

O Estudo de Estruturas de Grupos Finitos a partir da Visualização em Álgebra Abstrata

o atual panorama de pesquisas

The study of Finite Group Structures Through Visualization in Abstract Algebra
the current research landscape

Renata Teófilo de Sousa

Secretaria de Educação do Estado do Ceará
(SEDUC-CE)

Francisco Régis Vieira Alves

Instituto Federal de Educação, Ciência e
Tecnologia do Ceará (IFCE)

Ana Paula Florêncio Aires

Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro
(UTAD)

RESUMO

Este artigo trata-se de uma pesquisa de doutorado em desenvolvimento investiga o panorama de pesquisas sobre o estudo de grupos finitos a partir de abordagens visuais em Álgebra Abstrata, com foco no ensino dessas estruturas algébricas durante a formação inicial de professores de Matemática. A metodologia utilizada foi a pesquisa bibliográfica, em que foi conduzida uma revisão de literatura, com buscas realizadas nas bases Google Acadêmico e Portal de Periódicos da CAPES. As pesquisas encontradas revelaram uma preocupação com os percalços no ensino da Álgebra de modo geral, ao mesmo tempo em que mostraram uma limitação nos estudos sobre essa temática, sobretudo com abordagens que utilizam a tecnologia e que exploram o componente visual no estudo de Álgebra Abstrata. A análise aponta para a importância de ampliar o escopo de investigação nessa área, destacando o potencial de ferramentas tecnológicas como o GeoGebra e CAS Maple como recursos promissores para facilitar a compreensão de conceitos neste campo do conhecimento. Em uma perspectiva futura, almeja-se explorar as potencialidades do uso destas ferramentas como aporte à visualização em Álgebra Abstrata, visando contribuir para o aprimoramento das práticas pedagógicas e para o desenvolvimento do pensamento algébrico dos estudantes da licenciatura em matemática.

Palavras-chave: Grupos finitos. Visualização. Álgebra Abstrata. Formação inicial de professores.

ABSTRACT

This article is part of an ongoing doctoral research and investigates the landscape of research on the study of finite groups from visual approaches in Abstract Algebra, focusing on the teaching of these algebraic structures during the initial teacher training of Mathematics. The methodology used was bibliographic research, in which a literature review was conducted, with searches performed in the Google Scholar and CAPES Periodicals Portal databases. The research found revealed a concern with the challenges in teaching Algebra in general, while also showing a limitation in studies on this theme, especially with approaches that use technology and explore the visual component in the study of Abstract Algebra. The analysis points to the importance of expanding the scope of research in this area, highlighting the potential of technological tools such as GeoGebra and CAS Maple as promising tools to facilitate the understanding of concepts in this field of knowledge. In a future perspective, the aim is to explore the potential of using these tools to support visualization in Abstract Algebra, aiming to contribute to the improvement of pedagogical practices and the development of algebraic thinking in mathematics education students.

Keywords: Finite groups. Visualization. Abstract Algebra. Initial teacher education.

1 INTRODUÇÃO

O ensino de conceitos abstratos em matemática apresenta desafios peculiares, pois muitos estudantes têm dificuldades em visualizar e compreender definições e propriedades que não possuem uma representação física direta. No entanto, para muitos estudantes, a compreensão desses conceitos pode ser desafiadora devido à sua natureza puramente teórica (Bianchini; Lima, 2021; Ferreira; Onuchic, 2023). Especificamente, a Álgebra Abstrata é uma área da matemática que estuda estruturas algébricas como grupos, anéis e corpos, utilizando métodos e conceitos a partir de generalizações, para investigar propriedades e relações entre elementos dessas estruturas. Neste campo, Franco (2011, p. 31) aponta que “em Álgebra, conceitos como anéis e grupos tendem a ser complexos para os estudantes, haja vista a necessidade de abstração e representação exigidas para a compreensão dessas estruturas matemáticas”.

Embora seja um campo no qual muitas dificuldades são encontradas, ainda há poucas pesquisas sobre Álgebra Abstrata direcionadas para o seu ensino e formação do professor de matemática durante a licenciatura. Alguns autores apontam dificuldades dos estudantes de licenciatura em matemática nesta área, como Elias, Ribeiro e Savioli (2018), Monteiro, Moura e Fonseca (2019), Bianchini e Lima (2021), Ferreira e Onuchic (2023), Dias e Noguti (2023).

No tocante ao trabalho com a visualização em Álgebra Abstrata, temos algumas pesquisas em âmbito internacional como Fahd e Bhatti (2018), Reimann (2018), Zaskis, Dubinsky e Dautermann (1996), Carter (2009), Larsen (2009), que reforçam a importância do componente visual para a compreensão de certas estruturas algébricas. E no que diz respeito às pesquisas no Brasil, temos os trabalhos de Alves e Araújo (2014), Monteiro, Moura e Fonseca (2023), Sousa, Alves e Aires (2024), Sousa, Mangueira e Alves (2024) e Sousa *et al.* (2024). A visualização de grupos finitos, em particular, é uma área de pesquisa que, embora não tão amplamente explorada como outras áreas da matemática, tem recebido atenção crescente nos últimos anos.

A visualização desempenha um papel crucial no processo de aprendizagem, fornecendo aos estudantes uma maneira concreta e tangível de explorar e entender conceitos abstratos (Carter, 2009). Desta forma, entende-se que explorar o componente visual pode permitir aos estudantes ver padrões, construir conexões e elaborar raciocínios intuitivos sobre conceitos matemáticos, o que pode levar a uma compreensão mais clara do tema e de suas aplicações.

Assim, tendo em conta o panorama atual das pesquisas e a pertinência do tema partimos da questão de investigação: *Como a visualização em Álgebra Abstrata pode influenciar o ensino de estruturas algébricas específicas, como os grupos finitos, durante a formação inicial de professores de Matemática?* Para dar resposta a esta questão levamos a cabo um estudo tendo como objetivo investigar de que forma o uso de abordagens visuais pode contribuir para o ensino e compreensão de estruturas algébricas, especialmente grupos finitos, no contexto da formação inicial de professores de matemática.

Como metodologia de investigação, adotamos a pesquisa bibliográfica, que consistiu em uma revisão de literatura acerca da temática. Buscamos em bases de dados verificar a existência e analisar os trabalhos que envolvem a tríade visualização, Álgebra Abstrata e grupos finitos, no intuito de compreender o cenário de pesquisas nesta área e as possibilidades de abordagem do tema direcionadas às licenciaturas e à formação do professor de matemática.

Na seção seguinte, apresenta-se uma breve discussão sobre a visualização de estruturas algébricas, com foco nos grupos finitos, como forma de contextualizar o tema, visando uma melhor compreensão dos leitores.

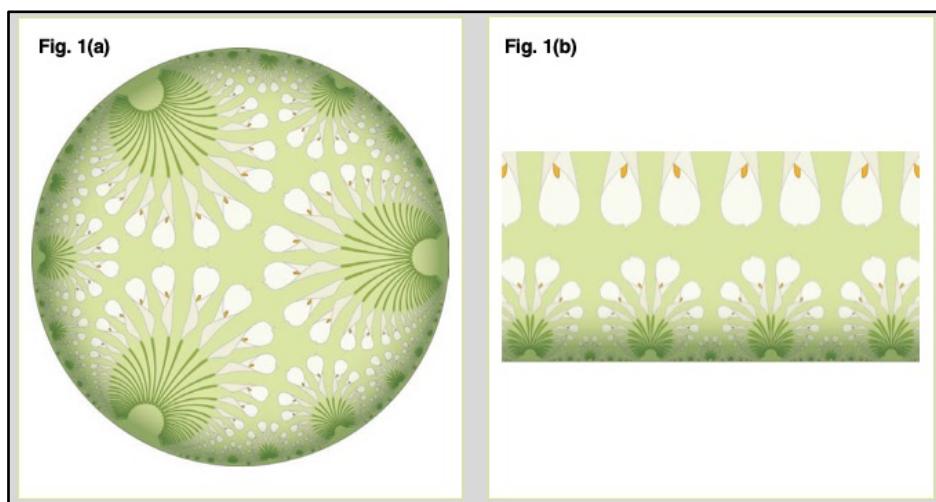
2 A VISUALIZAÇÃO DE ESTRUTURAS ABSTRATAS: UM BREVE QUADRO TEÓRICO

Dentre as obras clássicas que abordam o estudo da Álgebra Abstrata, algumas são referência para a discussão específica do componente visual em Teoria dos Grupos. Podemos elencar alguns clássicos, como os livros *The Symmetry of things*¹ (Conway; Burgiel; Goodman-Strauss, 2008), *Visual Group Theory*² (Carter, 2009) e *Groups as graphs*³ (Kandasamy; Smarandache, 2009), *Number, Shape, and Symmetry - An Introduction to Number Theory, Geometry, and Group Theory*⁴ (Herrmann; Sally Jr., 2013) que preconizam abordagens visuais de estruturas algébricas de grupos e propriedades relacionadas. Discutimos brevemente estas obras e exemplificamos alguns casos nos parágrafos que se seguem.

No primeiro livro mencionado, Conway, Burgiel e Goodman-Strauss (2008) exploram a onipresença e a diversidade da simetria em várias formas, desde papéis de parede e formatos de móveis até o corpo humano. A obra oferece uma descrição detalhada dos diferentes tipos de simetria e apresenta uma lista abrangente de todas as simetrias possíveis em diversas geometrias. Além de classificar e enumerar essas simetrias, também serve como uma espécie de guia para o trabalho matemático envolvido nesses processos.

Escolhemos um desses modelos para exemplificar a possibilidade de abordagem visual. Os signatures⁵ para grupos que são quase compactos, mas não compactos, têm pelo menos um dígito igual a ∞ . Na Figura 1(a) e 1(b) temos dois exemplos bem conhecidos: $\infty 32$ e $* \infty 32$. Esses dois exemplos correspondem a grupos chamados de grupo modular $SL_2(\mathbb{Z})$ e grupo modular estendido $GL_2(\mathbb{Z})$, respectivamente.

Figura 1: Um padrão com variedade orbital não compacta e assinatura $\infty 32$, isomorfo a $SL_2(\mathbb{Z})$ (a) e um padrão com assinatura $* \infty 32$, isomorfo a $GL_2(\mathbb{Z})$.



Fonte: Conway, Burgiel e Goodman-Strauss (2008, p. 234).

Para compreender melhor, podemos imaginar essas figuras como representações geométricas de simetrias que seguem regras matemáticas. A Figura 1(a) representa uma simetria circular que, matematicamente, está relacionada com rotações e reflexões em torno de pontos centrais. Isso corresponde ao grupo modular $SL_2(\mathbb{Z})$, que é uma estrutura algébrica usada para entender certas simetrias na Geometria. Já a Figura 1(b) mostra um padrão repetido em linha reta, o que se refere ao grupo estendido $GL_2(\mathbb{Z})$, que descreve simetrias em um arranjo especial chamado “empacotamento de círculos de Ford”.

Essas simetrias são descritas de forma algébrica e visual ao mesmo tempo, permitindo que vejamos como elementos do grupo se conectam entre si para criar esses padrões. A presença do símbolo ∞ na assinatura indica que essas simetrias se estendem ao infinito, ou seja, os padrões

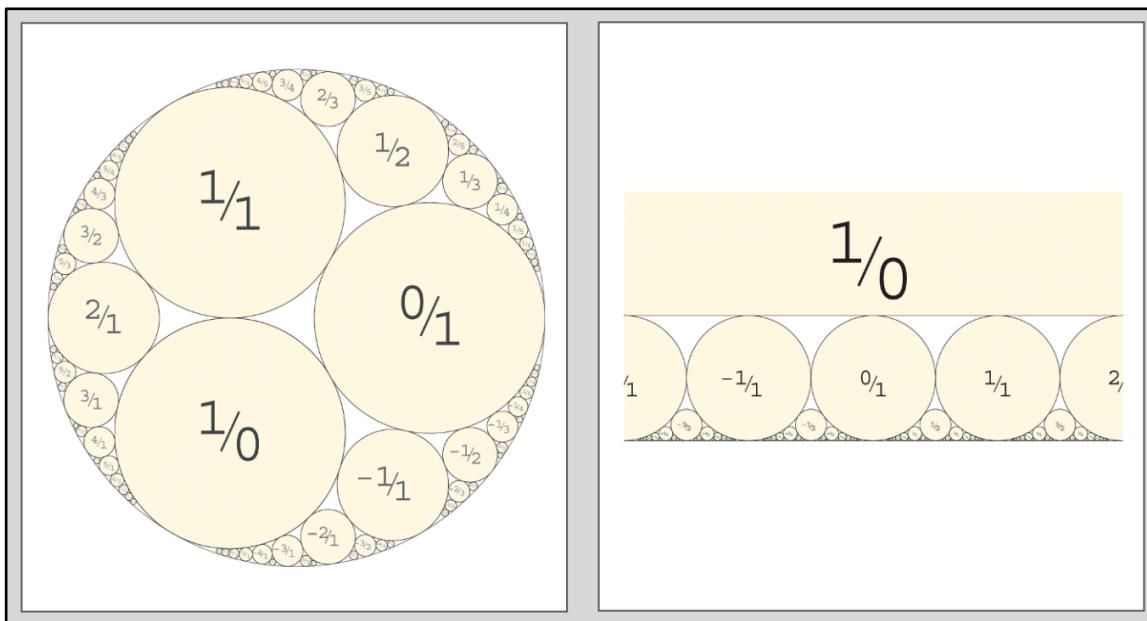
continuam indefinidamente, o que chamamos de “não compactos”. Em termos mais simples, na Figura 1(a) mostra um padrão circular com simetrias que se repetem ao redor de um centro, enquanto na Figura 1(b) exibe um padrão em linha reta que também se repete, mas de forma contínua. Essas figuras são representações visuais de como esses grupos matemáticos funcionam, relacionando Álgebra e Geometria de forma interativa e intuitiva.

O grupo modular $SL_2(\mathbb{Z})$, por exemplo, refere-se a um conjunto de matrizes 2×2 com coeficientes inteiros e determinante igual a 1, sendo uma estrutura algébrica importante na Geometria Hiperbólica e na Teoria dos Números. Geometricamente, $GL_2(\mathbb{Z})$ é o grupo de simetria de um arranjo chamado “empacotamento de círculos de Ford” (Figura 2) no modelo de meio-plano superior. Em uma linguagem mais simples, podemos escrever que:

- *Signatures com ∞* : Quando vemos uma assinatura com ∞ (por exemplo, $\infty 32$), isso indica que o grupo não é compacto, mas quase compacto.
- *Grupos Modulares*: $\infty 32$ é semelhante ao grupo $SL_2(\mathbb{Z})$ e $* \infty 32$ é semelhante ao grupo $GL_2(\mathbb{Z})$.

Simetria de Círculos de Ford: $GL_2(\mathbb{Z})$ descreve as simetrias de uma formação especial de círculos (círculos de Ford) no plano superior. Esses círculos têm raio infinito e, no contexto do plano hiperbólico, são chamados *horociclos*.

Figura 2: Os círculos Ford também possuem grupo de simetria $GL_2(\mathbb{Z})$.



Fonte: Conway, Burgiel e Goodman-Strauss (2008, p. 234).

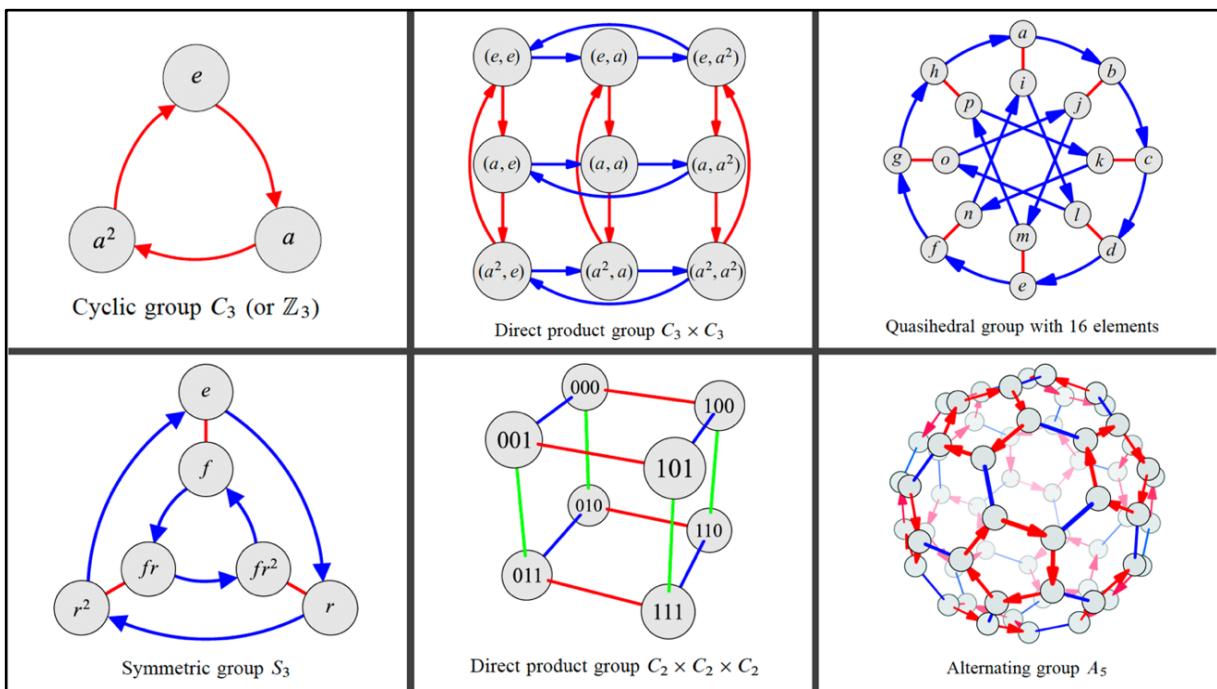
De modo abreviado, estamos falando sobre grupos matemáticos que têm certas características especiais e como esses grupos se relacionam com formas geométricas específicas. Para um maior aprofundamento, recomenda-se a leitura da obra de Conway, Burgiel e Goodman-Strauss (2008), bem como a observação de outros exemplos da obra.

Já na obra de Carter (2009), o autor introduz a Teoria dos Grupos a partir de um enfoque visual e intuitivo, utilizando diagramas e representações gráficas para tornar os conceitos abstratos mais acessíveis e compreensíveis, sendo um livro destinado tanto a estudantes quanto a professores de matemática. A abordagem do autor é projetada para ser intuitiva, especialmente para aqueles que podem se sentir intimidados pela abstração da Teoria dos Grupos. O uso de visualizações e exemplos concretos torna o material mais tangível e menos abstrato, realizando

conexões frequentes entre a Teoria dos Grupos e outras áreas da Matemática, bem como aplicações práticas em Física, Química e Ciência da Computação.

Carter (2009) escreveu um *software* chamado *Group Explorer*¹, que ajuda a visualizar conceitos de Teoria dos Grupos por meio de diagramas e outras ilustrações. O *Group Explorer* é uma ferramenta interativa que complementa o livro *Visual Group Theory*, oferecendo uma lista de diferentes grupos e informações detalhadas sobre cada um, incluindo pelo menos um diagrama de Cayley para cada grupo, entre outras técnicas de visualização. Exemplificamos essa abordagem na Figura 3.

Figura 3: Diagramas de Cayley de alguns pequenos grupos finitos.



Fonte: Adaptado de Carter (2009, p. 22).

Os diagramas de Cayley são uma forma de representar visualmente os grupos, e o autor explica que o *Group Explorer* cria esses diagramas usando um algoritmo que segue as regras do grupo, desenhando setas para mostrar como os elementos do grupo se conectam entre si (Carter, 2009). Depois de identificar todas as conexões, o *software* proporciona um itinerário alternativo de interação com o objeto matemático. A sensação intuitiva de maior (ou menor) compreensão depende do sujeito que percebe o objeto. Mas, primordialmente, os elementos são organizados de uma maneira que seja de simples compreensão e, ao longo do livro, o autor mostra como essa técnica pode ser aplicada em vários contextos, usando-a amplamente dentro do estudo da Teoria dos Grupos.

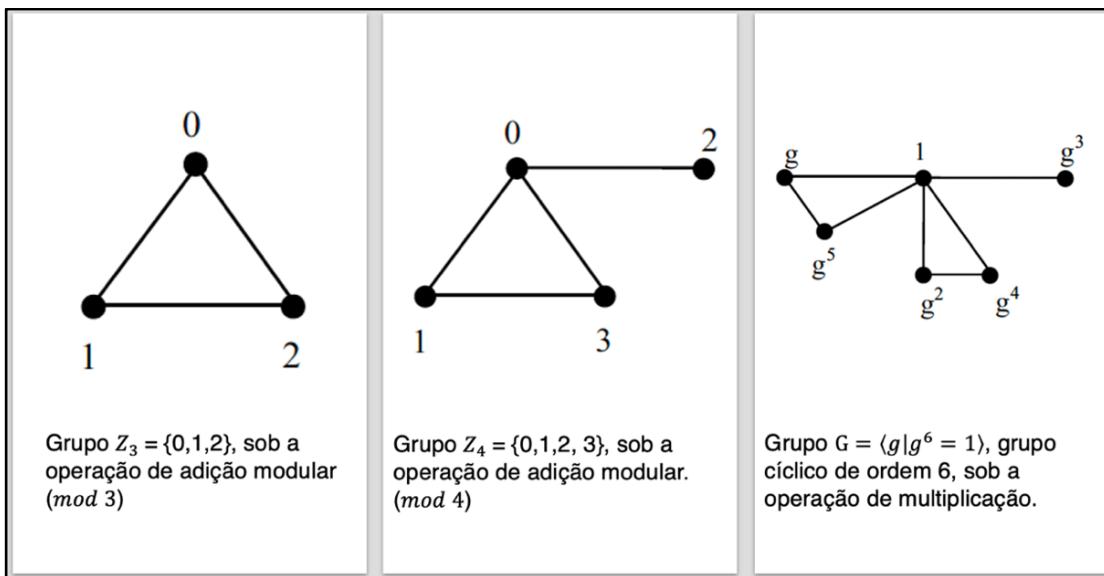
Na obra de Kandasamy e Smarandache (2009), os autores exploram a relação entre a Teoria dos Grupos e a Teoria dos Grafos, em que são estabelecidos os fundamentos necessários para compreender a intersecção entre esses dois campos de estudo. Os autores discutem como os elementos e operações de um grupo podem ser visualmente representados em um grafo, e como essa representação pode proporcionar percepções sobre a estrutura do grupo, como exemplificado na Figura 4.

Ademais, o livro investiga as propriedades algébricas e topológicas dos grafos que representam grupos, incluindo questões como conectividade, ciclos hamiltonianos e eulerianos, entre outros, além de suas possíveis aplicações práticas, que vão desde problemas de coloração

¹ Este *software* é gratuito e você pode baixá-lo em groupexplorer.sourceforge.net.

de grafos até análise de redes, demonstrando como conceitos de grupos podem ser úteis na resolução de problemas em Teoria dos Grafos e vice-versa.

Figura 4: Exemplos de grupos representados como estruturas de grafos.

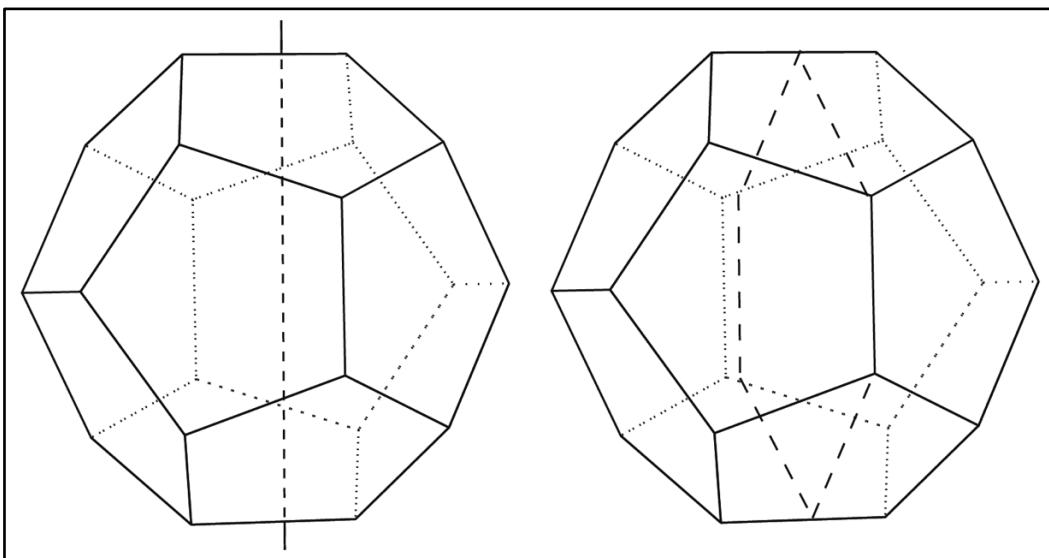


Fonte: Adaptado de Kandasamy e Smarandache (2009, p. 18).

Por fim, a última obra clássica elencada, dos autores Herrmann e Sally Jr. (2013), introduz de forma acessível alguns dos temas centrais da matemática, nomeadamente a Teoria dos Números, a Geometria e a Teoria dos Grupos, sendo destinado a estudantes de matemática de nível intermediário, bem como a qualquer pessoa interessada em compreender as ideias fundamentais dessas áreas da matemática, com o objetivo de fornecer uma introdução clara, enfatizando a conexão entre números, formas e simetrias.

A seção sobre Teoria dos Grupos, em especial, introduz os conceitos básicos de simetria e grupos, incluindo exemplos concretos como grupos de simetria de figuras geométricas. Um desses exemplos está ilustrado na Figura 5.

Figura 5: Eixo de rotação para o dodecaedro (arestas) (à esquerda) e um plano de reflexão para o dodecaedro (à direita).



Fonte: Herrmann e Sally Jr. (2013, p. 276).

Os autores mostram como a Teoria dos Grupos pode ser usada para entender simetrias em Geometria e como propriedades de números influenciam essas simetrias. No exemplo da Figura 5,

Herrmann e Sally Jr. (2013) descrevem como encontrar todas as simetrias de um dodecaedro, que é um poliedro de 12 faces pentagonais. Especificamente, eles consideram as rotações e reflexões que deixam o dodecaedro inalterado, esclarecendo o processo de identificar todas as simetrias deste poliedro, incluindo tanto rotações quanto reflexões.

Os autores mostram que há 60 rotações e 60 reflexões, totalizando 120 simetrias diferentes. Isso ajuda a compreender a estrutura simétrica do dodecaedro e como ele pode ser manipulado sem alterar sua aparência geral. No caso, as simetrias do dodecaedro formam um grupo porque elas podem ser combinadas de acordo com as propriedades básicas de existência de um grupo em Teoria dos Grupos (associatividade, elemento neutro, elemento inverso), tornando possível estudar e entender suas propriedades de maneira sistemática e organizada (Herrmann; Sally Jr., 2013).

A relação entre a Teoria dos Grupos e a visualização de suas estruturas é essencial para a compreensão de conceitos matemáticos abstratos e complexos de maneira mais intuitiva e clara. A visualização ajuda a identificar propriedades importantes dos grupos, como subgrupos, ciclos e simetrias, que podem ser difíceis de detectar apenas com notações algébricas. Segundo Carter (2009), padrões que são complexos em notações puramente algébricas se tornam mais evidentes quando representados visualmente, permitindo uma compreensão mais detalhada.

Para cada categoria de grupo e algumas classes de grupos é possível esquematizar visualmente de forma simples a sua estrutura algébrica, seja de forma manual ou com uso de tecnologias. Entretanto, alguns casos mais complexos podem demandar uso de softwares de computação algébrica, como o *CAS Maple*, ou mesmo o *GeoGebra*, dada a sua complexidade. Dito isto, com os recursos tecnológicos é possível construir a visualização destas entidades abstratas, enriquecendo a discussão e viabilizando o processo de ensino e assimilação do tema.

3 METODOLOGIA

Este trabalho é baseado em uma abordagem de pesquisa bibliográfica, consistindo em uma revisão de literatura. A pesquisa bibliográfica envolve a análise e interpretação de fontes secundárias, como livros, artigos científicos, dissertações e teses, com o objetivo de desenvolver uma compreensão mais profunda do tema em questão (Flick, 2015).

A revisão bibliográfica, desempenha dois propósitos fundamentais: em um primeiro plano, proporciona uma contextualização do problema em estudo, oferecendo um panorama do conhecimento existente sobre o tema; e em segundo, analisa as possibilidades e perspectivas apresentadas na literatura consultada, auxiliando na construção do referencial teórico que embasará a pesquisa (Alves-Mazzotti, 2002; Berland; Piot; Stolowy, 2013).

A seleção de trabalhos focou em pesquisas que abordam a visualização de grupos finitos, como proposto no objetivo da pesquisa. No entanto, alguns estudos sobre Álgebra Abstrata em geral foram incluídos para contextualizar o campo e as dificuldades relacionadas com o ensino de estruturas algébricas.

Os dados foram coletados por meio de consulta ao Portal de Periódicos da CAPES e Google Acadêmico. Utilizamos uma combinação de termos de busca relacionados aos descritores visualização, álgebra abstrata, estruturas algébricas, formação de professores e tecnologias, para identificar estudos relevantes publicados em periódicos acadêmicos, livros e conferências nos últimos dez anos. Ressalta-se que as bases e dados *Web of Science* (WOS) e *SciELO* também foram consultadas, mas não forneceram resultados para as buscas dentro dos critérios estabelecidos.

Os critérios de inclusão para seleção dos estudos foram: (1) estudos que exploram a visualização em Álgebra Abstrata; (2) estudos que exploram a visualização de estruturas algébricas de grupos finitos em Álgebra Abstrata; (3) estudos publicados em Língua Portuguesa ou Inglesa, (4) estudos direcionados para o ensino de Álgebra Abstrata em licenciaturas em Matemática, (5) pesquisas sobre o tema com acesso aberto ao seu conteúdo, (6) Estudos realizados dentro do interstício de setembro de 2014 a setembro de 2024. Foram excluídos os estudos que não atendiam a esses critérios. As combinações de termos utilizadas, bem como o número de trabalhos encontrados são apresentados, respectivamente, no Quadro 1:

Quadro 1: Descritores de busca e quantitativo de trabalhos encontrados.

Par de descritores	Portal de Periódicos da CAPES	Google Acadêmico
Visualização e Álgebra Abstrata	1	2
Visualização e Estruturas Algébricas	1	2
Visualização e Grupos Finitos	1	0
Tecnologia e Estruturas Algébricas	1	1
Tecnologia e Álgebra Abstrata	0	3
Tecnologia e Grupos Finitos	2	0
Estruturas Algébricas e Formação de Professores	4	3
Álgebra Abstrata e Formação de Professores	1	1
Grupos Finitos e Formação de Professores	1	0
Total de trabalhos	12	12

Fonte: Elaborado pelos autores (2024).

Inicialmente, os títulos e resumos dos estudos identificados foram revisados para determinar a relevância do conteúdo para os objetivos deste trabalho. Em seguida, os textos completos dos estudos foram analisados em detalhes para extrair informações relevantes sobre: o uso da visualização em Álgebra Abstrata; abordagens com uso de tecnologias ou outro tipo de recurso visual; desafios e potenciais aplicações no contexto da formação de licenciandos em Matemática, bem como suas possíveis contribuições; se há alguma similaridade com o que se propõe na referida pesquisa de doutorado em andamento.

Os materiais encontrados nas bases de dados foram cruzados e os trabalhos que se repetiam em ambas foram descartados. Após esta verificação, organizamos um quadro-síntese (Quadro 2) com os trabalhos catalogados a partir da busca desses descritores.

Dentre o total de trabalhos encontrados, excluindo-se os estudos que se repetiam em ambas as bases de dados, analisamos os estudos elencados no Quadro 2, a partir de uma revisão de literatura, contando com um total de dez (10) pesquisas. Essa análise encontra-se na próxima seção.

Quadro 2: Descrição dos trabalhos encontrados e analisados.

Título do trabalho	Autor/ano	Disponível em
Álgebra nos anos iniciais do ensino fundamental: primeiras reflexões à luz de uma revisão de literatura	Ferreira, Ribeiro e Ribeiro (2016)	https://ojs.ufgd.edu.br/index.php/educacao/article/view/5785
O envolvimento discente em um ambiente virtual de aprendizagem: Análise realizada no curso de licenciatura em Matemática.	Fonseca e Araújo Júnior (2018)	https://doi.org/10.26843/ren.cima.v9i5.1938
Learning and Teaching of Group Theory through visualization using Graphs	Fahd e Bhatti (2018)	https://atcm.mathandtech.org/EP2018/contributed/4382018_21615.pdf
Grupos Diedrais: uma proposta concreta para uma apresentação inicial da Álgebra Abstrata para licenciandos em Matemática.	Monteiro, Moura e Fonseca (2019)	https://doi.org/10.5752/P.2674-9416.2019v2n2p56-85
A Álgebra e seu papel: reflexões a partir das produções do GT 04 da SBEM	Bianchini e Lima (2021)	https://doi.org/10.1590/1980-4415v35n70a19
A importância da Álgebra Abstrata para a formação inicial de professores de Matemática	Ferreira e Onuchic (2023)	https://doi.org/10.51359/2177-9309.2023.252646
Considerações sobre a Álgebra Acadêmica e a Álgebra Escolar: um estudo em cursos de Matemática Licenciatura	Dias e Noguti (2023)	https://doi.org/10.46551/ed.v7n13a06
O GeoGebra no ensino de Álgebra Abstrata: uma abordagem dos grupos diedrais via Engenharia Didática	Sousa, Alves e Aires (2024)	https://doi.org/10.1590/1516-731320240030
A relação entre os grupos dos quaternions e o grupo de Lie SU(2): uma perspectiva a partir da visualização via software GeoGebra	Sousa, Mangueira e Alves (2024)	https://doi.org/10.5281/zenodo.13119208
Articulação entre Sequências Recursivas e teoria dos Grupos Finitos: o caso da Sequência de Padovan	Sousa <i>et al.</i> (2024)	https://doi.org/10.33871/rpm.2024.13.31.9228

Fonte: Elaborado pelos autores (2024).

4 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS ESTUDOS ENCONTRADOS

Nesta seção apresentamos uma breve análise e discussão dos trabalhos encontrados e selecionados, buscando uma correlação entre os estudos que tem sido desenvolvidos em Álgebra Abstrata, a formação do professor de matemática e o campo da visualização.

O trabalho de Ferreira, Ribeiro e Ribeiro (2016) é um artigo de natureza teórica e aborda o conceito de Álgebra nos anos iniciais do Ensino Fundamental, tanto à luz da literatura nacional e internacional quanto dos documentos curriculares nacionais. A relevância desse debate surgiu a partir da crescente inclusão da Álgebra como um tema matemático essencial ao lado de outros eixos tradicionais, como Números e Operações, Geometria, Grandezas e Medidas, Estatística e Probabilidade. Explora-se a distinção entre Aritmética e Álgebra, assim como as diversas concepções de pensamento algébrico, visando conectar essas áreas, buscando contribuir para a formação do professor de matemática.

A revisão e análise da literatura destacaram a existência de pesquisas que evidenciam a capacidade dos alunos desde cedo para pensar de forma algébrica, mesmo sem possuírem um conhecimento formal de Álgebra. Além disso, há uma preocupação em promover um ensino que permita aos alunos atribuir maior significado à sua aprendizagem em ambas as áreas, aritmética e algébrica, contribuindo para a atuação profissional do professor. Contudo, ressalta-se que é um trabalho que contextualiza o ensino da Álgebra, mas não que preconiza o componente visual.

Fonseca e Araújo Júnior (2018) apresentaram uma pesquisa com o objetivo de analisar o envolvimento dos alunos em um ambiente virtual de aprendizagem, focalizando duas disciplinas de Licenciatura em Matemática à distância. Foram coletados dados de 423 alunos a frequentar a disciplina de Cálculo Integral e 368 a frequentar a disciplina de Estruturas Algébricas, durante o primeiro semestre de 2018. Os resultados mostraram que a maioria dos acessos ocorreu entre segunda e quinta-feira, das 10h às 23h. Cerca de 78% das visualizações foram para os materiais didáticos, indicando muita interação dos alunos com esses recursos. Esse padrão pode ser atribuído à natureza das disciplinas, que envolvem atividades práticas e cálculos intensivos, não exigindo acesso constante ao ambiente virtual fora dos horários de estudo mais concentrados.

Fahd e Bhatti (2018) argumentam em seu artigo que a Teoria dos Grupos é, de fato, reconhecida como uma disciplina desafiadora no currículo de graduação, sendo tal dificuldade percebida não apenas pelos estudantes, mas também pelos professores, devido à sua natureza abstrata. Ainda de acordo com os autores, os tópicos centrais do estudo de grupos em Álgebra Abstrata são frequentemente baseados na demonstração de teoremas, sem o auxílio de representações visuais. “Essa falta de visualização pode limitar a compreensão dos alunos sobre os fundamentos da teoria de grupos” (Fahd; Bhatti, 2018, p. 1).

O trabalho de Fahd e Bhatti (2018) aborda um modelo que oferece visualização por meio de grafos rotulados direcionados, visando facilitar tanto o ensino por parte dos professores quanto a aprendizagem por parte dos alunos. Adicionalmente, os autores explicam como diferentes axiomas de grupo, como a propriedade de fechamento, o elemento de identidade e o inverso, podem ser visualizados utilizando a representação de grafos.

Monteiro, Moura e Fonseca (2019) apresentaram uma sugestão para o ensino e aprendizagem de tópicos específicos referentes à Teoria dos Grupos nos cursos de Licenciatura em Matemática. A problemática de pesquisa consistiu, inicialmente, no fato de que o tópico Grupos é considerado um assunto central a ser estudado nos cursos de Licenciatura em Matemática em quase todas as universidades. Por outro lado, os estudantes têm sérias dificuldades cognitivas e afetivas com Álgebra Abstrata, ou seja, eles têm dificuldades em se tornarem habilidosos no tema e, mesmo entre os que obtêm sucesso, muitos não conseguem ver o objetivo em estudar tal assunto.

Os autores buscaram abordar uma pequena parte dessa problemática do ensino e aprendizagem da Álgebra Abstrata, com base na experiência acumulada por anos de pesquisa e desenvolvimento na apresentação do assunto *Teoria de Grupos* para os alunos da Licenciatura em Matemática da Universidade do Estado do Pará (UEPA). Ao considerar as rotações e translações de movimentos rígidos nos polígonos regulares, em particular no triângulo equilátero e no quadrado, para deduzir os conceitos iniciais de grupos, os autores almejaram fornecer um recurso útil e animado para professores da disciplina Álgebra Abstrata, bem como aos licenciandos.

Bianchini e Lima (2021) apresentaram uma análise interpretativa de cinco pesquisas sobre Álgebra, realizadas pelo Grupo de Trabalho Educação Matemática no Ensino Superior (GT04) da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM). A análise foi feita com base na Análise de Conteúdo de Bardin, focando em duas categorias: “O que é Álgebra?” e “O papel da Álgebra”. Os resultados destacaram a abordagem histórica, estrutural e de generalização da Álgebra, além de seu papel na construção do conhecimento matemático dos estudantes e na preocupação com a formação dos professores neste campo do conhecimento.

O estudo de Ferreira e Onuchic (2023) investigou a relevância da disciplina comumente chamada de Álgebra Abstrata, Estruturas Algébricas ou Álgebra Moderna, obrigatória para a formação de professores de Matemática. Esta disciplina é frequentemente questionada devido aos seus conteúdos, como Grupos, Anéis e Corpos, que aparentemente não têm aplicação direta na prática dos professores da Educação Básica. Os autores realizaram uma Intervenção Pedagógica em uma turma de Licenciatura em Matemática em uma instituição pública de ensino superior. Nessa intervenção, diversos tipos de conhecimentos necessários para a formação do professor de Matemática foram considerados.

A análise qualitativa dos resultados de Ferreira e Onuchic (2023) revelou que, quando ministrada de forma apropriada, com foco na formação do professor de Matemática, esta disciplina pode promover benefícios para os alunos. Dentre estes, os autores apontam uma sólida formação matemática, o desenvolvimento da capacidade argumentativa, melhor compreensão de simbologias e terminologias matemáticas, além de promover o desenvolvimento cognitivo, como a capacidade de entender demonstrações formais e a mudança de atitude em relação à justificativa de afirmações. Também foi observado o desenvolvimento da capacidade de identificar padrões e fazer generalizações, entre outros aspectos.

O artigo de Dias e Noguti (2023) realizou um estudo bibliográfico para investigar as semelhanças e diferenças entre a Álgebra Acadêmica e a Álgebra Escolar nos Projetos Pedagógicos dos Cursos de Licenciatura em Matemática nas Universidades Federais do Rio Grande do Sul. O estudo abrangeu cursos de formação de professores de Matemática em seis universidades. Os resultados apontaram que das 34 disciplinas obrigatórias identificadas relacionadas à Álgebra Acadêmica identificadas, em 31 delas o foco está no estudo e domínio de conceitos específicos ligados à Matemática Acadêmica. Nas outras três disciplinas, há evidências de conexões entre os conceitos estudados e o ensino da Educação Básica. Globalmente, há uma discussão maior de aspectos relacionados à Álgebra Escolar nas disciplinas de Álgebra Acadêmica nos cursos de Licenciatura em Matemática. Embora essa mudança não seja uniforme em todos os cursos, representa um passo significativo no tratamento da Álgebra para a formação de professores.

Dentre os trabalhos analisados, observamos que todos apresentam uma preocupação na forma como a Álgebra é discutida e seus impactos na formação e na atuação profissional do professor de matemática. Entretanto, destacamos cinco deles, em que é dada uma atenção ao estudo específico da Álgebra Abstrata (ou Estruturas Algébricas) e de seus impactos na formação

inicial do professor, que são Fahd e Bhatti (2018) Monteiro, Moura e Fonseca (2019), Bianchini e Lima (2021), Ferreira e Onuchic (2023), Dias e Noguti (2023).

Ao analisar a literatura de forma detalhada, identificamos que apenas cinco estudos exploram uma perspectiva visual da teoria dos grupos no campo da Álgebra Abstrata: Fahd e Bhatti (2018), Monteiro, Moura e Fonseca (2019), Sousa, Alves e Aires (2024), Sousa, Mangueira e Alves (2024) e Sousa *et al.* (2025). Destes, os três últimos são de nossa autoria e apresentam maior proximidade com a proposta desta pesquisa de doutorado. Em contrapartida, os trabalhos de Fahd e Bhatti (2018) e Monteiro, Moura e Fonseca (2019) restringem-se a casos particulares de grupos e não incorporam o uso de tecnologias. Já os estudos de Sousa, Alves e Aires (2024), Sousa, Mangueira e Alves (2024) e Sousa *et al.* (2025) adotam uma abordagem visual do tema por meio do software GeoGebra, configurando-se como pesquisas promissoras, embora ainda pouco exploradas na literatura.

O estudo de Sousa, Alves e Aires (2024) propõe uma abordagem inovadora para o ensino de grupos diedrais finitos, utilizando o software GeoGebra como ferramenta visual para facilitar a compreensão de suas propriedades algébricas. Os grupos diedrais, que capturam as simetrias de polígonos regulares por meio de rotações e reflexões, são práticas difíceis de ensinar devido à sua abstração. Através da metodologia da Engenharia Didática e da Teoria das Situações Didáticas, o estudo delineia uma sessão de ensino estruturada em etapas que permitem aos alunos interagir de maneira dinâmica com as simetrias dos polígonos no GeoGebra. Essa abordagem auxilia na visualização das simetrias, tornando mais intuitiva a compreensão das propriedades fundamentais dos grupos, como a associatividade, a existência de inversos e a estrutura do grupo em si. O estudo conclui que o uso de ferramentas visuais, como o GeoGebra, pode melhorar a motivação e a compreensão dos licenciados ao abordar tópicos de Álgebra Abstrata, tornando conceitos complexos mais acessíveis para o ensino do tema.

Já o trabalho de Sousa, Mangueira e Alves (2024) explora a relação entre os quatérnios e o grupo de Lie $SU(2)$ a partir de uma abordagem visual utilizando o software GeoGebra. Os quaternions, uma extensão dos números complexos, são representados em quatro dimensões e frequentemente usados para modelar rotações no espaço tridimensional. O estudo destaca que, dada a complexidade de sua estrutura, o uso de uma ferramenta visual como o GeoGebra facilita a compreensão das propriedades dos quaternions e sua relação com grupos algébricos, especialmente na formação de licenciandos em matemática. A visualização no campo 3D torna mais acessível a compreensão de conceitos abstratos, promovendo uma aprendizagem mais intuitiva e concreta das propriedades algébricas do grupo $SU(2)$.

Por fim, o artigo de Sousa *et al.* (2024) propõe uma abordagem inovadora ao explorar a relação entre a sequência de Padovan e a Teoria dos Grupos Finitos no contexto do ensino de matemática. Utilizando a Engenharia Didática em suas fases iniciais – análises preliminares e concepção e análise *a priori* –, em conjunto com a Teoria das Situações Didáticas, os autores investigam como padrões cílicos emergem quando a sequência de Padovan é analisada sob congruência modular. A pesquisa emprega o software GeoGebra para visualizar esses padrões, permitindo reescrever a sequência como finita e evidenciar suas propriedades algébricas. A partir dessa construção, são discutidas estratégias didáticas para integrar esses conceitos ao ensino de matemática, oferecendo atividades interativas e mediações pedagógicas voltadas para a compreensão das estruturas de grupos finitos. O estudo destaca a importância da abordagem visual e experimental para a aprendizagem de temas abstratos da álgebra, sugerindo um modelo inovador para cursos de Licenciatura em Matemática.

Com base no levantamento realizado, observamos que ainda não há pesquisas consolidadas com dados empíricos que relacionem a abordagem visual da Teoria dos Grupos com uso de tecnologias e, de modo particular, com o software GeoGebra. Em contrapartida, evidenciam-se as dificuldades dos professores e licenciandos na discussão sobre o ensino e a aprendizagem da Álgebra de modo geral, bem como propostas que apontam para uma abordagem visual como possibilidade de melhoria no processo de ensino.

No contexto da Álgebra Abstrata ou Estruturas Algébricas, a visualização pode desempenhar um papel relevante em sua compreensão, pois muitos dos conceitos estudados são generalizados e não têm uma interpretação física direta (Carter, 2009; Reimann, 2018; Fahd; Bhatti, 2018; Sousa; Alves; Aires, 2024). Face ao exposto, defendemos que o uso de materiais concretos e/ou softwares que possibilitem a visualização dinâmica como ferramenta didático-pedagógica podem ser uma alternativa para minimizar essas dificuldades, proporcionando aos alunos uma representação visual dos conceitos algébricos e facilitando a exploração e compreensão desses conceitos de forma mais interativa e dinâmica.

Com base nas leituras dos referenciais encontrados e em trabalhos como Fahd e Bhatti (2018), Reimann (2018), Zaskis, Dubinsky e Dautermann (1996), Carter (2009), Larsen (2009), Alves e Araújo (2014), Sousa, Alves e Aires (2024), Sousa, Alves e Mangueira (2024) e Sousa *et al.* (2024), podemos elencar alguns pontos em que a visualização pode contribuir para a compreensão de estruturas algébricas na disciplina de Álgebra Abstrata:

- a) *Estímulo ao raciocínio intuitivo e a compreensão:* A visualização permite aos estudantes desenvolverem uma intuição mais coerente sobre os conceitos abstratos. Ao observarem e analisarem representações visuais das estruturas algébricas, é possível compreender como essas estruturas funcionam e como os elementos interagem entre si.
- b) *Viabiliza a resolução de problemas:* A capacidade de visualizar problemas complexos ajuda os alunos a encontrar soluções de maneira mais eficiente. Ao representar graficamente equações, relações e operações, os alunos podem identificar padrões e relações que podem não ser imediatamente evidentes de uma forma puramente simbólica.
- c) *Conexão entre teoria e prática:* A visualização ajuda a estabelecer uma conexão coerente entre os conceitos abstratos da Álgebra e situações em que estes conceitos podem ser aplicados na realidade. Este fato tem potencial para tornar a aprendizagem mais significativa a partir de um contexto aplicável, pois os estudantes podem ver como as estruturas algébricas se relacionam com problemas do dia a dia e com outras disciplinas.
- d) *Comunicação e colaboração:* As representações visuais podem facilitar a comunicação entre estudantes e professores, permitindo uma compreensão mais clara e uma discussão mais eficaz dos conceitos, ao passo que o componente visual permite ao docente uma referência para explicar e esclarecer dúvidas sobre o emprego de definições e propriedades. Além disso, a visualização pode facilitar a colaboração entre os próprios estudantes, pois fornece um ponto de referência comum para discutir e resolver problemas.

Dito isso, defendemos que a visualização tem grande potencial para alavancar a compreensão teórica dos estudantes no estudo de estruturas algébricas, ajudando-os a desenvolver o raciocínio intuitivo e hipotético-dedutivo, resolver problemas, conectar teoria à prática, bem como comunicar-se efetivamente, além de viabilizar o planejamento didático-pedagógico do docente deste componente curricular.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A investigação realizada neste estudo permitiu uma análise sobre os potenciais contributos da visualização em Álgebra Abstrata, especialmente no contexto do ensino de estruturas algébricas específicas, como os grupos finitos, durante a formação de licenciandos em Matemática. A revisão de literatura revelou uma lacuna significativa no cenário de pesquisas relacionadas a essa tríade temática, destacando a escassez de estudos que exploram a visualização em Álgebra Abstrata com o uso de tecnologias.

Embora tenham sido identificadas, mesmo que em pequena escala, algumas pesquisas internacionais que enfatizam a importância do componente visual para a compreensão de estruturas algébricas, observou-se uma ausência de estudos nacionais que abordem esse tema de forma específica. Apenas uma pesquisa brasileira foi encontrada, e essa não utilizava tecnologia para visualização. Reconhecemos que esta pesquisa está sujeita a algumas limitações, como a disponibilidade e acessibilidade de estudos relevantes na literatura acadêmica. Além disso, devido à natureza da pesquisa bibliográfica, não foi possível incluir dados primários ou realizar análises empíricas.

Diante desse panorama, torna-se evidente a necessidade de ampliar o escopo de investigação nessa área, especialmente no contexto brasileiro. A visualização aliada a recursos visuais pode ser uma ferramenta promissora para facilitar a compreensão de definições e propriedades em Álgebra Abstrata, proporcionando aos estudantes uma abordagem mais intuitiva e dinâmica, o que pretendemos desenvolver no decorrer da tese de doutorado da qual este trabalho representa apenas uma pequena parte.

Softwares de visualização dinâmica como o GeoGebra, *Cabri-Géomètre* e *CAS Maple*, por exemplo, são ferramentas com potencial para promover a visualização de grupos finitos, permitindo que os estudantes, ao usarem-nas, explorem definições e propriedades de maneira visual e interativa. No entanto, são necessárias pesquisas adicionais para investigar o impacto do uso destas ferramentas para a construção de recursos direcionados ao ensino deste tópico da Álgebra Abstrata, no intuito de desenvolver estratégias eficazes de integração da visualização ao currículo desta disciplina.

Assim, pretende-se no decorrer da pesquisa de tese explorar de forma mais aprofundada as possibilidades de construção de recursos ou *applets* como ferramentas para a abordagem visual de grupos finitos em Álgebra no contexto da formação de professores de Matemática. Almeja-se que este estudo possa contribuir para o aprimoramento das práticas pedagógicas e para o desenvolvimento do pensamento algébrico dos estudantes, promovendo uma aprendizagem mais eficaz.

AGRADECIMENTOS

O segundo autor agradece o incentivo e a contribuição financeira do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) para o desenvolvimento desta pesquisa no Brasil. O terceiro autor agradece o financiamento fornecido por Fundos Nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia, I.P., no âmbito do projeto UIDB/00194/2020 (CIDTFF).

REFERÊNCIAS

- ALVES, F. R. V.; ARAÚJO, A. G. D. Ensino de Álgebra Abstrata com auxílio do software Maple: Grupos Simétricos. **Conexões - Ciência e Tecnologia**, v. 7, n. 3, p. 25-35, 2014. <https://doi.org/10.21439/conexoes.v7i3.613>
- ALVES-MAZZOTTI, A. J. A “revisão de literatura” em teses e dissertações: meus tipos inesquecíveis – o retorno. In: BIANCHETTI, L.; MACHADO, A. M. N. (Org.). **A bússola do escrever: desafios e estratégias na orientação de teses e dissertações**. São Paulo: Cortez, 2002. (p. 25-44).
- BERLAND, N.; PIOT, C.; STOLOWY, H. La revue de littérature: état de l'état de l'art. **Comptabilité – Contrôle – Audit**, v. 19, n. 3, 2013. Disponível em: <https://www.cairn.info/revue-comptabilite-controle-audit-2013-3-page-3.htm>.
- BIANCHINI, B. L.; LIMA, G. L. A Álgebra e seu papel: reflexões a partir das produções do GT 04 da SBEM. **Bolema**, v. 35, n. 70, p. 981-999, 2021. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v35n70a19>
- CARTER, N. C. **Visual Group Theory** Bentley University, 2009.
- CONWAY, J. H.; BURGIEL, H.; GOODMAN-STRAUSS, C. **The Symmetry of things**. Massachussets: AK Peters, 2008
- DIAS, G. S.; NOGUTI, F. C. H. Considerações sobre a Álgebra Acadêmica e a Álgebra Escolar: um estudo em cursos de Matemática Licenciatura. **Educação Matemática Debate**, v. 7, n. 13, p. 1-22, 2023. DOI: 10.46551/emed.v7n13a06.
- ELIAS, H. R.; RIBEIRO, A. J.; SAVIOLI, A. M. P. D. O ensino do corpo dos números racionais na Licenciatura em Matemática: explorando o processo de construção de um conjunto de tarefas. **Revista BOEM**, Florianópolis, v. 6, n. 11, p. 98–118, 2018.
- FAHD, K. M.; BHATTI, F. M. Learning and Teaching of Group Theory through Visualization using Graphs. **Asian Technology Conference in Mathematics**, 2018. https://atcm.mathandtech.org/EP2018/contributed/4382018_21615.pdf
- FERREIRA, N. C.; ONUCHIC, L. R. A importância da Álgebra Abstrata para a formação inicial de professores de Matemática. **Em Teia: Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, v. 14, n. 2, p. 1-21, 2023. <https://doi.org/10.51359/2177-9309.2023.252646>
- FERREIRA, M. C. N.; RIBEIRO, A. J.; RIBEIRO, C. M. Álgebra nos anos iniciais do ensino fundamental: primeiras reflexões à luz de uma revisão de literatura. **Educação e Fronteiras**, v. 6, n. 17, p. 34–47, 2016.
- FLICK, U. **Introdução à Pesquisa Qualitativa**. 3. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.
- FONSECA, E. S.; ARAÚJO JR., C. F. O envolvimento discente em um ambiente virtual de aprendizagem. Análise realizada no curso de licenciatura em Matemática. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, São Paulo, v. 9, n. 5, p. 189–204, 2018. <https://doi.org/10.26843/renccima.v9i5.1938>
- FRANCO, H. J. R. **Os diversos conflitos observados em alunos de licenciatura nun curso de Álgebra: identificação e análise**. 100 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática). Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, Minas Gerais, 2011.
- HERRMANN, D. L.; SALLY JR., P. J. **Number, Shape, and Symmetry: An introduction to Number Theory, Geometry, and Group Theory**. Florida: CRC Press, Taylor & Francis Group, 2013.
- KANDASAMY; SMARANDACHE. **Groups as graphs**. Romania: Editura CuArt, 2009.
- LARSEN, S. Reinventing the concepts of group and isomorphism: The case of Jessica and Sandra. **Journal of Mathematical Behavior**, v. 28, n. 2, p. 119–137, 2009. <http://dx.doi.org/10.1016/j.jmathb.2009.06.001>
- MONTEIRO, A. T. M.; MOURA, L. F. C. M.; FONSECA, R. V. Grupos Diedrais: uma proposta concreta para uma apresentação inicial da Álgebra Abstrata para licenciandos em Matemática. **Revista Matemática e Ciência: conhecimento, construção e criatividade**, v. 2, n. 2, p. 56-86, 2019. DOI: <https://doi.org/10.5752/P.2674-9416.2019v2n2p56-85>
- REIMANN, D. A. Visualizing Symmetry Subgroup Structures Using Simple Motifs. **Bridges 2018 Conference Proceedings**. (p. 363-366). <https://archive.bridgesmathart.org/2018/bridges2018-363.pdf>

SOUSA, R. T. de; ALVES, F. R. V.; AIRES, A. P. F. O GeoGebra no ensino de Álgebra Abstrata: uma abordagem dos grupos diedrais via Engenharia Didática. **Ciência & Educação (Bauru)**, v. 30, p. e24030, 2024. <https://doi.org/10.1590/1516-731320240030>

SOUSA, R. T. de; MANGUEIRA, M. C. dos S.; ALVES, F. R. V. A relação entre os grupos dos quaternions e o grupo de Lie $SU(2)$: uma perspectiva a partir da visualização via software GeoGebra. **Revista de Matemática da UFOP**, v. 2, jul./2024. <https://doi.org/10.5281/zenodo.13119208>

SOUSA, R. T. de; VIEIRA, R. P. M.; ALVES, F. R. V.; AIRES, A. P. F.; CATARINO, P. M. M. C. Articulação entre Sequências

Recursivas e teoria dos Grupos Finitos: o caso da Sequência de Padovan. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, Campo Mourão, v. 13, n. 31, p. 1-20, 2024. <https://doi.org/10.33871/rpem.2024.13.31.9228>

ZAZKIS, R; DUBINSKY, E.; DAUTERMANN, J. Coordinating visual and analytic strategies: a study of students' understanding of the Group D4. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 27, n. 4, p. 435-457, 1996. Disponível em: <https://www.jstor.org/stable/749876>

Submetido em setembro de 2024.
Aprovado em julho de 2025.

Renata Teófilo de Sousa

Doutoranda em Ensino (Renoen) e Mestra em Ensino de Ciências e Matemática pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE), Professora Efetiva da Secretaria de Educação do Estado do Ceará (SEDUC-CE), Sobral, Ceará, Brasil. ID Lattes: 7651441056518267. Orcid ID: 0000-0001-5507-2691.

Contato: rtsnaty@gmail.com

Francisco Régis Vieira Alves

Doutor em Educação pela Universidade Federal do Ceará (UFC), Docente Permanente do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE), Fortaleza, Ceará, Brasil. ID Lattes: 3288513376230522. Orcid ID: 0000-0003-3710-1561.

Contato: fregis@ifce.edu.br

Ana Paula Florêncio Aires

Doutora em Educação Matemática pela Universidade de Salamanca (USAL), Professora Associada da Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro (UTAD) e investigadora do Centro de Investigação Didática e Tecnologia na Formação de Formadores - CIDTFF (Universidade de Aveiro). Professora Associada da Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro (UTAD), Vila Real, Portugal. Orcid ID: 0000-0001-8138-3776.

Contato: aaires@utad.pt