

Álgebra Linear

as investigações do Grupo de Pesquisa em Educação Algébrica (GPEA) subsidiadas por teorias da Didática Francesa

Álgebra Lineal

las investigaciones del *Grupo de Pesquisa em Educação Algébrica* (GPEA) basadas en las teorías de la Didáctica Francesa

Barbara Lutaif **Bianchini**

Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
(PUC-SP).

Gabriel Loureiro de **Lima**

Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
(PUC-SP).

RESUMO

O objetivo deste trabalho é apresentar as contribuições provenientes de investigações do Grupo de Pesquisa em Educação Algébrica (GPEA) referentes à Álgebra Linear, com subsídio de teorias da Didática Francesa da Matemática. Com base em um mapeamento de cunho exploratório-analítico busca-se, por meio desta pesquisa de natureza qualitativa, analisar que resultados, tanto em termos de ensino como de aprendizagem, os estudos mapeados trouxeram para o Grupo e, consequentemente, para outros professores que se interessam pela Educação Algébrica. Entre os resultados, destaca-se que as teorias da Didática Francesa da Matemática, no que se refere à Álgebra Linear, iluminaram aspectos relativos ao discurso do professor, aos efeitos desse discurso na aprendizagem dos estudantes, ao que é apresentado nos livros didáticos e ao ensino em cursos nos quais a Matemática não é o principal objeto de estudo, mas está a serviço da formação de determinado profissional.

Palavras-chave: Álgebra Linear. Grupo de Pesquisa em Educação Algébrica. mapeamento. Didática Francesa da Matemática.

RESUMEN

El objetivo de este trabajo es presentar las aportaciones de las investigaciones del Grupo de Investigación en Educación Algebraica (GPEA) relativas al Álgebra Lineal con la ayuda de las teorías de la Didáctica francesa de las Matemáticas. Recurriendo, desde el punto de vista metodológico, a un mapeo de carácter exploratorio-analítico, a través de esta investigación cualitativa, buscamos analizar qué resultados, tanto en términos de enseñanza como de aprendizaje, aportaron los estudios mapeados al Grupo y, en consecuencia, a otros profesores interesados en la Educación Algebraica. Entre los resultados, podemos destacar que las teorías de la Didáctica francesa de las Matemáticas, en lo que se refiere al Álgebra Lineal, permitieron iluminar aspectos relacionados con el discurso del profesor, con los efectos de este discurso en el aprendizaje de los alumnos, con lo que se presenta en los libros de texto y con la enseñanza en cursos en los que la Matemática no es el objeto principal de estudio, sino que está al servicio de la formación de un determinado profesional.

Palabras clave: Álgebra Lineal. Grupo de Investigación en Educación Algebraica. mapeo. Didáctica Francesa de las Matemáticas.

1 INTRODUÇÃO

O Grupo de Pesquisa em Educação Algébrica (GPEA), vinculado ao Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP), foi criado em 2003 com o objetivo de promover reflexões acerca de questões relacionadas ao ensino e à aprendizagem de Álgebra em diferentes níveis. Como líderes do Grupo, desde 2019 estamos trabalhando na síntese dos resultados das pesquisas realizadas no âmbito desse coletivo ao longo de seus 20 anos de atividades. Até o momento, foram desenvolvidos 21 projetos de pesquisa; 17 já finalizados e quatro em andamento. Como produtos oriundos das investigações inseridas nesses projetos, além de três livros (um sobre Teoria dos Números, outro sobre Álgebra Linear e um terceiro sobre o Pensamento Matemático e os diferentes modos de pensar que o constituem), há capítulos em obras de outros autores, artigos publicados em periódicos nacionais e internacionais, apresentações em eventos nacionais e internacionais e publicações em anais decorrentes desses eventos. Além disso, até janeiro de 2024, foram defendidas 99 dissertações e 31 teses.

Por meio das produções do Grupo, são realizadas discussões acerca de diferentes temáticas nas quais a Álgebra é contemplada, entre as quais: formação de professores; ensino de Matemática em cursos de serviço; construção de conhecimentos com auxílio de Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC); educação inclusiva; avaliação em Matemática e revisão sistemática de pesquisas. Embora tais produções evidenciem a ênfase dos trabalhos em duas subáreas da Álgebra, a saber, Teoria Elementar dos Números e Álgebra Linear, os estudos do GPEA abrangem diferentes objetos matemáticos, explicitando o quanto a Álgebra permeia os diferentes campos da Matemática.

Neste trabalho, temos por objetivo apresentar as contribuições oriundas das investigações do GPEA referentes à Álgebra Linear, com destaque àquelas subsidiadas pelas teorias da Didática Francesa da Matemática. Esse recorte a partir dos referentes franceses justifica-se pelo fato de este trabalho ter se originado de uma apresentação, em forma de comunicação científica, em um evento destinado exclusivamente à discussão de teorias da Didática Francesa da Matemática, nomeadamente: o III Simpósio Latino-americano de Didática da Matemática (LADIMA), promovido pelo Grupo de Trabalho GT 14 – Didática da Matemática – da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM), ocorrido remotamente em 2021. Uma vez que as reflexões desenvolvidas durante o evento nos fizeram vislumbrar aprofundamentos das análises, ainda recorrendo somente às referidas teorias, optamos, neste artigo, por manter o foco nelas. Assim, reservamos para pesquisas futuras tanto o mapeamento de investigações do GPEA subsidiadas por outros referentes teóricos não franceses quanto o estabelecimento de relações entre os estudos do GPEA, fundamentados por referenciais da Didática Francesa da Matemática e por diversos quadros teóricos, com outros estudos realizados no âmbito de diferentes grupos de pesquisa.

Buscamos analisar quais resultados, tanto em termos de ensino como de aprendizagem, as pesquisas baseadas na vertente da Didática trouxeram para o Grupo e, consequentemente, para a Educação Algébrica. É importante salientar que, embora tenhamos restringido nossas análises às produções de um único grupo de pesquisa brasileiro, as considerações apresentadas são representativas para a área em razão desse coletivo, no âmbito do qual os estudos foram produzidos, ser o principal *lócus* de investigação acerca do ensino e da aprendizagem de Álgebra Linear no Brasil. Os destaques decorrentes do mapeamento realizado são, portanto, apontamentos científicos de pesquisadores profundamente envolvidos com a temática que, consequentemente, têm os devidos “lugares de fala” para, ainda que com as limitações inerentes ao estudo, identificar aspectos fulcrais, tendências e oportunidades para novas investigações, o que pode ser de grande valia a estudiosos não apenas do GPEA, mas também de outros grupos de pesquisa.

2 METODOLOGIA

Do ponto de vista metodológico, a investigação é de natureza qualitativa e pode ser caracterizada, na concepção de Biembengut (2003, p. 2), como um *mapeamento de cunho exploratório-analítico* que, segundo a autora, quando assumido como referente metodológico de investigação possibilita, em especial, “a compreensão da estrutura e dos entes nela inseridos, a organização e a representação ou mapa dos dados em um contexto, de forma dinâmica [...] [que permita] a compreensão clara de um fenômeno ou ente em tempo curto de busca”.

O conjunto de trabalhos analisados reúne dissertações e teses defendidas por membros do GPEA entre janeiro de 2003 e janeiro de 2024, acessados por meio da Biblioteca Digital de Dissertações e Teses da PUC-SP¹. Ao todo, identificamos 44 trabalhos do GPEA subsidiados por teorias da Didática Francesa, sendo 16 relacionados ao Ensino Fundamental (6 a 14 anos), 13 ao Ensino Médio (15 a 17 anos), dois enfatizando questões tanto do Ensino Fundamental quanto do Ensino Médio e 13, questões do Ensino Superior. Entre as relativas ao Ensino Superior, cinco dissertações tratavam de questões sobre Álgebra Linear, as quais constituíram o *corpus* da investigação apresentada neste artigo. Convém ressaltar que, embora existam outras teses sobre Álgebra Linear realizadas no âmbito GPEA, elas não foram desenvolvidas empregando marcos teóricos da Didática Francesa, razão pela qual não são aqui analisadas.

Há dois enfoques pelos quais um mapeamento pode ser executado. O primeiro enfoque “consiste em mapear, ou seja, organizar os dados ou entes de forma harmônica de maneira a oferecer um quadro completo deles, uma representação, um mapa onde conste o que for significativo e relevante” (Biembengut, 2003, p. 5). Já o segundo consiste em tanto iluminar os dados presentes nas pesquisas mapeadas como classificá-los e organizá-los, de modo a salientar “as questões a serem avaliadas; reconhecer padrões, evidências, traços comuns ou peculiares, ou ainda, características indicadoras de relações genéricas” (Biembengut, 2003, p. 5).

Neste trabalho, optamos pelo segundo enfoque, por meio do qual analisamos, do ponto de vista qualitativo, as justificativas para a utilização de determinada teoria, os objetivos para os quais ela foi mobilizada e os principais resultados obtidos. Os referenciais teóricos contemplados nas dissertações analisadas são apresentados no Quadro 1.

Quadro 1: Referenciais teóricos da Didática Francesa identificados nas pesquisas do GPEA sobre Álgebra Linear

Referencial teórico	Quantidade de trabalhos
<i>Teoria dos Registros de Representação Semiótica</i> , de Raymond Duval	01
<i>Alavancas-meta</i> , segundo as ideias de Jean-Luc Dorier, Aline Robert, Jacqueline Robinet e Marc Rogalski	02
<i>Teoria Antropológica do Didático</i> , de Ives Chevallard	01
<i>Recursos-meta</i> , na concepção de Jean-Luc Dorier, Aline Robert, Jacqueline Robinet e Marc Rogalski, associada à <i>Dialética Ferramenta-objeto</i> , de Régine Douady	01
Total	05

Fonte: dados da pesquisa

Passamos, então, à análise e discussão dos dados provenientes das pesquisas desenvolvidas.

¹ Disponível em: https://sapiencia.pucsp.br/?_ga=2.214697872.628996682.1612182449-149160779.1561464622. Acesso em: 10 jan. 2024.

3 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS DADOS

Optamos, neste artigo, por organizar a apresentação dos dados com base nos quadros teóricos que subsidiaram as investigações. Para maior clareza na análise do objetivo de cada pesquisa, das justificativas para o emprego de determinado referencial teórico e dos resultados obtidos, apresentamos, vinculada à análise de cada trabalho, uma breve explanação a respeito da teoria em foco, considerando como referência as próprias investigações mapeadas.

3.1 Teoria dos Registros de Representação Semiótica

Em dissertação defendida em 2006, André Lúcio Grande, pela perspectiva da Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS), concebida pelo filósofo e psicólogo cognitivista francês Raymond Duval, referindo-se especificamente à Duval (1993, 1995, 2000), investiga quais registros de representação semiótica são mais utilizados em cinco livros didáticos para estudo das noções e atividades propostas sobre independência linear, como indica o Quadro 2.

Quadro 2: Pesquisa subsidiada pela Teoria dos Registros de Representação Semiótica

Autor (Ano)	Objetivo	Referencial teórico
André Lúcio Grande (2006)	Investigar quais registros de representação semiótica são mais utilizados em cinco <i>livros didáticos</i> para estudo das noções e atividades propostas sobre independência linear.	Registros de Representação Semiótica

Fonte: dados da pesquisa

Como salienta Grande (2006, p. 62), a partir das ideias de Duval, “a Matemática se diferencia das outras ciências e áreas do conhecimento pelo fato de termos acesso aos seus objetos somente por meio de sua representação”. Um cuidado essencial ao trabalhar com objetos matemáticos é não confundi-los com suas representações, construídas a partir de um sistema de registros, símbolos e sinais cuja função é caracterizar e permitir a comunicação acerca do ente representado. Grande (2006, p. 66) observa que, segundo Duval, “para que um sistema semiótico seja um registro de representação, ele deve preencher três atividades cognitivas fundamentais que são: a formação de uma representação identificável, o tratamento (transformação de representações em um mesmo registro) e a conversão (transformações de representações de um registro para outro)”.

De acordo com o pesquisador, “em Álgebra Linear, existe uma grande variedade de representações semióticas para um mesmo objeto matemático” (p. 66). Com base nas considerações de Duval, salienta ainda: “fracassos ou bloqueios dos alunos, nos diferentes níveis de ensino, aumentam consideravelmente cada vez que a mudança de registro é necessária ou que a mobilização simultânea de dois registros é requerida” (p. 77-78). Tal bloqueio dificulta o reconhecimento, por parte dos estudantes, de um mesmo objeto matemático em duas ou mais representações diferentes e, por vezes, pode limitá-los na mobilização de conhecimentos já adquiridos para a construção de novos conhecimentos, sendo uma condição de acesso à compreensão em Matemática, conforme os preceitos da TRRS, a articulação entre representações em diferentes registros. As justificativas de Grande (2006) para o emprego da TRRS são apresentadas no Quadro 3.

Quadro 3: Justificativas para a utilização da Teoria dos Registros de Representação Semiótica

Autor (Ano)	Justificativas para utilização da teoria
Grande (2006)	<p>A Matemática se diferencia das outras ciências e áreas do conhecimento pelo fato de termos <i>acesso aos seus objetos</i> somente por meio de sua <i>representação</i>.</p> <p>O sistema de registros, símbolos e sinais por meio do qual são formadas as diferentes representações <i>não são simples códigos</i>, uma vez que sua função é <i>comunicar e caracterizar o objeto representado</i>.</p>

Fonte: dados da pesquisa

Os principais resultados obtidos por Grande (2006) em sua investigação são destacados no Quadro 4.

Quadro 4: Resultados obtidos com base na Teoria dos Registros de Representação Semiótica

Grande (2006)	<p><i>Não há atividades, exercícios ou situações que permitam a utilização de representações no registro geométrico e suas possíveis conversões.</i></p> <p><i>Apenas em três livros há comentários sobre as propriedades geométricas relacionadas ao conceito de independência linear.</i></p> <p><i>Quanto às articulações e mudanças de registros, predominam, nos livros analisados, os tratamentos de representações na resolução dos exercícios.</i></p> <p><i>Os exemplos e exercícios propostos apresentam poucas opções quanto à possibilidade de conversões de representações.</i></p> <p><i>Determinados registros são privilegiados: predominam o numérico e o simbólico-algébrico; já os registros simbólico-matricial e geométrico são menos explorados.</i></p> <p><i>A análise revelou que os mesmos registros utilizados pelos autores nas definições e exemplos são os preferencialmente mobilizados nos exercícios propostos.</i></p> <p><i>A utilização do registro de representação da língua natural foi identificada em apenas um livro didático.</i></p>
------------------	--

Fonte: dados da pesquisa

Após a análise de cinco livros didáticos de Álgebra Linear, o pesquisador destaca alternativas para o ensino das noções de dependência e independência linear:

- Apresentar as noções de dependência e independência linear, inicialmente, por meio da exploração das representações no registro geométrico, efetuando conversões de representações e recorrendo aos temas abordados em Geometria Analítica. Segundo o autor, a utilização do registro geométrico para explorar, por exemplo, propriedades geométricas de dependência e independência linear entre vetores, como o paralelismo e a coplanaridade, daria a oportunidade de o estudante mobilizar conhecimentos construídos em Geometria Analítica e, posteriormente, generalizá-los para o \mathbb{R}^n e outros espaços vetoriais.

- Explorar com maior ênfase as representações no registro da língua natural, a fim de que o estudante “fale” mais sobre os conceitos aprendidos e trabalhe, por exemplo, com exercícios do tipo verdadeiro ou falso, provas e demonstrações relacionadas ao conceito de independência linear.
- Dar início à abordagem de independência linear: (i) por meio de sistemas lineares, apresentando-os como combinações lineares de vetores; (ii) por meio de contextos de aplicação da Álgebra Linear, tais como modelos de programação linear e modelos lineares econômicos, que possibilitam explorar representações nos registros geométrico e simbólico-matricial pouco presentes nos livros.

Passamos a destacar, a seguir, aspectos acerca das pesquisas subsidiadas pelo constructo de alavancas-meta.

3.2 Alavancas-meta

Das cinco pesquisas analisadas, duas, Padredi (2003) e Oliveira (2005), recorrem aos constructos teóricos de recursos-meta e alavancas-meta desenvolvidos pelos pesquisadores franceses Jean-Luc Dorier, Aline Robert, Jacqueline Robinet e Marc Rogalski, fazendo referência a Dorier (1990, 1991, 1995), Dorier et al. (1997, 1998, 2000), Robert e Robinet (1996) e Rogalsky (1997). Os objetivos das pesquisas de Padredi (2003) e Oliveira (2005) são apresentados no Quadro 5.

Quadro 5: Pesquisas subsidiadas pelo constructo de alavancas-meta

Autor (Ano)	Objetivos	Referencial teórico
Zoraide Lucia Padredi (2003)	Investigar quais alavancas-meta são sugeridas por <i>professores</i> de Álgebra Linear para a noção de base.	
Luis Carlos Barbosa de Oliveira (2005)	Investigar, por meio de entrevistas com <i>estudantes</i> , os recursos-meta utilizados por um professor de Álgebra Linear em sala de aula.	Alavancas- meta

Fonte: dados da pesquisa

Conforme salientam Padredi (2003) e Oliveira (2005), um grupo de pesquisadores franceses, do qual fazem parte Jean-Luc Dorier, Marc Rogalski, Aline Robert e Jacqueline Robinet, desde o final da década de 1980, sinaliza a necessidade de realizar pesquisas sobre metaconhecimentos matemáticos (conhecimentos sobre a Matemática, seu funcionamento, utilização e aprendizagem). Segundo Oliveira (2005, p. 19), “dadas as inúmeras mudanças sofridas pelo termo metaconhecimento matemático [...] nosso grupo de pesquisa (o GPEA) decidiu utilizar o termo *recurso-meta* para se referir àquilo que [...] foi chamado de metamatemática, metaconhecimento matemático”. Será denominado, então,

alavanca-meta todo recurso-meta utilizado pelo professor que contribua para o aprendizado da noção matemática evidenciada. [...] assim, se um dado recurso-meta contribuiu para que algum aluno se apropriasse do conhecimento que estava sendo ensinado, então, esse recurso-meta passa a ter estatuto de alavanca-meta para aquele aluno (OLIVEIRA, 2005, p. 26).

Como destaca Padredi (2003, p. 21), as alavancas-meta podem estar “presentes no discurso do professor ou nas atividades que atuem sobre os conhecimentos dos estudantes, sobre a sua maneira de aprender, e possibilitem aos alunos refletirem sobre os objetos matemáticos da Álgebra Linear”. A autora, citando as ideias de Dorier (1998), esclarece:

A palavra alavanca se relaciona à ideia de introduzir, em um momento bem escolhido de aprendizagem, um elemento permitindo aos estudantes compreenderem melhor a natureza epistemológica da Álgebra Linear. O prefixo substantivado ‘meta’ significa que essa alavanca favorece uma reflexão sobre a própria atividade matemática (DORIER, 1998 *apud* PADREDI, 2003, p. 21).

Com o objetivo investigar quais alavancas-meta são sugeridas por professores de Álgebra Linear para a noção de base, Padredi (2003) volta sua atenção a questões relacionadas ao ensino e justifica o emprego da teoria para investigar quais metaconhecimentos matemáticos sobre base de um espaço vetorial surgem no discurso desses professores e quais deles podem ser destacados como possíveis alavancas-meta para o ensino da referida noção. Por sua vez, Oliveira (2005) define como objetivo investigar, por meio de entrevistas com estudantes, os recursos-meta utilizados por um professor de Álgebra Linear em sala de aula visando a identificar, do ponto de vista da aprendizagem, quais desses recursos tornaram-se alavancas-meta para alguns de seus alunos.

No Quadro 6, apresentamos as justificativas explicitadas por Padredi (2003) e Oliveira (2005) para a utilização do constructo de alavancas-meta como subsídio para suas pesquisas.

Quadro 6: Justificativas para a utilização do constructo de alavancas-meta

Autor (Ano)	Justificativas para utilização da teoria
Padredi (2003)	<p>A <i>importância</i> dada por Dorier, um dos principais pesquisadores em Álgebra Linear, às <i>pesquisas sobre alavancas-meta</i> no ensino e na aprendizagem relativos a essa área – principalmente no que concerne às <i>noções elementares</i>, aos resultados de pesquisas anteriores e à <i>interferência do professor na transposição didática</i> – levou a autora a formular as seguintes questões:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Como o professor de Álgebra Linear aborda a noção de base em seu discurso? 2. Quais são os metaconhecimentos evidenciados nesse discurso? 3. Quais desses metaconhecimentos podem ser destacados como possíveis alavancas-meta? <p>Tendo em vista essas questões, justifica-se o emprego da teoria para investigar quais <i>metaconhecimentos matemáticos sobre base de um espaço vetorial</i> surgem no <i>discurso de professores de Álgebra Linear</i> e quais desses metaconhecimentos podem ser destacados como <i>possíveis alavancas-meta para o ensino e para a aprendizagem da noção de base</i>.</p>
Oliveira (2005)	<p>A <i>não existência de situações-problema adequadas ao desenvolvimento das noções elementares de Álgebra Linear</i> ratifica a importância da <i>utilização de recursos-meta</i> em sala de aula, seja no <i>discurso do professor</i>, seja em <i>atividades</i> cuidadosamente elaboradas, para facilitar a compreensão dos alunos sobre essas noções, fazendo-os refletir a respeito dos objetos matemáticos em questão.</p> <p>Assim, é importante investigar o <i>efeito desses recursos e quais se tornam alavancas-meta</i>.</p>

Fonte: dados da pesquisa

Com base no que apresenta Padredi (2003) como resultados de sua pesquisa, explicitados no Quadro 7, salientamos que a ideia de um sistema de geradores minimal pode proporcionar reflexões por parte dos alunos sobre a vantagem de se conseguir um número mínimo de vetores para gerar o espaço, induzindo-os a compreender a necessidade de serem vetores linearmente independentes. A

ideia de um conjunto maximal desses vetores possibilita reflexões sobre a necessidade de se conseguir o maior conjunto linearmente independente que originará o espaço, surgindo daí, naturalmente, a noção de sistema de geradores. Tanto uma ideia como outra explicitam uma articulação entre as duas noções – vetores linearmente independentes e sistema de geradores –, que resulta no conceito de base. São recursos-meta passíveis de se tornarem alavancas-meta, bem como analogias utilizadas pelo professor para introduzir a noção de base e outras noções a ela relacionadas: o recurso de enfatizar as operações de adição e multiplicação por um escalar, como as ferramentas inerentes a um espaço vetorial e que bastam para caracterizar um elemento genérico do espaço vetorial por meio de um número finito de vetores “bem comportados” desse espaço; a utilização da passagem do antigo para o novo, tendo a Geometria Analítica como o antigo; a antecipação da noção de transformação linear e de isomorfismo entre espaços vetoriais para criar a necessidade da noção de base; e, finalmente, a apresentação de informações sobre a natureza das noções a serem introduzidas, relacionando a Álgebra Linear com noções de outras disciplinas do curso (Geometria Analítica, Equações Diferenciais e Cálculo), com conceitos que nele serão explorados posteriormente (isomorfismos e transformações lineares).

Quadro 7: Resultados obtidos com base no constructo de alavancas-meta

Padredi (2003)	<p>A noção de base foi destacada como <i>prioritária</i> para um primeiro curso de Álgebra Linear pela maioria dos entrevistados. Três abordagens diferentes se fazem presentes no discurso dos professores:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. sistema de geradores minimal (economia no número de vetores linearmente independentes); 2. sistema maximal linearmente independente (sistema de geradores); 3. justaposição de um sistema de geradores com um conjunto linearmente independente. <p>1 e 2 são <i>recursos-meta</i> passíveis de se tornarem <i>alavancas-meta</i> para a noção de base.</p> <p>Uso de <i>analogias</i> (recursos-meta) que podem se tornar alavancas-meta: <i>forma coloquial</i> para a introdução de noções como a de base: “vetores bem-comportados”, “grau de liberdade”, “colchinha de crochê”, “ambiente”, “lucro”, “economia”, “tijolos” e “parede”.</p> <p>Partir da <i>Geometria Analítica</i> (como um recurso-meta) para introduzir a noção de base.</p> <p>A utilização do <i>livro didático</i> como meio de provocar reflexão dos alunos sobre pontos que podem ocasionar erros e generalizações abusivas também constitui um recurso-meta.</p>
-------------------	---

Fonte: dados da pesquisa

A análise dos resultados obtidos por Oliveira (2005), sintetizados no Quadro 8, sinaliza ser possível avaliar os efeitos dos recursos-meta por meio de avaliações individuais; indica a necessidade de generalizar a estrutura dos espaços vetoriais, com base nos espaços mais concretos, como o dos vetores da Geometria Analítica e o das Matrizes; mostra a relevância de explicitar conjuntos distintos com a mesma estrutura, utilizar conjuntos mais familiares aos estudantes como ponto de partida para a necessidade de uma técnica para verificação de combinações lineares e apresentar informações sobre as operações matemáticas.

Quadro 8: Resultados obtidos com base no constructo de alavancas-meta

Oliveira (2005)	Recursos-meta utilizados pelo professor nas aulas:
	<ul style="list-style-type: none"> ✓ <i>Interação de domínios</i> (preparar os alunos para visualizarem os espaços vetoriais em diferentes representações); ✓ Os três <i>princípios da aprendizagem</i> de Álgebra Linear propostos por <i>Harel</i> (da concretização, da necessidade e da generalização) foram empregados na abordagem de espaços vetoriais e combinações lineares; ✓ Fornecimento de informações sobre as <i>operações matemáticas</i>; ✓ <i>Exemplos, contraexemplos e questionamentos</i> para fazer alguns alunos refletirem sobre seus conhecimentos e dúvidas; ✓ Noção de <i>base</i> como um <i>conjunto gerador minimal</i>.

Recursos-meta que se tornaram alavancas-meta para alguns dos estudantes:

- ✓ *Poucos dos recursos-meta utilizados pelo professor tornaram-se alavancas-meta para a maioria dos alunos;*
- ✓ O recurso-meta “eu tenho alguém que está dependendo dos outros, lá dentro do meu conjunto”, utilizado para verificar se um conjunto é linearmente dependente, tornou-se uma alavanca-meta para seis dos sete alunos entrevistados;
- ✓ O recurso dos *exemplos e contraexemplos* se tornou uma alavanca-meta para três dos alunos entrevistados;
- ✓ Os recursos-meta *interação de domínios* e os *três princípios de Harel* não se constituíram como alavancas-meta.

Fonte: dados da pesquisa

3.3 Recursos-meta associados à Dialética Ferramenta-Objeto

Em uma das pesquisas analisadas, de Silva (2005), o constructo teórico recursos-meta foi mobilizado de maneira vinculada aos elementos da Dialética Ferramenta-objeto, de Régine Douady, visando a alcançar o objetivo explicitado no Quadro 9.

Quadro 9: Pesquisa subsidiada pelo constructo de recursos-meta vinculado à Dialética Ferramenta-objeto

Autor (Ano)	Objetivo	Referenciais teóricos
Carlos Eduardo da Silva (2005)	Investigar, por meio de entrevistas com <i>professores</i> , como é utilizada a noção de base de um espaço vetorial em assuntos de Ciência da Computação.	Recursos-meta Dialética Ferramenta-objeto

Fonte: dados da pesquisa

Apoiado em Maranhão (1999), Silva (2005, p. 25) afirma que os saberes têm estatuto de objeto, que “ensinar, para um professor, é criar as condições que produzirão um saber entre os alunos. E, aprender, para um aluno, é se engajar em uma atividade intelectual, pela qual se produza a disponibilidade de um saber com seu duplo estatuto de ferramenta e objeto”. Citando Douady (1984), define a Dialética Ferramenta-objeto como um “processo cílico organizando os papéis respectivos

do professor e dos alunos, no decorrer do qual os conceitos matemáticos desempenham alternadamente o papel de ferramenta para resolver um problema e de objeto participando da construção de um saber organizado" (Silva, 2005, p. 26). No intuito de vincular os elementos teóricos da Dialética Ferramenta-objeto com o constructo de recursos-meta, argumenta que

nos processos de ensino e de aprendizagem, no qual o aluno tem contato com o conhecimento matemático, ora com estatuto de objeto e ora com estatuto de ferramenta, ele se engaja em uma atividade intelectual que poderá conter recursos-meta, pois o professor na tentativa de produzir as condições adequadas para disponibilizar um saber para o aluno, usa esse tipo de recurso para tentar gerar reflexão a respeito do objeto de estudo em foco e esclarecer a noção envolvida (p. 27).

No Quadro 10, detalhamos as justificativas de Silva (2005) para o emprego da articulação entre os dois subsídios teóricos.

Quadro 10: Justificativas para a utilização do constructo de recurso-meta associado à Dialética Ferramenta-objeto

Autor (Ano)	Justificativas para utilização da teoria
Silva (2005)	<p>As <i>condições produzidas pelos professores</i> para propiciar a aprendizagem dos alunos, muitas vezes, constituem <i>recursos-metá</i> que podem envolver situações propícias para a compreensão da <i>noção</i> tanto como <i>objeto</i> quanto como <i>ferramenta</i>.</p> <p>Toda noção matemática deve ser ampliada, aprofundada, via utilização dessa noção em <i>diferentes contextos</i>, tanto intramatemático quanto extramatemático.</p> <p>A <i>busca de alavancas-metá</i> em razão da <i>não existência de situações-problema</i> adequadas para o desenvolvimento das noções elementares da Álgebra Linear.</p> <p>A <i>Dialética Ferramenta-objeto</i> justifica a <i>busca de novos recursos-metá</i> (possíveis alavancas-metá) que sejam úteis para o desenvolvimento da noção de base de um espaço vetorial com alunos que se engajaram em atividades intelectuais envolvendo essa noção, como ferramentas implícitas ou explícitas, em <i>contextos extramatemáticos</i>.</p>

Fonte: dados da pesquisa

Os resultados obtidos por Silva (2005) a partir das entrevistas que realizou com professores do curso de Ciência da Computação estão sintetizados no Quadro 11.

O autor conclui que, embora haja, no curso analisado, ementas nas quais a Álgebra Linear é correquisito ou pré-requisito, ao longo de sua formação, o aluno não tem oportunidade, nas disciplinas relativas a essas ementas, de trabalhar com a noção de base como ferramenta extramatemática. No entanto, os professores entrevistados ressaltaram que os alunos de Ciência da Computação necessitam da Álgebra Linear para ganhar maturidade teórica e para poder utilizá-la como ferramenta. Portanto, conhecendo a Álgebra Linear subjacente às teorias de sua área de interesse, o aluno será mais competente em sua utilização.

Quadro 11: Resultados obtidos com base no constructo de recursos-meta associado à Dialética Ferramenta-objeto

Silva (2005)	<p>Os dados obtidos <i>não permitem perceber situações propiciadas pelos assuntos tratados nas disciplinas específicas da Ciência da Computação que deem oportunidade de ampliar a compreensão da noção de base por servirem à Dialética Ferramenta-objeto.</i></p> <p>O curso exige conhecimentos de <i>Geometria Analítica</i> que assumem tanto papel de <i>ferramenta</i> quanto de <i>objeto</i>, principalmente na disciplina <i>Tópicos Especiais de Computação</i>, contexto certamente propício à dialética.</p> <p>As entrevistas evidenciaram as situações nas quais a <i>noção de base</i> de um espaço vetorial poderia ser utilizada como <i>ferramenta explícita</i> em temas do curso de Ciência da Computação: resolução de problemas de <i>Programação Linear, matróides</i> (noção derivada do conceito de base de um espaço vetorial), situações de <i>computação gráfica, autômatos</i> (máquinas ou robôs que operam de forma automática), <i>teoria dos grafos e otimização</i>.</p>
-----------------	---

Fonte: dados da pesquisa

3.4 Teoria Antropológica do Didático

A Teoria Antropológica do Didático (TAD), desenvolvida por Yves Chevallard, foi o subsídio teórico empregado por Nomura (2008) na sua dissertação, cujo objetivo é destacado no Quadro 12.

Quadro 12: Pesquisa subsidiada pela Teoria Antropológica do Didático

Autor (Ano)	Objetivo	Referencial teórico
Joelma Iamac Nomura (2008)	Investigar, por meio de entrevistas com <i>professores</i> , por que e como a Álgebra Linear deve ser lecionada em uma graduação em Engenharia Elétrica	Teoria Antropológica do Didático

Fonte: dados da pesquisa

Fundamentada no que preconiza Almouloud (2007), Nomura (2008, p. 25) ressalta que a TAD “estuda as condições de possibilidade e funcionamento de sistemas didáticos, entendidos como relações sujeito-instituição-saber”. No âmbito desse referencial, consideram-se objetos de diferentes tipos, entre os quais, “as instituições, os indivíduos e as posições que estes ocupam em tais instituições” (Nomura, 2008, p. 30).

Na TAD, um conceito fundamental é o de praxeologia ou organização praxeológica, que se constitui de um bloco prático-técnico, referente ao saber-fazer e composto por tarefas (o que fazer) e técnicas (maneira de fazer), e por um bloco tecnológico-teórico referente ao saber, que abrange tecnologias (justificativa da técnica) e teorias (justificativa da tecnologia).

No Quadro 13, apresentamos as justificativas de Nomura (2008) para o emprego do mencionado referencial em sua investigação. Na visão da autora, as justificativas para o emprego da TAD reforçam sua concepção de que as respostas para as questões de sua pesquisa seriam obtidas por meio de uma análise da organização praxeológica formada pelo conjunto objeto, pessoa e instituição. Em seguida, no Quadro 14, sintetizamos os resultados obtidos pela pesquisadora.

Quadro 13: Justificativas para a utilização da Teoria Antropológica do Didático

Autor (Ano)	Justificativas para utilização da teoria
Nomura (2008)	<p>Com base na TAD, busca-se <i>articular</i> as diversas noções expostas na pesquisa:</p> <ul style="list-style-type: none"> ✓ <i>objeto</i> (alguns conceitos elementares presentes na disciplina Álgebra Linear) ✓ <i>pessoa</i> (participantes da investigação: professores e alunos) ✓ <i>instituição</i> (universidades selecionadas para pesquisa, além de documentos oficiais que regulamentam um curso de Engenharia Elétrica: Diretrizes Curriculares para os cursos de Engenharia e matrizes curriculares das universidades investigadas). <p>Essa articulação permite <i>pensar de maneira unificada</i> muitos <i>fenômenos didáticos</i> que surgem no final da análise da <i>organização praxeológica</i> do objeto matemático em estudo.</p>

Fonte: dados da pesquisa

Quadro 14: Resultados obtidos com base na Teoria Antropológica do Didático

Nomura (2008)	<p>A análise dos <i>documentos oficiais</i> revela que o estudo de <i>disciplinas matemáticas</i>, como a Álgebra Linear, está diretamente relacionado à <i>valorização</i> de campos de <i>pesquisa</i> e ao desenvolvimento de <i>novas tecnologias</i>.</p> <p>A Universidade I, em seus documentos, enfatiza a <i>relação existente</i> entre a disciplina Álgebra Linear e as <i>demais disciplinas</i> que compõem a graduação, entre elas, Sistemas e Sinais I e II, Controle, Projeto e Implementação de Filtros Digitais, Modelagem de Processamento de Sinais.</p> <p>Nos documentos, ressalta-se a importância do <i>papel ativo do aluno e do professor</i> na construção do conhecimento, valorizado pela <i>ação interdisciplinar</i> decorrente de projetos e atividades ao longo do curso.</p> <p>Os entrevistados destacaram a <i>necessidade de formação de pesquisadores</i> em nosso país, de forma a reduzir a dependência de tecnologia externa.</p> <p>Para a expansão dos centros de pesquisa e desenvolvimento, as universidades devem formar o <i>engenheiro conceitual e generalista, embasado em conhecimentos matemáticos</i>, entre eles a Álgebra Linear.</p> <p>Na visão dos entrevistados, as <i>relações existentes entre disciplinas matemáticas e disciplinas específicas devem ser explicitadas</i> aos alunos. Por exemplo, relacionam-se com a Álgebra Linear: Teoria Eletromagnética, Circuitos Elétricos, Processamento de Sinais etc.</p> <p>Os entrevistados citaram a importância do <i>trabalho com projetos e modelagem</i> que instigasse a integração dos conteúdos trabalhados.</p> <p>Necessidade de reforçar a <i>interação entre os professores</i> das diversas disciplinas.</p>
------------------	---

Fonte: dados da pesquisa

Os professores entrevistados pela autora salientam também que é importante antecipar, na Álgebra Linear, conteúdos tratados nas disciplinas subsequentes, por meio de exercícios de aplicação discutidos em sala de aula ou de *softwares* que estejam ao alcance dos alunos.

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Por meio dos dados apresentados, notamos que nas dissertações enfocando questões relativas à Álgebra Linear defendidas por estudantes vinculados ao GPEA, foram contempladas quatro teorias da Didática Francesa: Teoria dos Registros de Representação Semiótica, Recursos-meta e Alavancas-meta, Dialética Ferramenta-objeto e Teoria Antropológica do Didático. Quatro das cinco pesquisas analisadas dedicam-se a reflexões sobre a aprendizagem e somente uma a questões relacionadas ao ensino, explicitando-se, portanto, possibilidades de novas investigações que tratem de outras teorias da Didática da Matemática e de reflexões voltadas ao professor de Álgebra Linear e, consequentemente, ao ensino. Além disso, há demanda no âmbito do Grupo, e possivelmente fora dele, por teses relativas à Álgebra Linear subsidiadas por referenciais franceses da Didática da Matemática.

Os constructos teóricos *recursos-meta* e *alavancas-meta* subsidiam discussões tanto acerca do ensino quanto acerca da aprendizagem, uma vez que, enquanto Padredi (2003) dedica-se à análise da potencialidade do recursos-meta presentes no discurso de professores de se transformarem em alavancas-meta para os estudantes, Oliveira (2005) investiga os efeitos gerados pelos recursos-meta mobilizados por um docente em suas aulas no que se refere à aprendizagem dos discentes, identificando quais dos recursos-meta, de fato, se tornaram alavancas-meta para alguns dos estudantes. Em Silva (2005), as noções de recursos-meta e alavancas-meta foram associadas a preceitos da Dialética Ferramenta-Objeto com o objetivo de analisar os recursos-meta utilizados por docentes do curso de Ciência da Computação e quais disciplinas específicas dessa área possibilitam aos estudantes a mobilização de conhecimentos de Álgebra Linear ora com estatuto de objeto, ora com estatuto de ferramenta.

Assim como Silva (2005) dedica-se ao estudo de questões relativas ao ensino de Álgebra Linear em um curso que não visa a formar matemáticos, no caso a Ciência da Computação, Nomura (2008) também contribui com reflexões a esse respeito, mas enfocando o curso de Engenharia Elétrica e recorrendo à Teoria Antropológica do Didático com o objetivo de compreender por que e como a Álgebra Linear deve ser ensinada em tal contexto.

Constitui-se como um caminho para novas investigações, tanto no Grupo quanto fora dele, o estudo de questões relacionadas ao ensino e à aprendizagem de Álgebra Linear em outros cursos dos quais essa disciplina está a serviço. Tais pesquisas podem ser subsidiadas pelos constructos recursos-meta e alavancas-meta articulados a outros referenciais além da Dialética Ferramenta-objeto e também por outras teorias da Didática Francesa além da TAD.

Finalmente, abordando outra questão fundamental ao se discutir o ensino de qualquer conteúdo matemático, os livros didáticos, Grande (2006) analisa alguns deles visando a compreender, com o auxílio da Teoria dos Registros de Representação Semiótica, quais registros predominam na apresentação da noção de dependência linear e nas atividades propostas a ela relacionadas. Esse tipo de análise poderia ser ampliado para demais temas da Álgebra Linear e considerar outros livros didáticos (tanto nacionais quanto internacionais), particularmente os mais recentes. Além disso, referenciais diferentes poderiam ser empregados.

Em síntese, no que se refere ao ensino e à aprendizagem de Álgebra Linear nas dissertações desenvolvidas na esfera do GPEA, as teorias da Didática Francesa da Matemática possibilitaram iluminar aspectos relativos ao *discurso do professor*, aos *efeitos desse discurso na aprendizagem dos estudantes*, ao que é *apresentado nos livros didáticos* e ao *ensino em cursos nos quais a Matemática não é o principal objeto de estudo, mas está a serviço da formação de determinado profissional*.

REFERÊNCIAS

BIEMBENGUT, Maria Salett. Mapeamento como princípio metodológico para a pesquisa educacional. In: MACHADO, N. J.; CUNHA, M. O. (org.). **Linguagem, conhecimento, ação: ensaios de epistemologia e didática**. São Paulo: Escrituras Editora, 2003. p. 1-11.

GRANDE, André Lúcio. **O conceito de independência e dependência linear e os Registros de Representação Semiótica nos livros didáticos de Álgebra Linear**. 2006. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Faculdade Ciências Exatas e Tecnologia, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006.

NOMURA, Joelma Iamac. **Como sobrevivem as diferentes noções de Álgebra Linear nos cursos de Engenharia Elétrica e nas Instituições**. 2008. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Faculdade Ciências Exatas e Tecnologia, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008.

OLIVEIRA, Luís Carlos Barbosa de. **Como funcionam os recursos-meta em aula de Álgebra Linear**. 2005. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Faculdade Ciências Exatas e Tecnologia, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

PADREDI, Zoraide Lúcia do Nascimento. **As alavancas-meta no discurso do professor de Álgebra Linear**. 2003. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Faculdade Ciências Exatas e Tecnologia, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2003.

SILVA, Carlos Eduardo da. **A noção de base de um espaço vetorial é trabalhada como “ferramenta explícita” para um curso de Ciência da Computação?** 2005. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Faculdade Ciências Exatas e Tecnologia, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

Submetido em setembro de 2024.

Aprovado em julho de 2025.

Barbara Lutaif Bianchini

Doutora em Educação (Psicologia da Educação), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP). Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP), São Paulo, São Paulo, Brasil. ID Lattes: 2660310999149810. Orcid ID: 0000-0003-0388-1985.

Contato: barbara@pucsp.br

Gabriel Loureiro de Lima

Doutor em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP). Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP), São Paulo, São Paulo, Brasil. ID Lattes: 6821823260967114. Orcid ID: 0000-0002-5723-0582.

Contato: gllima@pucsp.br