

Estabelecendo Conexões entre a Matemática Escolar e a Matemática Acadêmica em Meio a Formação do Professor de Matemática

Establishing Connections between School Mathematics and Academic Mathematics During Mathematics Teacher Training

Geraldo Aparecido **Polegatti**
Instituto Federal de Mato Grosso (IFMT)

Ligia Bittencourt Ferraz de **Camargo**
Universidade Estadual de Maringá (UEM)

RESUMO

Neste trabalho, tem-se o objetivo de apresentar um debate a respeito do entrelaçamento da Matemática Escolar com a Matemática Acadêmica perante o desenvolvimento do processo de formação inicial do professor de Matemática, por meio do estudo das práxis de professores de Matemática, ou seja, como o professor pode estabelecer possíveis conexões entre ambas. Reforça-se a necessidade de a formação de professores de Matemática perpassar por vivências da prática docente do professor de Matemática. Para tanto, cinco acadêmicos do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Mato Grosso em seu campus no município de Juína, matriculados na disciplina de Cálculo I, vivenciaram duas aulas de um professor de Matemática que desenvolveu o ensino de máximos e mínimos de função quadrática perante sua turma de 22 estudantes do primeiro ano do curso Técnico em Agropecuária Integrado ao Ensino Médio. Os resultados mostram que os acadêmicos participantes além de promoverem as conexões esperadas entre Matemática Escolar e Matemática Acadêmica, refletiram as práticas matemáticas pedagogicamente desenvolvidas na práxis do professor de Matemática.

Palavras-chave: Matemática Acadêmica. Matemática Escolar. Formação de Professor. Cálculo. Função Quadrática.

ABSTRACT

In this work, the objective is to present a debate regarding the intertwining of School Mathematics with Academic Mathematics in view of the development of the Mathematics teacher's initial training process, through the study of the praxis of Mathematics teachers, that is, how the teacher can establish possible connections between the two. The need for the training of Mathematics teachers to be permeated by the Mathematics teacher's teaching practice experiences is reinforced. To this end, five students from the Mathematics Degree course at the Federal Institute of Mato Grosso on its campus in the city of Juína, enrolled in the Calculus I discipline, experienced two classes taught by a Mathematics teacher who developed the teaching of function maxima and minima quadratic in front of his class of 22 first-year students of the Agricultural Technician course Integrated into High School. The results show that the participating academics, in addition to promoting the expected connections between School Mathematics and Academic Mathematics, reflected the mathematical practices pedagogically developed in the Mathematics teacher's praxis.

Keywords: Academic Mathematics. School Mathematics. Teacher Training. School Mathematics. Calculus. Quadratic Function.

1 INTRODUÇÃO

Uma das áreas da Educação Matemática que está em franco desenvolvimento é a de formação de professores de Matemática. Pesquisas envolvendo essa área têm evidenciado um problema nos cursos de formação de professores de Matemática que, desde o início do século XX, já vinha sendo alertado por Felix Klein. Isso refere-se ao que o autor denominou na época de “dupla descontinuidade”, ou seja, um distanciamento existente entre a matemática estudada na licenciatura (Matemática Científica ou Acadêmica) e a matemática da escola básica (Matemática Escolar) provocado pelo modo com que o curso de formação inicial estava organizado e pela maneira com que as disciplinas vinham sendo ministradas e conduzidas, sem conexão entre as matemáticas citadas.

Matemática Científica e Matemática Acadêmica como sinônimos que se referem à Matemática como um corpo científico de conhecimentos, segundo a produzem e a percebem os matemáticos profissionais. E *Matemática Escolar* [...] ao conjunto dos saberes “validados”, associados especificamente ao desenvolvimento do processo de educação escolar básica em Matemática. Com essa formulação, a Matemática Escolar inclui tanto saberes produzidos e mobilizados pelos professores de Matemática em sua ação pedagógica na sala de aula da escola, quanto resultados de pesquisas que se referem à aprendizagem e ao ensino escolar de conceitos matemáticos, técnicas, processos etc. (Moreira; David, 2021, p. 20, grifos dos autores).

Segundo Klein (2009), na universidade, os jovens estudantes rapidamente esquecem a matemática que estudaram na escola, pois se deparam com problemas que fogem totalmente àqueles que estavam habituados. Para além, o autor salienta que depois de formados esses mesmos jovens se tornam professores e se deparam com a necessidade de ensinar a matemática elementar de acordo com o grau de ensino das turmas as quais são responsáveis e, por não conseguirem estabelecer relações entre a matemática que vão ensinar (Matemática Escolar) e a que é estudada na universidade (Matemática Acadêmica), acabam por aceitar o ensino tradicional, sem que seus estudos universitários apresentem influência em sua práxis.

Deste modo, uma descontinuidade se dá no processo de formação do professor, quando há uma ruptura em relação à matemática estudada na escola básica (escolar), e outra na prática docente, quando os conteúdos explorados na Licenciatura em Matemática (acadêmica) parecem não estar articulados com aqueles que serão ensinados no âmbito escolar, sendo que, os conteúdos de “matemática acadêmica para os professores precisam estar necessariamente relacionados ao trabalho do ensino nas escolas” (Jakobsen *et al.*, 2012, p. 4636, tradução nossa). De acordo com Marcelo, Feiman e Buchman (2009), da mesma maneira, já chamavam à atenção para esse fato ao se referirem ao divórcio existente na formação inicial, “onde costuma acontecer de os estudantes perceberem que tanto os conhecimentos como as normas de atuação na Instituição de Formação têm pouco a ver com os conhecimentos e práticas profissionais” (p. 120).

Em meio a essa problemática e considerando que formar professores de Matemática é uma tarefa que exige muito além de apresentar conteúdos matemáticos, se faz necessário colocar os acadêmicos em situações próximas ou semelhantes às que encontrarão em seu futuro como professores. Nesse sentido, defende-se que os conteúdos de Matemática Acadêmica ao serem estudados na universidade devem estar atrelados ao trabalho prático do professor de Matemática e sejam fundamentos para o ensino da Matemática Escolar. O docente “necessita mudar a sua cultura profissional marcada pelo isolamento e pelas dificuldades para aprender de outros e com outros” (Marcelo, 2009, p.111).

De acordo com Wasserman, Buchbinder e Buchholtz (2023), os cursos de Licenciatura em Matemática devem proporcionar formas diferenciadas e dinâmicas de fazer, ser, estudar e desenvolver conceitos e ideias matemáticas para que os acadêmicos possam aprender, produzir seu próprio material pedagógico, bem como promover relações desses conceitos e ideias em meio as suas práxis na Educação Básica, ou seja, “independentemente da estrutura do curso, a natureza das atividades instrucionais que ele oferece deve ser suficientemente flexível para permitir que os estudantes experimentem práticas matemáticas, como resolução de problemas, conjecturas, generalizações e provas” (p. 7, tradução nossa). Afinal de contas, “a hipervalorização da Matemática Acadêmica no processo de formação estimula o desenvolvimento de concepções e valores distanciados da prática e da cultura escolar, podendo dificultar a comunicação do professor com os alunos e a própria gestão da matéria em sala de aula” (Moreira; David, 2021, p. 100).

Segundo Ball e Bass (2009), faz-se necessário que o professor de Matemática tenha uma formação que abarque o conhecimento matemático com integridade para, entre outras coisas: buscar equilibrar o rigor matemático com o nível cognitivo dos estudantes envolvidos, saber aproveitar as oportunidades proporcionadas pelas indagações dos estudantes, justificar a importância de se estudar Matemática, estar atento aos significados matemáticos que os estudantes estão apresentando, antecipar-se aos possíveis questionamentos, promover entrelaçamentos entre os conteúdos e resolver as possíveis distorções de conceitos matemáticos que emergem das suas resoluções. Afinal, “o conhecimento matemático para o ensino deve ser derivado de uma análise da prática e das ideias matemáticas encontradas na resposta a essas situações da práxis” (Wasserman *et al.*, 2019, p. 6, tradução nossa).

Trata-se de uma pesquisa qualitativa que “lida e dá atenção às pessoas e às suas ideias, procura fazer sentido de discursos e narrativas que estariam silenciosas. E a análise dos resultados permitirá propor os próximos passos” (D’Ambrosio, 2013, p. 21). Tem-se o objetivo de apresentar um debate a respeito do entrelaçamento da Matemática Escolar com a Matemática Acadêmica perante o desenvolvimento do processo de formação inicial do professor de Matemática, por meio do estudo das práxis de professores de Matemática, ou seja, como o professor pode estabelecer possíveis conexões entre ambas.

Como exemplo, utiliza-se um caso em que cinco acadêmicos do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Mato Grosso (IFMT) em seu campus no município de Juína, que estão cursando a disciplina de Cálculo I ministrada pelo professor formador (pesquisador), vivenciam duas aulas de um professor (colaborador) de Matemática do IFMT, na turma de primeiro ano do curso Técnico em Agropecuária Integrado ao Ensino Médio, composta por 22 estudantes. O conteúdo trabalhado foi função quadrática, com o foco em seus conceitos de máximo e mínimo, em meio ao cálculo da área máxima de um canteiro retangular de hortaliças (contexto do Técnico em Agropecuária). Posteriormente, debate-se essa vivência no âmbito da disciplina de Cálculo I enfatizando conexões entre elementos de Matemática Escolar, que emergiram na práxis do professor colaborador, e tópicos de Matemática Acadêmica presentes no currículo de Cálculo I. Constatou-se que a atividade proposta, em meio a investigação da prática do professor de Matemática, mostrou-se promissora no processo de formação inicial de professores de Matemática.

2 CONEXÕES ENTRE AS MATEMÁTICAS ESCOLAR E ACADÊMICA QUE EMERGEM DA PRÁXIS DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA COMO MEIO DE FORMAÇÃO

Nesse texto, parte-se da premissa que a práxis do professor de Matemática deve ser objeto de estudos por acadêmicos de Licenciatura em Matemática. Pois, compreende-se que vivenciar a prática profissional do ser professor de Matemática para buscar conexões entre a Matemática

Escolar, desenvolvida na Educação Básica, e a Matemática Acadêmica, presente no currículo da Licenciatura em Matemática, é fundamental no processo de formação dos futuros professores de Matemática. Nesse trabalho considera-se a consonância

entre a prática do professor com os alunos e a prática formativa do formador, tanto em termos metodológicos de possibilitar que o professor vivencie o que se espera que possa, posteriormente, propiciar aos seus alunos (assumimos que o conhecimento pedagógico não se ensina, vivencia-se) como em termos matemáticos, pois o professor tem de passar a entender matemática e a pensar matematicamente de modo que seja possível, posteriormente, propor tarefas e efetuar discussões que permitam desenvolver as formas de pensar matematicamente dos alunos, e isso demanda fazer diferente do que tem sido feito, ou não seria necessário esse foco na formação (Ribeiro; Silva, 2024, p. 3).

Assim, no processo de formação deve-se evitar a hipervalorização da Matemática Acadêmica. Segundo Moreira (2020), o professor tem autonomia no desenvolvimento do seu trabalho docente para escolher metodologias de ensino, estratégias de abordagem para cada conteúdo que será ensinado e dependendo da turma que ele esteja atuando. Nesse cenário, é essencial que o processo de formação inicial dos futuros professores de Matemática ofereçam condições básicas para que os licenciandos possam exercer suas autonomias em suas práxis. Dentre essas condições básicas o autor ressalta

o conhecimento matemático relevante para o ensino escolar, que inclui certamente, entre outros elementos, as justificativas da validade dos resultados matemáticos que são objeto desse ensino, bem como os fundamentos que sustentam a legitimidade dos procedimentos matemáticos a serem utilizados pelos alunos e professores, tudo devidamente ajustado às situações de ensino e de aprendizagem da prática docente escolar em matemática (Moreira, 2020, p. 235).

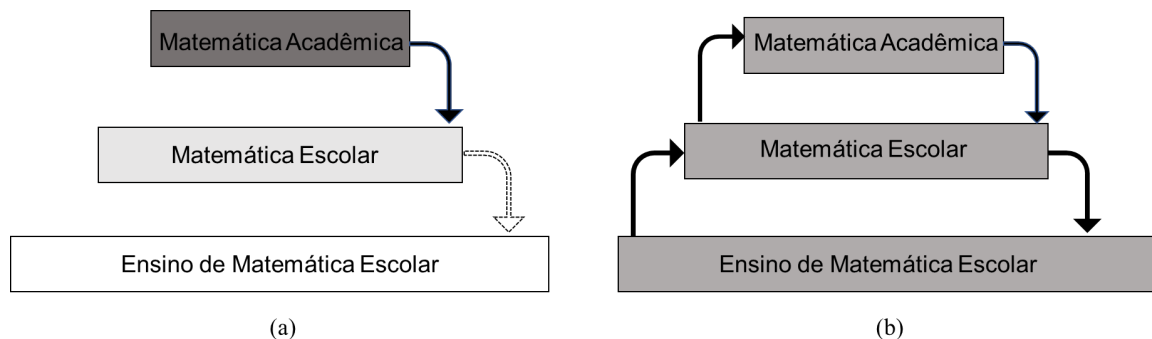
Assim, com base em Fiorentini *et al.* (2016), considera-se o professor de Matemática no desenvolvimento de sua autonomia em sala de aula, assim como seu contexto de atuação com a Matemática Escolar na Educação Básica, como um promissor campo de estudos e pesquisas em Educação Matemática que, deve ser objeto de investigações, análises e reflexões por acadêmicos de Licenciatura em Matemática. Nessa perspectiva, cada aula compartilhada pelo professor de Matemática transforma-se em objeto de pesquisa e aprendizagem do ser professor de Matemática para os acadêmicos de Licenciatura em Matemática. Dentre outras possibilidades os autores ressaltam

a pesquisa da própria prática, as práticas formativas e investigativas baseadas na parceria/colaboração universidade-escola, os estudos da aula (*lesson study*), as pesquisas narrativas de processos de formação ou de desenvolvimento profissional, a história de vida de professores que ensinam matemática (Fiorentini *et al.*, 2016, p. 20).

Ou seja, as experiências de vivenciar as dinâmicas das aulas de Matemática no âmbito da Educação Básica, observar diferentes professores em suas práxis, dialogar com esses professores e seus estudantes, promover conexões entre conteúdos de Matemática Escolar com a Matemática Acadêmica, bem como identificar elos entre ações pedagógicas do professor com as teorias de aprendizagem e metodologias de ensino de Matemática, que perpassam pela Licenciatura em Matemática, devem fazer parte do processo de formação dos acadêmicos da Licenciatura em Matemática (Wasserman *et al.*, 2019). A seguir, na Figura 1, apresenta-se o modelo desenvolvido por Wasserman *et al.* (2017) com implicações para o ensino de conteúdos da disciplina de Análise

Real, mas compreende-se que ele pode ser expandido para outras disciplinas, como por exemplo, Cálculo I.

Figura 1: Modelo do desenvolvimento das práxis do professor de Matemática no processo de formação da Licenciatura em Matemática



Fonte: Adaptado de Wasserman *et al.* (2017, p. 4)

Segundo Wasserman *et al.* (2017), no modelo (a), que é mais usual na formação de professores de Matemática, a Matemática Escolar é considerada um subproduto da Matemática Acadêmica (cinza escuro). Há uma espécie de gotejamento dos conteúdos da Matemática Acadêmica ensinados aos acadêmicos de Matemática com pouca ou nenhuma conexão com os preceitos da Matemática Escolar (cinza claro), ou seja, praticamente não se estabelecem relações entre os dois campos de estudo da Matemática. Esse distanciamento se intensifica na práxis do professor de Matemática (incolor), de modo que quase nada do que ele estudou de Matemática Acadêmica se faz presente no planejamento e desenvolvimento de suas aulas.

Acreditamos que nosso modelo aborda as limitações de simplesmente ensinar Matemática Acadêmica aos acadêmicos de Matemática, e esperar que eles possam aplicar com flexibilidade o que aprenderam em uma situação posterior. Em vez disso, o ensino é imerso e motivado por situações e apoios pedagógicos autênticos conduzindo os acadêmicos em fazer conexões entre Matemática Acadêmica, Matemática Escolar e seus ensinos (Weber *et al.*, 2020, p. 5, tradução nossa).

De acordo com Wasserman *et al.* (2017), no modelo (b), que é fomentado pela observação, estudo e investigação da práxis de professores que ensinam Matemática por parte dos acadêmicos da Licenciatura, há o favorecimento de um equilíbrio entre os três campos de estudo (Matemática Acadêmica, Matemática Escolar e Ensino de Matemática Escolar), representados pela mesma cor.

Os autores salientam que no modelo (b), o ensino de Matemática Acadêmica se constitui a partir do contexto da prática do professor que ensina Matemática (movimento de setas à esquerda do modelo), no âmbito do Ensino de Matemática Escolar, perpassa pelo campo de estudo da Matemática Escolar, e posteriormente, retorna ao contexto da Matemática Escolar promovendo conexões com a Matemática Acadêmica para finalmente retornar ao campo de ação do Ensino de Matemática Escolar (movimento de setas à direita do modelo). Ou seja, conectando-se à prática profissional, as três facetas do modelo (b) (Prática Pedagógica, Matemática Escolar e Matemática Acadêmica) são enfatizadas no desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem (Wasserman *et al.*, 2017).

No cenário do modelo (b)

construir a partir da prática (de ensino) envolve projetar instruções que partem não do conteúdo de Matemática Acadêmica em si, mas sim, de situações práticas de ensino escolar, com ações específicas que os professores de Matemática Escolar precisam fazer como parte do seu trabalho profissional. As situações de ensino são escolhidas de modo que aspectos de suas práticas instrucionais são particularmente adequadas

para contribuírem na aprendizagem de conteúdos de Matemática Acadêmica, e podem servir para destacar algumas das ideias fundamentais que estão presentes na Matemática Escolar. Já no âmbito do Ensino de Matemática Escolar, utiliza essas ideias e práticas a partir da Matemática Acadêmica como meio de reconsiderar os aspectos pedagógicos relacionados. [...] Essencialmente, ao construir e conectar-se de forma mais estreita com a prática profissional, todas as três facetas Matemática Acadêmica, Matemática Escolar e Ensino de Matemática Escolar podem ser enfatizadas e explicitadas durante o processo de ensino e aprendizagem (Wasserman, *et al.*, 2017, p. 4-5, tradução nossa).

Wasserman *et al.* (2019) destacam a importância dos acadêmicos de Matemática buscarem moldar as atitudes do professor de Matemática que está sendo observado, sua resposta pedagógica a uma situação de ensino que emerge na dinâmica da aula, como ele responde aos seus estudantes, de que forma sequencia suas atividades e como promove elos com outras áreas do conhecimento. Cabe ressaltar que “as situações de ensino também são matemáticas, no sentido de que o objetivo pretendido é explorar a situação de ensino que inclui a aplicação e incorporação da Matemática (e não estritamente pedagógica)” (p. 823, tradução nossa). Por outro lado, o professor de Matemática que permite ser observado e investigada suas práticas tem retorno no aprimoramento do seu conhecimento profissional que

é um misto de saber e saber fazer que recebe contributos de múltiplas origens. Apoia-se na própria experiência acumulada da profissão, com as suas tradições, normas e mitos, bem como o saber que se vai elaborando na interface entre a profissão e outras comunidades com quem interage mais diretamente (por exemplo, matemáticos e investigadores em educação) (Ponte, 2017, p. 30-31).

Nesse sentido, destaca-se haver uma via de mão dupla na relação entre o professor de Matemática que permite ser observado e analisada sua prática profissional por acadêmicos de Licenciatura em Matemática. Os acadêmicos aprendem, e o professor fortalece seu vínculo com outros professores de Matemática que atuam como professores formadores, educadores matemáticos e os próprios acadêmicos que estão participando do processo. Assim, o conhecimento deixa de ser solitário e passa a ser solidário. O professor de Matemática que colabora com os acadêmicos abrindo sua sala de aula e compartilha o desenvolvimento de sua prática, por um lado resalta a Matemática Escolar, e por outro, se reencontra com a Matemática Acadêmica. Na próxima seção apresenta-se os aportes metodológicos.

3 APORTES METODOLÓGICOS

Esta é uma pesquisa de cunho qualitativo. Segundo D'Ambrosio (2013), a pesquisa qualitativa procura entender e decifrar o que se pesquisa, ela conduz o investigador a interpretar dados qualitativos colhidos, por exemplo, em meio aos discursos coletados de forma natural no ambiente dos participantes da pesquisa ou àqueles descritos em documentos. Na pesquisa qualitativa o processo de coleta de dados (entrevistas, observações de campo, filmagens, dentre outras) “juntamente com a visão de conhecimento que enfatiza dimensões subjetivas e objetivas do conhecimento, compõem a metodologia da pesquisa” (Borba; Almeida; Gracias, 2020, p. 44). Concomitante ao cunho qualitativo, trata-se de uma pesquisa participante na qual “o pesquisador coloca-se numa postura de identificação com os pesquisados. Passa a interagir com eles em todas as situações, acompanhando todas as ações praticadas pelos sujeitos” (Severino, 2007, p. 120).

Segundo Borba, Almeida e Gracias (2020), para se realizar um experimento de ensino que envolva o cenário da sala de aula, pois não depende somente do pesquisador, precisa-se da permissão do professor e dos estudantes envolvidos, bem como atentar para a quantidade destes

para não dificultar a coleta de dados. Assim, cabe destacar que no IFMT – campus Juína, há sete professores de Matemática que atuam tanto na Licenciatura em Matemática (período noturno), quanto nos cursos técnicos integrados ao Ensino Médio (períodos matutino e/ou vespertino). Nesse campus do IFMT, o professor de Matemática do primeiro ano do curso Técnico em Agropecuária integrado ao Ensino Médio (professor colaborador) em consonância com seus estudantes, possibilita ao professor formador responsável pela disciplina de Cálculo I, bem como seus cinco acadêmicos a, por vezes, observarem a dinâmica de suas aulas.

A disciplina de Cálculo I está inserida no terceiro semestre do curso de Licenciatura em Matemática do IFMT – campus Juína. Dentre seus objetivos está o de promover discussões sobre processos de ensino e aprendizagem que envolvam conteúdos matemáticos presentes no currículo da Educação Básica (Matemática Escolar). Nesse contexto, opta-se pelo diálogo envolvendo o objeto matemático função quadrática. De acordo com Ponte (2017, p. 79), cabe à formação inicial “induzir os jovens candidatos a professores nos modos de falar e pensar próprios do professor que procura problematizar a sua prática”. Assim, ressalta-se que o papel do professor formador é o de propiciar um ambiente que problematiza e que investiga as práticas de professores da Educação Básica que servem de exemplos aos seus acadêmicos.

Segundo Ponte, Mata-Pereira e Quaresma (2017), deve-se procurar proporcionar aos estudantes um ambiente escolar que os incentive a participar do seu processo de ensino e aprendizagem. “Estes são incentivados a apresentar as suas soluções e as suas estratégias para a resolução das tarefas, bem como a questionar as soluções e estratégias dos colegas, seja porque não as compreende, seja porque não as consideram matematicamente válidas” (p. 145). E nesse sentido, “o papel do formador de professores será então o de estabelecer com seus acadêmicos um ambiente indutor onde eles possam começar a participar de modo natural neste discurso e torná-lo progressivamente seu” (Ponte, 2017, p. 79).

De acordo com Weber *et al.* (2020), para aplicação do modelo (b) da Figura 1, primeiramente, deve-se proporcionar uma situação pedagógica realista com os acadêmicos de Matemática. Assim, no dia 12 de agosto de 2024, o professor formador de Cálculo I e seus cinco acadêmicos observaram a práxis do professor colaborador no primeiro ano do curso Técnico em Agropecuária Integrado ao Ensino Médio, do Instituto Federal de Mato Grosso (IFMT), em seu campus no município de Juína. A turma é composta por 22 estudantes. Nessas aulas, o professor colaborador promoveu o processo de ensino e aprendizagem dos conceitos de máximo e mínimo da função quadrática. Para tanto, ele partiu de uma situação problema contextualizada com a formação do Técnico em Agropecuária.

Já no dia 15 de agosto de 2024, o professor formador debateu com seus acadêmicos questões pedagógicas desenvolvidas pelo professor colaborador, bem como os questionamentos elencados pelos estudantes da turma envolvida, e ressaltando como esses conceitos podem ser tratados no campo da Matemática Acadêmica, da disciplina de Cálculo I. Nessa dinâmica, “[...] discutimos Matemática Escolar em termos de Matemática Acadêmica. Abarcamos os conceitos associados com um tratamento formal e explicamos quais conexões isso tem com o ensino de Matemática Escolar” (Weber *et al.*, 2020, p. 5, tradução nossa). A seguir, apresenta-se os desdobramentos das discussões das atividades trabalhadas nos dois contextos matemáticos.

4 DESENVOLVIMENTO E DISCUSSÕES DAS ATIVIDADES

Para iniciar o processo de ensino e aprendizagem sobre o valor máximo de uma função quadrática, o professor colaborador do primeiro ano do curso Técnico em Agropecuária Integrado, propôs a situação problema conforme a Figura 2.

Figura 2: Situação problema utilizada pelo professor colaborador

Em uma chácara há muitas capivaras, para evitar que elas comam as verduras do canteiro de uma horta é necessário cercá-lo com tela de metal. Esse canteiro terá a forma retangular. O chacareiro dispõe de 20 metros de tela. Com essa metragem, qual área máxima poderá ter o canteiro?

Fonte: Arquivo digital dos autores

O professor colaborador iniciou as discussões dialogando com os estudantes os conceitos de perímetro e área de uma região retangular, que estão presentes no currículo de Matemática Escolar do Ensino Fundamental. Logo de início, uma estudante falou 5 metros para o comprimento e 5 metros para a largura do canteiro, outro estudante disse 7 metros para o comprimento e 3 metros para a largura. Quem mais? Indagou o professor. Outra estudante disse 6 metros para o comprimento e 4 metros para a largura. Em seguida, outro estudante disse 10 metros para o comprimento e ficou refletindo no segundo valor, e então perguntou ‘professor, o comprimento não pode ser igual a 10 metros?’ Antes que o professor respondesse, o mesmo estudante falou 8 metros para o comprimento e 2 metros para a largura. Após um breve silêncio o professor começou a organizar os pares de dimensões elencados pelos estudantes em um quadro (Quadro 1), deixando para preencher os respectivos valores das colunas perímetro e área ao efetuar os cálculos com os estudantes.

Quadro 1: Dimensões elencadas pelos estudantes

Comprimento (x)	Largura (y)	Perímetro ($2x + 2y$)	Área ($x \cdot y$)
9 m	1 m	20 m	9 m ²
8 m	2 m	20 m	16 m ²
7 m	3 m	20 m	21 m ²
6 m	4 m	20 m	24 m ²
5 m	5 m	20 m	25 m ²
5,1 m	4,9 m	20 m	24,99 m ²
5,01 m	4,99 m	20 m	24,9999 m ²

Fonte: Elaborada pelos autores

O professor colaborador questionou a estudante o porquê dela ter sugerido o comprimento e a largura do canteiro com a mesma medida de 5 metros. Ela respondeu que pegou a medida de 20 metros da tela e dividiu por 4. Em seguida, dois estudantes disseram que, nesse caso, o canteiro seria um quadrado e não um retângulo. Acontece que “um retângulo é um paralelogramo cujos ângulos são todos retos. Um quadrado é um retângulo cujos lados são todos congruentes” (Moise; Downs, 1971, p. 234). Nesse sentido, pode-se salientar que todo quadrado é um retângulo, mas nem todo retângulo é um quadrado. Ou seja, o quadrado é um caso particular de retângulo.

Fomentando a discussão, o professor colaborador acrescentou as dimensões 5,1 m e 5,01 m para o comprimento do canteiro, o que reforçou a percepção de que ter a forma quadrada fornece o canteiro retangular de maior área. Com relação ao valor do comprimento ou a largura do canteiro terem que ser menores do que 10 m, o professor destacou que a tela disponível, ao ter 20 m de comprimento, atua como um valor limitante para as dimensões do canteiro, nesse caso tanto a largura quanto o comprimento do canteiro devem ser maiores do que zero e menores do que 10 metros.

Para ampliar o alcance matemático da situação problema, o professor colaborador adentra ao campo de estudos da Álgebra interpretando o cálculo geométrico do canteiro em uma função quadrática que o represente, assim, a Álgebra “pode ser o fio condutor do currículo escolar e o desenvolvimento do pensamento algébrico pode permitir que sejam realizadas abstrações e generalizações que estão na base dos processos de modelagem matemática da vida real” (Ribeiro; Cury, 2023, p. 11). Então, o professor colaborador desenvolve a construção da função quadrática que representa algebricamente a situação problema proposta. Na Figura 3 apresenta-se as anotações realizadas pelo professor no quadro branco.

Figura 3: Anotações do professor colaborador no processo de ensino

The image shows handwritten mathematical work on a whiteboard, organized into three columns.
 Column 1 (left):
 1º: A diagram of a rectangle with side lengths x and y . Inside the rectangle, it says $A = x \cdot y$.
 2º: Perímetro $x + x + y + y = 20$, $2x + 2y = 20$, $\frac{2x + 2y}{2} = \frac{20}{2}$, $x + y = 10$, $y = 10 - x$.
 Column 2 (middle):
 3º: Área $A = x \cdot y$, $A = x \cdot (10 - x)$, $A = -x^2 + 10x$ (this equation is boxed).
 4º: $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a = -1$, $b = 10$, $c = 0$, $a < 0 \rightarrow \text{Máximo}$.
 5º: $x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-10}{2(-1)} = \frac{-10}{-2} = 5$, $y = 10 - x$, $y = 10 - 5 = 5$.
 Column 3 (right):
 6º: $A = x \cdot y$, $A = 5 \cdot 5 = 25 m^2$, "ou", $\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$, $\Delta = 10^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 0$, $\Delta = 100 - 0 = 100$, $y_v = \frac{-\Delta}{4 \cdot a}$, $y_v = \frac{-100}{4 \cdot (-1)}$, $y_v = \frac{-100}{-4} = 25 m^2$.

Fonte: Arquivo digital dos autores

Por conseguinte, as discussões entre o professor colaborador e os estudantes convergem para relacionar o cálculo do perímetro do canteiro ($2x + 2y = 20$) com o cálculo da área da região delimitada por ele ($A = x \cdot y$). O professor destaca que o primeiro passo é desenhar o canteiro retangular com suas dimensões x e y . Em seguida, o professor, em conjunto com os estudantes, estabeleceu a relação para o cálculo do perímetro do canteiro com y em função de x ($y = 10 - x$). Então, partindo do cálculo da área e por meio de manipulação algébrica chega-se à função área cuja lei de formação é dada por $A(x) = -x^2 + 10x$, com seu domínio perante o contexto dado por $D = \{x \in \mathbb{R} / 0 < x < 10\}$. Ela corresponde a uma função quadrática, mas que, provavelmente, os estudantes, ou alguns deles, tendem a interpretar como uma equação do segundo grau, da qual ressurge a sua resolução por meio de $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2a}$.

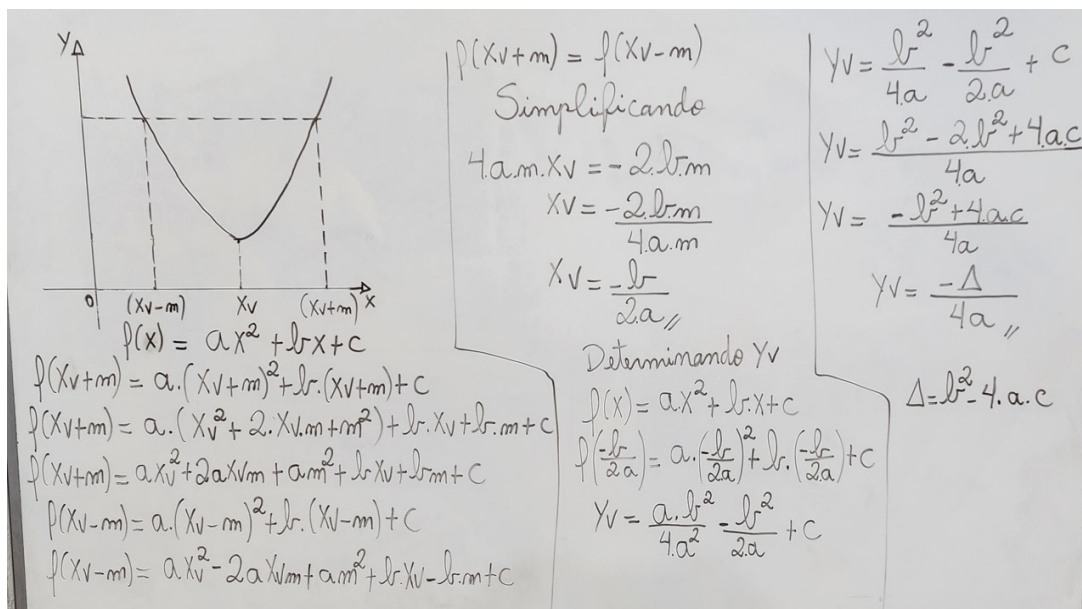
Jakobsen, Thames e Ribeiro (2013) salientam que nos processos de ensino e aprendizagem da Matemática, não se deve somente considerar os conceitos matemáticos novos que podem emergir nos estudos posteriores dos estudantes. Deve-se atentar ao quadro geral do conhecimento matemático, com vistas a prever o caminho percorrido no escopo desse conhecimento por meio das conexões que há entre o que está sendo estudado com o que está ainda por vir. Por exemplo, ensina-se a resolução de equação do segundo grau para que adiante os estudantes compreendam e realizem o cálculo dos zeros da função quadrática. O professor colaborador, atento a isso, discute essa interpretação equivocada com os estudantes antes mesmo que algum deles manifeste esse equívoco, ressaltando se tratar de uma função e não uma equação, e reforçando nessa discussão, a diferença conceitual entre incógnita e variável. Espera-se que nesse estágio do processo de ensino e aprendizagem os estudantes já tenham estudado o conceito de função em aulas

anteriores, como previsto no currículo de Matemática Escolar. Com relação aos conceitos de equação e função recomenda-se uma análise da obra de Ribeiro e Cury (2023).

Logo em seguida, o professor colaborador debate com os estudantes os conceitos de máximo e mínimo presentes no âmbito desse conteúdo com destaque para o sinal negativo ou positivo do coeficiente a em $f(x) = ax^2 + bx + c$, que indica se há ponto de máximo ou mínimo. Neste caso $a < 0$ indica que a função quadrática tem um ponto de máximo. Na sequência, o professor colaborador ressaltava com os estudantes os cálculos que envolvem a determinação do par ordenado (x_v, y_v) que constitui o vértice da parábola, o esboço do gráfico da função quadrática, sendo que a ordenada deste ponto indica o valor máximo ou mínimo da função em estudo. O professor colaborador enfatiza que o $x_v = \frac{-b}{2a}$ representa o valor do lado do canteiro quadrado, e $y_v = \frac{-\Delta}{4a}$ o valor de sua área máxima, ou então pode-se substituir o valor de x_v na função quadrática originada no contexto da situação problema. Aqui, é preciso ressaltar que o cálculo intuitivo de dividir o oposto do coeficiente b por dois, serve para as situações em que o coeficiente a for igual a 1, mas nem sempre isso ocorre.

No encontro com os acadêmicos de Matemática, coube salientar inicialmente que, por convenção, no estudo de funções a variável x deve ser independente da variável y , ou seja, determina-se ou calcula-se o valor de y em função de x . Em meio às discussões, um dos acadêmicos participantes indagou de onde vieram as fórmulas que determinam os vértices de uma parábola. Então, o professor formador dialogou com os acadêmicos a demonstração algébrica das referidas fórmulas, conforme a imagem da Figura 4, a partir de sua representação gráfica e partindo do princípio que a abscissa do vértice da parábola (x_v) é o ponto médio do segmento \overline{AB} onde $A(x_v - m, 0)$ e $B(x_v + m, 0)$, sendo m qualquer número real e levando em conta a simetria da parábola em relação ao seu eixo.

Figura 4: Demonstração algébrica das fórmulas de x_v e y_v realizada pelo professor de Cálculo I

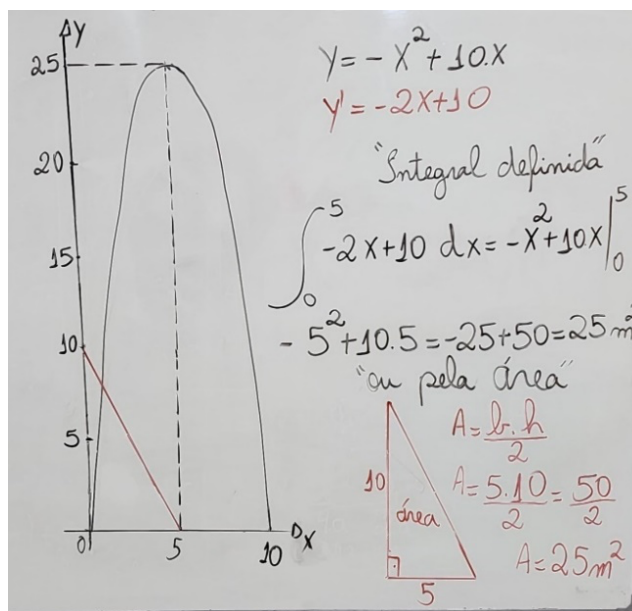


Fonte: Arquivo digital dos autores

No âmbito da Matemática Acadêmica, o professor formador trabalhou o conceito de derivada da função quadrática constituída a partir da situação problema. Então, a partir da função quadrática $y = -x^2 + 10x$ procedeu com o cálculo de sua primeira derivada $y' = -2x + 10$. Em seguida, iguala-se a derivada a zero, a fim de calcular o número crítico da função A , obtendo-se $-2x + 10 = 0 \Rightarrow$

$x = 5$. Logo após, aplicou-se esse resultado para determinar o valor de $y = 5$ por meio da sua conjunção com a variável x no cálculo do perímetro do canteiro. Um dos acadêmicos questionou o professor de Cálculo I o que significa o resultado da segunda derivada da função na resolução da atividade. Acontece que, como $A''(x) = -2$ para todo x real, ou seja, $A''(x) < 0$ para todo x real, temos que o gráfico da função A , no caso a parábola, possui concavidade voltada para baixo em todo o seu domínio. O professor formador promoveu a comparação do gráfico da função quadrática com o gráfico de sua primeira derivada procurando por relações entre eles, conforme apresentado na Figura 5.

Figura 5: A resolução do problema em Cálculo I (derivada e integral definida)



Fonte: Arquivo digital dos autores

Nesse cenário, ao se derivar a função quadrática desenvolvida na situação problema e calcular o número crítico (x_c) da função, obtêm-se o mesmo resultado que o cálculo de x_v . O professor formador sabe disso, e mais, ao se calcular a área (integral definida) da região limitada entre o gráfico da derivada da função quadrática e o eixo das abscissas, limitada pelo intervalo $[0, x_c]$ chega-se ao valor da área máxima do canteiro (y_v). De certa forma, o professor formador promove os elos entre os conhecimentos matemáticos da Matemática Escolar e a Matemática Acadêmica, bem como busca por relações com outras áreas do conhecimento. Como por exemplo, com o estudo do Movimento Uniformemente Variado, debatendo com os estudantes suas equações do espaço, da velocidade e da aceleração.

3 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesse trabalho tem-se o objetivo de apresentar um debate a respeito do entrelaçamento da Matemática Escolar com a Matemática Acadêmica perante o desenvolvimento do processo de formação inicial do professor de Matemática, por meio do estudo das práxis de professores de Matemática, ou seja, como o professor pode estabelecer possíveis conexões entre ambas. Para tanto, por exemplo, o professor da disciplina de Cálculo I pode trabalhar tópicos de Matemática Acadêmica em consonância com conteúdos de Matemática Escolar. Esse mostrou-se um caminho promissor para pesquisas que envolvem o processo de formação inicial e continuada de professores de Matemática, no campo da Educação Matemática.

Perante os seus acadêmicos, o professor formador debate outras situações problema em que o valor de a na função quadrática originada seja diferente de 1. Pode-se trabalhar com a ideia

do canteiro novamente, mas agora colocando, por exemplo, que será aproveitado um muro já construído para ser um dos lados do canteiro. Estudos na formação de professores de Matemática, contextualizados a processos de ensino e aprendizagem da Matemática em meio a Matemática Escolar, favorecem o futuro professor a vivenciar o ser professor de Matemática, suas dinâmicas pedagógicas, a fazer conexões entre conceitos da Matemática Escolar com tópicos da Matemática Acadêmica.

Para além da Matemática, situações problemas mediadas por tópicos de Física como Movimento Uniformemente Variado e Lançamento Oblíquo, por exemplo, envolvem o estudo de função quadrática com o cálculo de máximo ou mínimo (altura máxima, alcance máximo, entre outros). O processo de formação inicial do professor de Matemática não é fechado e nem estático, mas sim aberto e dinâmico. A observação, a investigação e o estudo da prática docente pelos licenciandos em Matemática busca estabelecer conexões entre os conceitos de Matemática Escolar, em tela, com tópicos de Matemática Acadêmica, presentes, nesse caso, na disciplina de Cálculo I. A formação do professor de Matemática perpassa pelos saberes específicos do ser professor de Matemática, o que é diferente do ser um profissional matemático, pois esse último não tem a função de ensinar Matemática Escolar, ele precisa saber, pesquisar, estudar, desenvolver e aplicar. O professor de Matemática, para além disso, tem a função primordial de ensinar Matemática, bem como estabelecer relações com outras áreas do conhecimento (Física, Economia, Química, Biologia, História, Linguagem, entre outras).

REFERÊNCIAS

- BALL, D. L.; BASS, H. With an Eye on the Mathematical Horizon: Knowing Mathematics for Teaching to Learners' Mathematical Futures. **Anais do Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik**, n.43, p. 1-12, 2009.
<https://static1.squarespace.com/static/577fc4e2440243084a67dc49/t/579a39cebe65945c23e8b8cf/1469725134888/EyeOnMathHorizon.pdf>
- BORBA, M. C.; ALMEIDA, H. R.F. L.; GRACIAS, T. A. S. **Pesquisa em ensino e sala de aula: diferentes vozes em uma investigação**. 2º ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2020.
- D'AMBROSIO, U. Prefácio. In: BORBA, M. de C.; ARAÚJO, J. L. (Orgs.). **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. 5º ed. São Paulo: Autêntica, 2013, p. 11-22.
- FIORENTINI, D. *et al.* O professor que ensina matemática como campo de estudo: concepção do projeto de pesquisa. In: FIORENTINI, D.; PASSOS, C. L. B.; LIMA, R. C. R. (Org.). **Mapeamento da pesquisa acadêmica brasileira sobre o professor que ensina matemática: período 2001-2012**. Campinas, SP: FE/UNICAMP, 2016. p. 17-42.
https://www.fe.unicamp.br/pf-fe/pagina_basica/58/e-book-mapeamento-pesquisa-pem.pdf
- JAKOBSEN, A.; THAMES, M. H.; RIBEIRO, C. M.; DELANEY, S. Using practice to define and distinguish Horizon Content Knowledge. In: *12th International Congress on Mathematical Education*. Seoul, Korea, 2012.
- JAKOBSEN, A.; THAMES, M.; RIBEIRO, M. Delineating issues related to horizon content knowledge for mathematics teaching. In: **CERME**, 8. Antalia, Turkiye, 2013.
http://cerme8.metu.edu.tr/wgpapers/WG17/WG17_Jakobsen_Thames_Ribeiro.pdf
- KLEIN, F. **Matemática Elementar do Ponto de Vista Superior**. Volume II: Geometria. Lisboa: Sociedade Portuguesa de Matemática, 2009.
- MARCELO, C. A identidade docente: constantes e desafios. **Formação Docente**, v. 1, n. 1, p. 109-131, 2009.
- MOISE, E. E.; DOWNS, F. L. **Geometria Moderna**. São Paulo: Editora Edgard, 1971.
- MOREIRA, P. C. Formação matemática na licenciatura e prática docente na escola: o caso da unicidade da decomposição em primos. **Hipátia**, v. 5, n. 2, p. 230-245, 2020.
- MOREIRA, P. C.; DAVID, M. M. M. S. **A Formação Matemática do Professor: licenciatura e prática docente escolar**. Belo Horizonte: Autêntica, 2021 (3ª edição).
- PONTE, J. P. Investigar a nossa própria prática: uma estratégia de formação e de construção do conhecimento profissional. In: PONTE, J. P. (Org.). **Investigações matemáticas e investigações na prática profissional**. São Paulo: Livraria da Física, 2017, p. 55-101.
- PONTE, J. P.; MATA-PEREIRA, J.; QUARESMA, M. Ações do professor na condução de discussões matemáticas. In: PONTE, J. P. (Org.). **Investigações matemáticas e investigações na prática profissional**. São Paulo: Livraria da Física, 2017, p. 143-191.
- RIBEIRO, A. J.; CURY, H. N. **Álgebra para a formação do professor: explorando os conceitos de equação e de função**. São Paulo: Autêntica, 2023.
- RIBEIRO, M.; SILVA, C. Especificidades do Conhecimento Interpretativo do professor e das tarefas para a formação como elementos para práticas criativas e matematicamente inovadoras. **Revista Ibero-Americana de Estudos em Educação**, v. 19, n. esp. 2, p. 1-30, 2024.
<https://doi.org/10.21723/riaee.v19iesp.2.18553>
- SEVERINO, A. J. **Metodologia do trabalho científico**. São Paulo: Cortez, 2007.
- WASSERMAN, N. H.; FUKAWA-CONNELLY, T.; VILLANUEVA, M.; MEJIA-RAMOS, J. P.; WEBER, K. Making real analysis relevant to secondary teachers: Building up from and stepping down to practice. **PRIMUS**, p. 559-578, 2017.
<https://doi.org/10.1080/10511970.2016.1225874>
- WASSERMAN, N.H.; WEBER, K.; FUKAWA-CONNELLY T.; MCGUFFEY, W. Designing advanced mathematics courses to influence secondary

teaching: fostering mathematics teachers' "attention to scope". **Journal of Mathematics Teacher Education**, p. 1-21, 2019. <https://doi.org/10.1007/s10857-019-09431-6>

WASSERMAN, N. H.; BUCHBINDER, O.; BUCHHOLTZ, N. Making university mathematics matter for secondary teacher preparation. **ZDM**, p. 1-18, 2023. <https://doi.org/10.1007/s11858-023-01484-5>

WEBER, K.; MEJIA-RAMOS, J. P.; FUKAWA-CONNELLY, T.; WASSERMAN, N. Connecting the learning of advanced mathematics with the teaching of secondary mathematics: Inverse functions, domain restrictions, and the arcsine function. **ELSEVIER**, p. 1-21, 2020. <https://www.sciencedirect.com/journal/the-journal-of-mathematical-behavior/vol/57/suppl/C>

Submetido em setembro de 2024.

Aprovado em julho de 2025.

Geraldo Aparecido Polegatti

Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática na Universidade Estadual de Londrina (UEL), Professor EBTT de Matemática do Instituto Federal de Mato Grosso (IFMT), Juína, Mato Grosso, Brasil. ID Lattes: 0189976880174369 Orcid ID: 0000-0003-4515-3855

Contato: geappolegatti@gmail.com

Ligia Bittencourt Ferraz de Camargo

Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática na Universidade Estadual de Londrina (UEL), Professora de Matemática da Universidade Estadual de Maringá (UEM), Maringá, Paraná, Brasil. ID Lattes: 6284265901624744 Orcid ID: 0000-0001-7376-4958

Contato: ligiabitten@hotmail.com