

# Conhecimento Didático-Matemático de Licenciandos sobre Números Racionais:

uma análise epistêmica

## Didactic-Mathematical Knowledge of Students on Rational Numbers: an epistemic analysis

Patricia Pujol Goulart Carpes

Universidade Federal do Pampa (Unipampa)

Eleni Bisognin

Universidade Franciscana (UFN)

### RESUMO

Neste artigo são apresentados resultados parciais de uma pesquisa sobre os conhecimentos matemáticos necessários para o professor ensinar Matemática. Tendo como propósito analisar os conhecimentos didático-matemáticos de licenciandos, participantes da disciplina de Teoria Elementar dos Números, foi aplicado um teste para que os estudantes revelassem conhecimentos em relação aos números racionais e possíveis obstáculos para seu entendimento. Participaram desta pesquisa dez alunos de um curso de Matemática Licenciatura de uma universidade pública do interior do Rio Grande do Sul. Os dados foram obtidos por meio das respostas escritas dos alunos e das discussões em sala de aula e foram analisados de acordo com as categorias e descritores do Conhecimento Didático-Matemático (CDM), especificamente quanto à faceta epistêmica. Pode-se inferir, dos resultados dessa análise, que os alunos não mobilizam os diferentes significados e apresentam dificuldades para compreensão de conceitos relativos ao conjunto dos números racionais, que são necessários para o professor que ensina matemática.

**Palavras-chave:** Conhecimento matemático para o ensino. Números racionais. Formação inicial de professores.

### ABSTRACT

This article presents partial results of a research on the mathematical knowledge necessary for the teacher to teach Mathematics. With the purpose of analyzing the didactic-mathematical knowledge of undergraduates, participants in the discipline of Elementary Number Theory, a test was applied for students to reveal their knowledge in relation to rational numbers and the possible obstacles to their understanding. Ten students from a Mathematics Degree course from a public university in the interior of Rio Grande do Sul participated in this research. The data were obtained through the written responses of the students, the discussions in the classroom and were analyzed according to the categories and descriptors of Didactic-Mathematical Knowledge (CDM), specifically regarding the epistemic facet. It can be inferred from the results of this analysis that the students are unaware of the different meanings and have difficulties in understanding concepts related to the set of rational numbers that are necessary for the teacher who teaches mathematics.

**Keywords:** Mathematical knowledge for teaching. Rational numbers. Initial teacher training.

## 1 INTRODUÇÃO

O conjunto dos números racionais é um dos conteúdos que apresenta dificuldades para sua compreensão e isso repercute na prática do professor ao ensinar esse conceito na Educação Básica (Silva, 2007; Magina, Campos, 2008; Soares, 2016). Algumas das dificuldades que contribuem para a não compreensão são os diferentes significados que o número racional assume, e as estratégias que os professores utilizam na construção dos conceitos e na utilização de suas propriedades.

Nos cursos de licenciatura, uma das preocupações dos professores é propiciar situações de ensino aos licenciandos para que eles tenham oportunidades de construir o conhecimento matemático e buscar diferentes estratégias de ensino que facilitem a aprendizagem dos alunos quando forem atuar na Educação Básica. Tais situações têm despertado o interesse dos formadores em identificar quais conhecimentos didático-matemáticos os licenciandos necessitam para ensinar Matemática e como esses conhecimentos devem ser desenvolvidos durante a formação inicial.

Um dos pioneiros nessa área foi Shulman (1986). O autor destaca três categorias de conhecimentos necessários para ensinar: o conhecimento do conteúdo, o conhecimento pedagógico do conteúdo, e o conhecimento do currículo, sendo que o conhecimento que mais se relaciona com o ensino é o conhecimento pedagógico do conteúdo. O autor conceitua esse conhecimento como um conhecimento que é específico do professor para ensinar os tópicos de sua disciplina. É um amálgama entre conhecimentos pedagógicos e conhecimentos disciplinares, que é uma forma particular de o professor conhecer sua disciplina. Shulman (1987) acrescenta outras categorias, tais como: conhecimento pedagógico geral, conhecimento dos estudantes e suas características, conhecimento do contexto escolar, conhecimentos dos fins, propósitos e valores da educação, que complementam os conhecimentos necessários do professor para ensinar.

As ideias de Shulman serviram de referencial sobre o conhecimento dos professores para ensinar e impulsionaram outras pesquisas. A partir das ideias de Shulman, os autores Ball, Thames e Phelps (2008), e Hill, Ball e Schilling (2008) desenvolveram o conceito de Conhecimento Matemático para o Ensino, que é um conhecimento matemático específico do professor de Matemática, que possui características próprias, e que é distinto do conhecimento matemático utilizado por pessoas que não são professores. Os autores subdividem o Conhecimento Matemático para o Ensino em seis domínios: conhecimento comum do conteúdo, conhecimento especializado do conteúdo, conhecimento do conteúdo e dos alunos, conhecimento do conteúdo e do ensino, conhecimento do conteúdo no horizonte e conhecimento do conteúdo e do currículo.

Em Pino-Fan e Godino (2015), é apresentado um sistema de categorias (ou dimensões) para analisar os conhecimentos dos professores de Matemática, denominado Conhecimento Didático-Matemático (CDM). O CDM é um modelo que interpreta e organiza os conhecimentos dos professores a partir de três dimensões: a matemática, a didática e a meta didático-matemática.

A dimensão matemática é composta por duas subdimensões: do conhecimento comum e do conhecimento ampliado. O conhecimento comum do conteúdo é aquele que qualquer profissional possui e resolve problemas do dia a dia, enquanto o conhecimento ampliado inclui a compreensão do conteúdo, o conectar conceitos matemáticos e encaminhamentos a estudos subsequentes. Esses conceitos são semelhantes aos conceitos de conhecimentos comum e horizonte, respectivamente, definidos por Ball, Thames e Phelps (2008).

Na dimensão didática os autores destacam seis facetas: faceta epistêmica (conhecimento especializado da Matemática), faceta cognitiva (conhecimento de aspectos cognitivos dos alunos), faceta afetiva (conhecimento dos aspectos afetivos, emocionais e atitudes dos estudantes), faceta interacional (conhecimento sobre interações presentes na sala de aula), faceta mediacional (conhecimento dos recursos e meios que potencializam a aprendizagem dos alunos) e a faceta

ecológica (conhecimento sobre aspectos curriculares, sociais e políticos que influenciam na gestão da aprendizagem dos alunos) (Pino-Fan; Godino, 2015).

Na dimensão meta-didática são analisados os conhecimentos relativos às normas e às restrições dos contextos educativos, e a prática profissional é analisada e avaliada.

Neste trabalho, nosso propósito é analisar os conhecimentos didático-matemáticos de 10 licenciandos em Matemática sobre números racionais por meio de 3 atividades, tendo como base teórica a faceta epistêmica do Conhecimento Didático-Matemático, descrito na seção 3, e seus descriptores conforme Pino-Fan e Godino (2015) e Godino (2009).

A seguir, é apresentado um referencial teórico sobre os números racionais, que foi usado como base para elaboração das atividades aos licenciandos em Matemática.

## 2 NÚMERO RACIONAL

O estudo do conjunto dos números racionais é um dos conteúdos que apresentam dificuldades de compreensão para os alunos da Educação Básica. Um dos fatores que contribuem para essa complexidade são os diferentes significados que o número racional assume na perspectiva pedagógica (Kieren, 1988; Silva, 2007).

Segundo Charalambous e Pitta-Pantazi (2006), na Educação Básica os alunos devem ter uma compreensão dos diferentes significados de número racional, além da parte/todo, a fim de propiciar o desenvolvimento de uma compreensão das operações com frações. Também em Empson e Levi (2011), os autores colocam que o estudo de frações é fundamental para o estudo da Álgebra e para propiciar aos alunos oportunidades de trabalharem com as relações matemáticas que constituem o núcleo da Álgebra. Os autores argumentam que a não compreensão dos diferentes significados de um número racional afeta a capacidade dos alunos de generalizar. Inarejos, Castilho e Savioli (2023) apresentam uma proposta de ensino para a compreensão dos significados por meio da história e epistemologia das frações com o uso da resolução de problemas.

Vários pesquisadores têm se dedicado ao desenvolvimento de pesquisas sobre essa temática. Um dos pioneiros desse estudo foi Kieren (1975). O autor aponta que os números racionais são constituídos de diferentes construtos e que sua compreensão depende do entendimento dos diferentes significados que assumem. Para uma compreensão mais aprofundada dos números racionais, Kieren (1988) destaca cinco ideias básicas: parte/todo, operador, quociente, medida e razão. O autor salienta ainda que uma boa compreensão dos números racionais requer não só a compreensão de cada um dos significados separados, mas como eles se relacionam.

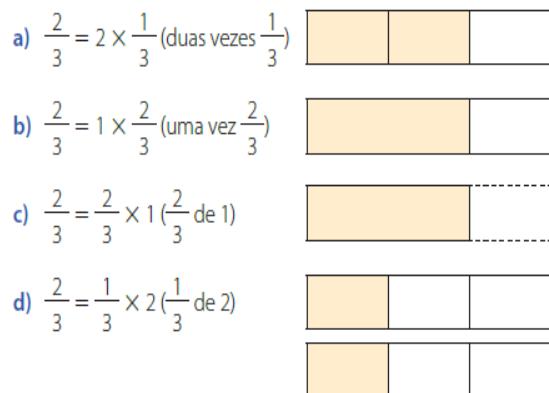
De acordo com Behr et al. (1983), o significado *parte-todo* das frações é definido como uma situação na qual uma quantidade contínua ou um conjunto de objetos discretos é dividido em partes iguais. Essa é uma das representações mais comumente usadas no estudo de número racional, pois presume-se que as experiências intuitivas dos alunos estão relacionadas ao significado de partilhar em partes iguais e ajudam a responder à pergunta: quanto de um objeto ou conjunto é representado pelo símbolo de fração?

De acordo com Lamon (2006), o significado de parte/todo quando a fração é apresentada na forma  $m/n$  indica a comparação entre o numerador (número de partes que se toma da unidade dividida) e o denominador (número total de partes em que a unidade foi dividida).

O conceito de *operador*, segundo Charalambous e Pitta-Pantazi (2006), resulta da combinação de duas operações multiplicativas que são aplicadas consecutivamente. De acordo com Onuchic e Allevato (2008), os alunos podem se envolver multiplicando ou dividindo frações de

diversas maneiras. As autoras colocam, como exemplo, a representação geométrica da fração  $\frac{2}{3}$  de quatro maneiras diferentes, que são ilustradas na Figura 1.

**Figura 1:** Exemplo de figura



Fonte: Onuchic e Allevato (2008, p. 94).

Cada um desses quatro casos constitui-se como uma situação diferente. De acordo com Onuchic e Allevato (2008), a “personalidade” do operador tem significado semelhante ao de “encolher” ou “esticar”, de “reduzir” ou “ampliar”.

Empson e Levi (2011) destacam que a não compreensão do significado de número racional como operador impede os alunos de desenvolverem a habilidade de generalizarem e trabalharem com incógnitas, ambos fundamentais para o estudo da Álgebra.

O significado de *quociente* remete à ideia de partilha, em que a fração  $a/b$  indica o quociente  $a:b$ ,  $b \neq 0$ . Neste significado, o entendimento de dividendo e divisor da operação de divisão deve estar claro, pois dividir em partes iguais é a base para que se comprehenda os números racionais como quocientes (Lamon, 2006).

De acordo com Onuchic e Allevato (2008), o significado dessa “personalidade” é percebido quando um número de objetos precisa ser repartido igualmente num certo número de grupos. Ele aparece mais frequentemente nas aplicações do que os outros significados e se refere ao uso dos números racionais como solução para uma situação de divisão.

O significado de número racional como *medida* pode ser compreendido como número que pode ser representado em uma reta numérica. Segundo Charalambous e Pitta-Pantazi (2006), o significado de medida é fundamental para adicionar ou subtrair frações.

Por exemplo, se dois números racionais com denominadores diferentes são interpretados como uma medida, ou seja, como distâncias de 0 na mesma escala, então eles podem ser adicionados ou subtraídos como medidas apenas se tiverem as mesmas unidades. Os autores destacam que o aluno tem uma compreensão do significado de um número racional como medida se ele é capaz de localizar um número em uma reta numérica e, inversamente, se é capaz de identificar um número representado por um ponto específico na reta numérica.

O significado de medida possibilita ao aluno identificar a unidade de medida, determinar um comprimento e medir um comprimento através da repetição da unidade de medida (Lamon, 2006).

O significado de um número racional como *razão* pode ser compreendido como uma grandeza está para outra. Esse significado não está associado à ideia de partição, e sim à ideia de comparação entre duas grandezas.

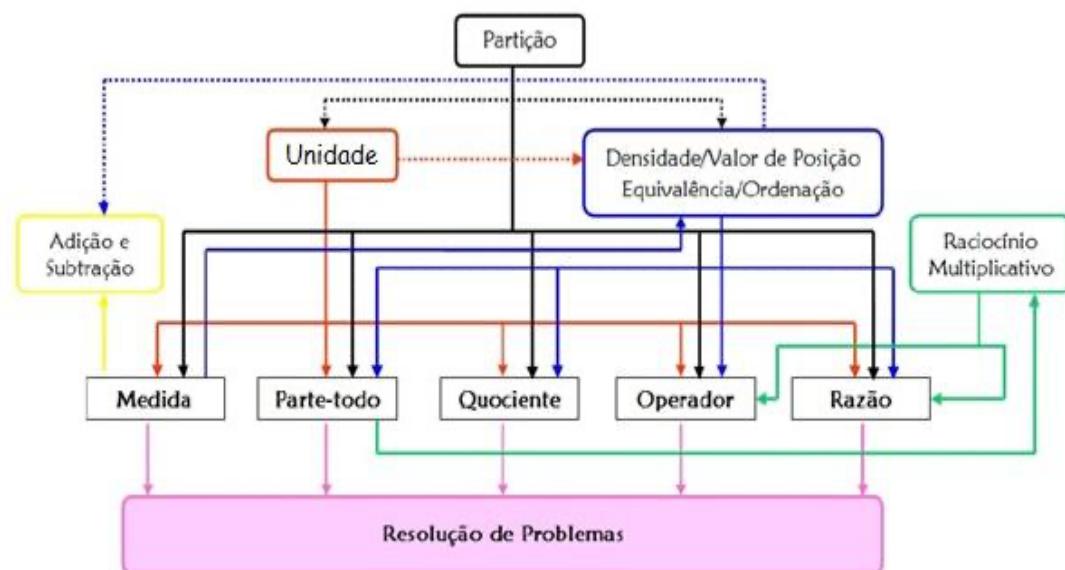
Outros conceitos relacionados aos números racionais são a densidade e o valor de posição do número racional. Eles indicam a compreensão de que existe uma relação entre o numerador e

o denominador, logo, cada fração deve ser vista como uma única quantidade e não como dois números distintos (Wheeldon, 2008). Sem esta noção é difícil compreender que entre dois racionais existe outro racional, ou seja, a noção de densidade (Martinie, 2007).

Outros aspectos destacados por Lamon (2006) referem-se à equivalência e à ordenação. É preciso compreender que os números racionais podem ser comparados e ordenados. Ao comparar duas frações, podem surgir os casos: a) ambas as frações têm o mesmo denominador (a maior é a que tiver maior numerador); b) ambas têm o mesmo numerador (a maior é a que tiver menor denominador) e; c) os denominadores e numeradores são distintos (usar frações equivalentes).

A Figura 2 ilustra o modelo teórico de Behr et al. (1983), que esquematiza os diversos significados de número racional e a aplicação na resolução de problemas.

**Figura 2:** Modelo de Behr sobre os significados de número racional



Fonte: adaptado de Ventura (2013, p.61).

Esse esquema mostra como os diferentes significados de número racional estão inter-relacionados. A resolução de problemas, que envolve os diferentes significados, depende da compreensão de cada um deles e de como eles se relacionam.

### 3 CONHECIMENTO DIDÁTICO-MATEMÁTICO

O estudo dos conhecimentos e das competências didáticas e matemáticas que um professor deve ter para ensinar Matemática é um tema que tem sido amplamente pesquisado. Há na literatura muitos modelos teóricos que são utilizados para caracterizá-los. Destacamos os modelos propostos por Shulman (1987), Ball, Thames, Phelps (2008), Ball, Hill, Bass (2005), Schoenfeld, Kilpatrick (2008), entre outros. A partir da base teórica do Enfoque Ontosemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática (Godino, Batanero, Font, 2007), foi desenvolvido um modelo de Conhecimento Didático-Matemático (CDM) conforme Godino (2009) e Pino-Fan e Godino (2015). Esse modelo tem sido utilizado em muitas pesquisas que têm por objetivo caracterizar os conhecimentos necessários para um professor ensinar Matemática. Ele visa interpretar e organizar os conhecimentos dos professores a partir de três dimensões: Matemática, Didática e a dimensão Meta Didático-Matemática.

A dimensão Matemática é composta por duas subdimensões: do conhecimento comum e do conhecimento ampliado, que atende à necessidade de solidificar os conhecimentos dos professores em tópicos específicos de Matemática.

A dimensão didática do CDM é composta de seis facetas, a saber: faceta epistêmica, faceta cognitiva, faceta afetiva, faceta interacional, faceta mediacional e faceta ecológica.

De acordo com Pino-Fan (2018), a faceta epistêmica envolve o conhecimento especializado da dimensão matemática, o qual engloba conhecimentos que possibilitam ao professor mobilizar diversas representações semióticas de um objeto matemático, envolve a resolução de atividades utilizando diferentes procedimentos, as possíveis conexões do objeto matemático a outros objetos matemáticos do mesmo nível ou de nível superior, a compreensão e mobilização dos múltiplos significados de um mesmo objeto matemático, a identificação dos conhecimentos que são utilizados na resolução de problemas e a apresentação de justificativas e argumentos pertinentes.

As facetas cognitivas e afetivas estão relacionadas com a forma de pensar, conhecer e atuar dos estudantes diante de um problema. Na faceta cognitiva são considerados os conhecimentos que o professor deve ser capaz de realizar, tais como: perceber possíveis soluções de um problema dado a partir do seu planejamento ou execução da aula, concepções errôneas, dificuldades numa solução ou vínculo com o objeto matemático de estudo com outros conceitos. A dimensão afetiva versa sobre os conhecimentos que ajudam a descrever as experiências e sensações dos estudantes com um dado problema, por exemplo. A faceta afetiva, conforme Pino-Fan (2018), aborda o conhecimento do professor para tratar e compreender o estado de ânimo dos alunos, o interesse e a motivação para revolver as tarefas de sala de aula.

A faceta interacional envolve os conhecimentos necessários para prever, desenvolver e avaliar sequências de interações entre os indivíduos para participarem do processo de ensino e aprendizagem, assim como orienta a negociação de significados aos estudantes. Essas interações podem ser professor-aluno, aluno-aluno, professor-recurso didático, professor-aluno-recurso didático.

A faceta mediacional refere-se ao conhecimento que um professor deve ter para utilizar e avaliar a relevância do uso de materiais e recursos tecnológicos para potencializar a aprendizagem de um objeto matemático específico, bem como a alocação de tempo para as diferentes ações e processos de aprendizagem.

A faceta ecológica se refere ao conhecimento sobre o currículo de Matemática do nível de ensino em que se contempla o estudo do objeto matemático, suas relações com outros currículos, e as relações que esse currículo tem com aspectos sociais, políticos e econômicos, que apoiam e condicionam o processo de ensino e aprendizagem.

A dimensão meta didático-matemática é composta por duas partes: uma relativa aos conhecimentos sobre os critérios de idoneidade didática, e a outra se refere aos conhecimentos necessários para refletir sobre a própria prática (Godino *et al.*, 2013). A idoneidade didática tem o caráter de avaliar o processo de ensino e aprendizagem, isto é, nela estão presentes a reflexão, a avaliação e a detecção das melhores potencialidades da prática.

Neste trabalho fazemos uma análise dos conhecimentos didático-matemáticos de licenciandos sobre os números racionais sob o ponto de vista da faceta epistêmica.

#### 4 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

O presente estudo foi realizado em um componente curricular denominado Teoria Elementar dos Números (60h de carga horária) com ingressantes do curso de Matemática Licenciatura de uma Universidade Pública no interior do Rio Grande do Sul, durante o segundo semestre letivo de 2023.

A ementa desse componente curricular contempla o estudo dos conjuntos numéricos. Sobre os números racionais são estudadas as operações e suas propriedades; as frações equivalentes; a comparação entre elementos; as representações decimais e a fração geratriz.

Para o desenvolvimento deste estudo utilizamos os pressupostos do Enfoque Ontosemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática (Godino, Batanero, Pino-Fan, 2007), particularmente o Conhecimento Didático-matemático (CDM), de acordo com Pino-Fan e Godino (2015).

A pesquisa tem caráter qualitativo ao entender que os dados coletados são inerentes ao contexto que foram produzidos e sua mensuração indica valores, crenças e atitudes dos sujeitos envolvidos. Borba (2004) aponta que a pesquisa qualitativa está em movimento, não está presa a regras ou padrões predeterminados, assim como o conhecimento não é isento da história de vida dos sujeitos envolvidos e das condições sociopolíticas do momento.

A produção de dados deu-se por meio da análise das produções escritas dos licenciandos para as atividades elaboradas, com o propósito de mobilizar os conhecimentos próprios dos futuros professores de Matemática sobre tópicos que envolvem números racionais.

Participaram da pesquisa dez estudantes do Curso de Matemática Licenciatura, matriculados na disciplina de Teoria Elementar dos Números, da qual a primeira autora era a docente responsável. Designaremos os estudantes pelas letras A, B, C, D, E, F, G, H, I e J.

As atividades analisadas foram desenvolvidas durante as aulas desse componente curricular, e o propósito foi identificar os conhecimentos dos licenciandos sobre essa temática. Nesse trabalho selecionamos três atividades para serem analisadas, que julgamos mais oportunas para identificar a mobilização dos conceitos envolvidos.

A primeira atividade consistiu em analisar as operações de adição, multiplicação e o significado de um número racional como operador, resolvendo aritimeticamente a atividade e realizando a representação das frações por meio de figuras.

Com a segunda atividade, buscamos estabelecer um critério para identificar um número racional escrito na forma decimal e diferenciá-lo de um número irracional.

Na terceira atividade apresentamos uma situação-problema em que os alunos precisavam argumentar e justificar suas respostas. Procuramos, com isso, identificar as estratégias utilizadas e analisá-las segundo os indicadores da faceta epistêmica apresentados no Quadro 1, a seguir.

Para a análise dos dados, utilizamos a faceta epistêmica e os indicadores como descritos no Quadro 1, seguindo as ideias de Godino (2009).

**Quadro 1:** Componentes e Indicadores de uma Análise Epistêmica

Componentes	Indicadores
Situações-problema	<ul style="list-style-type: none"> <li>- O aluno apresenta compreensão dos números racionais, articula as diferentes representações, situações de contextualização, exercícios e aplicações.</li> <li>- O aluno é capaz de propor situações problematizadoras envolvendo números racionais.</li> </ul>
Linguagem	<ul style="list-style-type: none"> <li>- O aluno possui conhecimento de diferentes modos de expressão matemática, verbal, gráfica e simbólica sobre números racionais.</li> <li>- O aluno estabelece tratamento e conversões entre as diferentes representações de números racionais.</li> </ul>

Definições, proposições, procedimentos	<ul style="list-style-type: none"> <li>- O aluno apresenta procedimentos de resolução de situações-problema, demonstrando compreensão sobre o tema números racionais.</li> <li>- As definições e os procedimentos utilizados são claros e corretos.</li> </ul>
Argumentos	<ul style="list-style-type: none"> <li>- O aluno utiliza argumentos matemáticos para justificar suas afirmações.</li> </ul>
Relações	<ul style="list-style-type: none"> <li>- O aluno identifica as articulações dos diversos significados dos números racionais que intervêm nas práticas matemáticas.</li> </ul>

Fonte: adaptado pelas autoras de Godino (2009).

## 5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

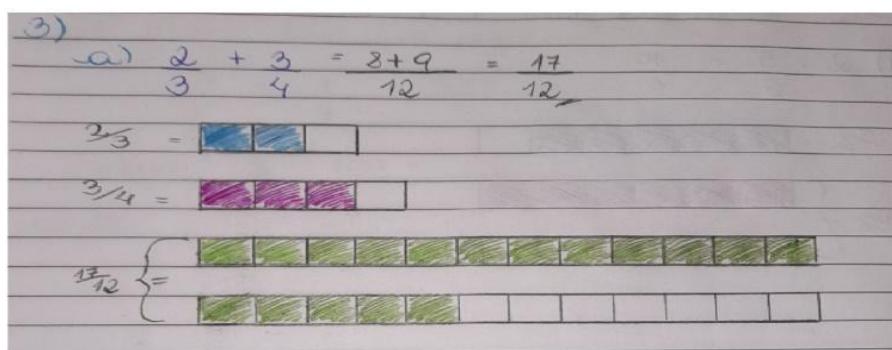
A primeira atividade proposta aos alunos refere-se às operações de adição e multiplicação, com ênfase ao significado de número racional como operador com o seguinte enunciado: “Efetue as operações indicadas e represente geometricamente.

- a)  $\frac{2}{3} + \frac{3}{4}$       b)  $\frac{1}{2} \times \frac{5}{6}$       c)  $2 \times \frac{5}{6}$ ”

Nessa primeira atividade foi solicitada a resolução da adição e a representação geométrica. Muitos dos alunos, sujeitos da pesquisa, apresentaram um procedimento correto e fizeram uma representação geométrica do resultado obtido do item (a).

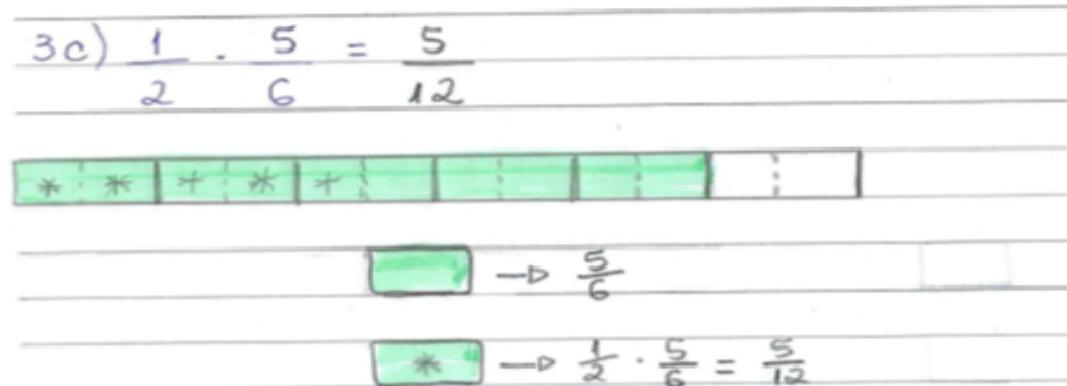
Todos os alunos desenvolveram o mesmo procedimento para a adição. O aluno D efetuou a adição reduzindo as frações ao mesmo denominador e destacou a representação geométrica de cada uma das frações e o resultado da adição. A Figura 3 mostra a resolução e a relação entre o registro numérico e o geométrico. No registro numérico, foram usados o algoritmo do mínimo múltiplo comum (MMC) e o significado de parte/todo de cada fração e da soma para o registro geométrico (que é apenas um argumento do procedimento inicial).

**Figura 3:** Resolução do aluno D para o item (a)



Fonte: dados da pesquisa (2023).

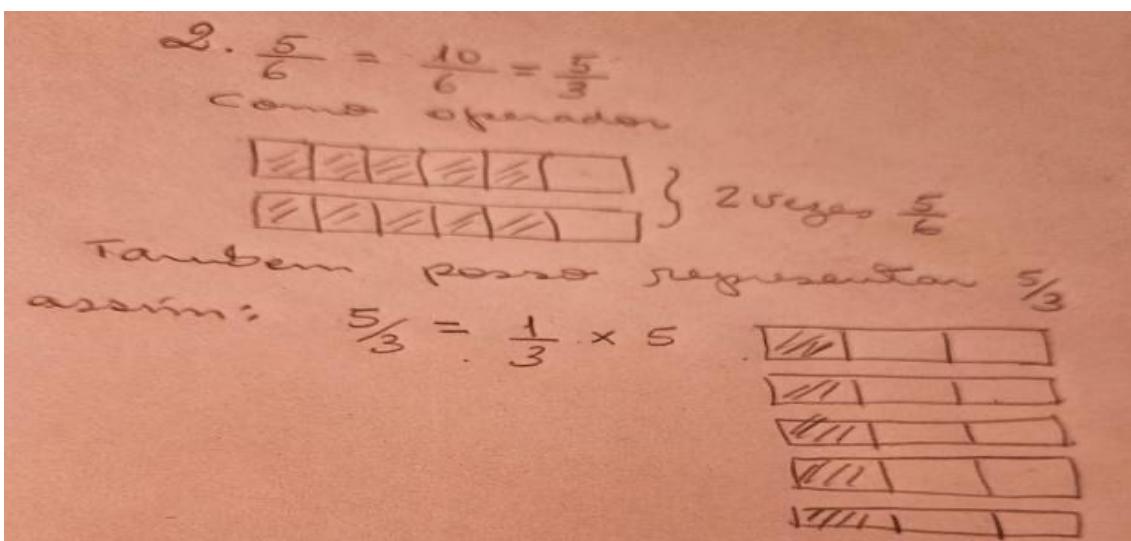
No item (b) da atividade era solicitado efetuar uma multiplicação de duas frações. A maioria dos alunos efetuou a multiplicação corretamente, apresentou os cálculos e representou geometricamente a resposta obtida. A aluna C efetuou o cálculo e representou geometricamente, conforme indicado na Figura 4.

**Figura 4:** Resolução da aluna C para o item (b)

Fonte: dados da pesquisa (2023).

Observamos que essa aluna representou primeiramente a fração  $5/6$ , isto é, pintou cinco partes das seis partes que a unidade foi dividida e, posteriormente, representou a metade de cada uma dessas partes colocando uma estrela. Inferimos, dessa representação geométrica, que a aluna apresentou uma compreensão dos números racionais e uma compreensão dos procedimentos de resolução. Todavia, os demais participantes não apresentaram esse nível de compreensão na representação geométrica, apesar de executar corretamente o procedimento de multiplicação. Possivelmente, esses alunos desenvolveram mecanicamente o algoritmo de resolução das operações com números racionais, sem compreensão do significado do procedimento.

No item (c), somente uma aluna representou a resposta por meio da interpretação do significado de operador. A Figura 5 mostra a representação geométrica dessa aluna.

**Figura 5:** Resolução da aluna F para o item (c)

Fonte: dados da pesquisa (2023).

A aluna F primeiramente representou geometricamente o modo como interpretou o produto do número inteiro 2 pela fração  $5/6$ , mas não deixou clara a representação do resultado. Já na segunda representação, ela mostrou claramente sua interpretação por meio do desenho, o significado de um número racional olhado como operador. Aqui também observamos indícios de um conhecimento do conteúdo e de compreensão do significado de operador de um número racional. A aluna faz a relação adequada dos significados ao identificar a articulação do registro geométrico com os significados de parte/todo e operador que mobilizam diferentes interpretações do resultado esperado (Godino, 2009).

Embora a maioria dos alunos tenha resolvido a operação corretamente e observado que o resultado é uma fração imprópria, pois o numerador é maior do que o denominador, não conseguiram representar geometricamente essa operação. Pode-se concluir que não está claro, em suas mentes, o significado de operador na operação de multiplicação.

Analizando as resoluções da atividade, observamos que os alunos executam os procedimentos corretamente, são capazes de resolver as operações, não apresentam muitos erros de cálculo aritméticos, mas apresentam dificuldades de fazer representações geométricas ou interpretar os resultados.

Tal situação já é identificada no estudo de Silva e Almouloud (2008) quanto à forma mecanizada de ensino e aprendizagem das operações com frações em detrimento da compreensão dos seus significados na educação básica. Esse fato gera um alerta à formação inicial de professores, a fim de que possam justificar as operações com números fracionários.

A Atividade 2 tem o seguinte enunciado:

“A professora escreveu o número 24,101112... no quadro e perguntou se ele é racional.

Mariazinha e Joãozinho responderam:

Mariazinha: Acho que é um número decimal infinito periódico.

Joãozinho: Eu não vejo período, mas também não posso garantir que não seja periódico.

a) Você concorda com a fala do Joãozinho? Por quê?

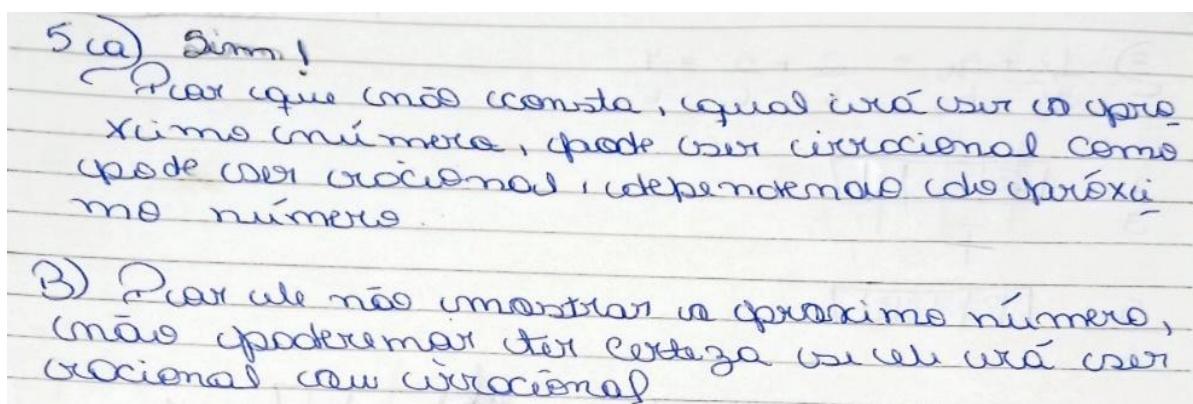
b) Ajude os colegas no diálogo ao apontar o que garante o número ser racional ou não.”

Nessa atividade, o propósito era verificar se os alunos identificam um número racional representado na forma decimal. Duval (2003) coloca que a compreensão de um objeto matemático só acontece se o aluno é capaz de transitar livremente entre as diferentes representações.

A maioria dos alunos respondeu que era um número decimal sem dar explicações. Três alunos apresentaram respostas diferentes, como seguem:

- A aluna E respondeu que era uma dízima periódica, portanto era um número racional.
- O aluno H disse que concordava com Joãozinho, não conseguia identificar o período para afirmar que era uma dízima periódica e, nesse caso, não poderia afirmar que era um número racional, pois só as dízimas periódicas podem ser representadas na forma de fração. Se for possível saber que nos pontinhos podemos repetir o número 101112, então, sim, aí podemos dizer que é uma dízima.
- A aluna I afirma que pode ser um número racional, mas tem dúvidas, pois não sabe qual é o próximo número. Seu comentário está na Figura 6, a seguir.

**Figura 6:** Resposta da aluna I para a questão



Fonte: dados da pesquisa (2023).

Considerando as respostas apresentadas nessa atividade quando um número está escrito na forma decimal, os alunos, em geral, sentem mais dificuldade de identificar se é uma dízima periódica ou é um número decimal infinito que não apresenta um período. Discussões foram realizadas em sala de aula quanto ao uso das reticências induzirem que há um padrão (período), além da sequência numérica 101112, também, induzir um padrão.

Utilizar diferentes representações de números racionais é essencial para reconhecer que cada representação pode indicar significados distintos. É importante que os alunos utilizem diferentes notações de números racionais convertendo uma fração em decimal e, vice-versa, escrevendo um número decimal na forma de fração. Além disso, a notação de fração e decimal são distintas: uma utiliza numerador e denominador, e outra é unidimensional, o que pode tornar mais difíceis a compreensão e a identificação. Inferimos que o aluno H tem um conhecimento do conteúdo, pois utiliza argumentos matemáticos para justificar suas afirmações e estabelecer relações entre as diferentes notações. Tal afirmação éposta dada a intenção do aluno H de tornar o número decimal em uma fração (um número racional é aquele representado por uma divisão de inteiros, sendo o divisor não nulo).

A Atividade 3 foi proposta com o seguinte enunciado:

“Considere o intervalo real entre os números - 4 e - 3 e responda:

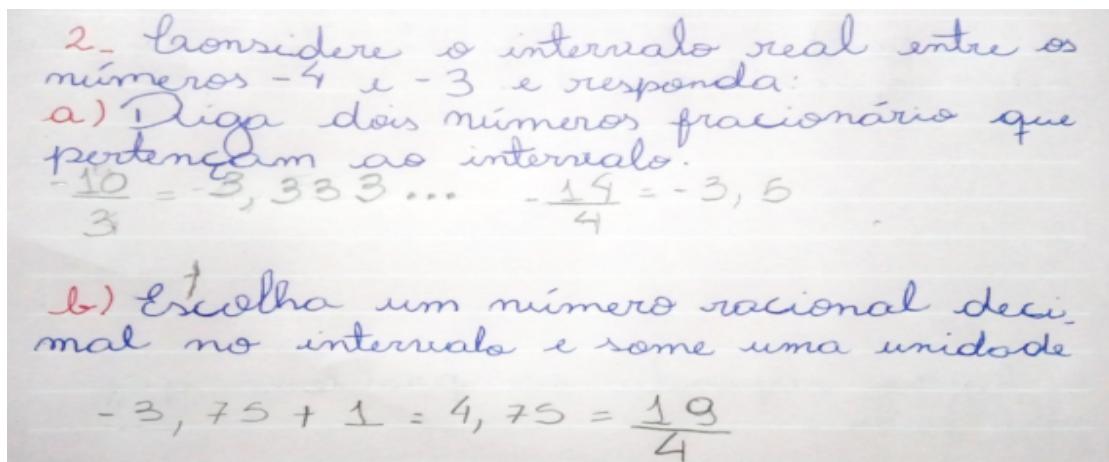
- Diga dois números fracionários que pertençam ao intervalo. Após realize a soma desses números;
- Escolha um número racional decimal no intervalo e some uma unidade. Após converta esse número para fração.”

Nosso propósito aqui também era identificar se os alunos tinham a noção de ordem que deve estar presente no conjunto dos números racionais. Outro aspecto pretendido era identificar se os alunos manifestavam alguma ideia sobre a noção de densidade.

Nessa atividade muitos alunos descreveram números que não pertenciam ao intervalo indicado. Possivelmente não levaram em consideração que era um intervalo de números negativos. Esse fato provavelmente está relacionado à falta de clareza da relação de ordem do conjunto dos racionais.

O aluno J apresentou dois números pertencentes a esse intervalo e os representou na forma decimal e de fração, como mostrado na Figura 7. Contudo, ignorou o sinal negativo na soma realizada no item (b).

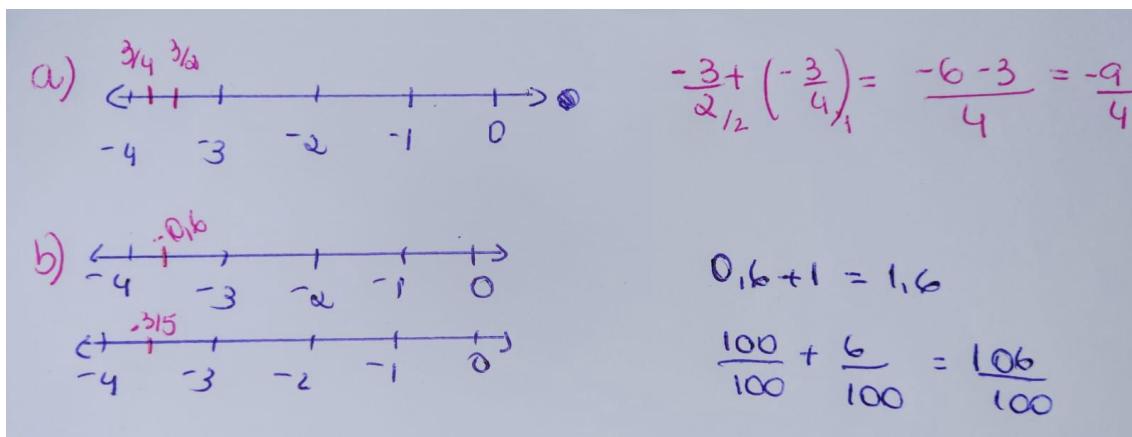
**Figura 7:** Resolução do aluno J para a questão



Fonte: dados da pesquisa (2023).

O aluno E (figura 8) identificou uma das frações no intervalo que a posicionou corretamente na reta numérica (item a), e a outra fração ( $\frac{3}{4}$ ) não posicionada corretamente. O mesmo fato ocorreu no item (b) da questão. O algoritmo da soma de frações e decimais foi bem empregado. Na conversão de decimal para fração, há um raciocínio oportuno em tornar o denominador da fração com base 10, mas a representação não foi correta.

**Figura 8:** Resolução do aluno E para a questão



Fonte: dados da pesquisa (2023).

Nenhum aluno referiu-se ao conceito de densidade como esperávamos, ou pelo menos indagou se entre dois racionais poderia haver mais um racional.

Observamos que, para alguns alunos, o conceito de número racional como um ponto sobre a reta facilitou a compreensão do significado como medida, enquanto a divisão de figuras exemplifica o caso parte/todo. Comparar, ordenar, estimar números na reta numérica e compreender a densidade do conjunto dos números racionais fazem parte dos conhecimentos especializados do professor e são necessários para ensinar esse conteúdo (SOARES, 2016; CARPES, 2019).

Muitos dos alunos que participaram da pesquisa, respondendo às questões, não tinham domínio de todos os significados de um número racional e apresentaram dificuldades de representações geométricas. Essas dificuldades mostram as lacunas nos conhecimentos dos licenciandos, possivelmente oriundas da construção não muito abrangente de número racional e do uso de poucas representações para descrevê-lo.

O conhecimento matemático comum foi identificado de forma mais recorrente nas resoluções das atividades. Perante a dimensão didática, especificamente na faceta epistêmica, o registro numérico é o mais presente, assim como o significado parte-todo é o mais adotado. Godino (2009) aponta nos indicadores da faceta epistêmica que conceitos e procedimentos devem ser contextualizados mediante situações-problema que fomentem argumentações, diversidade de representações e articulação de significados que objetivem a compreensão do significado de referência/institucional do objeto matemático.

## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nosso propósito neste trabalho foi analisar os conhecimentos de licenciandos sobre números racionais, necessários para um docente ensiná-los na Educação Básica. Os resultados obtidos nos mostram que os licenciandos participantes da pesquisa apresentam conhecimentos procedimentais e sabem efetuar operações com números racionais, no entanto, revelam muitas lacunas a respeito dos diferentes significados e das representações geométricas que auxiliam na compreensão do conceito.

As linguagens, as possíveis representações e as relações, trânsito entre os significados do número racional, foram os indicadores de análise da faceta epistêmica mais explorados nas atividades analisadas, pois é por meio desses elementos que se estabelece a compreensão do número racional (Kieren, 1988).

Essas lacunas são mais evidentes ao não responderem as questões e não apresentarem argumentos e justificativas matemáticas para os procedimentos efetuados. As fragilidades apresentadas quanto ao conteúdo ampliado, parte importante da faceta epistêmica, repercutem na formação inicial de docentes e têm consequências no ensino na Educação Básica.

Essas fragilidades impedem, também, que os futuros professores planejem atividades significativas para seus alunos, não estabelecendo relações entre os conceitos e não avançando ou aprofundando o conteúdo.

É necessário que os professores dos cursos de licenciatura conheçam as dificuldades de seus alunos, a fim de propor ações para minimizar essas fragilidades.

## REFERÊNCIAS

- BALL, D. L.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. Content knowledge for teaching. What makes it special? **Journal of Teacher Education**, USA, v. 59, n. 5, p. 389-407, 2008.
- BALL, D. L.; HILL, H. C.; BASS, H. Knowing mathematics for teaching: Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? **American Educator**, v. 29, nº 1, p.14 - 22, 2005.
- BEHR, M.; LESH, R.; POST, T.; SILVER, E. Rational number concepts. In LESH, R.; LANDAU, M (Eds.). **Acquisition of Mathematics Concepts and Processes**. New York: Academic Press. p. 91-125, 1983.
- BORBA, M. C. **Anais da 27ª reunião anual da Anped**, Caxambu, MG, 21-24 Nov. 2004 Disponível em <[http://www1.rc.unesp.br/gpimem/downloads/artigos/borba/borba-minicurso\\_a-pesquisa-qualitativa-em-em.pdf](http://www1.rc.unesp.br/gpimem/downloads/artigos/borba/borba-minicurso_a-pesquisa-qualitativa-em-em.pdf)> Acesso 21 jun 2023.
- BRASIL. BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR:** educação é a base. Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação. Secretaria de Educação Básica. 2018.
- GODINO, J. D.; BATANERO, C.; FONT, V. The onto-semiotic approach to research in mathematics education. **ZDM. The International Journal on Mathematics Education**, USA, v. 39, n. 1-2, p. 127-135, 2007.
- GODINO, J. D. et al. Componentes e indicadores de idoneidade de programas de formação de professores em educação matemática. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**. Florianópolis, v.08, n.1, p.46-74, 2013.
- KIEREN, T. On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers. In LESH, R. ( Ed.) **Number and measurement: Paper from a research workshop**. Columbus, Ohio: ERIC/MEAC, p.101-144, 1975.
- KIEREN, T. E. Personal knowledge of rational numbers: its intuitive and formal development. In HIEBERT, J.; BEHR, M.J. (Eds). **Number Concepts And Operations in The Middle Grades**. Hillsdale: Lawrence Erlbaum. p. 162-181, 1988.
- CARPES, P.P.G. **Conhecimentos didático-matemáticos do professor de Matemática para ensinar números racionais**. 2019. 265f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática, Universidade Franciscana, Santa Maria, 2019.
- CHARALAMBOUS, C. Y.; PITTA-PANTAZI, D. Drawing on a theoretical model to study students' understandings of fractions. **Educational Studies in Mathematics**, v. 64, nº 3, p. 293 –316, 2006. <https://doi.org/10.1007/s10649-006-9036-2>.
- DUVAL, R. **Registros de Representação Semiótica e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática**. IN: Machado, Silvia Dias Alcântara (org.). **Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica**. São Paulo: Papirus, p. 11-33, 2003.
- EMPSON, S. B.; LEVI, L. Extending children's mathematics: fractions and decimals. **Mathematics Education**, v.27, nº 4, p.403–434, 2011.
- GODINO, J. D. Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. Unión, **Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, v. 20, p. 13-31, 2009.
- HILL, H. C.; BALL, D. L.; SCHILLING, S. G. Unpacking pedagogical content knowledge of students. **Journal for Research in Mathematics Education**, USA, v.39, p. 372-400, 2008.
- INAREJOS, O., CASTILHO, G.R.; SAVIOLI, A.M.P. História e epistemologia da Matemática no ensino de frações. **Hipatia**, v.9, n.1, p. 14-30, 2023.
- LAMON, S. J. **Teaching fractions and ratios for understanding: essential content knowledge and instructional strategies for teachers** 2 ed. Mahwah: Lawrence Erlbaum Association. 2006.
- LAMON, S. J. Rational numbers and proportional reasoning. In: LESTER, F.K. (Jr. Ed.), **Second handbook of research on mathematics teaching and learning**. Charlotte: Information Age Publishing, NCTM. p. 629-667, 2007.
- MAGINA, S.; CAMPOS, T. A fração na perspectiva do professor e do aluno dos dois primeiros ciclos do Ensino Fundamental. **Boletim de Educação Matemática**: Rio Claro, ano 21, n. 31, p. 23-40, 2008.

- MARTINIE, S. **Middle school of rational numbers knowledge** – Abstract of dissertation. Manhattan, Kansas: Kansas State University. 2007.
- ONUCHIC; L.R.; ALLEVATO, N.S.G. As Diferentes “Personalidades” do Número Racional Trabalhadas através da Resolução de Problemas. **Boletim da Educação Matemática**: Rio Claro, ano 21, n. 31, p. 79 -102, 2008.
- PINO-FAN, L.R.; GODINO, J. Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. **Paradigma**, São Paulo, v. XXXVI, n. 1, p. 87– 109, 2015.
- PINO-FAN, L.R.; El Modelo del Conocimiento y Competencias Didáctico-Matemáticas (CCDM) del profesor. **Quintaesencia**, v. 09, p. 76 – 82, 2018.
- DOI: <https://doi.org/10.54943/rq.v9i.106>
- SCHOENFELD, A.; KILPATRICK, J. Towards a theory of proficiency in teaching mathematics. In TIROSH, D.; WOOD, T.L. (Eds.) **Tools and processes in mathematics teacher education**. Rotterdam: Sense Publishers. p. 321-354, 2008.
- SILVA, A.F.G. **O desafio do desenvolvimento profissional docente: análise da formação continuada de um grupo de professores das séries iniciais do ensino fundamental, tendo como objeto de discussão o processo de ensino e aprendizagem das frações**. 2007. 308f. Tese (Doutorado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007
- SILVA, M.J.F.; ALMOULOUD, S. As operações com números racionais e seus significados a partir da concepção parte-todo. **Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro (SP), Ano 21, nº 31, p. 55 a 78, 2008,
- SOARES, M.E.S. **Conhecimentos didático-matemáticos mobilizados por professores dos anos iniciais**: uma análise sob a perspectiva do Enfoque Ontosemiótico. 2016. 233f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática), Universidade Luterana do Brasil, Canoas, 2016.
- SHULMAN, L. S. Those who understand: Knowledge growth in teaching. **Educational Researcher**, v.15, n.2, p. 4-14. 1986.
- SHULMAN, L. S. Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. **Harvard Educational Review**, v. 57, n.1, p. 1-22, 1987.
- VENTURA, H.M.G.L. **A aprendizagem dos números racionais através das conexões entre as suas representações**: uma experiência de ensino no 2º ciclo do ensino básico. 2013. 386f. Tese (Doutorado em Educação). Universidade de Lisboa, Lisboa, 2013.
- WHEELDON, D. A. **Developing mathematical practices in a social context**: an instructional sequence to support prospective elementary teachers learning of fractions. 2008, 323f. Tese (Doutorado em Educação) University of Central Florida, Florida, 2008.

**Submetido em setembro de 2024.**

**Aprovado em julho de 2025.**

**Patricia Pujol Goulart Carpes**

Doutora em Ensino de Ciências e Matemática (UFN), professora na Universidade Federal do Pampa (Unipampa), Itaqui, RS, Brasil. ID Lattes: 7646090474831649. Orcid ID: 0000-0001-5206-8718.

**Contato:** patriciacarpes@unipampa.edu.br

**Eleni Bisognin**

Doutora em Matemática (UFRJ), professora na Universidade Franciscana (UFN), Santa Maria, RS, Brasil. ID Lattes: 0872986001066865. Orcid ID: 0000-0003-3266-6336.

**Contato:** eleni@ufn.edu.com