MAPEANDO O PENSAMENTO COMBINATÓRIO NA BNCC: CONEXÕES EXPLÍCITAS E IMPLÍCITAS

Cézar Augusto de Freitas Anselmo
Estado-Maior Geral/Seção de Estatística e Geoprocessamento/Mestre em Estatística
Corpo de Bombeiros Militar do Distrito Federal – CBMDF, Brasília, DF, Brasil.
cezarcamelo@gmail.com

Ana Karina Cancian Baroni
DAE/Matemática/GIEMAG/Doutora em Educação Matemática
Instituto Federal de São Paulo – IFSP, Capivari, SP, Brasil.
anak@ifsp.edu.br

Resumo

O desenvolvimento do pensamento combinatório na educação básica é o tema central deste estudo, que consiste em uma análise documental da BNCC (2018), além de uma pesquisa bibliográfica em torno do assunto. Nos debruçamos especialmente sobre as habilidades a serem desenvolvidas em cada ano letivo, mapeando esse percurso e estabelecendo conexões explícitas e implícitas com o pensamento combinatório ali percebidas, num movimento constante entre essas conexões ao longo da educação escolar. A análise nos permitiu organizar figuras ilustrativas dos percursos do desenvolvimento do pensamento combinatório ao longo dos anos e, em especial, estabelecer relações importantes entre as habilidades a serem desenvolvidas, de forma a contribuir para a organização da prática de sala de aula.

Palavras-chave: Pensamento combinatório; BNCC; Conexões; Análise combinatória.

MAPPING COMBINATORIAL THINKING IN BNCC: EXPLICIT AND IMPLICIT CONNECTIONS

The development of combinatorial thinking in basic education is the central theme of this study, which consists of a documentary analysis of the BNCC (2018), in addition to a bibliographical research on the subject. We focus especially on the skills to be developed in each school year, mapping this path, and establishing explicit and implicit connections with the combinatorial thinking perceived there, in a constant movement between these connections throughout school education. The analysis allowed us to build maps showing the development of combinatorial thinking over the years and, in particular, to establish important connections between the skills to be developed, in order to contribute to the organization of classroom practice.

Keywords: Combinatorial thinking; BNCC; Connections; Combinatorial analysis.

1 INTRODUÇÃO

1.1 O Pensamento Combinatório

As premissas dos estudos voltados à Análise Combinatória, pelo menos com certa formalidade, remontam ao século XVII, sob uma aparente motivação ligada aos jogos de azar. Pascal (1623-1662) e Fermat (1607-1665) são considerados precursores no estudo dessa área da Matemática. Mais tarde, já no século XX, encontramos contribuições ligadas ao interesse de ampliar o currículo de matemática discreta nos ciclos iniciais da Educação Básica, como as dos educadores brasileiros Loureiro (1997) e Santos, Melo e Murari (1995).

Investigamos definições específicas enunciadas pelas expressões "pensamento combinatório" e "raciocínio combinatório[1]", mas não encontramos nada formalmente aceito ou acatado por pesquisadores. A maioria das referências de estudos encontrados usam esses termos sem caracterizá-los, ou seja, os assumem como ideias a priori. Nos livros didáticos, o tema é introduzido sempre a partir de um convite para se pensar de quantas maneiras é possível fazer os agrupamentos propostos, sem necessariamente enunciar uma definição. Encontramos uma contribuição importante baseada em Piaget e seus estudos voltados à Psicologia do Pensamento Cognitivo, que trata mais especificamente da expressão "operações combinatórias".

> As operações combinatórias podem ser descritas, numa primeira aproximação, como a capacidade de encontrar ou construir de maneira sistemática e ordenada todas as combinações possíveis entre n elementos (por exemplo, objetos externos, bem como as proposições por meio das quais esses objetos são descritos pelo pensamento)[2] (Ducret, 2012, p. 2, trad. nossa).

De forma resumida, o autor traz uma primeira aproximação de uma definição de operações combinatórias como sendo a capacidade de encontrar ou construir de maneira

[1] Busca realizada em https://scholar.google.com.br/ com os termos: (pensamento ou raciocínio) + combinatório; combinatorial + (thinking ou reasoning); (pensée ou raisonnement) + combinatoire; razonamiento combinatorio.
[2] "Les opérations combinatoires peuvent être décrites, en première approximation, comme la capacité de trouver ou de construire de manière systématique et ordonnée toutes les combinaisons possibles entre n éléments (par exemple des objets extérieurs ainsi que les propositions au moyen desquelles ces objets sont décrits par la pensée)".

sistemática e ordenada todos os agrupamentos possíveis entre n elementos, destacando que existem diferentes formas de fazer tais agrupamentos, a depender do que é levado em consideração, como a ordem em que os elementos são agrupados. Percebemos que Piaget, bem como alguns pesquisadores que o citam, consideram apenas a ação de associar n elementos de um conjunto com m de outro, além da listagem sistemática de tal associação de elementos.

O nosso interesse de estudo está no processo de construção do pensamento combinatório ao longo da educação escolar. A recomendação para ampliar o currículo de matemática discreta nos ciclos iniciais da Educação Básica remonta a antes da década de 1970. Kapur (1970), principal referência nesse contexto, já completa mais de 50 anos e aponta 11 recomendações em razão das quais a Análise Combinatória deveria ser trabalhada em sala de aula, das quais destacamos:

> - Uma vez que não depende do cálculo, ela tem problemas adequados para diversos anos da educação básica, desde os mais iniciais. Normalmente, problemas muito desafiadores podem ser discutidos com os alunos de tal modo que eles possam descobrir a necessidade para que mais matemática seja criada.
> - Pode ser usada para treinar crianças para enumerar, fazer conjecturas, generalizar e pensar sistematicamente. Pode ainda ajudar a desenvolver muitos conceitos, tais como equivalência, relações de ordem, funções e amostragem, para citar alguns.
> - Viabiliza a apresentação de muitas aplicações em diferentes campos, inclusive em matemática recreativa.
> - Motiva o estudante para o uso de computadores em alguns problemas, bem como ajuda a perceber algumas de suas limitações ao lidar com problemas combinatórios (Kapur, 1970, p. 114-115, trad. nossa).

Inspirados nas contribuições encontradas e com base na nossa experiência, ampliamos essa visão e arriscamos uma definição para o pensamento combinatório: é a capacidade de selecionar, ordenar ou exaurir as possibilidades de associação entre elementos de um ou mais conjuntos, de forma geral ou satisfazendo restrições impostas.

1.2 As motivações e a trajetória da pesquisa

Sob orientação da segunda autora, este estudo tem como motivação as inquietações do primeiro autor, que escreve em primeira pessoa os próximos cinco parágrafos, com o intuito de dividir com o leitor a trajetória inicial da pesquisa.

Alguns conceitos associados ao raciocínio combinatório afetam o desenvolvimento da capacidade para a resolução e análise de problemas que vão além da Combinatória. Esses conceitos sempre foram percebidos de forma intuitiva, mas foi somente no final da minha licenciatura em Matemática que tive contato com esse campo de estudo e o devido formalismo matemático. Durante aquele semestre, a disciplina de Análise Combinatória se mostrou, de longe, a mais empolgante de toda a graduação. Para minha surpresa, percebi que, para a quase totalidade dos meus colegas, esse tópico ou era desinteressante ou causava desconforto. Esse comportamento se estendia às centenas de estudantes de diversas graduações com os quais eu interagia através de problemas divulgados no Facebook.

Já formado, durante um seminário sobre criatividade em matemática, tive um insight: talvez toda aquela dificuldade derivasse do fato de que a maioria das técnicas de contagem era introduzida em um momento muito singular da trajetória do estudante e, em sua maioria, desconectadas dos demais campos estudados na Matemática (como Geometria e Álgebra).

Eu acreditava que uma possibilidade para enfrentar essa questão seria introduzir o pensamento combinatório em um momento anterior da trajetória escolar, permeando o ensino com ideias mais elementares do que as técnicas vistas no Ensino Médio, e tentando conectá-las com atividades curriculares já a partir do 6º ano.

Embora eu presumisse ser um pouco ousada essa antecipação, foi exatamente o que percebi no primeiro contato com a BNCC (2018), devido à recente publicação da sua 3ª versão, que trazia a abordagem do tema de forma ainda mais precoce, de forma explícita, a partir do 4º ano.

Essa ideia ficou aninhada em minha mente, e em algumas oportunidades eu comentei algo a respeito com alguns colegas de formação em Matemática. Foi só quando vi o edital de seleção para a Pós-Graduação em Ensino de Ciências em Matemática que decidi que já era hora de investigar mais a respeito e materializar aquelas primeiras ideias.

Dando início ao estudo formal do tema sob a orientação da segunda autora, começamos a buscar qual era a compreensão da construção do pensamento combinatório segundo a BNCC (2018), documento que norteia a educação escolar no nosso país.

Nos surpreendemos com a presença explícita e implícita da temática no documento, ao longo dos anos escolares, desde o Ensino Fundamental I até o Médio, que pode favorecer ao estudante um domínio mais coeso das habilidades relacionadas ao desenvolvimento do pensamento combinatório, podendo, por consequência, propiciar um aprofundamento em técnicas mais elaboradas de contagem, fugindo de estratégias ineficazes, como aquela que afirma que “se a ordem importa, então é um arranjo; se não, trata-se de uma combinação”.

1.3 Objetivo

O objetivo da pesquisa realizada foi investigar o processo de desenvolvimento do pensamento combinatório na Educação Básica, segundo a proposta apresentada na BNCC (2018).

Realizamos um mergulho sobre a estrutura da BNCC (2018), mapeando todas as vezes em que o pensamento combinatório se mostrava presente, ainda que não de forma explícita, nas conexões observadas na educação matemática escolar. Tal momento buscou, além de identificar as habilidades relacionadas com o pensamento combinatório, descrever como elas se relacionam entre si, tendo como panorama o percurso nos doze anos previstos para a trajetória.

Na próxima seção, nos debruçamos sobre a metodologia da pesquisa e os procedimentos utilizados para a produção de dados, para apresentar as ideias que fundamentam as discussões. Em seguida, trazemos uma análise a respeito do desenvolvimento do pensamento combinatório na Educação Básica, em conexão com as competências e habilidades propostas na BNCC (2018).

2 UMA PESQUISA QUALITATIVA E OS PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

A pesquisa desenvolvida não buscou quantificar fenômenos, nem atribuir números absolutos ou relativos às discussões propostas. O estudo se constitui de observações e análises não numéricas de um documento, a BNCC (2018), e de estudos em torno do desenvolvimento do pensamento combinatório. Os dados são, portanto, resultado de uma pesquisa qualitativa.

A principal fonte de dados é a análise documental, no caso, do documento que norteia a Educação Básica no nosso país, a Base Nacional Comum Curricular, BNCC (2018). Segundo Lima Junior *et. al* (2021), a análise documental é

> "[...] uma metodologia de investigação científica que adota determinados procedimentos técnicos e científicos com o intuito de examinar e compreender o teor de documentos dos mais variados tipos, e deles obter as mais significativas informações, conforme o problema de pesquisa estabelecido" (Lima Junior et al., 2021, p. 38).

A pesquisa qualitativa, dentre outros aspectos, é amplamente utilizada para explorar determinadas questões "que, dificilmente, o pesquisador que recorre a métodos quantitativos consegue abordar" (Deslauriers; Kérisit, 2014, p. 130). "Um dos aspectos da pesquisa qualitativa consiste em analisar os dados qualitativos. [...] resistentes à conformação

Ciência em Evidência, Revista Multidisciplinar, ISSN 2763-5457, v.5, FC, e024002, 2024, 22 pág.

estatística. São dados da experiência, as representações, as definições da situação, as opiniões, as palavras, o sentido da ação e dos fenômenos" (Deslauriers; Kérisit, 2014, p. 147).

Uma análise dessa natureza vai ao encontro do nosso propósito, ao buscar identificar a articulação dos conceitos e elementos voltados ao desenvolvimento do pensamento combinatório na BNCC (2018).

Para a análise dos dados, nos apoiamos nos conceitos e elementos ligados ao pensamento combinatório, para a discussão em torno de sua presença na BNCC (2018). Esses conceitos foram percebidos por meio da análise documental e nas figuras construídas por meio dela, observando atentamente os encadeamentos entre as habilidades ao longo dos anos da educação escolar. Também nos atentamos ao papel do pesquisador, que deve organizar os seus dados "à luz de conceitos topológicos apoiados sobre elementos estruturais e processos específicos ao fenômeno pesquisado" (Deslauriers; Kérisit, 2014, p. 140).

Durante o processo de desenvolvimento deste trabalho, ao refletir sobre como a construção do pensamento combinatório se dá, tivemos convicção de que é decisivo o aspecto desafiador presente nas iniciativas de resolução de problemas. Conforme destaca Onuchic (1999), é preciso inverter a estratégia de apresentar uma teoria para, então, apresentar problemas a serem resolvidos, pois quando damos a oportunidade para que os próprios estudantes pensem e organizem as ideias em torno de um problema desafiador, potencializamos a construção de conhecimentos de forma independente da teoria e, então, quando tal teoria é formalizada junto aos estudantes, uma aprendizagem mais significativa se torna possível.

Em estudos futuros, pretendemos investigar como colocar em prática, por meio da resolução de problemas desafiadores, o desenvolvimento do pensamento combinatório da forma como proposto na BNCC (2018), tendo como base/referência as conexões trazidas à tona.

A seguir, apresentamos discussões que orientaram esta pesquisa. Tecemos considerações a respeito do pensamento combinatório e das competências e habilidades relacionadas ao seu desenvolvimento na Educação Básica, destacadas na BNCC (2018). Ao mesmo tempo em que trazemos à luz as diversas formas por meio das quais o pensamento combinatório se faz presente naquele documento, também destacamos conexões explícitas e implícitas observadas entre as habilidades que envolvem o tema e, dessa forma, exibimos uma análise do que preconiza a BNCC (2018) sobre o desenvolvimento do pensamento combinatório.

3 O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO COMBINATÓRIO NA EDUCAÇÃO BÁSICA

3.1 Considerações em torno do pensamento combinatório

A Análise Combinatória é um tópico considerado relativamente difícil quando comparado com outros assuntos da Matemática escolar, apesar de se relacionar com ideias bem simples, como a ação de contar. Uma das características de seus problemas é que suas soluções podem vir por diferentes caminhos, em geral permitindo estratégias que estão fora do escopo em que aquele problema foi inserido. Enquanto é comum ter uma solução para um problema de álgebra ou geometria exatamente dentro do esperado, é possível se deparar com um estudante resolvendo algo diferente do que se pretendia.

Por outro lado, a simplicidade dos conceitos presentes nos enunciados dos problemas permite que qualquer pessoa compreenda a tarefa que se pretende empreender, o que costuma atrair atenção, pelo menos à primeira vista, de um público maior de interessados, dado o tom normalmente lúdico do enunciado.

Mas afinal, o que é Combinatória? Presente nos livros escolares como “Análise Combinatória”, as definições são diversificadas. Às vezes surge como “técnicas de Análise Combinatória”, sem uso de uma definição explícita para o tema, apenas apresentando a estratégia de enumeração associada àquela técnica. A Análise Combinatória está relacionada com muitas ideias, algumas realmente muito simples, ligadas à enumeração individual de possibilidades. Conforme se avança nos estudos, vão sendo apresentadas técnicas mais elaboradas, cujo propósito, de forma geral, é contar sem ter que explicitar todas as situações uma por uma. O auge da Combinatória no âmbito escolar acontece no Ensino Médio. Alguns conceitos são formalizados, uma porção de exercícios é proposta e, em seguida, tudo aquilo poderá constar como ferramenta disponível para o estudo de Probabilidade. Tudo isso em umas poucas semanas concentradas num momento do currículo escolar.

Apesar disso, a Combinatória costuma aparecer implicitamente em outras ocasiões do percurso escolar. É possível verificar isso em livros didáticos, e especialmente na própria BNCC (2018), como vamos trazer ao longo deste artigo. Aqui listamos algumas dessas aparições:

a) O cálculo do número de divisores de um número natural, visto nos anos iniciais do Ensino Fundamental II, é uma aplicação direta do princípio multiplicativo. Dada a fatoração

$$N = p_1^{k_1} \times p_2^{k_2} \times \cdots \times p_n^{k_n},$$

em que os p são primos distintos e os k seus respectivos expoentes, o número de divisores de N é dado pelo produto $\left(k_1 + 1\right) \times \left(k_2 + 1\right) \times \cdots \times (k_n + 1)$.

b) Os coeficientes de alguns dos produtos notáveis, também vistos no Ensino Fundamental II, como destacamos em

$$(a \pm b)^2 = 1a^2 \pm 2ab + 1b^2 \quad \text{e} \quad (a \pm b)^3 = 1a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm 1b^3,$$

são obtidos do triângulo de Pascal, usualmente estudado no Ensino Médio.

c) O número de diagonais de um polígono convexo, outro assunto do Ensino Fundamental II, está associado ao pareamento de pontos (os vértices, nesse caso) e pode ser calculado utilizando combinações simples:

$$\binom{n}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2}.$$

d) A relação de Euler:

$$F + V = A + 2,$$

que relaciona o número de faces, vértices e arestas em um poliedro, é um resultado combinatório para grafos planares, e pode ser explorado nas diversas vezes em que os sólidos geométricos são abordados nas três etapas da Educação Básica.

e) O estudo das funções, visto profundamente no Ensino Médio, é uma oportunidade de conectar Álgebra e Combinatória, em particular para obter o número de funções injetoras de um conjunto A com m elementos em um conjunto B com n elementos, que é dado por

$$n^m,$$

consequência do princípio multiplicativo (usualmente chamada “arranjo com repetição”).

f) As progressões aritméticas também são oportunidade para fazer conexões. Por exemplo, se

isolarmos n na conhecida fórmula do termo geral, chegamos a

$$n = \frac{a_n - a_1}{r} + 1,$$

que é uma forma de contar o número de termos numa sequência equiespaçada. Essa noção é um tema tão recorrente em problemas de Combinatória que o destacamos como uma habilidade acessória para o pensamento combinatório, conforme será visto na Seção 3.2. Além disso, tanto a inserção de meios aritméticos como a de meios geométricos, exercícios pertinentes a esse tópico, são auxiliadas pelo desenvolvimento desse tipo de raciocínio.

g) Apesar de não ser diretamente mencionada na BNCC (2018), a noção de conjuntos está presente nos livros didáticos e se espalha por toda a Matemática, não apenas na Educação Básica. Destacamos aqui dois conceitos conectados com a Combinatória. O primeiro surge quando tentamos calcular o número de subconjuntos de um conjunto A com n elementos. Em outras palavras, o tamanho do conjunto das partes (ou conjunto potência) de A é dado por

$$n(A) = 2^n$$

e é uma aplicação do Teorema Binomial. O outro é mais elaborado, e sua demonstração costuma ser evitada mesmo nos cursos de graduação. No entanto, a ideia geral é, além de simples, útil em problemas mais elaborados. Aqui nos ateremos apenas a uma de suas aplicações. O número de elementos da união de dois conjuntos, A e B, é dado por

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B),$$

em que os símbolos $\cup$ e $\cap$ representam a união e a intersecção de conjuntos, respectivamente. Indo um pouco além, a fim de ilustrar nosso ponto, o número de elementos da união de três conjuntos, $A,\ B\ e\ C$, é

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C).$$

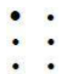
Percebe-se que na primeira situação são retiradas algumas intersecções e, em seguida, recolocadas. Esse padrão continua, conforme o número de conjuntos aumenta, ora removendo intersecções, ora adicionando. Essa é justamente a ideia subjacente ao Princípio da Inclusão e Exclusão. Se o número de elementos de cada conjunto tem um padrão simples, como no caso em que todos possuem a mesma cardinalidade, os cálculos são bem simplificados pelo uso de coeficientes binomiais, presentes no estudo das combinações simples. Uma aplicação recorrente em concursos e vestibulares mais exigentes é aquela associada ao cálculo do número de soluções inteiras de uma equação de várias variáveis.

h) Para encerrar a lista de exemplos, outro assunto conectado com o pensamento combinatório é a interpretação do determinante de uma matriz A, geralmente expresso como uma fórmula desprovida de significado. Um meio de contornar essa limitação é apresentá-lo como uma soma das formas de escolher n termos de A, em que cada parcela contém exatamente um elemento de cada linha e de cada coluna uma única vez. Longe de ser algo simples, é útil ter essa justificativa à disposição para poder satisfazer as dúvidas das mentes mais curiosas.

Quais são as consequências de manter desconectado do restante o ensino de um tema tão permeante como esse? Não sabemos responder. Mas acreditamos que deixar de compartimentar a Matemática como um conjunto de temas desconexos e desassociados seja uma vantagem didática, em vez de uma limitação. A título de exemplo, trazemos aqui duas situações extraídas de sites públicos que mostram que os percalços da forma como a Combinatória foi ensinada no passado tem consequências mesmo fora da escola.

Hoje, a quantidade de sites, blogs e vídeos dedicados à resolução de problemas de matemática é enorme. Parte deles utiliza o poder de atração de problemas sob a forma de desafio para aumentar o número de acessos, likes e compartilhamentos. A simplicidade dos enunciados na Combinatória é um prato cheio para isso. Uma armadilha útil. Ainda assim, não é incomum encontrar soluções ora equivocadas, ora limitadas por algo sutil na interpretação de quem apresenta a solução - geralmente um professor ou entusiasta do tema. Com objetivo de apenas ilustrar essas afirmações, vamos apresentar, de forma bem resumida, duas situações.

a) A escrita Braile para cegos é um sistema de símbolos no qual cada caráter é um conjunto de 6 pontos dispostos em forma retangular, dos quais pelo menos um se destaca em relação aos demais. Por exemplo, a letra A é representada por

.

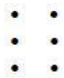
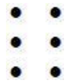
O número total de caracteres que podem ser representados no sistema Braile é:

( ) 12 ( ) 31 ( ) 36 ( ) 63 ( ) 720.[3]

Sabemos a resposta, não se trata de um problema difícil. Pode até mesmo ser resolvido listando-se todos os casos na forma de uma tabela, para economizar espaço. Mas atenção ao trecho “pelo menos um se destaca em relação aos demais”. O gabarito disponibilizado

[3] ENEM 2005.

nos sites encontrados apresenta a opção 63 como resposta correta. Abaixo exibimos duas das 64 possibilidades de caracteres possíveis quando se ignora a restrição do trecho:

 e .

Em nenhuma delas há símbolos que se destacam em relação aos demais e, portanto, ambas
deveriam ser desconsideradas dos cálculos, levando ao total de 64 - 2 = 62 possibilidades. A dificuldade aqui não é devida aos cálculos, mas à pouca ênfase que é dada a definições combinatórias como aquela do conceito de distinguíveis, muito presente nos problemas de permutações circulares e permutações com repetição.

b) Quantas palavras de 4 letras podem ser formadas a partir da palavra LEARNING?

Após esclarecimento o curto enunciado, a solução apresentada dividiu o problema em 3 casos, algo bem comum em Combinatória: palavras com 2 N's, com 1 N e sem N's.

Em cada situação, uma técnica de contagem diferente foi utilizada, a saber: separar 2 N's e sortear 2 outras letras, contando as permutações das 4 letras (180 palavras); escolhendo 3 letras diferentes de N, inserindo um N numa das 4 posições e permutando as demais letras, multiplicando o total de permutações por 4 (120x4 = 480 palavras); e escolhendo 4 letras diferentes de N para permutá-las (360 palavras), obtendo 1020 palavras. Destaque para o fato de que não se mencionou o termo arranjo, muito comum no Brasil.

Uma outra solução (nem mais certa, nem mais errada, apenas mais curta) é obtida ao se dividir o problema em apenas 2 casos: com 2 N's (em razão da forma diferente de contar permutações quando há repetições); e com no máximo 1 N (basta remover o segundo deles da palavra LEARNING). A solução obtida é a mesma: 180+840=1020.

Por que chamamos atenção para uma solução que não está errada? Porque dividir em casos é algo que leva tempo, permite cometer mais erros (há mais etapas de cálculos) e torna a resolução de um problema menos atrativa (enfadonha). Neste problema específico, a ideia que deixou de ser explorada está associada ao conceito de conjuntos complementares (casos com 2 N's e todos os demais casos). Ademais, contar as palavras do segundo caso é bem mais simples, pois deriva diretamente do princípio multiplicativo: 7x6x5x4 = 840.

Nossa intenção ao trazer essas situações foi chamar atenção para o poder do ensino de Combinatória no âmbito escolar e para o potencial alcance que encarar o tema com mais

Ciência em Evidência, Revista Multidisciplinar, ISSN 2763-5457, v.5, FC, e024002, 2024, 22 pág.

seriedade, sem deixar de criar oportunidades lúdicas no trajeto, pode levar o estudante a explorar novas fronteiras, algo que vá além do comum “a ordem importa” ou “com reposição”.

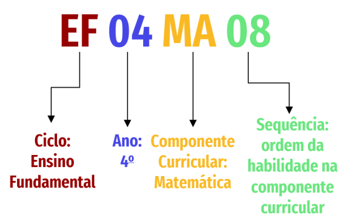
Propomos que o professor utilize a Análise Combinatória para fazer um passeio sempre que possível. Visitar os números de Catalan, o Princípio das Gavetas, os números de Stirling, um dos lemas de Kaplansky, falar de passeios aleatórios, ladrilhamentos no plano, polinômios cromáticos, da geometria do taxista, dos quadrados latinos e das permutações caóticas. Não há limite para onde se pode chegar nessa viagem. Defendemos: é mais fácil aprender quando se está encantado. Nossa tarefa, como professores, é descobrir como faremos isso.

3.2 O que preconiza a BNCC (2018) sobre o desenvolvimento do pensamento combinatório

O documento que norteia a Educação Básica no nosso país é, atualmente, a BNCC (2018), que pode ser considerada uma versão aprimorada dos antigos Parâmetros Curriculares Nacionais. Nela, estão presentes apontamentos cujo objetivo é orientar as escolas sobre o que é fundamental na educação brasileira, direcionando, dessa forma, as propostas curriculares.

Considerando Ensino Fundamental e Médio, o percurso do estudante é dividido em 12 anos (antigas séries) e, para tal, o documento apresenta um conjunto de competências gerais e específicas, bem como uma lista de habilidades a trabalhar em cada ano das respectivas áreas, representadas por um conjunto padronizado de siglas, como exibido no modelo da Figura 1:

Figura 1 – forma como cada habilidade é identificada na BNCC (2018).



Fonte: Elaborado pelos autores.

Guiados pelos objetivos da pesquisa, nos debruçamos no estudo minucioso do documento, a fim de identificar conexões entre as habilidades presentes na área de Matemática e a Análise Combinatória – sejam elas evidenciadas por palavras-chave

Ciência em Evidência, Revista Multidisciplinar, ISSN 2763-5457, v.5, FC, e024002, 2024, 22 pág.

consensualmente associadas a esse campo, tais quais, “princípio multiplicativo” e “espaço amostral” (aqui nomeadas conexões explícitas), ou relações mais sutis, como “pareamento” e “equivalência” (aqui nomeadas conexões implícitas).

As seções a seguir apresentam essas habilidades, da forma como estão descritas na BNCC (2018), acompanhadas de uma breve justificativa com as razões que nos permitiram perceber a relação de cada uma delas com o pensamento combinatório. Apesar de enunciar inicialmente as habilidades ao lado de suas siglas, utilizaremos apenas as siglas nas discussões, para não tornar o texto repetitivo.

3.2.1. Conexões explícitas com Análise Combinatória

A seguir, apresentamos as 7 habilidades cuja descrição nos levou a perceber conexões explícitas com a Análise Combinatória:

- (EF01MA01) Utilizar números naturais como indicador de quantidade ou de ordem em diferentes situações cotidianas e reconhecer situações em que os números não indicam contagem nem ordem, mas sim código de identificação.

Esse é, na sua essência, o verdadeiro Princípio Fundamental da Contagem: estabelecer uma bijeção com um subconjunto finito dos naturais, e dessa forma, definindo a cardinalidade da coleção sob análise. A relação de ordem surge, então, como consequência.

- (EF04MA08) Resolver, com o suporte de imagem e/ou material manipulável, problemas simples de contagem, como a determinação do número de agrupamentos possíveis ao se combinar cada elemento de uma coleção com todos os elementos de outra, utilizando estratégias e formas de registro pessoais.

Primeira aparição do Princípio Multiplicativo na BNCC (2018), essa também será, na maioria das vezes, a primeira vez em que o aluno se utilizará de desenhos e diagramas para resolver situações do mundo dos números – isto é, fora da geometria.

- (EF05MA09) Resolver e elaborar problemas simples de contagem envolvendo o princípio multiplicativo, como a determinação do número de agrupamentos possíveis ao se combinar cada elemento de uma coleção com todos os elementos de outra coleção, por meio de diagramas de árvore ou por tabelas.

Aqui o Princípio Multiplicativo será trabalhado através do uso de estratégias de contagem mais algorítmicas.

- (EF08MA03) Resolver e elaborar problemas de contagem cuja resolução envolva a aplicação do princípio multiplicativo. (EF08MA22) Calcular a probabilidade de eventos, com base na construção do espaço amostral, utilizando o princípio multiplicativo, e reconhecer que a soma das probabilidades de todos os elementos do espaço amostral é 1.

Ambas as habilidades ocorrem no oitavo ano. Nesse momento, a criança já teve oportunidade de trabalhar diferentes estratégias de contagem, e essas habilidades permitirão ao professor o uso de situações-problema cujo enunciado vá além de uma simples descrição desprovida de contexto. Dependendo da forma como as habilidades relacionadas ao uso de algoritmos avançaram no 6º e 7º anos, é possível propor aqui atividades cuja estratégia de resolução vai amadurecendo na mente do estudante através do uso de listagens sistemáticas.

- (EM13MAT310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo diferentes tipos de agrupamento de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas como o diagrama de árvore.

Alcançamos o Ensino Médio. Esse momento pode ser considerado o ápice da Análise Combinatória no trajeto escolar do estudante. Se as habilidades foram bem trabalhadas nas etapas anteriores e as noções mais elementares assimiladas, os problemas propostos podem ter conteúdos mais elaborados, correndo menor risco de que os objetivos didáticos não sejam atingidos em decorrência de limitações operacionais, por exemplo. Por outro lado, as técnicas aprendidas a partir de agora serão fundamentais para a resolução de problemas intimamente conectados com a Análise Combinatória, além de impulsionar a abstração do estudante quando ele se deparar com situações mais gerais.

- (EM13MAT311) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade de eventos aleatórios, identificando e descrevendo o espaço amostral e realizando contagem das possibilidades.

Com o uso das técnicas aprendidas nas etapas anteriores – pois o aprendiz não precisará listar nem contar um a um os elementos de uma coleção –, aqui ele terá oportunidade de vivenciar noções mais relacionadas com a frequência relativa do que a absoluta, sem, contudo, ficar totalmente desassociado das noções de contagem.

3.2.2. Conexões implícitas com Análise Combinatória

Aqui apresentamos 16 habilidades cuja descrição nos permitiu constatar, ainda que de forma sutil, conexões com a Análise Combinatória.

- (EF01MA02) Contar de maneira exata ou aproximada, utilizando diferentes estratégias como o pareamento e outros agrupamentos.

Habilidade relacionada com EF01MA01, oferece uma oportunidade para as primeiras estratégias em que se conta sem necessariamente considerar cada objeto de uma coleção individualmente. O contar sem, efetivamente, contar. Também é uma oportunidade para introduzir o paradigma da contagem por agrupamento de outra maneira, ao relacionar a coleção sob análise a coleções de cardinalidade já estabelecida.

- (EF02MA09) Construir sequências de números naturais em ordem crescente ou decrescente a partir de um número qualquer, utilizando uma regularidade estabelecida. (EF02MA18) Indicar a duração de intervalos de tempo entre duas datas, como dias da semana e meses do ano, usando calendário, para planejamentos e organização de agenda.

Essas duas habilidades, juntamente com EF01MA01, servem de base para o que será sedimentado, lá no Ensino Médio, em EM13MAT507. Juntas, elas põem a contagem de sequências e outros padrões numéricos em nível operacional, permitindo ao estudante não se distrair com detalhes primários quando da resolução de problemas mais complexos. Também é uma oportunidade para colocar em evidência o uso da subtração para contagem.

- (EF02MA21) Classificar resultados de eventos cotidianos aleatórios como “pouco prováveis”, “muito prováveis”, “improváveis” e “impossíveis”.

Primeiro contato com o termo aleatório que surge na BNCC (2018). Uma vez que esse é um conceito presente em muitas ciências, é importante aproveitar o momento para traçar paralelos, ainda que em nível superficial, com ideias reforçadas pela pouca maturidade do aprendiz, usualmente equivocadas. Uma ideia central está associada aos conceitos de aleatoriedade e proporcionalidade (lançar um dado 12 vezes garante que cada face ocorrerá 2 vezes ao final?; se nos 8 primeiros de 10 lançamentos de uma moeda honesta já saíram 5 caras, espera-se que os próximos resultados sejam todos coroa a fim de “equilibrar” a probabilidade?). Esse trabalho pode e deve ser continuado mais adiante, em EF04MA26.

- (EF03MA04) Estabelecer a relação entre números naturais e pontos da reta numérica para utilizá-la na ordenação dos números naturais e também na construção de fatos da adição e da subtração, relacionando-os com deslocamentos para a direita ou para a esquerda.

Além de trazer propriedades equivalentes às vistas em EF01MA01 e EF02MA09, essa é uma oportunidade de revisar o que foi aprendido em EF02MA18, para que o estudante possa perceber as semelhanças e diferenças entre as propriedades da subtração tanto em domínio discreto como em contínuo.

- (EF03MA25) Identificar, em eventos familiares aleatórios, todos os resultados possíveis, estimando os que têm maiores ou menores chances de ocorrência.

Para a maioria das realidades de nossas escolas, esse será, na situação mais precoce, o primeiro contato do estudante com listagem de possibilidades de eventos, momento oportuno para semear as primeiras noções de enumeração sistemática, a fim de que retomar gradualmente EF04MA26, EF05MA22, EF06MA30, EF07MA34, EM13MAT312 e EM13MAT511.

- (EF04MA19) Reconhecer simetria de reflexão em figuras e em pares de figuras geométricas planas e utilizá-la na construção de figuras congruentes, com o uso de malhas quadriculadas e de softwares de geometria.

As relações de simetria (e, mais geralmente, de equivalência) são essenciais para a compreensão do termo “distinguíveis” em problemas de enumeração. Como essa é a única aparição desse conceito no Ensino Fundamental na BNCC (2018), deve-se aproveitar para abordar, de forma possivelmente lúdica, atividades que contemplem permutações circulares e permutações com repetição, bem como fazer conexões com a habilidade EM13MAT511.

- (EF04MA26) Identificar, entre eventos aleatórios cotidianos, aqueles que têm maior chance de ocorrência, reconhecendo características de resultados mais prováveis, sem utilizar frações.

Oportunidade de dar continuidade ao trabalho iniciado em EF02MA21. Pode-se incluir atividades que permitam relacionar eventos que nunca ocorrem ou que ocorrem sempre com os conceitos de evento impossível e evento certo. Também é possível trabalhar a gradação de probabilidade (pouco provável, muito provável) associando-a à frequência de ocorrência numa listagem de possibilidades – isso não precisa se encerrar aqui, pois tem relação com EF05MA22, EF06MA30, EF07MA34, EM13MAT312 e EM13MAT511.

- (EF05MA10) Concluir, por meio de investigações, que a relação de igualdade existente entre dois membros permanece ao adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir cada um desses membros por um mesmo número, para construir a noção de equivalência.

Apesar de ser uma habilidade inerente à álgebra, as propriedades invariantes dessas operações podem auxiliar em problemas de contagem, juntamente com EF03MA04.

Ressalte-se o fato de que essa noção de equivalência, quando pouco trabalhada, se tornará um obstáculo para lidar com demonstrações por argumento combinatório no Ensino Médio.

- (EF05MA22) Apresentar todos os possíveis resultados de um experimento aleatório, estimando se esses resultados são igualmente prováveis ou não.

Se a ação de construir listagens sistemáticas foi bem trabalhada anteriormente em EF03MA25 e EF04MA26, é possível agora desenvolver melhor essa habilidade, apresentando ao aprendiz problemas cuja solução requeira uma organização em mais de dois níveis (numa árvore de possibilidades, por exemplo), tornando pouco prática a listagem de todos os resultados, forçando, dessa forma, o aprendiz a dar os primeiros passos na direção da enumeração mais abstrata.

- (EF06MA30) Calcular a probabilidade de um evento aleatório, expressando-a por número racional (forma fracionária, decimal e percentual) e comparar esse número com a probabilidade obtida por meio de experimentos sucessivos. (EF07MA34) Planejar e realizar experimentos aleatórios ou simulações que envolvem cálculo de probabilidades ou estimativas por meio de frequência de ocorrências.

Tanto 6º como 7º anos apresentam certa fragilidade no que tange ao pensamento combinatório, por serem os únicos anos da Educação Básica que podem ser percorridos sem que o estudante seja alcançado por algum conteúdo de Combinatória. Para tanto, seria suficiente abordar as atividades relacionadas com as habilidades descritas em EF06MA30 e EF07MA34 trabalhando com as probabilidades já fornecidas nos enunciados, sem passar pela enumeração de possibilidades. Por outro lado, é possível aproveitar as habilidades descritas em EF06MA04 (construção de algoritmos em linguagem natural) e EF07MA05 (resolução de problemas pelo uso de algoritmos diferentes) para introduzir atividades de enumeração sistemática, como a presente na construção do conjunto de possibilidades, que possuem vários conceitos necessários para a resolução de problemas no Ensino Médio.

- (EF08MA11) Identificar a regularidade de uma sequência numérica recursiva e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números seguintes.

Resta uma lacuna no que se refere ao pensamento combinatório presente na BNCC (2018), que seria uma habilidade relacionada ao pensamento recursivo. Em todas as vezes que esses termos são mencionados juntos, são abordadas sequências numéricas que podem ser facilmente reconhecidas, como a sequência dos pares ou a sequência dos números que deixam resto 2 quando divididos por 5, por exemplo. Essa seria a habilidade mais avançada

Ciência em Evidência, Revista Multidisciplinar, ISSN 2763-5457, v.5, FC, e024002, 2024, 22 pág.

relacionada a recursões que está presente na BNCC (2018). Ainda que simples para as necessidades do Ensino Médio, é possível trabalhá-la junto a EF06MA04 e EF07MA05 ao longo desses três anos para desenvolver noções relacionadas à recursão combinatória, como o uso do fatorial e princípios elementares da relação de Stifel. Dominar esses conceitos é fundamental para alcançar os níveis mais avançados de pensamento combinatório na Educação Básica.

- (EF09MA20) Reconhecer, em experimentos aleatórios, eventos independentes e dependentes e calcular a probabilidade de sua ocorrência, nos dois casos.

Essa é outra situação que poderia ser coberta sem contato direto com conceitos da Combinatória. No entanto, a noção de independência estatística é sofisticada e sua exemplificação (que não seja meramente assumindo uma definição) através da utilização de algo mais palpável, como um pequeno espaço de possibilidades, evitará equívocos de entendimento, em especial nos problemas envolvendo probabilidade condicional e experimentos sucessivos.

- (EM13MAT312) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos.

Aqui o estudante já está familiarizado com a maioria dos conceitos pertinentes ao pensamento combinatório, além de uma gama de técnicas de contagem. É possível trabalhar mudanças causadas no espaço amostral por experimentos sucessivos via enumeração parcial (já que a abstração foi abordada em EF05MA22) ou via implementação computacional (a depender de como algoritmos foram trabalhados em EF06MA30 e EF07MA34).

- (EM13MAT507) Identificar e associar sequências numéricas (PA) a funções afins de domínios discretos para análise de propriedades, incluindo dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.

Se bem desenvolvidas anteriormente, as habilidades EF01MA01, EF02MA09 e EF02MA18 proverão ao estudante o ferramental basilar para essa etapa. Adiciona-se aí EF03MA04 e EF05MA10, que complementam as propriedades das sequências numéricas que costumam surgir em situações combinatórias.

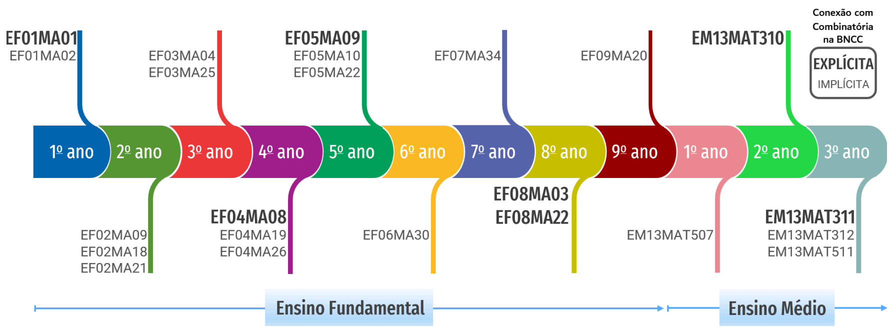
- (EM13MAT511) Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, e de eventos, equiprováveis ou não, e investigar implicações no cálculo de probabilidades.

Um tipo de problema que requer atenção especial, por alcançar a solução correta tanto considerando que "a ordem importa" como "a ordem não importa", é aquele que leva à construção de conjuntos de possibilidades distintos (e assim, de espaços amostrais diferentes).

3.2.3. Visão Geral

Com a intenção de melhor visualizar a distribuição das habilidades descritas em relação ao tratamento do pensamento combinatório segundo a BNCC (2018), elaboramos a Figura 2.

Figura 2 – Curso das habilidades identificadas na Educação Básica.



Fonte: Elaborado pelos autores.

Acreditamos que ter clareza sobre esse percurso poderá auxiliar o professor a programar atividades para a prática de sala de aula, considerando as etapas de desenvolvimento do pensamento combinatório, conforme descrito na Seção 3.1.

4 UMA ANÁLISE DA PRESENÇA DO PENSAMENTO COMBINATÓRIO NA BNCC (2018)

Tendo como base o que foi apresentado na Seção 3.2, fica mais fácil compreender que essas habilidades não estão espalhadas sem critérios na BNCC (2018) – há conexões entre elas. Algumas mais sutis, outras mais fortes. Partindo desse panorama de forma geral, é possível perceber que há habilidades com características mais correlatas entre si, formando o que aqui chamaremos de classes. Acreditamos que essa visão mais ampla pode propiciar aos professores considerarem outras abordagens quando forem trabalhar as habilidades a elas inerentes.

a) Classe das habilidades acessórias (HA). São exemplos: habilidades cujo princípio é associar os objetos de uma coleção aos números naturais, ou contar de dois em dois, ou saber quantos dias há em um intervalo, que servem de auxílio no processo enumerativo. Diante disso, habilidades com esse perfil constituem a classe das habilidades acessórias, estão fortemente conectadas entre si e fazem ligação com muitas outras.
b) Classe das habilidades do princípio multiplicativo (HPM). Apoiam-se na ideia do cruzamento de possibilidades, relacionando escolhas, combinando cada objeto de uma coleção com todos os objetos de outra, têm como essência o princípio multiplicativo, nome herdado por esta classe.
c) Classe das habilidades do conjunto de possibilidades (HCP). As habilidades dedicadas a listar possibilidades, ou elencar todas as configurações possíveis, estão associadas à ideia de frequência absoluta. Mais à frente elas propiciarão, após devido formalismo, que o aluno saiba construir espaços de probabilidade, alicerçados no conceito de frequência relativa.
d) Classe dos experimentos aleatórios (HEA). Por sua vez, as habilidades cujo cerne está ancorado na noção do que é ou não provável, em estabelecer conexão entre frequência relativa e probabilidade, e na noção de incerteza presente em inúmeras ciências, introduzem os princípios e propriedades básicas do conceito formal de probabilidade. Elas integram ideias essenciais na realização de experimentos aleatórios, configurando esta última classe.

A fim de auxiliar a visualização da sequência de habilidades ao longo da BNCC (2018) e das ideias subjacentes que evidenciamos, desenvolvemos um mapa mental para as habilidades, posicionando-as nas classes descritas, modelado por meio de um diagrama de Venn, tendo como cenário os fundamentos que caracterizam as noções de contagem e de probabilidade.

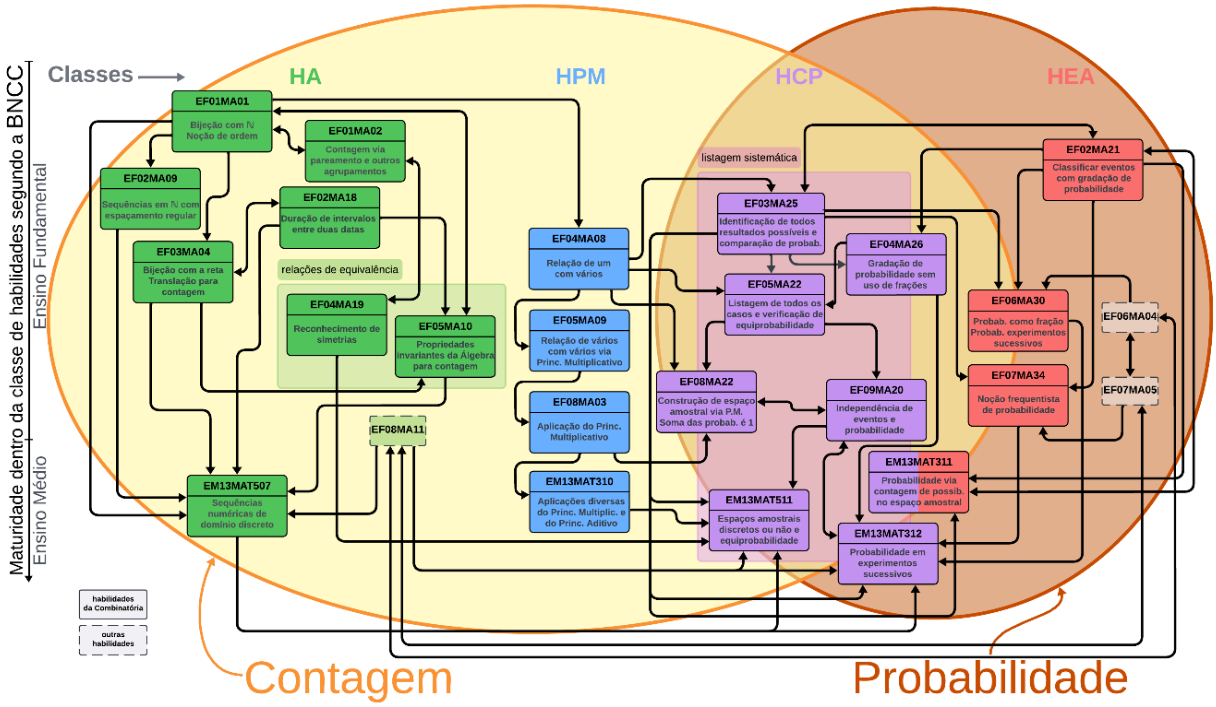
É tendo isso em mente que deve ser apreciada a Figura 3, uma expansão com mais detalhes das ideias presentes na Figura 2. Esperamos que esse mapa possa fornecer recursos auxiliares ao professor e, possivelmente, inspirá-lo na construção de um material didático para a condução das atividades em sala de aula.

Não desejamos que esse mapa, no formato que foi desenvolvido, seja estático ou mesmo à prova de críticas/falhas. É possível notar, por exemplo, que algumas das habilidades, da forma como estão descritas na BNCC (2018), envolvem mais de um propósito,

Cézar Augusto de Freitas Anselmo
Ana Karina Cancian Baroni

permeando, dessa forma, mais de uma das classes descritas, e, até mesmo, extrapolando os limites dos conjuntos utilizados para representar as ideias e habilidades abordadas.

Figura 3 – Mapa mental das ideias apresentadas na Seção 3.



Fonte: Elaborado pelos autores.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A pesquisa realizada revela inicialmente que no documento que norteia atualmente a educação escolar no nosso país, a BNCC (2018), as habilidades voltadas ao desenvolvimento do pensamento combinatório não estão mais isoladas no segundo ano do Ensino Médio, mas sim conectadas a outras habilidades, previstas em outros momentos do ensino da Matemática, tornando possível uma aprendizagem mais significativa em torno da temática e transformando o que outrora era, muitas vezes, uma traumatizante introdução.

A partir dessa verificação, foi realizado um mapeamento das habilidades no documento, avançando para o estabelecimento de conexões explícitas e implícitas reveladas por meio da análise documental. O mapeamento nos motivou para um estudo posterior: organizar uma sequência didática para a abordagem da Análise Combinatória ao longo da educação escolar.

Esperamos que a clareza propiciada pelo estudo acerca das habilidades interconectadas no documento auxilie o professor de Matemática com seu trabalho em sala de aula, promovendo o desenvolvimento do pensamento combinatório, e que ele se sinta engajado na proposição de atividades que vão ao encontro do desenvolvimento das habilidades previstas na BNCC (2018).

REFERÊNCIAS

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R. . Ensinando Matemática na Sala de Aula através da Resolução de Problemas. **Boletim GEPEM**, v. 55, p. 133-154, 2009.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular. Brasília**: MEC, 2018.

DESLAURIERS, J. P.; KÉRISIT, M. O delineamento da pesquisa qualitativa. In: POUPART, J. *et. al*. **A pesquisa qualitativa: enfoques epistemológicos e metodológicos**. Trad. Ana Cristina Nasser. 4ed. Petrópolis: Vozes, 2014.

DUCRET, J-J. **Jean Piaget et la Pysichologie du Développement Cognitif**. Disponível em: https://www.cepiag.ch/blog/wp-content/JPiaget_et_la_psychologie_du_dvp_cognitif_11.pdf. Acesso em: 14 de dez. 2023.

KAPUR, J.N. Combinatorial Analysis and School Mathematics. **Educational Studies in Mathematics**. v. 3, n. 1, pp. 111-127. 1970.

LIMA JUNIOR *at. al*. Análise documental como percurso metodológico na pesquisa qualitativa. **Cadernos da FUCAMP**, v. 20, n. 44, p. 36-51. 2021.

LOUREIRO, C. Multiplicação, combinatória e desafios. **Revista Educação e Matemática**, Lisboa-Portugal, número 44, 14-20, 1997.

ONUCHIC, L. R. Ensino-Aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. IN: BICUDO, M. A. V. **Pesquisa em Educação Matemática**. São Paulo: Editora UNESP, 1999. cap12, p.199 - 220.

SANTOS, J.P.O., MELLO, M.P., MURARI, I.T.C. **Introdução à Análise Combinatória**. Campinas: UNICAMP, 1995.