UMA PROPOSTA PARA INTEGRAR A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA AO ENSINO DE MATEMÁTICA: HISTÓRIA DAS MATRIZES E AS REGRAS DO DISCURSO MATEMÁTICO

A PROPOSAL TO INTEGRATE THE HISTORY OF MATHEMATICS INTO THE TEACHING OF MATHEMATICS: HISTORY OF MATRICES AND THE RULES OF THE MATHEMATICAL DISCOURSE

BERNARDES, Aline[1]

RESUMO

Neste artigo será apresentada uma proposta para integrar a história da matemática ao ensino de matemática, introduzida por Tinne Hoff Kjeldsen (2011) e fundamentada na teoria da matemática como um discurso de Anna Sfard (2008). As ideias serão ilustradas a partir de dois momentos históricos do desenvolvimento do conceito de matriz. A proposta foi implementada em três estudos de campo, como parte da pesquisa de doutorado desta autora (BERNARDES, 2016). Na pesquisa, buscou-se articular história das matrizes ao ensino de matrizes e de determinantes, no contexto da disciplina Álgebra Linear, com o objetivo de investigar o potencial de fontes históricas em promover reflexões sobre regras metadiscursivas. Alguns resultados e conclusões do estudo serão apresentados com o intuito de discutir os efeitos da proposta.

Palavras-chave: História das matrizes. Ensino de matrizes. Regras metadiscursivas. Conflitos comognitivos.

ABSTRACT

In this paper, a proposal to integrate the history of mathematics into the teaching of mathematics is presented, which was introduced by Tinne Hoff Kjeldsen (2011) and is based on Anna Sfard's (2008) theory of mathematics as a discourse. The ideas are ilustrated with two historical moments on the development of matrix concept. The proposal was implemented in three field studies as part of this author's doctoral research (BERNARDES, 2016). In the research, we sought to articulate the history of matrices to the teaching of matrices and determinants, in the context of Linear Algebra module, in order to investigate the potential of historical sources in fostering reflections on metadiscursive rules. Some of the results and conclusions of the study are presented with the aim of discussing the effects of the proposal.

Keywords: History of matrices. Teaching of Matrices. Metadiscursive Rules. Commognitive conflicts.

1 INTRODUÇÃO

Nas últimas décadas, muitas pesquisas têm discutido e defendido a introdução de uma perspectiva histórica no ensino de matemática. Além disso, muitas propostas têm surgido, apresentando diferentes formas de integrar a história da matemática ao ensino de matemática, com diferentes objetivos e fundamentadas a partir de diferentes justificativas.

Fried (2014) classifica as justificativas usadas em tentativas de relacionar a história da matemática com a educação matemática em três temas: o *tema motivacional*, o *tema curricular* e o *tema cultural*. O *tema motivacional*, de cunho afetivo, inclui exemplos de uso da história que buscam tornar a matemática mais interessante, menos formal, mais humana. São exemplos desse tema o uso de anedotas ou histórias para que os estudantes percebam os matemáticos como

[1] Doutora em Engenharia de Sistemas e Computação pelo Instituto Alberto Luiz Coimbra de Pós-Graduação e Pesquisa de Engenharia, da Universidade Federal do Rio de Janeiro (COPPE/UFRJ). Professora na Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro (UNIRIO), Rio de Janeiro, RJ, Brasil. Endereço eletrônico: aline.bernardes@uniriotec.br.

seres humanos, passíveis de erros, como qualquer um. Não importa se as histórias são verdadeiras ou se contém erros.

O *tema curricular*, de cunho mais pedagógico e, em certa medida, motivacional também, inclui os exemplos que usam a história para ensinar tópicos do currículo como funções, equações, números, entre outros. Nessa perspectiva, os tópicos podem ser ensinados primeiro para depois serem discutidos de um ponto de vista histórico ou pode-se partir da história para introduzir um determinado conceito. Os conceitos, em algum momento, são abordados do ponto de vista moderno, pois a perspectiva é determinada pelo currículo e o tratamento histórico tem que ser adaptado para ficar consistente com a abordagem moderna.

O *tema cultural*, como o próprio título sugere, parte da perspectiva de que matemática e a cultura são inseparáveis. A matemática é concebida como uma atividade essencialmente humana, como uma expressão da cultura, logo a história e a matemática também são inseparáveis. A história é vista aqui como parte da própria matemática. Tal perspectiva contribui para transformar a imagem que os estudantes têm da matemática, em que os objetos matemáticos e suas relações são eternas, são como entidades platônicas, vistas da mesma forma em todo lugar, em qualquer tempo. Um dos exemplos citados por Fried (2014) nesse tema é a *etnomatemática*, em referência às pesquisas de Ubiratan D'Ambrosio.

Fried (2014) critica as justificativas do tema motivacional por suporem que a matemática por si só não é interessante e por ignorarem a própria especificidade da história como uma forma de conhecimento a ser aprendido e levado a sério. As justificativas do tema curricular também são criticadas por supostamente enxergarem os conceitos modernos como implícitos na matemática do passado. O tema cultural parece ser o mais adequado, pois em contraposição à visão a-histórica da matemática, a visão cultural contribui para promover um senso de diversidade nos estudantes, a partir do reconhecimento de diferentes contextos, necessidades e práticas, os quais contribuíram para a construção do que chamamos hoje de matemática.

Jankvist (2009) propõe outra classificação para os argumentos sobre o uso da história no ensino com duas categorias: *história como uma ferramenta*[2] e *história como um objetivo*[3]. Os argumentos classificados em *história como uma ferramenta* são aqueles que têm por objetivo apenas a aprendizagem de matemática. Tal propósito se relaciona com o ensino e aprendizagem de questões internas à matemática, por exemplo, os conjuntos numéricos e suas cardinalidades, funções etc. Na categoria *história como um objetivo*, encontram-se os argumentos que levam em conta a aprendizagem de aspectos da própria história da matemática. Não se trata de aprender história em si, mas sim de aprender aspectos do desenvolvimento histórico da matemática, por exemplo: mostrar aos estudantes que a matemática se desenvolve ao longo do tempo, que seu desenvolvimento se deve a muitas culturas diferentes e que essas culturas moldam a matemática e também o inverso.

As categorias acima mostram que a história da matemática pode desempenhar muitos papéis no ensino de matemática. Giraldo e Roque (2014) sugerem que a história da matemática pode contribuir para um ensino mais problematizado da matemática. Esses pesquisadores fazem uma crítica ao modo “naturalizado” com o qual os conceitos matemáticos são apresentados no ensino básico e no superior, querendo dizer que eles são ensinados como se fossem um dado,

[2] No original: *history as a tool.*
[3] No original: *history as a goal.*

um fato inquestionável. Questões relacionadas à existência, à importância e ao papel dos conceitos na matemática não costumam ser exploradas, estes são em geral assumidos como dados arbitrariamente.

Os termos “problematizado” e “naturalizado” carecem de uma descrição mais precisa, mas a ideia é que a história da matemática pode contribuir para fornecer um contexto para o ensino, em que a gênese e momentos históricos do desenvolvimento dos conceitos podem trazer mais significados à sua aprendizagem.

Para além de promover a integração da história da matemática ao ensino de matemática, é importante fazer reflexões sobre essa integração, sobre como ela pode ser feita, bem como avaliar possíveis benefícios e desdobramentos. Nessa direção, discussões sobre referenciais teóricos, que sejam adequados para embasar investigações de propostas de ensino com perspectiva histórica, são importantes e necessárias. Uma das temáticas presentes nos eventos[4] internacionais ligados ao *International Study Group on the Relations Between the history and pedagogy of mathematics (HPM)* diz respeito justamente aos referenciais teóricos e metodológicos que podem ser usados para integrar a história ao ensino.

Do ponto de vista histórico, quando se deseja planejar uma proposta de ensino com perspectiva histórica, uma preocupação que se coloca é como elaborar a proposta sem distorcer a história e sem interpretar a matemática do passado a partir das concepções da matemática do presente, isto é, sem projetar no passado os conceitos como entendidos e definidos hoje. Concordando com Fried (2014), a história da matemática tem a sua própria natureza e especificidade enquanto um corpo de conhecimento.

Neste artigo[5], será apresentada uma proposta para integrar história da matemática ao ensino de matemática, introduzida pela pesquisadora dinamarquesa Tinne Hoff Kjeldsen (2011). Tal proposta baseia-se na teoria da matemática como um discurso de Anna Sfard (2008). Será apresentado, em seguida, um exemplo de implementação da proposta de Kjeldsen (2011), a partir de um experimento realizado na pesquisa de tese desta autora (BERNARDES, 2016), a qual articula história das matrizes com o ensino de matrizes, no contexto da disciplina Álgebra Linear.

2 A PERSPECTIVA DISCURSIVA DA MATEMÁTICA

Sfard, em seu livro “*Thinking as communicating*” (2008), introduz os princípios básicos da teoria da “comognição”, apoiando-se principalmente nas ideias do psicólogo Lev Vygotsky e do filósofo Ludwig Wittgenstein. Sfard baseia-se na perspectiva da aprendizagem por participação, a qual enfatiza os aspectos sociais, culturais e históricos do desenvolvimento humano ao deslocar o foco da aprendizagem do individual para o coletivo: “esta abordagem considera todas as capacidades exclusivamente humanas como resultado do fato fundamental de que humanos são seres sociais, engajados em atividades coletivas desde o dia em que nasceram e por toda sua vida” (SFARD, 2008, p. 79, tradução nossa).

Nesse contexto, as noções de comunicação e de pensamento são reconceituadas. A comunicação passa a ser vista como um tipo de atividade coletiva padronizada, que se dá por

[4] Por exemplo, o *European Summer University on the History and Epistemology in Mathematics Education (ESU)*, cuja 8ª edição ocorreu em julho de 2018, em Oslo. E também os *ICME satellite meetings of HPM*, cuja última edição ocorreu em 2016, em Hamburgo.

[5] Este texto é uma versão ampliada do artigo apresentado no VII SIPEM (BERNARDES, 2018), realizado na cidade Foz do Iguaçu, Paraná, em novembro de 2018.

meio de ações e reações entre os indivíduos que estão tentando se comunicar. O pensamento é definido como uma versão individualizada da comunicação interpessoal, isto é, o pensamento é um ato de comunicação consigo mesmo e não precisa ser visível, audível, ou mesmo expresso por palavras.

Colocar o pensamento como um ato de comunicação possibilita transpor a ideia de que o pensamento precede a comunicação e possibilita olhar para processos cognitivos e processos de comunicação interpessoal como diferentes manifestações do mesmo fenômeno. Para destacar a unidade entre esses dois processos, Sfard cunhou o termo "*commognition*" combinando as palavras *communicational* e *cognition*. Os termos "comognição" e "comognitivo" serão adotados como tradução para "*commognition*" e "*commognitive*", respectivamente.

Os diferentes tipos de comunicação são chamados discursos, os quais são distinguidos uns dos outros a partir de um conjunto de características, como: o uso de palavras (número, função, limite, matriz), os mediadores visuais (gráficos, figuras geométricas), as narrativas e as rotinas (padrões repetitivos observados na produção do discurso e que podem ser descritos por processos moldados por regras).

Dessa forma, a matemática passa a ser concebida como uma forma bem definida de comunicação ou um tipo de discurso governado por determinadas regras. Aprender matemática requer participar ativa e efetivamente do discurso matemático e, ainda, ser capaz de alterá-lo.

As regras que moldam o discurso são divididas em dois grupos: *regras do nível do objeto* e as *regras metadiscursivas* ou *metarregras*. As regras do nível do objeto referem-se a "narrativas sobre regularidades no comportamento de objetos do discurso" e as metarregras referem-se a "padrões nas atividades dos discursantes quando tentam produzir e fundamentar narrativas do nível de objeto" (SFARD, 2008, p.120).

No discurso matemático, as regras do nível de objeto têm relação direta com as propriedades de objetos matemáticos, por exemplo: na geometria euclidiana, a soma dos ângulos internos de um triângulo sempre resulta em 180°. As metarregras referem-se às ações dos discursantes. Tais regras são geralmente implícitas no discurso e se manifestam quando julgamos, por exemplo, se uma descrição particular pode ser considerada como uma definição matemática ou se uma demonstração pode ser aceita como correta.

Para se apropriar do discurso matemático, o aprendiz deve ter domínio de ambos os tipos de regras. E como as metarregras são geralmente implícitas no discurso, é pouco provável que sejam percebidas naturalmente, sem que situações de aprendizagem sejam criadas com esse fim.

Para promover a aprendizagem de novas metarregras ou a mudança delas, Sfard (2008) propõe a noção de *conflito comognitivo*, descrito como um fenômeno que ocorre quando narrativas conflitantes se originam a partir de discursos moldados por diferentes metarregras. A ideia é criar cenários de aprendizagem em que tais conflitos sejam estimulados.

3 COMO INTEGRAR HISTÓRIA DA MATEMÁTICA AO ENSINO?

Baseada na teoria de Sfard (2008), Kjeldsen (2011) introduziu um argumento teórico defendendo que a história da matemática desempenha um papel fundamental para "iluminar as metarregras" do discurso matemático. Tais regras são historicamente estabelecidas. Além disso, a classificação em regras do nível do objeto e regras metadiscursivas não é absoluta. Uma metarregra em um discurso pode se tornar uma regra do nível do objeto em outro discurso, por exemplo: a afirmação “multiplicar um número pela soma de outros dois números é o mesmo que multiplicar cada parcela da soma pelo número e depois somar os produtos” é considerada uma metarregra na aritmética. No discurso da álgebra, a afirmação transforma-se na regra do nível do objeto: $a(b+c)=ab+ac$. (SFARD, 2008, p. 202).

Kjeldsen argumenta que *regras metadiscursivas no discurso da matemática* tornam-se *regras do nível do objeto no discurso da história*. Portanto, por meio da história da matemática, as metarregras deixam de ser tácitas e podem tornar-se objetos de reflexão (KJELDSEN, 2011).

O argumento acima foi o ponto de partida da pesquisa de doutorado desta autora. Na parte empírica da pesquisa, foram planejadas situações em que os participantes foram estimulados a investigar o desenvolvimento de práticas matemáticas através de fontes históricas e a compreender a visão que os matemáticos tinham sobre suas próprias práticas; como e com que propósito eles usavam seus objetos (matemáticos); como eles descreviam seus objetos, como eles argumentavam, etc.

Desse modo, os estudantes podem ter contato com discursos regidos por metarregras diferentes daquelas que influenciam as práticas matemáticas nos dias de hoje e diferentes das suas próprias metarregras. O argumento de Kjeldsen (2011) baseia-se no conceito de conflito comognitivo. O uso de fontes históricas pode propiciar esses conflitos, já que a história é uma fonte de discursos governados por metarregras distintas.

4 IDENTIFICANDO METARREGRAS RELACIONADAS A MATRIZES EM FONTES HISTÓRICAS

A escolha de momentos do desenvolvimento histórico da noção de matriz foi motivada pelo ensino de matrizes no contexto da disciplina Álgebra Linear, cuja abordagem parte da noção de matriz e apresenta esse conceito como um objeto matemático em si. Em outras palavras, a definição de matriz, suas operações e as respectivas propriedades são apresentadas como se fossem um dado, um fato incontornável, como algo pronto e acabado, sem questionar as origens e a natureza desse objeto e de suas operações. Tal abordagem vai ao encontro da visão naturalizada do ensino.

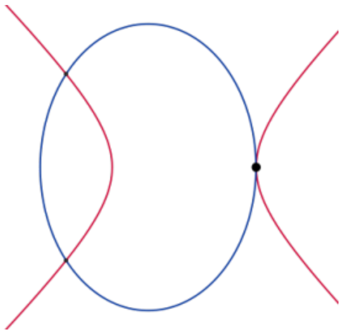
Dois momentos ligados ao surgimento das matrizes foram estudados a partir da pesquisa de Brechenmacher (2006), sobre práticas algébricas desenvolvidas na segunda metade do século XIX, dentro das quais a noção de matriz emergiu e se desenvolveu. Tais momentos têm como principais personagens envolvidos, dois matemáticos britânicos e contemporâneos: James Joseph Sylvester e Arthur Cayley. Neste artigo, falaremos brevemente sobre a prática de Sylvester em torno dos determinantes e o que o levou a introduzir o conceito de matriz. Desenvolveremos um pouco mais sobre a prática de Cayley em torno do cálculo simbólico com as matrizes.

Sylvester introduziu o termo "matriz" em sua pesquisa sobre *a classificação dos tipos de contatos entre duas cônicas* (SYLVESTER 1850, 1851). O termo *contato* era empregado por Sylvester para designar os pontos de interseção em que as cônicas se tangenciam. Há quatro tipos de contatos (Figuras 1 a 4), os quais já eram conhecidos por Sylvester. O contato simples ocorre quando há um ponto de interseção duplo. O contato diploide ocorre quando há dois pontos de interseção duplos. O contato proximal ocorre quando há um ponto de interseção triplo. E o contato confluente ocorre quando há um ponto de interseção quádruplo.

A principal ferramenta matemática usada por Sylvester para resolver o problema dos contatos foi o conceito de determinante. Entretanto, ele não calculou determinantes a partir de matrizes, mas sim a partir dos coeficientes reais de polinômios homogêneos de grau 2 a três variáveis, como por exemplo:

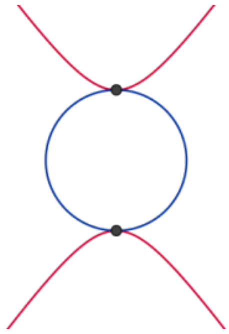
$$U: ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz = 0$$

Figura 1: contato simples.



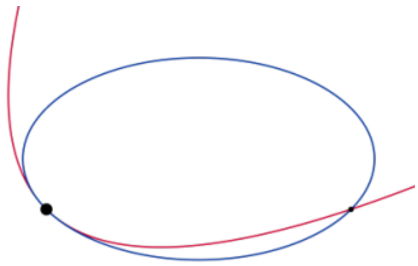
Fonte: autora.

Figura 2: contato diploide.



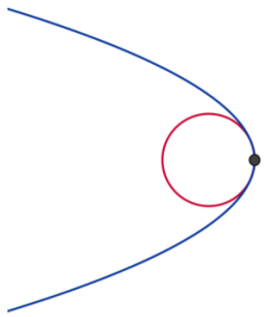
Fonte: autora.

Figura 3: contato proximal.



Fonte: autora.

Figura 4: contato confluente.



Fonte: autora.

Para resolver o problema dos contatos, Sylvester (1850) introduziu a noção de determinantes menores. No final do mesmo artigo, a noção de matriz foi introduzida para generalizar um resultado sobre determinantes menores, porém, considerando matrizes retangulares:

> [...] nós devemos começar, não com um quadrado, mas com um arranjo retangular de termos consistindo, suponha, de m linhas e n colunas. Isto não representará em si mesmo um determinante, mas na verdade uma Matriz, a partir da qual podemos formar vários sistemas de determinantes por fixar um número p e selecionar à vontade p linhas e p colunas, os quadrados correspondentes podem ser chamados determinantes de pth ordem (SYLVESTER, 1850, p.150, tradução nossa)[6].

A noção de matriz surgiu no contexto da solução de um problema geométrico, como uma representação em forma de tabela retangular, geradora de vários sistemas de determinantes menores[7]. A generalização da prática de extração de sistemas de determinantes menores para

[6] No original: "*[...] we must commence, not with a square, but with an oblong arrangement of terms consisting, suppose, of m lines and n columns. This will not in itself represent a determinant, but is, as it were, a Matrix out of which we may form various systems of determinants by fixing upon a number p and selecting at will p lines and p columns, the square corresponding to which we may be termed determinants of the pth order.*" (SYLVESTER, 1850, p.150)

[7] Mais detalhes sobre a parte histórica podem ser encontrados em Bernardes & Roque (2016).

determinantes de qualquer ordem colocou o problema de enumeração desses sistemas, o que chamou a atenção de Cayley para a noção de matriz e o levou a publicar três artigos sucessivos em 1855 (BRECHENMACHER, 2006).

Em 1858, Cayley publicou um texto (*A Memoir on the Theory of Matrices*) no qual introduziu as operações com matrizes e enunciou várias propriedades sobre as operações (CAYLEY, 1858). Cayley definiu matriz como "um conjunto de quantidades organizadas em forma de quadrado" associando-a a uma notação abreviada de um conjunto de equações lineares. Tal notação[8] é descrita como um conjunto de "funções lineares":

> A notação
>
> $$\begin{array}{l}(a, \quad b, \quad c)\ (x, y, z) \\ \left| \begin{array}{lll} a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{array} \right| \end{array}$$
>
> representa o conjunto de funções lineares:
>
> $$((a, b, c)(x, y, z), (a', b', c')(x, y, z), (a'', b'', c'')(x, y, z))$$
>
> (CAYLEY, 1858, p. 18, tradução nossa)

As operações com matrizes foram definidas a partir da associação de matrizes com sistemas lineares, por exemplo, soma de matrizes em termos da soma dos coeficientes de um sistema linear. A multiplicação matricial foi definida em termos da "composição de sistemas lineares":

> *As equações*
>
> $$\begin{array}{l}(X, Y, Z) = (a, \quad b, \quad c)\ (x, y, z) \\ \qquad\qquad\quad \left| \begin{array}{lll} a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{array} \right| \end{array}$$
>
> $$\begin{array}{l}(x, y, z) = (\alpha\ , \quad \beta, \quad \gamma)\ (\xi, \eta, \zeta) \\ \qquad\qquad\quad \left| \begin{array}{lll} a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{array} \right| \end{array}$$
>
> *dão*
>
> $$\begin{array}{l}(X, Y, Z) = (A, \quad B, \quad C)\ (\xi, \eta, \zeta) = (a, \quad b, \quad c)\ (\alpha\ , \quad \beta, \quad \gamma)(\xi, \eta, \zeta) \\ \qquad\qquad\quad \left| \begin{array}{lll} A, & B', & C' \\ A'', & B'', & C'' \end{array} \right| \qquad\quad \left| \begin{array}{lll} a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{array} \right| \left| \begin{array}{lll} \alpha', & \beta', & \gamma' \\ \alpha'', & \beta'', & \gamma'' \end{array} \right| \end{array}$$
>
> (CAYLEY, 1858, p. 20, tradução nossa)

Em seguida, Cayley apresenta o resultado da composição de matrizes, ou multiplicação de matrizes, como:

$$\begin{array}{c} (a, b, c)\ (\alpha\ , \alpha', \alpha'') \quad (a, b, c)\ (\beta\ , \beta', \beta'') \quad (a, b, c)\ (\gamma\ , \gamma', \gamma'') \\ \left| \begin{array}{lll} (a', b', c')\ (\alpha\ , \alpha', \alpha'') & (a', b', c')\ (\beta\ , \beta', \beta'') & (a', b', c')\ (\gamma\ , \gamma', \gamma'') \\ (a'', b'', c'')\ (\alpha\ , \alpha', \alpha'') & (a'', b'', c'')\ (\beta\ , \beta', \beta'') & (a'', b'', c'')\ (\gamma\ , \gamma', \gamma'') \end{array} \right| \end{array}$$

[8] Cayley representava as matrizes usando uma combinação de parêntesis com barras verticais. As representações apresentadas neste artigo tentam aproximar a notação de Cayley.

Eis aí a origem da multiplicação de matrizes, cuja definição moderna nem de longe permite vislumbrar. Vale observar que a diferença reconhecida hoje entre sistemas de equações lineares e de transformações lineares não parecia ser necessária para Cayley naquele momento.

A partir das regras para as operações, Cayley desenvolveu um cálculo simbólico com matrizes. Em sua prática, Cayley considerava um certo tipo de matriz (conhecida hoje como matriz escalar) como uma "quantidade única" (*single quantity*, como Cayley se refere no artigo), operando com esse tipo de matriz como se fosse um número:

$$m = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix},$$

> A matriz no lado direito é dita ser a quantidade única m considerada *como envolvendo a matriz unidade*. (CAYLEY, 1858, p. 20, tradução nossa, itálicos no original)

Um resultado importante da memória é o "teorema notável", assim denominado por Cayley. O teorema afirma que uma matriz qualquer (quadrada) satisfaz uma equação algébrica de sua própria ordem, em que o coeficiente da mais alta potência é igual à unidade (matriz identidade), o coeficiente da potência nula é igual ao determinante da matriz e os demais coeficientes são funções dos elementos da matriz[9]. A demonstração do teorema baseia-se no caso particular de matrizes quadradas de ordem 2.

A partir dos momentos históricos acima, quatro metarregras foram identificadas nos discursos de Sylvester (1850, 1851) e de Cayley (1858) com base no argumento teórico de Kjeldsen (2011). O argumento considera que metarregras implícitas no discurso da matemática se tornam explícitas no discurso da história. Assim, uma primeira análise foi realizada na interpretação histórica de Brechenmacher (2006). Em seguida, fontes originais de Sylvester e de Cayley foram selecionadas e analisadas com o objetivo de localizar e compreender as rotinas em que as metarregras se aplicavam. Para ilustrar, citamos duas delas:

- Determinantes são ferramentas utilizadas para investigar propriedades geométricas de curvas e são calculadas a partir de polinômios homogêneos de grau 2 (discurso de Sylvester).
- Dupla interpretação da noção de matriz: uma matriz é considerada ora como uma quantidade simples (número), ora como uma quantidade múltipla (um sistema de números) (discurso de Cayley).

A escolha das quatro metarregras, diante de tantas outras, justifica-se por se tratarem de concepções ou de ações sobre matrizes e/ou determinantes notadamente distintas das de hoje[10]. É importante ressaltar a importância da escolha das fontes secundárias. A abordagem histórica deve evidenciar as práticas dos matemáticos em questão. Abordagens históricas anacrônicas ou que não explicitem as especificidades das práticas do passado podem dificultar ou mesmo inviabilizar a identificação de metarregras.

[9] Cayley enuncia o "teorema notável" da seguinte forma: "I obtain the remarkable theorem that any matrix whatever satisfies an algebraical equation of its own order, the coefficient of the highest power being unity, and those of the other powers [are] functions of the terms of the matrix, the last coefficient being in fact the determinant" (Cayley1858, p. 17).

[10] Mais detalhes sobre como as metarregras enunciadas foram identificadas, podem ser encontrados em Bernardes (2016).

5 COMO AS FONTES HISTÓRICAS FORAM UTILIZADAS E AS METARREGRAS EXPLORADAS?

Dois roteiros de ensino foram elaborados[11], visando apresentar as práticas de Sylvester e de Cayley relacionadas a matrizes e determinantes, e explorar as metarregras históricas identificadas na pesquisa.

Os roteiros contêm vários extratos de fontes primárias traduzidos. O primeiro roteiro aborda a prática de Sylvester (veja Figura 1 e Figura 2). O contexto geométrico em que o termo matriz foi proposto por Sylvester foi introduzido, incluindo uma apresentação de como o problema da classificação dos tipos de contatos entre duas cônicas foi resolvido. Por razões didáticas, algumas explicações foram inseridas, bem como definições modernas e ilustrações. Alguns conceitos da geometria projetiva foram necessários, como: coordenadas homogêneas, pontos projetivos e cônicas projetivas. Foram propostos exercícios matemáticos ao longo das seções para ajudar os alunos a compreenderem a matemática envolvida na prática de Sylvester. Esse roteiro ficou organizado por meio das seguintes seções:

- Introdução: uma descrição do que será abordado no roteiro.
- Um retrato de James Joseph Sylvester: uma seção com dados biográficos de Sylvester.
- O problema que interessou Sylvester: uma introdução ao problema cuja solução motivou a introdução do conceito de matriz.
- A Geometria onde pontos são retas e retas são planos: definições e explicações sobre geometria projetiva, necessárias ao entendimento da matemática das fontes.
- De volta às cônicas de Sylvester: uma explicação de como Sylvester resolveu o problema dos contatos.
- A classificação dos tipos de contatos entre duas cônicas: como Sylvester identificou e classificou os tipos de contatos entre duas cônicas.
- Atividades: atividades de cunho histórico.

O segundo roteiro aborda a prática do cálculo simbólico com matrizes desenvolvida por Cayley. No roteiro, foi fornecida uma tradução da parte inicial da memória de 1858 (Cayley, 1858). O ponto forte desse roteiro está na origem das definições das regras para as operações com matrizes, o que gerou muita discussão nos encontros dos estudos de campo, sobretudo a definição da multiplicação de matrizes. A Figura 5 apresenta uma imagem da primeira página do roteiro. O roteiro foi organizado por meio das seguintes seções:

- Introdução: uma descrição do que será abordado no roteiro.
- O matemático da vez: uma seção com dados biográficos de Sylvester.
- A memória de 1858: tradução das primeiras páginas das memórias (CAYLEY, 1858).
- Atividades: atividades de cunho histórico.

No final de cada roteiro, há uma lista de questões de cunho mais histórico. O objetivo dessas atividades históricas é suscitar discussões entre os participantes e estimular reflexões sobre as metarregras históricas e também sobre suas próprias metarregras relacionadas a matrizes e determinantes. De um modo geral, essas atividades foram formuladas visando convidar os participantes a refletirem sobre o contexto das fontes e fazerem comparações entre a matemática do passado e a que eles praticam. No Quadro 1, apresentamos as atividades históricas incluídas no segundo roteiro.

[11] Ambos os roteiros estão integralmente disponibilizados em Bernardes (2016).

Figura 5: primeira página do roteiro Sylvester.

O surgimento das matrizes no estudo de cônicas por Sylvester[1]

Aline Bernardes[2]

1 Introdução

Em muitos cursos de Álgebra Linear, o primeiro conceito apresentado é o de matriz. E nesta abordagem, outros conceitos se baseiam na noção de matriz - como determinantes - ou são estreitamente relacionados a ela quando se trabalha em dimensão finita - como transformações lineares, formas bilineares e formas quadráticas.

Veremos que na produção do conhecimento relacionado a matrizes, esta noção não foi a primeira a surgir. Vamos conhecer as motivações matemáticas que levaram o matemático James Joseph Sylvester a introduzir a noção de matriz.

2 Um retrato de James Joseph Sylvester

James Joseph Sylvester (1814-1897) nasceu em Londres, teve a sua formação inicial em uma escola para judeus. Aos 14 anos (em 1828) foi para a *London University*, onde foi aluno de Augustus De Morgan (na época, recentemente nomeado para a cadeira de Matemática, com 21 anos). Desde cedo, manifestou aptidão para Matemática.

James Joseph Sylvester

Sofreu preconceitos pela sua origem judia durante a sua formação. Foi retirado pela família da *London University*, devido a uma tentativa de ferir um colega com uma faca no refeitório (Parshall, 1998). Em seguida, foi para a *Royal Institution* em Liverpool (em 1829), onde novamente não se estabeleceu devido a referências constantes contra a sua origem judia[3].

Em 1831, quando finalmente havia se estabelecido no *St John's College*, em Cambridge, ficou doente três vezes por um longo período, o que o afastou dos estudos. Em 1837, ele fez os exames do *mathematical tripos*[4] ficando em segundo lugar (*Second Wrangler*). No entanto, devido a sua origem judia, ele não recebeu o título correspondente.

No ano seguinte, foi admitido para uma cadeira de filosofia no *University College London* (fundada como London University), a primeira instituição na Inglaterra livre de organização religiosa.

[1] Material elaborado para um estudo de campo realizado em outubro/novembro de 2014, como parte da pesquisa de doutorado.

[2] Doutoranda no Programa de Engenharia de Sistemas e Computação (PESC) da COPPE e docente da UNIRIO.

[3] As informações apresentadas sobre a biografia de Sylvester foram baseadas em (Cayley, 1889) e (Parshall, 1998).

[4] O *mathematical tripos* era um exame de matemática pelo qual todos os estudantes tinham que passar independente da formação, antes de se especializarem no campo de interesse (Crilly, 2011).

Fonte: autora.

Figura 6: atividades históricas do roteiro.

Questão 1.

Faça um resumo descrevendo como Sylvester classifica os tipos de contatos entre duas cônicas U e V.

Questão 2.

Sylvester utiliza vários conceitos/ferramentas matemáticas na prática elaborada por ele para resolver o problema da classificação dos tipos de contatos entre duas cônicas.
Para entender o papel de cada um deles na sua pesquisa, vamos identificar quais desempenham o papel de induzir novo conhecimento (objeto(s) de investigação) e quais ajudam a fornecer as respostas do problema colocado (técnicas).
O objeto de investigação de Sylvester é: a classificação dos tipos de contatos entre duas cônicas.
Liste todos os conceitos/ferramentas matemáticas que constituem as técnicas utilizadas por Sylvester, de acordo com o texto.

Questão 3.

Descreva a diferença entre como Sylvester utilizava determinantes neste episódio da pesquisa sobre matrizes e como nós utilizamos nos dias de hoje. Veja o extrato IV.

Questão 4.

Explique o que é um *primeiro determinante menor* de acordo com a definição apresentada por Sylvester no Extrato I. O que é um *segundo determinante menor*? E um *r-ésimo determinante menor*?

Questão 5.

Por que Sylvester precisou introduzir os determinantes menores?

Questão 6.

Baseando-se nos Extratos II, III, explique o que era uma matriz e qual o papel desta noção para Sylvester.

Questão 7.

Compare a definição de matriz apresentada no Extrato II com a definição atual. Aponte pelo menos uma semelhança e pelo menos uma diferença.

Fonte: a própria autora.

Figura 7: primeira página do roteiro Cayley.

Cayley e o cálculo simbólico com matrizes[1]

Aline Bernardes[2]

1 Introdução

O matemático Arthur Cayley introduziu a noção de matriz em uma memória intitulada "*Remarques sur la notation des functions algébriques*" (Cayley, 1855) (Observações sobre a notação de funções algébricas). Nesta memória, ele apresentou uma notação para as matrizes como sendo prática para representar sistemas lineares e formas quadráticas e definiu a *composição* de matrizes.

Em 1858, Cayley publica no *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* outra memória intitulada "*A Memoir on the Theory of Matrices*"(Uma Memória sobre a Teoria das Matrizes) (Cayley, 1858). Neste texto, as operações com as matrizes são estabelecidas(adição e multiplicação por uma *quantidade simples*, além da multiplicação com matrizes) e propriedades das operações são enunciadas.

2 O matemático da vez

Arthur Cayley (1821-1895) também foi um matemático inglês, nasceu em Richmond, Londres. Passou os primeiros sete anos de sua vida em St. Petersburg, onde seu pai era um comerciante bem sucedido e onde aprendeu o idioma francês.

Em 1842, Cayley obteve o título de *Senior Wrangler*, termos que designavam a melhor colocação nos exames do *Mathematical Tripos*, no Trinity College Cambridge.

Arthur Cayley

Sem a indicação para um cargo de professor de matemática em uma universidade, Cayley se dedicou à lei como advogado durante cerca de 14 anos. Paralelamente, manteve a sua dedicação à pesquisa. Em 1863, foi eleito para a posição de "Sadleirian Professor"de Matemática Pura da Universidade de Cambridge (o primeiro a assumir essa posição), cadeira que ele manteve pelo resto de sua vida.

Cayley também esteve nos Estados Unidos, por um período de seis meses em 1882, atendendo a um convite para ministrar um curso na Johns Hopkins University, em Baltimore, onde Sylvester era professor. Eles tiveram estreitas relações de amizade e desenvolveram trabalhos

[1] Material elaborado para o estudo piloto realizado em maio de 2014, como parte da pesquisa de doutorado.

[2] Doutoranda no Programa de Engenharia de Sistemas e Computação (PESC) da COPPE e docente da UNIRIO.

Fonte: a própria autora.

Quadro 1: atividades históricas propostas ao final do segundo roteiro.

1) Qual é o objeto de investigação de Sylvester de acordo com o que você viu neste roteiro? Liste as técnicas utilizadas por Cayley na parte da memória que você estudou.

2) Compare a descrição de matriz apresentada por Cayley (veja a primeira página da tradução da memória) com a definição atual. Você vê semelhanças? Se sim, quais? Você vê diferenças? Se sim, quais?

3) Fale sobre o modo como Cayley estabelece as regras para as leis de adição, de multiplicação por uma quantidade simples e multiplicação ou composição de duas matrizes. Compare com o modo como os livros didáticos de Álgebra Linear apresentam as operações com matrizes.

4) Explique o que Cayley quis dizer com "uma matriz considerada como uma quantidade simples envolvendo a matriz unidade" (veja o item 10 do extrato).

5)

a) Enuncie, com suas palavras, o "teorema notável" que Cayley menciona na primeira página da memória e apresenta nos itens 21, 22 e 23 da memória.

b) A demonstração do teorema para matrizes de ordem 2, no item 21, faz uso do seguinte determinante:

$$\begin{vmatrix} a-M & b \\ c & d-M \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \mathrm{a\text{-}M} & \mathrm{b} \\ \mathrm{c} & \mathrm{d\text{-}M} \end{vmatrix}$$

cujo desenvolvimento é dado por $M^2-(a+d)M^1+(ad-bc)M^0$ $\mathrm{M^2\text{-}(a+d)M^1+(ad\text{-}bc)M^0}$. Nos dias de hoje, a demonstração de Cayley seria aceita como correta? Explique.

6) Compare o modo como Sylvester e Cayley conceberam as matrizes, compare também o papel das matrizes para cada um deles, de acordo com os roteiros.

7) Na sua opinião, o papel das matrizes para a matemática nos dias de hoje mudou? Se sim, o que mudou. Explique sua posição.

Fonte: autora

6 ESTUDOS DE CAMPO, DADOS E ANÁLISE

A parte experimental da pesquisa contou com um estudo piloto (BERNARDES; ROQUE, 2015) e dois estudos de campo (BERNARDES; ROQUE, 2018), todos conduzidos por esta pesquisadora. Neste texto, serão destacados alguns resultados dos estudos de campo, os quais foram realizados com nove estudantes de licenciatura em matemática, de duas universidades do Rio de Janeiro.

Para ambos os grupos de voluntários dos estudos de campo da pesquisa foi oferecido o minicurso com o tema "Diferentes papéis da noção de matriz em dois episódios da história das matrizes". O minicurso teve duração de seis encontros e os voluntários haviam cursado pelo menos uma das disciplinas de Álgebra Linear na época do estudo. Usar a história para introduzir as matrizes não foi um objetivo da pesquisa, assim ter cursado Álgebra Linear foi um pré-requisito para participar do estudo. Dos 9 participantes, apenas um já havia cursado uma disciplina de História da Matemática.

Os roteiros descritos anteriormente nortearam as discussões durante os encontros. Em particular, o segundo roteiro – o qual apresenta a prática de Cayley com o cálculo simbólico de matrizes (CAYLEY, 1858) – foi explorado na forma de um estudo dirigido. Primeiramente, os participantes analisaram a tradução de algumas páginas da memória de 1858 (contendo a definição de matriz, a introdução das regras para as operações com matrizes, a demonstração do "teorema notável" e uma aplicação do teorema); fizeram anotações sobre o que não entenderam, sobre o que os surpreenderam, etc. Em seguida, os participantes compartilharam dúvidas e reflexões. Logo após, a pesquisadora fez uma discussão, destacando: i) a relação entre matrizes e sistemas lineares apresentada por Cayley (1858), ii) como as operações com matrizes foram definidas, iii) a dupla interpretação da noção de matriz ora como um número, ora como um sistema de números e iv) esclarecendo pontos que não ficaram claros.

Os participantes trabalharam em grupos para responder as atividades históricas. As discussões foram gravadas em áudio e posteriormente transcritas para análise. As respostas escritas às atividades históricas e as gravações em áudio das discussões dos grupos forneceram os dados para analisar possíveis reflexões sobre as metarregras. Além dessas fontes geradoras de dados, entrevistas foram feitas no início do minicurso. Ao final do minicurso, os participantes fizeram uma atividade de produção de texto, preencheram um questionário para avaliar os roteiros e o minicurso e houve uma nova rodada de entrevistas.

Na análise, buscou-se identificar discussões sobre as metarregras históricas e discussões nas quais os participantes externaram suas próprias metarregras em relação a matrizes e determinantes. Ademais, também foram identificadas discussões que indicaram a manifestação de conflitos comognitivos.

A maioria dos grupos discutiu intensamente sobre as metarregras históricas, o que é em si um resultado. Além disso, foram detectadas outras metarregras no discurso dos participantes. Ilustraremos a análise de dados com um exemplo de um diálogo em que alguns participantes externaram suas metarregras e com um exemplo em que um conflito comognitivo se manifestou durante as discussões das atividades históricas. Ambos os exemplos originaram-se a partir da Atividade 5, do segundo roteiro (veja Quadro 1).

O diálogo seguinte ilustra uma discussão sobre a validade da demonstração do "teorema notável"[12], a qual baseia-se em um caso particular de matrizes quadradas de ordem 2. Cayley (1858) iniciou a demonstração do teorema notável formando o determinante $\begin{vmatrix} a-M & b \\ c & d-M \end{vmatrix}$, a partir de $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. O determinante resulta na expressão $M^2 - (a+d)M^1 + (ad - bc)M^0$.

> Mario: Isso só dá para um caso particular e estende para o …
> João: Só no caso particular?
> Mario: Admite que é verdadeira … Acredito que não. Letra b.
> João: Consideramos isso apenas como um exemplo. [Pausa]
> Mario: Seria considerado um caso particular ou exemplo. (Grupo 1.1)

Os participantes concluíram que a demonstração não seria aceita como correta porque a mesma baseava-se somente em um caso particular de ordem 2. O diálogo de Mario e João sugere que eles estavam apoiando-se em uma metarregra segundo a qual *demonstrações*

[12] A demonstração pode ser vista em Bernardes (2016, p. 271).

baseadas somente em casos particulares não são válidas. A metarregra está de acordo com as regras atuais para demonstrações em matemática, no entanto, o grupo não percebeu o problema mais grave (aos olhos da matemática de hoje) na demonstração apresentada: *a dupla interpretação da noção de matriz* sendo aplicada a uma matriz cheia (ao invés de uma matriz escalar).

A metarregra enunciada como “dupla interpretação da noção de matriz” provocou discussões em todos os grupos. O trecho abaixo mostra outra discussão sobre a demonstração do “teorema notável”. A discussão ocorreu quando os participantes tentavam entender o cálculo simbólico, realizado por Cayley (1858) na demonstração:

> Fernando: Mas que viagem. É muita viagem porque olha só que ele faz a seguir. Ele pega o M grande que é a matriz cheia. Isso aqui tanto é uma matriz quanto é um número.
>
> Yhedi: Não.
>
> Fernando: Mas aqui, olha só, está operando com números. Aqui ele está operando com números. Aqui, isso aqui é um número. Só que isso é uma matriz.
>
> Yhedi: Mas quando ele opera a matriz como um número, ele está trabalhando M vezes a identidade.
>
> Fernando: Hum?
>
> Yhedi: Quando ele trabalha a matriz como número, é o número vezes a identidade.
>
> Fernando: Mas essa matriz aqui, cara?
>
> [Neste momento, eles solicitaram a ajuda da pesquisadora.]
>
> (Grupo 1.2)

No diálogo acima, diferente do primeiro exemplo apresentado, os participantes ficaram perplexos com o determinante formado e o cálculo simbólico empregado, pois a noção de matriz como uma “quantidade única” é aplicada a uma matriz completa, ao invés de uma matriz escalar. Ao formar o determinante $\begin{vmatrix} a-M & b \\ c & d-M \end{vmatrix}$, a partir de $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, Cayley (1858) usou o mesmo símbolo *M* para representar uma matriz em alguns momentos e para representar um número em outros.

Assim, identificamos a manifestação de um conflito comognitivo no último diálogo, o qual ocorreu devido às diferenças entre as metarregras subjacentes ao discurso de Cayley e aquelas subjacentes ao discurso dos participantes. Cayley norteava-se por um metarregra que permitia uma dupla interpretação da noção de matriz, ora como sendo um número, ora como um "sistema de números". Hoje em dia, seus argumentos não seriam aceitos como corretos. Uma matriz, em geral, não é vista como uma quantidade ou um número; mas sim como uma tabela de números, ou de um ponto de vista mais formal, como uma função. Matematicamente, a associação entre uma matriz escalar mI_n e um número real ou um número complexo m é correta. Números complexos também podem ser identificados com um tipo específico de matriz real 2×2, mas a identificação entre uma matriz e um número em um contexto mais geral não é válida (sem assumir restrições sobre as entradas da matriz em questão).

A partir da análise, concluímos que a disponibilização de trechos das fontes primárias de Sylvester (1850, 1851) e de Cayley (1858) foi essencial para exibir suas práticas e para promover situações de conflito comognitivo. Afinal, o contato com as fontes primárias possibilita observar as suas notações originais, perceber como esses matemáticos definiam seus objetos e como argumentavam em suas provas. Como observa Kjeldsen (2011), os textos históricos desempenham o papel de interlocutores, como discursantes que agem de acordo com metarregras específicas.

De um modo geral, a reação dos participantes aos roteiros e à proposta foi positiva, houve apenas uma desistência. Seus depoimentos sobre a participação no minicurso sugerem que os momentos históricos acerca do surgimento das matrizes e da origem das operações com matrizes levaram-nos a refletir sobre o ensino de matrizes, de determinantes e de sistemas lineares na educação básica:

> Algo muito comum de acontecer quando os alunos começam a ter contado com as propriedades e operações de [com] matrizes é o fato de não entenderem muito bem as propriedades de multiplicação de matrizes que muitas das vezes é ensinado de forma básica, forçando o aluno a simplesmente gravar que ele deve multiplicar linha com a coluna, estudando as propriedades que Cayley enuncia, utilizando os sistemas de equações lineares, fica mais clara essa ideia. (Francisca)

> [...] tendo conhecimento do contexto histórico e matemático que moveu o surgimento de determinada teoria, tem-se uma visão mais ampla do tópico em questão e, consequentemente, há possibilidade para o professor ministrar uma aula melhor adequada e fundamentada. Desse modo, o professor tem espaço para criação de uma abordagem completamente diferente da de muitos cursos de Álgebra Linear, e até mesmo do ensino médio (onde o conceito de matriz é apresentado logo de início). (Yhedi, Maria e Fernando)

Além disso, alguns depoimentos sugerem que a participação no minicurso despertou um senso de historicidade acerca das matrizes:

> [. . .] eu achava da minha cabeça que surgiu tudo direto, matrizes começou tudo na hora. A mesma pessoa que descobriu matrizes, descobriu [como] fazer operação com ela, aí o minicurso me trouxe isso: que foram coisas distintas, como se fossem trabalhos que não tinham nenhuma conexão. Se o Cayley falar, “Sylvester, é possível operar a matriz.”, Sylvester falando para ele, “você está ficando maluco, não tem como.” (Mario)

Alguns participantes sugeriram a inclusão de mais exemplos para ajudar a compreender a matemática das fontes históricas e para proporcionar mais segurança ao fazer as atividades tanto de matemática quanto as históricas. Começar os roteiros com dados biográficos dos matemáticos envolvidos e suas motivações para estudar matrizes foi um ponto positivo apresentado por alguns participantes. Além disso, fornecer as fontes originais, mantendo as notações usadas na época, foi outro ponto positivo apontado por alguns.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Apresentamos neste artigo uma proposta para integrar história da matemática ao ensino de matemática, com base na teoria de Sfard. A proposta busca promover um ambiente de aprendizagem em que os aprendizes são estimulados a perceberem e refletirem sobre as metarregras do discurso matemático.

Os resultados alcançados pelo estudo confirmaram o potencial das fontes históricas para promover reflexões sobre metarregras – tanto as metarregras históricas, como as dos próprios participantes - o que é consistente com os resultados de Kjeldsen e Petersen (2014). O uso das fontes primárias, disponibilizadas nos roteiros, foi essencial para permitir o contato com um discurso moldado por metarregras diferentes e, com isso, promover conflitos comognitivos.

E relação ao ensino de matrizes no contexto da disciplina Álgebra Linear, os resultados confirmaram que não é adequado iniciar o curso de álgebra linear com o conceito de matriz como um objeto em si. Historicamente, a noção de matriz foi a última a surgir, isto é, as matrizes foram introduzidas após determinantes, sistemas lineares, transformações lineares e formas quadráticas. Os momentos históricos de Sylvester (1850, 1851) e de Cayley (1858) mostram que sua introdução e desenvolvimento foram motivados pela necessidade de uma representação em forma de tabela. Assim, um possível encaminhamento seria introduzir o conceito de matriz quando houver necessidade da representação matricial - por exemplo, durante o estudo de sistemas lineares.

O estudo promoveu o conhecimento da origem e dos fatores que levaram o objeto matemático matriz a ser definido do modo como conhecemos hoje e as escolhas que o elegeram como ferramenta para resolver determinados problemas. Isso despertou nos participantes, futuros professores, uma visão mais crítica sobre o ensino de matrizes no nível básico.

Para finalizar, o estudo mostrou que a introdução de uma perspectiva histórica, com o intuito de proporcionar reflexões sobre o discurso matemático, pode contribuir para descontruir a visão naturalizada do ensino. As discussões levaram os participantes a refletirem sobre o que é uma matriz; a ampliarem os significados atribuídos a esse objeto matemático e a repensarem a ordem com a qual matrizes, determinantes e sistemas lineares são ensinados na educação básica.

A teoria de Sfard (2008) em particular, as noções de conflito comognitivo e de metarregras - mostra-se como um caminho bastante promissor para integrar a história da matemática ao ensino de matemática. No entanto, mais pesquisas são necessárias com outros momentos históricos e com novos experimentos, implementados em diferentes níveis de ensino. Do ponto de vista teórico, mais reflexões são necessárias sobre a identificação de metarregras (como identificar o que está implícito no discurso?) e sobre possíveis caminhos para explorar as metarregras em situações de ensino.

REFERÊNCIAS

BERNARDES, A. & ROQUE, T. Reflecting on Meta-discursive Rules through Episodes from the History of Matrices. In: BARBIN, É., JANKVIST, U., KJELDSEN, T.H. (eds), **History and Epistemology in Mathematics Education:** Proceedings of the seventh European Summer University (ESU 7). Copenhagen: Danish School of Education, Aarhus University (848 pages in one volume), 2015. p.153-167.

BERNARDES, A. C. S. **História e ensino de matrizes: promovendo reflexões sobre o discurso matemático.** 2016. 275 f. Tese (Doutorado em Engenharia de Sistemas e Computação) – Universidade Federal do Rio de Janeiro/COPPE, Rio de Janeiro, 2016.

BERNARDES, A. & ROQUE, T. História da noção de matriz: uma releitura sob a luz de novas abordagens historiográficas. **Revista Brasileira de História da Matemática**, v. 16 (31), p. 1-19, 2016.

BERNARDES, A. & ROQUE, T. History of matrices: promoting commognitive conflicts and encouraging reflection on metadiscursive rules in prospective teachers. In: CLARK, K.M., KJELDSEN, T.H., SCHORCHT, S., TZANAKIS, C. (eds.), **Mathematics, Education and History:** Towards a Harmonious Partnership. Springer International Publishing, 2018. p. 209-227.

BERNARDES, A. História e as regras do discurso matemático: uma proposta para integrar a história da matemática ao ensino de matemática. In: SEMINÁRIO

INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA (SIPEM), VII, 2018, Foz do Iguaçu. **Anais do SIPEM**. Paraná: SBEMPR, 2018. Disponível em: http://www.sbemparana.com.br/eventos/index.php/SIPEM/VII_SIPEM/schedConf/presentations. Acesso em: 29 jan. 2019.

BRECHENMACHER, F. Les matrices: formes de représentation et pratiques opératoires (1850-1930). **Site expert des Ecoles Normales Superieures et du Ministere de l'Education Nationale**, 2006. Disponível em: http://www.math.ens.fr/culturemath/histoire%20des%20maths/index-auteur.htm#B. Acesso em: 05 jan. 2016.

CAYLEY, A. A memoir on the theory of matrices. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London**, v. 148, p. 17–37, 1858.

FRIED, M. N. History of mathematics in mathematics education. In: MATTHEWS, M. R. (Ed.). **International Handbook Handbook of Research in History, Philosophy and Science Teaching**. Dordrecht, Heidelberg, New York, London: Springer, 2014. p. 669–703.

GIRALDO, V.; ROQUE, T. História e tecnologia na construção de um ambiente problemático para o ensino de matemática. In: GIRALDO, V.; ROQUE, T. (Ed.). **O Saber do Professor de Matemática**: Ultrapassando a Dicotomia entre Didática e Conteúdo. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2014. Cap. 1, p. 09-38.

JANKVIST, U. T. **Using History as a 'Goal' in Mathematics Education.** 2009. 361 f. Tese (Doutorado) -- Roskilde University, Roskilde, 2009. Disponível em: http://milne.ruc.dk/ImfufaTekster/i. Acesso em: 06 abr. 2012.

KJELDSEN, T. H. Does history have a significant role to play for the learning of mathematics? Multiple perspective approach to history, and the learning of meta level rules of mathematical discourse. In: BARBIN, E.; KRONFELLNER, M. e TZNAKIS, C. (Eds.), **History and epistemology in mathematics education**: Proceedings of the sixth European Summer University. Viena: Verlag Holzhausen GmbH, 2011. p. 51–62.

KJELDSEN, T.H.; PETERSEN, P. H. Bridging History of the Concept of a Function with Learning of Mathematics: Students' meta-discursive rules, concept formation and historical awareness. **Science & Education**, v. 23, p. 29–45, 2014.

SFARD, A. **Thinking as communicating: Human Development, the growth of discourses.** New York: Cambridge University Press, 2008.

SYLVESTER, J. J. Additions to the articles "on a new class of theorems", and "on Pascal's theorems". **Philosophical Magazine**, v. 37, p. 363-370, 1850.

SYLVESTER, J. J. An enumeration of the contacts of lines and surfaces of the second order. **Philosophical Magazine**, v. 1 (2), p. 119-140, 1851.