Visualização e Abstração no Ensino de Funções Contínuas

Visualization and Abstraction in Teaching Continuous Functions:

Sandro R. **Cunha**
Instituto de Educação Sarah Kubitschek, Rio de Janeiro (IESK)

Márcia M. F. **Pinto**
Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ)

RESUMO

Este artigo traz os resultados da análise de um relato sobre o uso da visualização no ensino da matemática como aliado para o entendimento do conceito de Continuidade. Focamos o momento em que alunos de Cálculo I, participantes em uma intervenção pedagógica, se atêm aos aspectos gráficos de funções reais, refletindo sobre o conceito em uma situação de ensino e aprendizagem. Adotando a perspectiva da abstração estrutural, buscamos esclarecer a estruturação das ideias concebidas pelos alunos ao representá-las visualmente como forma de construir/atribuir significados ao conceito de função contínua, ou ainda, como forma potencial de promover processos de abstração em matemática.

Palavras-chave: Educação Matemática. Cálculo. Continuidade. Abstração Estrutural. Visualização.

ABSTRACT

This article presents the results of the analysis of a report on the use of visualization in teaching mathematics as a potential ally for understanding the concept of Continuity. We focus on the moment when participants in a pedagogical intervention, Calculus I students, focus on graphical aspects of real functions, reflecting on the formation of the concept in a teaching and learning situation. Adopting the perspective of structural abstraction, we seek to clarify the organization of ideas conceived by students by representing them visually as a way of constructing/attributing meanings to the concept of continuous function, or even, as a way of promoting abstraction processes in mathematics.

Keywords: Mathematics Education. Calculus. Continuity. Structural Abstraction. Visualization.

1 INTRODUÇÃO

O objetivo da pesquisa é investigar perspectivas relacionadas às estratégias para a construção de significados e a formação do conhecimento matemático que o uso da visualização traz ao processo de ensino-aprendizagem da matemática. Para isto, analisamos as contribuições desse uso para o entendimento sobre a forma do que se aprende e como se aprende no ensino superior. Sendo mais específico, buscamos compreender o modo como o conhecimento é produzido/reproduzido por meio das representações visuais em práticas de sala de aula do ensino superior onde, na maioria das vezes, conceitos são introduzidos e formalizados em suas definições.

Ao leitor convém primeiro apontar que nos referimos às concepções de abstração matemática segundo abordagens cognitivas tendo como foco o ensino e a aprendizagem da matemática. Especificamente, referenciamo-nos na noção de objetivação (RADFORD, 2015) e em processos de significação relacionados aos conceitos matemáticos no ensino superior, adotando a perspectiva da teoria da Abstração Estrutural desenvolvida em Scheiner e Pinto (2013, 2014, 2015, 2016, 2017, 2018) e em Scheiner (2016). Aqui, objetivação é entendida como um

> processo de produção de sentido social [para um conceito matemático], co-transformador e sensível, através do qual os alunos gradualmente se tornam criticamente familiarizados com significados culturais historicamente constituídos e formas de pensamento e ação (RADFORD, 2015, p.139).

Por sua vez, um significado atribuído a um conceito matemático será entendido como formas de pensamento constituídas culturalmente e historicamente, organizados socialmente a partir de experiências humanas.

Este artigo está organizado em cinco seções. Na segunda seção, retomamos os modos distintos de entender abstração e as diferenças epistêmicas correspondentes em explicações sobre formação do conhecimento matemático. Em especial, trazemos a perspectiva discutida em Pinto e Scheiner (2015) sobre visualização e o ensino de análise real bem como a noção de abstração estrutural (SCHEINER; PINTO, 2013, 2014, 2016, 2017, 2018, 2019). Os três últimos artigos, Scheiner e Pinto (2017, 2018, 2019), são centrais no desenvolvimento do quadro teórico adotado para representar e explicar fenômenos cognitivos envolvendo abstração e visualização no processo de aprendizagem de conceitos matemáticos. A terceira seção traz a noção de visualização para o ensino, refletindo sobre o uso de representações visuais dentre estratégias de significação. Os procedimentos metodológicos para a investigação e análise do estudo do relato na forma de caso serão apresentados na quarta seção. Por fim, realizaremos a exposição do material produzido, a análise e as considerações finais.

2 ABSTRAÇÃO E FORMAÇÃO DO CONHECIMENTO MATEMÁTICO NO ENSINO

As bases teóricas em Scheiner e Pinto (2013-2019), referentes à noção de abstração estrutural e à formação do conhecimento matemático, são apresentadas para entender a relevância do tema para a nossa pesquisa em ensino-aprendizagem (subseção 2.1) e desenvolver um entendimento para o termo abstração nesta acepção em consonância com a literatura de pesquisa em educação matemática (subseções 2.2, 2.4, 2.5 e 2.6). Os construtos sensibilidade ao contexto (subseção 2.3), estratégias de significação (subseção 2.7) e os processos de abstração identificados (subseção 2.8) complementam o quadro teórico proposto.

2.1 Formas de abstrair e processos de significação em matemática

Uma vez que o objeto de estudo desta pesquisa é a aprendizagem da matemática, estamos interessados em entender os processos de abstração distintos que nos parecem promover produção de significados sobre objetos do conhecimento matemático. Em particular, queremos entender como uma perspectiva em estudo sobre abstração matemática, a abstração estrutural, se relaciona e esclarece processos de objetivação, apoiando a tomada de consciência e promovendo a formação do conhecimento pelo aluno em um cenário de aula onde se faz uso de representação visual. Nossa exposição tem como ponto de partida as reflexões e as possibilidades que emergem de um quadro teórico específico sobre abstração.

2.2. Abstração como processo característico do desenvolvimento do pensamento e da aprendizagem da matemática

Uma acepção única para a expressão abstração em matemática não é simples e não há um consenso entre os pesquisadores sobre uma única abordagem teórica para o tema. Nas palavras de Hazzan e Mitchelmore (2006, p.278), a "abstração tem muitas facetas e não há consenso entre os pesquisadores em relação a um significado único"[1]. Por outro lado, são frequentes as menções ao termo *abstrato* na literatura de pesquisa e no senso comum enquanto traço genuíno do pensamento humano, inclusive associando-o à matemática. Scheiner e Pinto (2016) buscaram "fornecer aos leitores uma maneira organizada de discernir as contradições, controvérsias e convergências relativas às muitas imagens de abstração"[2] (p. 155), entendendo que a literatura carece de um discurso crítico para o tema, dada a variedade de acepções com que se discute e utiliza o termo.

Para exemplificarmos o escopo do emprego do termo abstração sem nos atermos a equívocos eventuais, o mesmo pode ser encontrado sendo utilizado em oposição ao termo concreto. Por outro lado, para que algo seja denominado abstrato ou concreto não depende de propriedade inerente da coisa, mas sim da relação da pessoa com o objeto em questão, ou seja, "conceitos que eram irremediavelmente abstratos, ao mesmo tempo podem se tornar concretos para nós se entrarmos no 'relacionamento correto' com eles"[3] (WILENSKY, 1991, p.4). Hazzan (1999) argumenta que

> para cada conceito e para cada pessoa, podemos observar um nível diferente de abstração que reflete a conexão experiencial anterior entre os dois. Quanto mais próximo o objeto é para a pessoa e quanto mais conexões ele formou, mais concreta (e menos abstrata) se sente. Com base nessa perspectiva, alguns dos processos mentais dos alunos podem ser atribuídos à tendência de familiarizar uma ideia não familiar ou, em outras palavras, tornar o abstrato mais concreto[4] (HAZZAN, 1999, p. 76).

Tal perspectiva dialoga com o entendimento de que a compreensão dos objetos matemáticos pelos indivíduos ocorre em vias de ascender do abstrato para o concreto. Este movimento de ascensão tendo o abstrato como ponto de partida é princípio fundamental em Davydov (1972), e foi utilizado por Scheiner e Pinto (2016) como base para o desenvolvimento da

---

[1] Tradução nossa de: "abstraction has many facets and there is no consensus among researchers with regard to a unique meaning".
[2] Tradução nossa de: "provide readers with an organized way to discern the contradictions, controversies, and convergences concerning the many images of abstraction".
[3] Tradução nossa de: "Concepts that were hopelessly abstract at one time can become concrete for us if we get into the "right relationship" with them".
[4] Tradução nossa de: "In other words, for each concept and for each person we may ob-serve a different level of abstraction which reflects previous experiential connection between the two. The closer a person is to an object and the more connections he/she has formed to it, the more concrete (and the less abstract) he/she feels to it. Based on this perspective, some of students' mental processes can be attributed to their tendency to make an unfamiliar idea more familiar or, in other words, to make the abstract more concrete.

noção de abstração estrutural.

Assim, quando o concreto e o abstrato são entendidos como propriedades dos objetos, a abstração pode ser concebida em termos de níveis. Por outro lado, se são compreendidos como propriedades da perspectiva de um indivíduo sobre os objetos, a abstração passa a ser entendida como níveis de complexidade, conforme Scheiner e Pinto (2014) indicaram.[5] (SCHEINER; PINTO, 2016, p. 159). Por exemplo, o número 15 resulta de um processo de contagem de quinze objetos ou do resultado da contagem de cinco pedras acrescidas a outras 10 já colecionadas em uma sequência 11, 12, 13, 14, 15. No entanto, também resulta da exclusão de 5 pedras em um grupo de 20. Escreve-se como 10+5, como 7+8, como 20 – 5. Além disso, é o resultado de 5,3 ou de 45 dividido por 3. Cada novo contexto em que o número 15 é reapresentado, ou seja, cada recontextualização do número 15 o torna mais concreto para o conhecedor por ampliar conexões experienciais entre eles.

Por meio dessa última lente, compreendemos o concreto e o abstrato como propriedades inerentes à relação do indivíduo com o objeto. Desse entendimento, Scheiner e Pinto (2014, 2016) concebem o processo de abstração em níveis de complexidade ou de recontextualização ao invés de níveis de descontextualização.

2.3 Conhecimento sensível ao contexto

Outra concepção problemática para a compreensão da dimensão cognitiva no desenvolvimento para uma formulação teórica coerente parece ser a de “transferência de conhecimento através da abstração que levam a uma compreensão da abstração como um processo de descontextualização e uma confusão entre abstração e generalização” (SCHEINER; PINTO, 2017, p.276). Nesse caso, definir a abstração com um processo equivalente à generalização, assumindo que tal atividade mental de generalizar consiste em isolar aspectos em uma informação à exclusão de outros, seria um processo de “empobrecimento” e tornaria a ideia de referência distanciada do próprio objeto sensível que está sendo caracterizado mentalmente.

A partir de evidências encontradas em pesquisas de outros autores (VAN OERS, 1998, 2001; NOSS; HOYLES,1996; HERSHKOWITZ; SCHWARZ; DREYFUS, 2001; TREFFERS,1987), Scheiner e Pinto (2017, p. 275) refutam uma imagem de abstração como descontextualização destacando que “a pesquisa sobre abstração no conhecimento e aprendizagem da matemática tem feito progressos significativos ao levar em conta a sensibilidade do conhecimento ao contexto” (SCHEINER; PINTO, 2017, p. 275). Por exemplo, no contexto da estrutura aditiva dos números naturais, a operação de multiplicação é entendida como adição de determinado número de parcelas iguais. Neste caso, há dois significados distintos para o número 15representado, por exemplo, por $3.5 = 5+5+5$ (adição de três parcelas iguais a 5) e por $5.3=3+3+3+3+3$ (adição de 5 parcelas iguais a 3). Já no contexto de estrutura multiplicativa dos números naturais, a comutatividade do produto permite afirmar que $3.5 = 5.3 = 15$. Diferente do que aconteceu no contexto da estrutura aditiva dos números naturais, há a identificação das duas representações distintas e, portanto, o significado anterior da operação é modificado.

Assim, o entendimento de abstração como uma forma de transferência de conhecimento que rompe com o aspecto contextual, sob efeito de se generalizar um conceito, degenera o caráter de versatilidade e conscientização do conhecimento desenvolvido pelo indivíduo para que o mesmo

[5] Tradução nossa de: Thus, in taking the understanding of the concrete and the abstract as properties of objects, scholars could consider abstraction as levels of abstractness; while, in taking the understanding of concreteness and abstractness as properties of an individual’s view of objects, scholars could view abstraction as levels of complexity, as Scheiner and Pinto’s (2014) recent contribution indicated.

esteja disponível e possa ser invocado pelo sujeito em situações de empregabilidade variadas. Scheiner e Pinto (2016) esclarecem que

> a imagem da abstração como generalização parece inadequada quando o conhecimento é considerado como construção. A imagem da abstração como generalização é elusiva sobre a abstração como um processo construtivo e ignora a abstração que leva em conta o desenvolvimento cognitivo de um indivíduo[6] (SCHEINER; PINTO, 2016, p. 156).

Deste modo a perspectiva de generalizar para abstrair ideias matemáticas pode implicar na necessidade enganosa de descontextualização do conhecimento assimilado. Scheiner e Pinto (2016) argumentam que “do nosso ponto de vista, reconhecemos a abstração como um processo de expansão da sensibilidade ao contexto, em vez de considerar a abstração como simplesmente uma descontextualização” (p.157).

O objeto abstraído deve tornar-se mais claro, cognoscível e explícito para que o sujeito possa perceber suas articulações sob outras circunstâncias, formas e aplicações. Essa abordagem torna-se mais apropriada quando queremos responder as questões de aprendizagem relativas ao enquadramento de situações que formem sentidos coerentes com um determinado conceito de referência. De fato, a utilização de representantes de um objeto em múltiplos contextos, como no exemplo dado de representações de números em estruturas aditiva e multiplicativa dos números naturais, pode enriquecer a construção de elementos significativos que integrem um conceito matemático para o aluno e removê-los empobrece o entendimento de um conceito (ver o estudo de caso apresentado por Pinto (1998) e discutido em Scheiner e Pinto (2014)).

2.4 Formação do conhecimento pelos componentes significativos

Mitchelmore e White (2004) conjecturam que o processo de abstração na matemática ocorre a partir do reconhecimento de características comuns em uma variedade de situações diferentes, como em Piaget. Para esses mesmos autores, uma vez reconhecidas, tais similaridades são abstraídas e constituem um conceito que incorpora essa similaridade. Entretanto, “a pesquisa teórica no aprendizado da matemática vem, há muito, indo além da categorização ou classificação, ou seja, além de reunir objetos com base em semelhanças de suas características superficiais” (SCHEINER; PINTO, 2016, p. 157).

Segundo uma concepção precursora, Skemp (1986, p. 21) entende a abstração como “uma atividade pela qual nos tornamos conscientes das semelhanças entre nossas experiências” [7]. De acordo com Scheiner e Pinto (2017, p.276), ao avançarem para além da abstração empírica proposta por Piaget, Mitchelmore e White (2007) recorrem à concepção de abstração de Skemp (1986) para descrever a aprendizagem da matemática elementar. Para esses autores, a abstração deve ser compreendida em relação à percepção da estrutura subjacente dos conceitos matemáticos e não apenas às suas características superficiais.

Dito de outro modo, Scheiner (2016) propôs uma formação estrutural constitutiva para o conhecimento como uma forma de abstração, nomeando-a abstração estrutural, já introduzida em Tall (2013), e entendendo-a como um processo que envolve a complementarização de componentes significativos. Nessa perspectiva, o significado de conceitos matemáticos é construído pela complementarização de diversos componentes significativos de uma variedade de objetos

[6] Tradução nossa de: Thus, the image of abstraction as generalization seems inadequate when knowledge is considered as construction. The image of abstraction as generalization is elusive about abstraction as a constructive process and overlooks abstraction that takes account of an individual’s cognitive development.
[7] Tradução nossa de: an activity by which we become aware of similarities among our experiences.

específicos que foram contextualizados e recontextualizados em múltiplas situações[8] (SCHEINER; PINTO, 2016, p. 158). Aqui há um diálogo possível com Davidov (1990, p. 13) que considera a abstração de conceitos matemáticos relacionada à ação de separar "uma qualidade comum a um número de objetos / situações de outras qualidades"[9].

A significação de conceitos matemáticos por um indivíduo é, então, constituída mediante a junção de uma variedade de objetos indicativos que foram contextualizados e recontextualizados em múltiplas situações consideráveis para que a objetivação ocorra. O processo de complementarização tem um papel epistemológico e se justifica pela tomada de consciência do sujeito, como proposto em relação à aprendizagem dos objetos do conhecimento por Radford (2015, p. 139), de que estes "tem que adquirir conteúdo e conexões em um processo de contraste com outras coisas, tornando-se assim cada vez mais concreto".

Com esse entendimento, a abstração é tomada como um atributo cognitivo segundo o qual o sujeito do conhecimento não faz deferência somente a um fato isolado, mas é capaz de reunir, assimilar e incorporar aspectos característicos daquilo com o qual está lidando como referência. A formação do pensamento matemático exige que os objetos abstraídos formem conexões para desempenhar outros papéis segundo modelos mentais como quando associamos um número a diferentes coisas, ou mesmo interpretamos uma função para descrever diferentes leis da física.

2.5 Assimilar, comprimir ou encapsular o conhecimento

Scheiner e Pinto (2016, p. 160) elaboram suas reflexões iniciais a respeito da maneira como pode ocorrer mentalmente a organização do conhecimento matemático pelo indivíduo ou, ainda, como formam-se as conexões cognitivas capazes de organizar as significações originárias dos objetos mentais compreendidos para que estes estejam disponíveis e possam ser acessadas quando necessário.

Retomando as ressignificações sobre a formação do pensamento em matemática, inspiradas em Piaget (1977), que distingue abstrações a partir das ações e dos objetos, Scheiner e Pinto (2017, p. 275-276) argumentam que "o foco de atenção de cada forma de abstração são objetos físicos (referindo-se ao mundo real) ou objetos mentais (referindo-se ao mundo do pensamento)", respectivamente. Considerando os três tipos de abstrações identificados em Piaget (19977) - pseudo-empírica, empírica e reflexiva - reconhece-se sua importância para as formas pensamento exigidas no ensino de matemática. Destaca-se, em particular, que "a abstração reflexiva é um mecanismo para o isolamento de propriedades específicas de uma estrutura matemática que permite ao indivíduo construir novas peças de conhecimento" (SCHEINER; PINTO, 2017, p.276).

No ensino superior, as menções sobre a abstração de conceitos matemáticos são frequentes. Alicerçada na abstração reflexiva, a abstração de conceitos matemáticos é interpretada como uma compressão ou encapsulamento a partir da coordenação das ações em objetos. No entanto, Scheiner (2016) revelou que a literatura mostra um viés inflexível em relação à abstração de ações como a forma condutora de abstração no conhecimento e aprendizagem da matemática avançada. Essa visão quase sempre exclusiva surge diretamente da trajetória da história de nosso campo marcada pela suposição de Piaget de que apenas a abstração reflexiva seria capaz de gerar

[8] Tradução nossa de: Scheiner (2016) proposed a framework for structural abstraction, a kind of abstraction, already introduced by Tall (2013), that takes account of abstraction as a process of complementarizing meaningful components. From this perspective, the meaning of mathematical concepts is constructed by complementarizing diverse meaningful components of a variety of specific objects that have been contextualized and recontextualized in multiple situations.
[9] Tradução nossa de: separating a quality common to a number of objects/situations from other qualities.

qualquer construção genuinamente nova de conhecimento.

Embora as abordagens de abstração tenham servido muito bem a muitos propósitos, elas não rastreiam detalhes dos processos de aprendizagem e conhecimento dos alunos compatíveis com estratégias de atribuir significado aos objetos matemáticos (SCHEINER; PINTO, 2017, p.276-277). Por conseguinte, "tanto as abordagens das abstrações a partir das ações quanto as abstrações a partir de objetos parecem compartilhar a imagem de abstração como um processo de compressão de conhecimento" (SCHEINER; PINTO, 2016, p. 160). Os autores interpretam que uma das funções cognitivas da abstração estrutural é promover uma montagem dessas várias experiências em estruturas de conhecimento mais complexas, reconhecido como um processo de complexificação.

2.6 Conhecimento como um sistema dinâmico complexo

Uma proposta teórica que entende a abstração como descontextualização reduz o objeto abstraído a um estado estático, imutável. Scheiner e Pinto (2016, p. 160) propõem uma compreender a abstração de conceitos como processos de ressignificações em estruturas constituídas por meio de múltiplas recontextualizações dos mesmos, uma vez que conceitos são passíveis de novas aplicações.

> Assim, em vez de considerar o conhecimento como um sistema abstrato e estável, consideramos o conhecimento como um sistema dinâmico complexo constituído por vários tipos de elementos e estruturas do conhecimento[10] (SCHEINER; PINTO, 2016, p. 160).

Nessa linha, o quadro teórico sobre abstração pode integrar um processo construtivo dinâmico, suscetível e progredir segundo níveis de complexidade.

2.7 Diversidade de estratégias de significação

A perspectiva sobre Abstração Estrutural proposta em Pinto e Scheiner (2015) retoma a discussão acerca da formação do conhecimento matemático destacando que o grupo de alunos que atribuem significado, identificado em Pinto (1998), reconhece e usa a definição formal de um conceito matemático como um recurso que consiste das representações relacionadas advindas de experiências em outros contextos, não formais. Para Pinto e Scheiner (2015), a definição formal destaca-se pelo fato de ser essencial, via complementariedade, para estruturar as demais representações do conhecimento latente a fim de que este seja desvelado, transformado e ampliado. Por outro lado, há

> os estudantes que se limitaram a justapor fragmentos de conhecimento, por vezes conflituosos e sem buscar articulações, produziram uma estrutura de conhecimento, subjacente às diferentes faces de um conceito, inconsistente, compartimentalizada, e o processo de abstração estrutural não se realizou ou não se realizou por completo (PINTO; SCHEINER, 2015, p. 646).

Entendemos a postura de atribuir significado como estratégia que demanda e promove a complementariedade, uma das características fundamentais para o processo de abstração estrutural. Conforme identificado em Pinto e Scheiner (2015), os alunos que reconhecem os conflitos como aspectos significativos no processo de formação de conceitos, buscam rever suas

[10] Tradução nossa de: Thus, rather than considering knowledge as an abstract, stable system, we consider knowledge as a complex dynamic system of various types of knowledge elements and structures.

concepções, reconstruindo, ampliando e compondo, de forma consistente, novas estruturas para o conhecimento.

Em estudo posterior, Scheiner (2018 a, b) propõe um enquadramento dialógico (interdependente) para a construção de significado matemático no ensino, entendendo a importância de combinar ambas as formas (atribuir e extrair significado) para que haja a objetivação no ensino-aprendizagem e reforçando que:

> Extrair significado envolve trabalhar dentro do conteúdo, rotinizá-lo, utilizá-lo e construir seu significado como um conteúdo formal. construir. Atribuir significado consiste em tomar as imagens de conceito como ponto de partida para construir novos conhecimentos (PINTO, 1998, p. 298-299).

2.8 Processos centrais à Formação de conceitos matemáticos

Scheiner e Pinto (2018) propõem explicar os fenômenos cognitivos no que tange o aprendizado em educação matemática e sua relação com o uso das representações visuais. Nesta perspectiva teórica, a formação do conhecimento matemático pelos indivíduos, a partir das estratégias de significação para a construção mental dos objetos matemáticos, pode ser descrita como um sistema complexo e dinâmico.

Scheiner e Pinto (2018) partem de dois elementos centrais decorrentes de insights propostos pelo Filósofo da Matemática Friedrich Ludwig Gottlob Frege (1848-1925), os quais foram reinterpretados pelos autores com a finalidade de produzir avanços na compreensão da cognição matemática e que nos parecem fundamentais para sustentar nossas hipóteses sobre a importância das representações visuais no ensino de matemática.

Primeiramente, respaldamo-nos em Scheiner e Pinto (2018) que se refere a Frege (1892) ao indicar que

> um conceito matemático não pode ser apreendido de forma imediata, mas apenas por meio de objetos que atuam como seus representantes. Em segundo lugar, os objetos matemáticos (diferentemente dos objetos das ciências naturais) não podem ser apreendidos pelos sentidos humanos (não podemos, por exemplo, "ver" o objeto), mas apenas por meio de um "modo de apresentação" (FREGE, 1892b). Em outras palavras, os objetos precisam ser expressos por sinais ou recursos semióticos como gestos, figuras ou expressão linguística (RADFORD, 2002)[11] (SCHEINER; PINTO, 2018, p. 2).

As questões destacadas refletem as vias de acesso cognitivo aos conceitos ou objetos matemáticos, respectivamente. O argumento de Frege (1892) incide sobre a necessidade de algum modo de representação para os objetos matemáticos, o que inclui as representações visuais. Para elucidar o que distingue o modo de apresentação de um objeto daquilo que sabemos do próprio objeto que é representado, os autores recorrem aos construtos “sentido” e “referência”, segundo a filosofia fregiana. Scheiner e Pinto (2018) esclarece que

> O “modo de apresentação” de um objeto deve ser distinguido do objeto que é representado, pois os indivíduos frequentemente confundem um sentido$_F$ ('Sinn') de uma expressão (ou representação) com a referência$_F$ ('Bedeutung') de uma

[11] Tradução nossa de: First, we share Frege’s (1892a) assertion that a mathematical concept is not directly accessible through the concept itself but only through objects that act as proxies for it. Second, mathematical objects (unlike objects of natural sciences) cannot be apprehended by human senses (we cannot, for instance, ‘see’ the object), but only via some ‘mode of presentation’ (Frege, 1892b) – that is, objects need to be expressed by using signs or other semiotic means such as a gestures, pictures, or linguistic expression (Radford, 2002).

> expressão (ou representação)[12]. A referência$_F$ de uma expressão é o objeto a que ela se refere, enquanto que o sentido$_F$ é a maneira pela qual o objeto é dado à mente (Frege, 1892b), ou seja, é o pensamento ('Gedanke') expresso pela expressão (ou representação).[13] (SCHEINER; PINTO, 2018, p. 2).

Assim, uma referência$_F$ de um objeto é entendida como representação/expressão que diz respeito ao objeto em si, enquanto que o sentido$_F$ revela certa significação epistêmica associada ao objeto que, por meio de referência$_F$, possibilita aflorar uma ideia$_F$ correspondente à mente do indivíduo.

Scheiner e Pinto (2018, p. 4) propõem que as ideias$_F$ vislumbradas pelos indivíduos podem interagir umas com as outras, formando estruturas de conhecimento mais comprimidas, nomeadas de concepções. Por conseguinte, as relações constituídas entre conceitos, objetos e concepções estão intermediadas consoante apreensão de significado decorrente das referências$_F$, sentidos$_F$ e ideias$_F$ inerentes.

Ainda referenciadas na filosofia de Frege (1892), as reflexões de Scheiner (2016) propõem destacar o caráter em mutação permanente de um conceito ao invés de entendê-lo com um significado fixo, uma vez que o significado é relativo aos sentidos que emergem das representações dos objetos e deriva do sistema de ideias de um indivíduo.

Para que ocorra a formação dos conceitos matemáticos organizada na estrutura de conhecimento mencionada anteriormente, Scheiner e Pinto (2018) destacam três processos fundamentais: contextualização, complementação e complexificação. Resumidamente, contextualizar significa tomar certo prisma que chama a atenção do indivíduo para determinados sentidos, direcionando a mente para um pensamento particular, ocasional. Complementar, por sua vez, implica em coordenar diferentes sentidos percebidos de maneira que crie uma unidade conceitual. Com isso, ideias aparentemente contraditórias podem ser utilizadas de maneira produtiva de forma cooperativas e não conflitantes. Enquanto que complexificar é uma função cognitiva que gerencia um sistema de conhecimento da qual emerge novos sentidos que podem ser atribuídos a objetos potenciais para a formação de novas ideias para o pensamento matemático. Ao longo desse processo, interessa-nos discutir os sentidos evocados a partir da visualização como forma de representação dos objetos.

3 VISUALIZAÇÃO E ABSTRAÇÃO NO ENSINO DA MATEMÁTICA

O vocábulo "visualização" é utilizado de muitas formas nas pesquisas em educação matemática (PRESMEG, 2006, p. 206). Quanto à sua origem e uso em investigações sobre o ensino-aprendizagem da matemática, nos parece que:

> O termo visualização provém do campo da psicologia e, inicialmente, o termo era associado às habilidades visuais que os indivíduos tinham e podiam desenvolver para interpretar imagens. A partir da década de 80 do século XX, as pesquisas em educação matemática se ancoram nesta perspectiva cognitivista e se apropriam do termo visualização. A valorização deste aspecto para a aprendizagem matemática é percebida e tende-se a incorporar outros significados ao termo, bem como, a tratar o tema sob novos problemas de pesquisa (FLORES; WAGNER; BURIATTO, 2012, p. 32).

---

[12] O subscrito F indica que esses termos se referem a Frege, (1892b). Ver Scheiner e Pinto (2018).

[13] Tradução nossa de: The 'mode of presentation' of an object is to be distinguished from the object that is represented, as individuals often confuse a senseF ('Sinn') of an expression (or representation) with the referenceF ('Bedeutung') of an expression (or representation) (the subscript F indicates that these terms refer to Frege, 1892b). The referenceF of an expression is the object it refers to, whereas the senseF is the way in which the object is given to the mind (Frege, 1892b), or in other words, it is the thought ('Gedanke') expressed by the expression (or representation).

Adotando o ponto de vista cognitivo e inspirado em Piaget e Inhelder (1971), Presmeg (2006, p. 206-207) considera que "a visualização é tomada para incluir processos de construção e transformação de imagens visuais mentais e todas as inscrições de natureza espacial que podem estar implicadas em fazer matemática". Nesse estudo, ampliamos o uso do termo "abstração", problematizando o aspecto visual para a formação de conceitos considerados abstratos no ensino. Com esta intenção adotamos o nosso referencial para entender a abstração, dialogando com um entendimento sobre objetivação (RADFORD, 2015) como conceito sociocultural importante para a educação da matemática. Retomamos a noção de estratégias de significação para destacar o papel potencial da visualização em processos de abstração que promovem tomada de consciência e compreensão dos conceitos matemáticos.

Em Scheiner e Pinto (2015), o processo de complementarização é retomado ao reanalizar um estudo de caso sobre o estudante Chris (ver PINTO, 1998), identificando-o em uma situação na qual um conjunto de representações possíveis foram importantes para compor um recurso utilizado pelo estudante para reconstruir uma argumentação compatível com a definição formal. Como explicam os autores,

> a característica fundamental na perspectiva da abstração estrutural está na ideia de que vários objetos específicos que se enquadram no âmbito de um conceito particular complementam-se mutuamente (processo de complementarização); de modo que uma abstração individual, de cada um deles, é superada. Este processo que tem lugar na abstração da estrutura do objeto representa um movimento no sentido da complementaridade dos diversos aspectos que criam uma unidade conceptual entre suas representações distintas (PINTO; SCHEINER, 2018, p. 645).

Diante da situação proposta no caso de Chris, as atenções dos autores estavam, por parte do aluno, voltadas para a composição das imagens e para a construção de significado matemático. As justificativas teóricas estavam amparadas nas mudanças de modelos com base nos conceitos de pós-imagem e pré-imagem em Freudenthal (1975), bem como na noção de imagens conceituais proposta por Tall e Vinner (1981) entendidas como estratégias para se obter o conceito matemático a partir da coordenação dos complementares derivados de esquemas visuais.

Embora não evidenciem outras características do fenômeno de abstração estrutural, os demais processos de Contextualização e Complexificação estavam presentes. A contextualização fica mencionada quando, pelo processo de complementarização, torna-se possível promover a transição de "várias" representações - que expressam objetos específicos colocados em diferentes contextos - para "uma" representação capaz de construir e reconstruir formalmente o conceito (PINTO; SCHEINER, 2015, p. 648).

Entendemos que as múltiplas representações dos objetos só foram possíveis pela conscientização via contextualização a partir da identificação dos diferentes sentidos percebidos em diferentes contextos. Enquanto a complexificação pode ser reconhecida (...) como movimentos em diferentes níveis de complexidade que são recuperados ao examinar as descrições de Chris sobre suas tentativas de entender a definição formal (Idem, p. 649). Assim, a complexificação, de fato, corresponde a uma função cognitiva que coordena um sistema de conhecimento para a formação de novos sentidos.

No caso reanalisado, as entrevistas com o aluno Chris revelam os processos característicos da abstração matemática (Complementariedade, Contextualização e Complexificação) promovidos, em seu caso, pelo uso de representações visuais como recurso para atribuir significados em matemática. Como expresso pelos autores:

> [Chris] destaca que recupera seu enunciado [da definição formal de limite de uma sequência] e seu significado a partir de uma representação visual, que passa então a desenhar (Figura 1, no texto). Da análise da explicação de Chis enquanto ele desenhava, argumentamos que, antes de tudo, ele evoca uma representação de um objeto - uma sequência convergente; no caso, uma representação visual, e reconstrói a definição, explorando a representação e utilizando a língua materna para recuperar o enunciado da definição formal (PINTO; SCHEINER, 2015, p. 647).

As estratégias de significação (extrair e atribuir significado a partir do uso de representações visuais) podem ser interpretadas como um recurso de conhecimento importante à medida que possibilita a percepção dos sentidos que promovem um sistema consistente de ideias. Ademais, elas se configuram como uma atitude mental favorável que ativa (produz movimento, dinamiza) os processos (complementação, contextualização e complexidade) característicos da abstração estrutural favorecendo a objetivação e a formação do saber matemático.

Com este olhar para o fenômeno da aprendizagem, planejamos uma pesquisa qualitativa tendo como foco o uso das representações visuais na formação do conhecimento matemático.

4 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Para apresentação dos resultados, selecionamos um caso e analisamos as estratégias dos participantes ao construir/produzir significados identificando, quando possível, processos característicos da abstração estrutural (contextualização, complementarização e complexificação).

O caso em estudo, apresentado na próxima seção, é proposto na forma de uma Sequência Didático-Pedagógica. Ao apresentarmos a nossa análise dos dados, em consonância com o nosso quadro teórico, organizamos o material produzido de acordo com os seguintes objetivos específicos:

1) Investigar as estratégias utilizadas pelos alunos para significar o conhecimento matemático ao longo da experiência, como nos casos em que se atribui ou se extrai significado, conforme os analisados por Pinto e Scheiner (2015).

2) Identificar a presença ou ausência de processos característicos de abstração estrutural no desenvolvimento da aprendizagem tais como complementariedade, contextualização e complexificação já descritos como fundamentais por Scheiner e Pinto (2018).

3) Examinar as relações potenciais entre representação visual e as estratégias de significação para a aprendizagem dos conceitos.

Vale esclarecer que os casos aqui apresentados decorrem de experiências vivenciadas em momentos anteriores à nossa intenção de investigá-los a partir da perspectiva teoria da Abstração estrutural, suas estratégias e formação de significados na matemática. Dessa forma, nossa pesquisa tem um caráter dual que é:

a) Colaborar para a ampliação do entendimento que temos a respeito da visualização para guiar a formação e a compreensão do conhecimento na Matemática.

b) Avaliar, sob a ótica da abstração estrutural, o potencial do uso das representações visuais no caso apresentado para constituir um ambiente pedagógico em que a formação do conhecimento matemático ocorra de modo significativo.

Nessa investigação analisamos um caso único com a intenção de identificar características e o que há de essencial para entendermos de que modos as representações visuais podem ser usadas como recurso no ensino/aprendizagem da matemática. A expectativa é que esse estudo contribua para o desenvolvimento de teorias, discussão de questões e futuras investigações na área de educação matemática.

5 VISUALIZAÇÃO E O ENSINO DE FUNÇÃO CONTÍNUA

O Relato de experiência a seguir, intitulado "Funções Contínuas e Visualização", realizado em uma turma de Cálculo I, constitui um caso para análise das situações referentes às atividades desenvolvidas, enunciando questões e usando a visualização como recurso. Situamos o caso trazendo os assuntos abordados em aula (conceitos, definições e algumas propriedades de funções contínuas), os problemas propostos, a forma como a atividade foi desenvolvida, bem como os comentários e discussões envolvendo os alunos. As etapas investigativas seguem os procedimentos metodológicos e referencial teórico adotado, contemplando as análises segundo os três objetivos específicos. O foco é o uso da visualização na solução de conflitos e na atribuição/produção de significados para os conceitos.

5.1 O Relato da experiência

O primeiro autor deste artigo assumiu o papel de observador/pesquisador durante dois tempos de aula, atuando como professor em uma turma de Cálculo I. Ele planejou a situação experimentada em sala de aula usando a visualização ao fundamentar o ensino de funções contínuas. A experiência, tratada aqui na forma de estudo de caso, analisa a visualização como um processo que ancora a definição de uma função contínua no conjunto dos números reais, conforme apresentada no ensino superior. Como veremos a seguir, a noção de continuidade de funções, como objeto de estudo, revela-se potencialmente profícua para uma análise e compreensão do uso de representações visuais para a aprendizagem e a formação do conhecimento matemático.

Essa experiência de ensino foi realizada com um grupo de cinco alunos voluntários de Cálculo I pertencentes a um curso de Engenharia, sendo registrada como atividades complementares. O foco é a ampliação do repertório de exemplos de funções, incluindo funções contínuas e não diferenciáveis. Os alunos participantes cursaram uma disciplina de Pre-cálculo e fizeram uma primeira avaliação de Cálculo I que incluiu tópicos referentes a limites, continuidade e derivadas de funções reais. Vale destacar que, no curso regular de Cálculo I em que esses alunos estavam matriculados, ementas e objetivos são, por vezes, restritos a processos algorítmicos de resolução de questões em detrimento de reflexões sobre os significados dos conceitos estudados.

Para desenvolver nos alunos (e também nos professores) uma atitude investigativa, o plano foi constituir um ambiente para o estudo de funções contínuas capaz de provocar estranhamentos e questões. Dada a diversidade de aspectos das funções contínuas exploradas, essa abordagem promoveu processos como os de contextualização e complementarização. Além disso, o uso de visualização como uma das representações possíveis para os objetos matemáticos foi estimulado. A sequência didático-pedagógica elaborada como parte das atividades será descrita a seguir.

5.2 A sequência didático-pedagógica

A sequência didático pedagógica contemplou quatro momentos a fim de introduzir o tema por meio de exemplos algébricos e gráficos, situando a noção de modo a promover discussões sobre aspectos diversos do conceito. A meta é a objetivação do conceito, buscando desencadear "processo(s) de produção de sentido social" (RADFORD, 2015, p.139) para o conceito matemático, aproximando os significados compartilhados pelo grupo de participantes do sentido relacionado ao conceito historicamente construído.

Definições e comentários preliminares sobre continuidade e derivada de funções reais foram escritos na lousa, retomando a ementa do curso, a bibliografia disponível e as notas das aulas do curso de Análise Real[14] do Pemat, com o professor Victor A. Giraldo. As referências utilizadas para a elaboração das atividades incluem os livros “Curso de Cálculo de uma Variável”, de Marco A.P. Cabral, e “Análise Real - volume 1”, de Elon L. Lima.

Momento 1: Introdução do tema.

Em sala de aula, o tema foi introduzido pelo professor/pesquisador usando a visualização (figuras, gráficos) como recurso para motivar e despertar o interesse dos alunos, trazendo noções preliminares para o entendimento dos conceitos. Nesse momento flexibilizado pela experiência extraclasse, o professor viu a oportunidade para desenvolver a intuição geométrica dos alunos.

Naquele primeiro momento (cerca de 10 min iniciais), o professor (P) comentou, de modo informal, que “uma função f é contínua em um ponto a do seu domínio se $f(x)$ está próximo de $f(a)$ quando x está próximo de a”.

Momento 2: A algebrização do conceito como um segundo contexto.

Em seguida o professor escreveu no quadro a definição informal para uma função contínua, como no livro adotado nesse curso de engenharia. A Figura 1 traz essa definição.

Figura 1: Definição continuidade em um ponto, usando a noção de limite.

Definição (Stewart). Uma função f é contínua em um número a se

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

Fonte: Stewart (2001).

No mesmo livro de Cálculo, o texto prossegue como na Figura 2 a seguir:

Figura 2: Procedimentos para determinar a continuidade em um ponto.

Observe que a definição I implicitamente requer três coisas para a continuidade de f em a:

1. $f(x)$ está definida (isto é, a está no domínio de f)
2. $\lim_{x\to a} f(x)$ existe
3. $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

Fonte: Stewart (2001).

A apresentação do tema é encerrada com alguns exemplos clássicos, tais como funções constantes e funções potência de x.

No livro de Cálculo adotado, bem como em outros, as funções contínuas são tratadas no domínio dos reais, em textos menos formais, tentando aproximar os conceitos matemáticos às situações mais comuns experimentadas pelos alunos na vida escolar. Stewart (2001, p. 122) sugere que “a definição matemática de continuidade corresponde estritamente ao significado da palavra continuidade na linguagem do dia a dia”. Já outros autores, como por exemplo Morettin e Hazzan (2000), associam a continuidade à ideia de gráfico sem interrupções, ou ainda, de que funções contínuas são aquelas que não apresentam “saltos” ou “mudanças abruptas” nos seus gráficos, permitindo que o mesmo seja traçado sem tirar o lápis do papel.

Mesmo em noções iniciais e relativizadas, devemos cuidar do uso informal das mesmas situando-as em contextos, quadros ou problemas distintos para contrastá-las. De fato, em artigo recente, Moreira e Campos (2023) discutem as contradições lógicas em abordagens sobre continuidade em livros de Cálculo e de Análise Real. Como destacado pelos autores, tais distorções demandam das definições propostas em livros de Cálculo “uma formulação mais geral, mesmo com a introdução de um novo conceito,” - no caso o conceito de ponto de acumulação - “o que evitaria

[14] Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=fhua7iGXXFU Acesso em: 23 de setembro de 2025.

complicações desnecessárias do ponto de vista pedagógico e do ponto de vista lógico” (MOREIRA; CAMPOS, 2023, p.1032).

Aqui, retomamos intencionalmente alguns casos, até mesmo estudados em cursos de Cálculo, explorando exemplos de funções cujo domínio não é exclusivamente real. Ao apresentar funções que despertam o estranhamento dos estudantes, a noção de continuidade foi explorada em aspectos conflitantes com o dos contextos iniciais, complementarizando e promovendo a complexificação para a formação do conceito, como proposto em nosso quadro teórico.

Momento 3: Ampliação dos olhares: recontextualizando a noção em exemplos estranhos.

Aqui, incluímos domínios reais que tensionam definições anteriores (figuras 1 e 2). Durante 15 minutos exploramos exemplos que se contrapõem ao senso comum de identificar a função contínua como um gráfico sem “buracos”. Assim, a visualização foi usada como contraste às questões na Figura 3.

Figura 3: Re-contextualização da noção de continuidade.

As funções f e g são funções contínuas? Justifique.

$$f:\mathbb{R}^* \to \mathbb{R} \qquad\qquad g:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$$
$$x \to \frac{1}{x} \qquad\qquad x\to x^2$$

Fonte: os autores.

A análise da noção de continuidade em tais exemplos problematiza a incompatibilidade eventual entre conceito de limite de uma função em um ponto e o valor da função nesse mesmo ponto, caso a definição de continuidade seja apresentada por definições como nas figuras 1 e 2, conforme observado em Moreira e Campos (2023).

Momento 4: Refinando a definição.

Na verdade, em contextos mais amplos do que o de funções cujo domínio é um intervalo contido nos reais, a definição de limite de uma função em um ponto, $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, requer que $a\epsilon D'$, ou seja, o ponto deve ser de acumulação. Em contrapartida, devemos ter $a\epsilon D$ para que $f(a)$ esteja definida. Essas duas exigências presentes na definição da Figura 1 não são necessariamente conciliáveis em qualquer domínio. Isso pode ser observado, por exemplo, em domínios contidos no conjunto dos números inteiros, como ilustrado na Figura 3.

Esse momento provocou reflexões dos alunos a respeito da importância da formalização na matemática, criando a necessidade de responder a refutações a soluções em elaboração e tornar os argumentos logicamente consistentes.

A definição formal mencionada durante essa aula, com a devida atenção dos alunos, está reproduzida na Figura 4. A expectativa é de discutirmos que, na definição de limites, consideramos o que acontece na vizinhança de um ponto, enquanto na definição de continuidade devemos verificar se os valores da função na vizinhança de um ponto estão relativamente próximos ao valor da função neste ponto, o que permite, inclusive, inferir o valor da função no ponto.

Figura 4: Definição formal de continuidade.

Definição 1. Seja $f: D\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ e $a\in D$. Dizemos que f é contínua em a se, e somente se

$$\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0 \text{ tal que } x\in D, |x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(a)|<\varepsilon.$$

Fonte: Lima (2008)

Vale observar que na definição de limites, temos $x_0\epsilon D'$ e não é necessário que esse ponto pertença ao domínio da função - mas na definição de continuidade este fato é exigido. As notas das aulas de Análise Real do professor Victor Giraldo, na Figura 5, clarificam essa discussão:

Figura 5: Usando limites para determinar a continuidade

Teorema. Seja $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in D \cap D'$. Então f é contínua em x_0 se, e somente se,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Fonte: Notas de aula Victor Giraldo

Em seguida, o professor propôs quatro atividades para serem discutidas em grupos. Trazemos aqui a análise da segunda atividade. Questões semelhantes às da atividade proposta podem ser encontradas no livro de Análise Real (LIMA, 2008, p. 65) ou no Curso de Cálculo de Uma Variável (CABRAL, 2013, p. 33).

5.3 A Atividade proposta

Ao adotarmos a noção de objetivação no planejamento da atividade proposta, podemos declarar a intenção da prática em sala de aula de constituir um ambiente que promova interações entre os alunos e a construção coletiva das respostas às atividades, explorando a noção de continuidade de funções.

Os recursos tecnológicos estimulam o uso de visualização como instrumento para elaborar a noção de continuidade, por vezes restritas aos aspectos operatórios puramente algébricos ao ser definida usando limites. Uma vez reconhecendo as funções epistemológicas e conceituais dos processos de contextualização, complementarização, as atividades planejadas buscaram expor uma diversidade de aspectos da noção de continuidade de uma função em um ponto para contrastá-los e discuti-los com a expectativa de aproximar as construções dos alunos relacionadas ao conceito de continuidade ao seu significado historicamente constituído.

A exploração da Atividade 2 descrita na Figura 6 resultou em um diálogo com excerto transcrito em seguida.

Figura 6: A Atividade 2.

Atividade 2.

Sejam as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} sen\left(\dfrac{1}{x}\right), & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = x.f(x)$.

Verifique se essas funções são contínuas em zero.

Fonte: sequência didática proposta pelo primeiro autor.

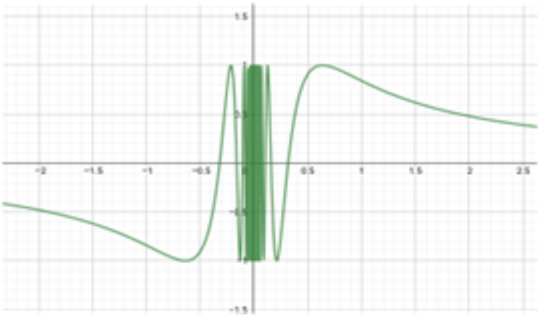
Segue um excerto dos comentários dos alunos Heitor e Helena ao resolverem a questão (dessa vez Júlia ficou em silêncio):

> Heitor: A função seno oscila entre -1 e 1, então esse gráfico deve variar aí também.
>
> Helena: Eu não sei... acho que como o seno de 0 é zero e a função também vale zero, então é contínua aí.
>
> Heitor: Mas o problema é que ela fica oscilando, acho que a f é descontínua.

Interpretamos que Heitor re-contextualiza a questão enunciada algebricamente ao evocar mentalmente o gráfico da função, ainda que este não tivesse sido apresentado, a e representar de forma visual, sem explicitá-lo aos colegas. Nesse processo, não explicou como concebia tal representação, tampouco os colegas demandaram, naquele momento, esclarecimentos sobre o motivo de imaginar a função oscilando. Helena, por sua vez, relaciona o valor da função no ponto com o valor do limite para o ponto, como é válido para o caso de funções contínuas em um ponto. Ela recontextualiza e reanalisa, portanto, a função proposta evocando um resultado válido em um conjunto particular: o das funções contínuas. Heitor é firme em sua representação, mas não contesta o entendimento de Helena.

Deste modo os múltiplos contextos trazidos em discussão não são contrastados e a tensão é criada no nível dos enunciados de cada estudante e não de seus argumentos. Júlia não participa das interações do grupo. Intervindo para resolver a tensão criada, o professor sugeriu o uso do computador, constituindo mais um contexto para investigação. Os alunos digitaram a primeira função na Calculadora Gráfica Geogebra e visualizaram a Figura 7.

Figura 7: O gráfico da função f.



Fonte: os autores.

A representação na tela do computador é definitiva para a análise solicitada.

> Helena: Olha! A f é descontínua mesmo. O seno fica indo de -1 a 1 o tempo todo quando x tende a zero.

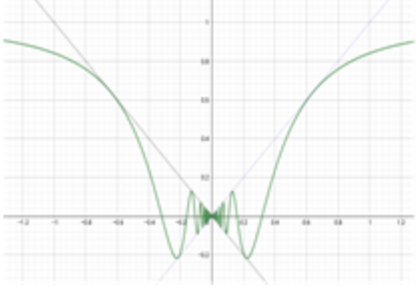
Neste momento, Helena percebe o que o colega Heitor quis dizer anteriormente e concorda com a avaliação do colega, evocando como motivo para a descontinuidade da função um aspecto sobre a continuidade compatível com a definição do conceito: a oscilação dos valores da função independente da proximidade de zero dos valores no domínio da função.

Das interações dos estudantes, destacamos um “processo de produção de sentido social [para um conceito matemático]”, embora incipiente e pontual, mas promovido pelo compartilhamento de ideias e pela representação visual da função. Movimentos como estes são o que estamos entendendo por objetivação do conceito de continuidade no estudo de funções, ancorado no uso da visualização.

Em seguida Heitor se interessa pela segunda função a ser investigada e pergunta: “E a outra função ... a g?”

Os participantes multiplicam a expressão da lei algébrica da função f por x^2 no programa do computador e observam atentamente o novo gráfico.

Figura 8: O gráfico da função g.



Fonte: os autores.

Heitor: Essa é contínua em zero. A função g fica entre essas bissetrizes.

Júlia: Parece que é aquele teorema do sanduíche, então o limite também é zero.

Da interação entre os alunos destacamos a compreensão das razões que tornam a primeira função descontínua e a segunda contínua, apesar de não formalizarem suas respostas, aspecto que também não lhes foi cobrado. Argumentamos que as justificativas, no entanto, não estão restritas a aspectos puramente visuais. No caso da função g, por exemplo, Julia recupera, inclusive, um conhecimento "teórico" sobre o "teorema do sanduíche", relacionando a questão ao corpo já estudado. No caso de Heitor, a questão da proximidade de valores parece latente. Ambas as respostas não estão restritas, mas são ancoradas na representação visual da questão. Conjecturamos, assim, que a visualização dos gráficos esclareceu um sentido para uma justificativa próxima das ideias apresentadas que pode ser formalizada da seguinte maneira:

Figura 9: Resolução da primeira questão na Atividade 2

A função f é descontínua em zero, pois para qualquer $a \in [-1,1]$, podemos obter uma sequência (x_n) tal que $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n) = 0$ e $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = a$.

No caso, basta tomar $x_n = \dfrac{1}{arcsen(a) + 2\pi n}$.

Enquanto que, para $x \neq 0$, como $-1 \leq \text{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) \leq 1$ e $x \to 0$, então $x.sen\left(\dfrac{1}{x}\right) \to 0$.

Entendemos que situações como estas podem favorecer o entendimento de outros fatos e teoremas necessários e que estão presentes no esboço de demonstração acima.

6 DISCUSSÃO E CONSIDERAÇÕES FINAIS

A intenção nesse artigo é discutir o uso da visualização no ensino da matemática como aliado para o entendimento dos conceitos.

Ao investigar as estratégias utilizadas pelos alunos para significar o conhecimento matemático ao longo da experiência, não há como afirmar de que modos os alunos Heitor, Helena, Júlia poderiam desenvolver estratégias semelhantes à de Chris que recupera o enunciado da definição formal e seu significado a partir de uma representação visual desenhada por ele próprio. No entanto, as ações em sala de aula descritas neste relato podem, potencialmente, promover tal desenvolvimento. Na sequência didática, a definição formal foi revisitada e, portanto, os alunos precisavam acessar as ideias relacionadas à continuidade para entendê-la e construir algum sentido para o que estavam explorando visualmente.

Mais importantes, porém, são outras evidências do uso do recurso visual. Heitor revela ideias conflitantes quando questiona o fato de a função seno oscilar, talvez esperando um comportamento monótono da função, se aproximando do limite sem alcançá-lo ou superá-lo. –Esse movimento pode sinalizar a percepção de que o conceito de continuidade se manifesta de outros modos, em outros mundos diferentes daqueles em que se desenha o gráfico de uma função sem tirar o lápis do papel, recontextualizando a noção e abrindo caminhos para iniciar um processo de complementariedade. Por sua vez, Helena resgata um dado da função seno ($sen(0) = 0$) para elaborar conexões situando a questão no conjunto de funções contínuas. Ancorada na visualização, Júlia relembra o teorema do sanduíche estabelecendo conexões com a teoria estudada. Identificamos, mesmo que latentes, alguns processos característicos de abstração estrutural no desenvolvimento da aprendizagem. Outras experiências seriam necessárias para que isto ocorresse.

Quanto às relações potenciais entre representação visual e as estratégias de significação para a aprendizagem dos conceitos, entendemos que o emprego dos recursos visuais, uma vez exploratório, contribuiu para uma aprendizagem significativa, enquanto a utilização das representações visuais, por parte do professor, pode estimular no aluno o hábito de desenvolver estratégias que incluam a visualização como recurso para produzir/construir significados matemáticos.

Vale mencionar que os alunos não recorreram naturalmente à definição formal, mas retomaram argumentos pontuais relacionados ao conceito de função contínua. Todos demonstraram surpresa ao observarem os gráficos, o que revela desconhecimento das construções visuais dessas funções. Entretanto, o diálogo entre eles evidencia o potencial do recurso visual como instrumento capaz de, a partir das representações, suscitar vestígios de sentidos e favorecer a construção de ideias correlacionadas ao conhecimento de funções contínuas.

Por fim, não acreditamos haver uma estratégia única, ou descrição plena e completa, para descrever a objetivação do conhecimento matemático. Talvez por isso, os resultados identificados dos processos de complementarização e contextualização são pontuais e situados no contexto em que se discute o conceito de continuidade. Além disso, seria precipitado indicar ocorrência de complexificação, uma vez que os alunos procuraram atribuir significados somente à medida que reconheciam alguma informação familiar.

Nesse estudo, procuramos ampliar o entendimento a respeito da noção de abstração, discutindo a teoria da abstração estrutural e demais pesquisas correlacionadas. A utilização desta teoria como referencial teórico na investigação dos três casos proporcionou resultados que fortalecem a ideia de que as representações visuais funcionam como meio potencial para a produção/construção de significado matemático. Observa-se que visualizar para compreender potencializa a percepção dos sentidos e, consequentemente, favorece a estruturação de um sistema consistente de ideias.

REFERÊNCIAS

CABRAL; M.A.P. **Curso de Cálculo de uma Variável**. Rio de Janeiro: Editora IM-UFRJ. 2013.

DAVIDOV, V.V Types of generalization in instruction: Logical and psychological problems in the structuring of school curricula. **Soviet Studies in mathematics education**, v.2, 1972. (Ed, J. Kilpatrick, Tradução J, Teller) Reston, VA: NCTM. 1990.

DUBINSKY, E. Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. In D. Tall (Ed.) **Advanced Mathematical Thinking**, p. 95–123, Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.1991.

FLORES, C.R.; WAGNER, D.R.; BURATTO, I.C.F. Pesquisa em visualização na educação matemática: conceitos, tendências e perspectivas. **Educação Matemática Pesquisa**: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, v. 14, n. 1. 2012.

FREUDENTHAL. H. **Mathematics as an Educational Task**. Dordrecht, The Netherlands: Reidel, 1975.

HAZZAN, O. Reducing abstraction level when learning abstract algebra concepts. **Educational studies in mathematics**, v. 40, n.1, p. 71-90, 1999.

HAZZAN, I. e MITCHELMORE, M. The role of abstraction in learning about rates of change, **Proceedings of the 29th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia Conference**, p. 278-285. South Australasia: MERGA. 2006.

HERSHKOWITZ, R., SCHWARZ, B.B., DREYFUS, T. Abstraction in context: Epistemic actions. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 32, p.195-222, 2001.

LIMA, E.L. **Análise Real**. Coleção matemática universitária, v. 1, p. 185-204, Outubro, 2008. Rio de Janeiro: IMPA.

MITCHELMORE, M.C., & WHITE, P. Abstraction in mathematics and mathematics learning. In: **Proceedings of the 28th annual conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,** v.3, p.329-336. Bergen, Norway: PME. 2004.

MITCHELMORE, M.C., & WHITE, P. Abstraction in mathematics learning. **Mathematics Education Research Journal**, 19(2), p. 1-9, 2007.

MOREIRA, P.C., CAMPOS, D.F. Descontinuidades na Passagem do Cálculo para a Análise: as noções de limite e de função contínua num ponto. **Bolema**, v. 37, p. 1017-1035, 2023.

MORETTIN, P.A.; HAZZAN, S. **Cálculo: Funções de Uma E Várias Variáveis**. Editora Saraiva, 2000.

NERI, C.; CABRAL, M.A.P. **Curso de análise real**. Rio de Janeiro: Editora IM-UFRJ. 2011.

NOSS, R., HOYLES, C. **Windows on mathematical meanings: Learning cultures and computers**. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer, 1996.

PIAGET, J. **Studies in reflecting abstraction.** Philadelphia: Psychology Press, 2014.

PIAGET, J. (and collaborators) **Studies in reflective abstraction** (Recherches sur l abstraction réfléchissante). Philadelphia: Psychology Press, 1977.

PINTO, M. M. F. **Students' Understanding of Real Analysis**. PhD Thesis, Warwick University. Ann Arbor, Michigan: ProQuest-CSA, LLC, 1998/2011

PINTO, M.M.F. & TALL, D.O. Building formal mathematics on visual imagery: a case study and a theory. **For the Learning of Mathematics**, v.22, p.2-10, 2002.

PINTO, M. M. F.; SCHEINER, T. Visualização e ensino de análise matemática. Visualization and the teaching of mathematical analysis. **Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática**, v. 17, n. 3, p. 637-654, 2015.

PRESMEG, N. C. Research on visualization in learning and teaching mathematics. **Handbook of research on the psychology of mathematics education**, p. 205-235, Rotterdam: Sense. 2006.

RADFORD, L. The Epistemological Foundations of the Theory of Objectivation. **Teaching and Learning Mathematics**, p. 127-149, 2015.

SCHEINER, T. New lights on old horizon: Constructing mathematical concepts, underlying abstraction processes and sense making strategies. **Educational Studies in Mathematics**, v.91, n.2, p.165-183, 2016.

SCHEINER, T. Sense making in mathematics. Towards a dialogical framing. **Proccedings of the 41st annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia**, p.669-676. South Australasia: MERGA. 2018a.

SCHEINER, T. Mathematics cognition reconsidered: On ascribing meaning. 2018. **Proceedings of the 21st Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education,** RUME, p.1234-1239.2018b.

SCHEINER,T.,& PINTO, M.M.F. Cognitive processes underlying mathematical concept construction: The missing process of structural abstraction. In C. Nicol, S. Oesterle, P. Liljedahl, & D. Allan (Eds.). **Proceedings of the 38th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and the 36th Conference of the North American Chapter of the Psychology of Mathematics Education**, v. 5, p. 105-112. Vancouver, Canada: PME. 2013.

SCHEINER,T., & PINTO, M.M.F. The evolving framework of structural abstraction: a tool for and an object of research in knowing and learning mathematics. Manuscrito de circulação interna: notas de aula. 2014.

SCHEINER, T.; PINTO, M.M.F. Images of abstraction in mathematics education: contradictions, controversies, and convergences. In: **Proceedings of the 40th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**, p. 155-162. Szeged, Hungary: PME. 2016.

SCHEINER, T.; PINTO, M.M.F. Emerging Insights from the Evolving Framework of Structural Abstraction. **20th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education**. San Diego, CA, USA: RUME. 2017.

SCHEINER, T.; PINTO, M.M.F. Emerging perspectives in mathematical cognition: contextualizing, complementizing, and complexifying. **Educational Studies in Mathematics**, v.101, n.3, 2019.

SCHEINER, T., PINTO, M.M.F. Theoretical advances in mathematics cognition. **Proceedings of the First PME Regional Conference: South America**, p. 97-104. Rancagua, Chile: PME. 2018.

SKEMP, R. **The psychology of learning mathematics.** (second edition, first published in 1971) London: Penguin Group. 1986.

STEWART, J. **Cálculo, volume I**. 2001. São Paulo: Pioneira Thomson Learning.

TALL, D.O. **How humans learn to think mathematically**. Exploring the three worlds of mathematics. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2013.

TALL, D.O., & VINNER, S. Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limit and continuity. **Educational Studies in Mathematics**, v. 12, n. 2, p. 151-169, 1981.

TALL, D.O. (Ed.) **Advanced Mathematical Thinking**. Dordrecht: Kluwer:. 1991.

TREFFERS, A. **Three dimensions: a model of goal and theory description in Mathematics Instruction-The Wiskobas Project.** Dordrecht, The Netherlands: Reidel Publishing Co, 1987.

VAN OERS, B. From context to contextualizing. **Learning and Instruction**, v.8, n.6, p.473-488, 1998.

VAN OERS, B. Educational forms of initiation in mathematics culture. **Educational Studies in Mathematics**, v. 46, p. 59-85, 2001.

WILENSKY, U. Abstract meditations on the concrete and concrete implications for mathematics education. **Epistemology and Learning Group**, MIT Media Laboratory, 1991.

Submetido em setembro de 2024
Aprovado em julho de 2025.

Sandro R. Cunha

Mestrado (Acadêmico) em Ensino de Matemática pela Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), Instituto de Educação Sarah Kubitschek, Rio de Janeiro (IESK), Brasil. ID Lattes: 4761318874976249. Orcid ID: 0000-0002-9174-1001.

Contato: sandroreme@gmail.com

Márcia M. F. Pinto

Doutorado em Educação Matemática pela The University of Warwick (Sigla), professor Associado na Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), Rio de Janeiro, RJ, Brasil. ID Lattes: 8971278683060528. Orcid ID: 0000-0001-5308-0487.

Contato: marciafusaro@gmail.com