, foram necessários dois metros de linha, doze pedaços de comprimento de 17 cm de canudos de mesma cor. A Figura 15 mostra os passos a serem seguidos para realizar a construção do hexaedro.

Ao finalizar a construção do hexaedro, os alunos puderam perceber que o poliedro não permanecia em pé sem se deformar. Nesse momento, foram realizados questionamentos a respeito dessa situação, chegando-se à conclusão de que o triângulo é um polígono rígido, ou seja, sua forma é estável. Para auxiliar nessa compreensão, foram construídos polígonos com canudos e realizadas tentativas de deformação.

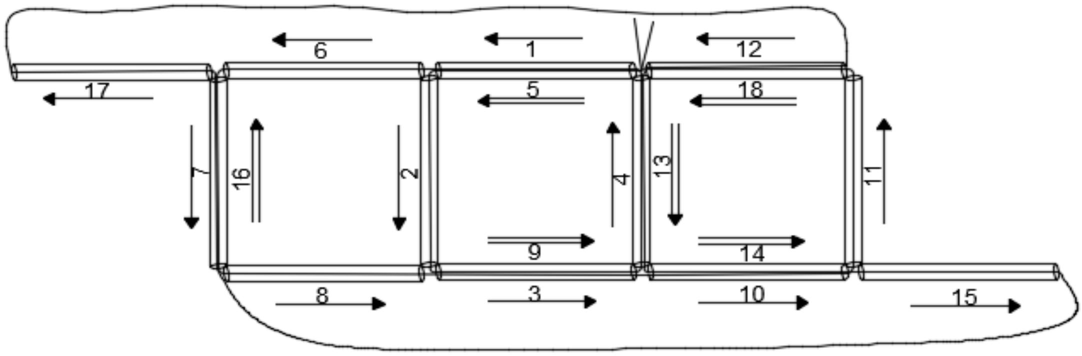
Após as construções, realizou-se uma reflexão sobre como deixar os poliedros estáveis, concluindo-se que uma opção era construir diagonais, pois, no caso do hexaedro, cada face estaria sendo dividida em dois triângulos. A Figura 16 traz algumas construções realizadas pelos alunos.

Figura 13: Esquema do Octaedro regular



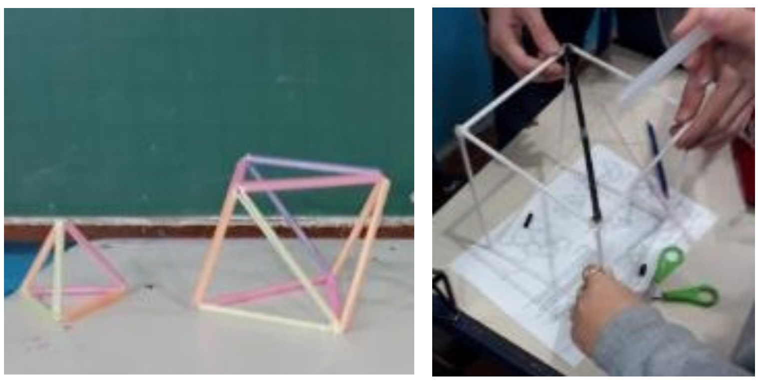
Fonte: Adaptado de Kaleff (2003, p.134)

Figura 15: Esquema do Hexaedro regular



Fonte: Adaptado de Kaleff (2003, p.136)

Figura 16: Esqueleto dos poliedros regulares: tetraedro, octaedro e hexaedro



Fonte: Elaborado pelas autoras

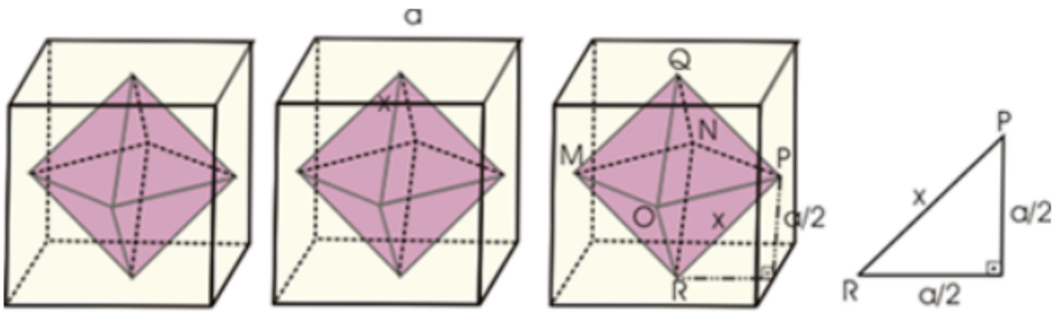
Dessa forma, terminou-se a construção de alguns dos esqueletos dos poliedros regulares, sendo eles o tetraedro regular, o octaedro regular e o hexaedro regular.

4.4 Construção dos poliedros duais

Inicialmente, construiu-se um hexaedro regular com seu dual, sendo o dual do hexaedro um octaedro. Considera-se o hexaedro como o poliedro original e o octaedro regular o seu dual. Para deduzir uma fórmula para encontrar o valor da aresta do dual, denota-se a aresta do hexaedro como (a) e a aresta do octaedro sendo (x).

O hexaedro regular, nesse caso, é um poliedro com seis faces quadradas, considerando o triângulo retângulo destacado na Figura 17.

Figura 17: Hexaedro regular com o seu dual



Fonte: UFF – Poliedros de Platão e seus duais[13]

Logo, a figura mostra que se pode considerar (x) como a hipotenusa e a/2 a aresta do triângulo retângulo. Dessa forma, pelo Teorema de Pitágoras, tem-se que:

$$x^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \rightarrow x = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4}} \rightarrow x = \sqrt{\frac{2a^2}{4}} \rightarrow x = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Depois de deduzir a fórmula para encontrar a medida da aresta do dual do hexaedro, realizou-se a sua construção. Nesse momento, foi sugerido aproveitar o hexaedro já construído anteriormente. Sabendo que esse hexaedro tinha uma aresta medindo 17cm, os alunos realizaram os cálculos para construir o seu respectivo dual. Ao finalizar os cálculos, perceberam que o valor da aresta do octaedro tem um valor aproximado de 12 cm e que eles também já tinham esse poliedro construído.

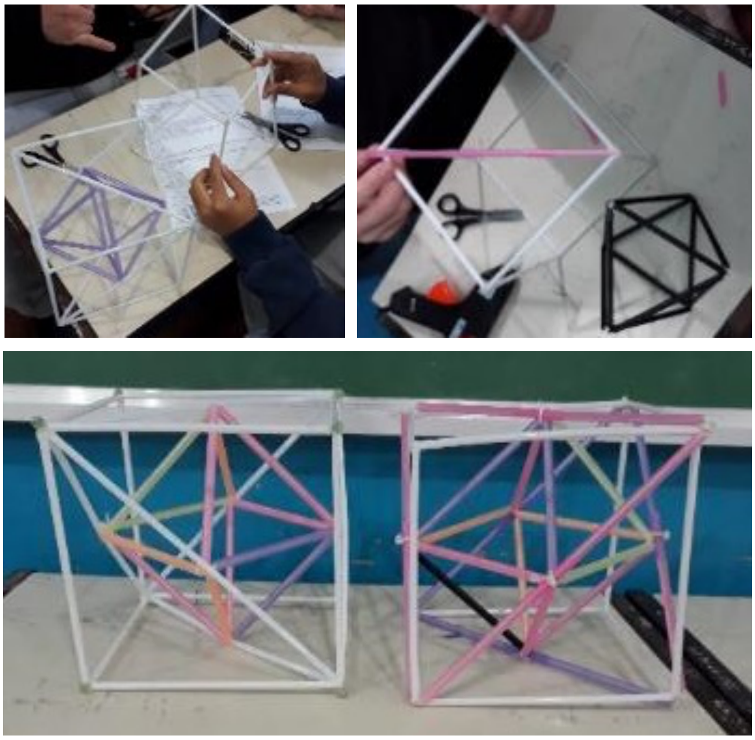
Para se juntar o octaedro ao centro das faces do hexaedro, foram realizados alguns questionamentos sobre como saber onde está localizado o centro da sua face, que, no caso do hexaedro, é um quadrado. Nesse momento, foi necessário relembrar o conceito de bissetriz e lembrar que, em todo polígono regular, tem-se uma circunferência inscrita, cujo centro pode ser determinado pelo encontro das bissetrizes internas. Outro conceito relembrado é que, no caso do quadrado, a diagonal coincide com a bissetriz e o ponto de encontro delas é exatamente o meio.

Dessa maneira, após essas conclusões, os alunos utilizaram as diagonais que já tinham sido colocadas no hexaedro e realizaram a medição da diagonal, dividindo esse valor ao meio. Em seguida, todas as diagonais foram marcadas na sua metade com uma caneta. Essa marcação

[13] Site da Universidade Federal Fluminense. Disponível em: <http://www.cdme.im-uff.mat.br/poliedros_platao_dual/aluno05.html>. Acesso em: 21 de mar. 2018.

serviu como referência para posicionar os vértices do octaedro. Foram usadas duas maneiras diferentes para firmar essas estruturas, sendo uma delas com cola quente e a outra com a utilização de linha de costura para amarrar. A Figura 18 mostra essas construções.

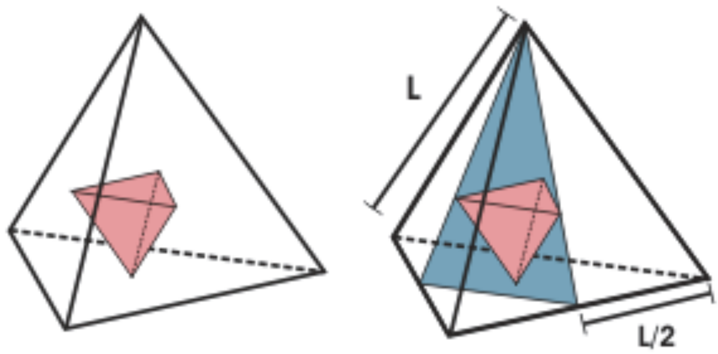
Figura 18: Construção do Hexaedro e seu dual



Fonte: Elaborado pelas autoras

Na sequência, construiu-se um tetraedro regular com seu dual, sendo o dual do tetraedro o próprio tetraedro. Ao considerar o tetraedro com aresta L como o poliedro original, deduz-se a fórmula da aresta do seu dual de lado l, conforme a Figura 19.

Figura 19: Tetraedro com o seu dual

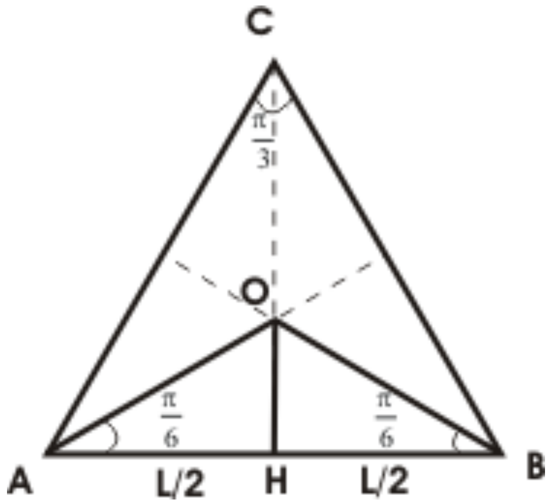


Fonte: UFF – Poliedros de Platão e seus duais[14]

Sendo o tetraedro um poliedro regular que possui quatro faces triangulares equiláteras, então, ABC é uma dessas faces, considerando o seu baricentro, indicado por O. Para isso, basta tomar as bissetrizes de dois dos lados da face.

[14] Site da Universidade Federal Fluminense. Disponível em: <http://www.cdme.im-uff.mat.br/poliedros_platao_dual/aluno07.html>. Acesso em: 21 de mar. 2018.

Figura 20: Triângulo equilátero ABC



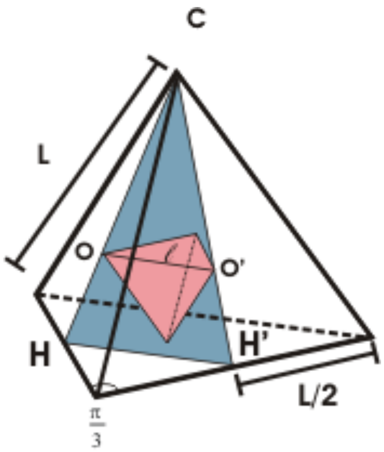
Fonte: UFF – Poliedros de Platão e seus duais

Considere o segmento $\overline{CH}$ uma das alturas da face (que coincide com a bissetriz) e tome os segmentos $\overline{AO}$, $\overline{BO}$ e $\overline{CO}$. Dessa forma, a face ABC fica dividida em três triângulos isósceles que são congruentes entre si e formam os triângulos ABO, BCO e CDO. Então, OÂB = $\frac{\pi}{6}$.

$$sen\,\frac{\pi}{6} = \frac{\overline{OH}}{\overline{AO}} \rightarrow \frac{\overline{OH}}{\overline{CO}} = \frac{1}{2} \rightarrow \overline{OH} = \frac{1}{2}.\overline{CO} \rightarrow \overline{CH} = \overline{CO} + \overline{OH} \rightarrow \overline{CH} = \frac{3}{2}\overline{CO}$$

Agora, no tetraedro, observe o triângulo isósceles CHH' com base medindo *L*/2. Nele, os segmentos $\overline{OH}$ e $\overline{O'H'}$ têm a mesma medida.

Figura 21: Tetraedro com triângulo CHH'



Fonte: UFF – Poliedros de Platão e seus duais

Pelo teorema de Tales, tem-se que

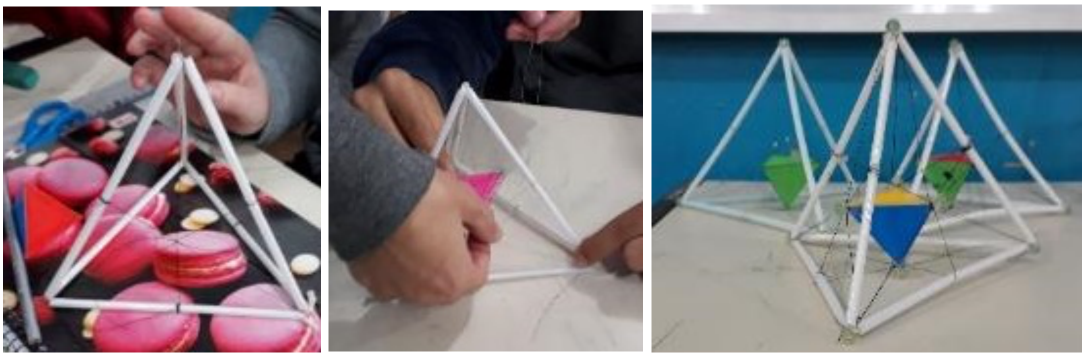
$$\frac{\overline{CO}}{\overline{l}} = \frac{\overline{CH}}{\frac{L}{2}} \rightarrow \frac{\overline{CO}}{\overline{l}}\,.\,\frac{L}{2} = \frac{3}{2}.\overline{CO} \rightarrow L = 3l$$

Depois de deduzir a fórmula para a medida da aresta do dual do tetraedro, foi realizada a sua construção. Nesse momento, foi sugerido aproveitar o tetraedro já construído anteriormente com canudos e calcular a medida da aresta para o seu dual, sabendo que esse tetraedro tinha uma aresta medindo 12 cm. Os alunos realizaram os cálculos e descobriram que precisavam de um tetraedro com aresta medindo 4 cm. Para a construção desse tetraedro, foram utilizados polígonos de papel.

Para juntar o tetraedro dual ao centro das faces do tetraedro original, foram realizados alguns questionamentos sobre como saber onde está localizado o centro da face de um triângulo. Nesse momento, foi necessário relembrar o conceito de baricentro que, no caso do triângulo equilátero, coincide com o incentro, que é o encontro das bissetrizes.

Depois desses questionamentos, os alunos utilizaram linha de costura e encontraram o baricentro de cada face. Ainda valendo-se da linha de costura, cada vértice foi amarrado com um nó ao ponto médio de seu segmento oposto. Ao finalizar as três bissetrizes, o ponto de encontro delas foi utilizado como o centro da face do tetraedro. Depois de terem realizado essa etapa, os alunos utilizaram linha de costura para unir o tetraedro dual ao centro da face do tetraedro original. A Figura 22 traz essas construções.

Figura 22: Construção do Tetraedro e seu dual



Fonte: Elaborado pelas autoras

Dessa forma, finalizaram-se as construções do tetraedro e do hexaedro e de seus respectivos duais. Durante essas construções, foi possível relembrar vários conceitos já trabalhados anteriormente, como bissetriz, incentro, baricentro, características dos poliedros, relação de Euler, Teorema de Pitágoras e Teorema de Tales. Portanto, durante a realização dessa atividade prática, utilizando materiais manipulativos, os alunos tiveram a oportunidade de perceber que, para se trabalhar com materiais manipulativos, é necessário saber a teoria em que se baseiam as construções. Dessa maneira, conseguiu-se alcançar o objetivo proposto com esta intervenção pedagógica.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste momento, é conveniente ressaltar a dificuldade em encontrar fontes de pesquisas confiáveis que tratem sobre os poliedros duais. Diante desse fato, este estudo baseou-se nas contribuições de Dolce e Pompeo (1993) para o estudo dos poliedros de Platão e de Kaleff (2003) para o estudo dos poliedros duais e suas construções. No decorrer do estudo, percebeu-se que, algumas vezes, as expressões "poliedros de Platão" e "poliedros regulares" são utilizadas como sinônimos em algumas literaturas. Em função disso, aproveita-se esse relato de experiência para enfatizar que existem poliedros de Platão que não são regulares, como, por exemplo, os prismas de base quadrada.

No que se refere ao objetivo deste trabalho, que, além de propor uma alternativa para o ensino de Geometria, foi o de construir, em especial, alguns poliedros regulares e os seus duais, ficou evidente a importância da posição do professor como um agente que busca a construção de um ambiente mais interessante, possibilitando ao aluno trabalhar com materiais que possam facilitar sua aprendizagem. Portanto, percebeu-se que o fato de trabalhar com materiais manipulativos pode auxiliar o aluno a ler, interpretar e calcular, pois não se trata apenas da aplicação de fórmulas, e sim de uma combinação entre a teoria e a prática, além de proporcionar uma aula criativa que visa a um ambiente mais investigativo e construtivo.

O estudo aqui apresentado é resultado de uma intervenção pedagógica, que buscou propor uma alternativa para o ensino de Geometria, por meio da utilização de um objeto matemático ainda pouco explorado no ambiente escolar, a saber: os poliedros duais.

Durante a realização das atividades, foi evidenciado o interesse e o entusiasmo dos alunos com cada prática proposta. Assim, notou-se que, na Matemática, em especial no ensino de Geometria, quando se trabalha com a utilização de materiais manipulativos, tem-se uma alternativa viável, visto que há a possibilidade de se relacionar os conceitos com o material construído. Portanto, conclui-se que o ensino de Geometria, quando trabalhado de forma prática, pode ser uma ferramenta com potencialidades para o desenvolvimento dos alunos, evidenciando-se, também, que a construção dos poliedros duais pode ser uma alternativa.

REFERÊNCIAS

BRASIL. MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CULTURA. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio.** Volume 2: Ciência da Natureza, Matemática e tecnologia. Brasília: MEC, 2006.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. 2. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 1999.

D'AMBROSIO, U. **Uma síntese sociocultural da História da Matemática.** São Paulo: Proem Editora, 2011.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos de Matemática Elementar:** Geometria espacial posição e métrica. 5 ed. São Paulo: Atual, 1993.

GERHARDT, T. E.; SILVEIRA, D. T. (Orgs.) **Métodos de pesquisa**. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2009.

KALEFF, A. M. **Vendo e entendendo poliedros:** do desenho ao cálculo através de quebra-cabeças e outros materiais concretos. 2 ed. Niterói: Editora UFF, 2003.

MACHADO, N. J. **Os Poliedros de Platão e os Dedos da Mão.** São Paulo: Scipione, 1989.

PASSOS, C. L. B.; NACARATO, A. M. O ensino de geometria no ciclo de alfabetização: um olhar a partir da provinha Brasil. **Revista Educação Matemática em Pesquisa**, São Paulo, v. 16, n. 4, p. 1147 - 1168, 2014.

ROQUE, T. **História da matemática:** uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

Submetido em agosto de 2019.
Aprovado em maio de 2020.