

RUPTURAS EM LIMITES DE ESTRUTURAS MATEMÁTICAS DA MÚSICA OCIDENTAL

RUPTURES IN THE LIMITS OF OCCIDENTAL MUSIC STRUCTURES

CAMARGOS, Chrisley Bruno Ribeiro¹

CALDEIRA, Ademir Donizeti²

RESUMO

O objetivo deste trabalho foi descrever como o desenvolvimento racional da matemática veio influenciando a música em momentos no decorrer da história e, de certa forma, impondo limites racionais às formas musicais ocidentais eurocêntricas praticadas até o início do século XX. Para refletir sobre as influências matemáticas na música, recorreu-se a uma abordagem qualitativa por meio da análise bibliográfica de temas, como a escrita musical, o desenvolvimento de sistemas de afinação e a evolução do sistema tonal, tratando especificamente da partitura de notação e do chamado temperamento igual. A partir disso, ponderou-se sobre como a música contemporânea vem sendo influenciada tecnológica e culturalmente por outras vertentes, muitas vezes adversas ao sistema racional temperado. Essa reflexão envolveu alguns elementos da filosofia de Wittgenstein e de ideias foucaultianas, nas quais a crítica se fundamenta na análise dos limites e na reflexão sobre eles. Dessa forma, a discussão transcorreu sobre o modo como as formas musicais contemporâneas puderam transbordar os limites impostos pela racionalidade musical, fortemente influenciada pela linguagem matemática.

Palavras-chave: Matemática. Racionalidade. Escrita Musical. Temperamento Igual.

ABSTRACT

The purpose of this article was to describe how the rational development of mathematics has been influencing music throughout history and, in a certain way, imposed rational limits to the occidental eurocentric musical forms practiced until the beginning of the 20th century. To reflect on the mathematical influences in music, a qualitative approach was used through the bibliographical analysis of themes such as musical writing, the development of tuning systems and the evolution of the tonal system, specifically dealing with the notation score and the equal temperament. From this, a reflection was made on how contemporary music has been influenced technologically and culturally by other slopes, sometimes adverse to the tempered rational system. This analysis included the use of some elements of Wittgenstein's philosophy and Foucault's ideas, in which criticism is based on the analysis of limits and considerations on them. Thus, the discussion also covered aspects on how the contemporary musical forms could overflow the limits imposed by the musical rationality strongly influenced by the mathematical language.

Keywords: Mathematics. Rationality. Musical Writing. Equal Temperament.

1 INTRODUÇÃO

Este artigo apresenta excertos de uma tese de doutorado do Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal de São Carlos / SP (UFSCar). As argumentações aqui tecidas são pautadas em um estudo teórico-bibliográfico, que buscou não apenas analisar os limites e os efeitos que o racionalismo matemático possa ter lançado sobre a música ocidental por meio do

¹ Doutor em Educação pela Universidade Federal de São Carlos (UFSCar). Docente do Instituto Federal de Minas Gerais (IFMG), Formiga, MG, Brasil. Endereço eletrônico: chrisley.camargos@ifmg.edu.br

² Doutor em Educação pela Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP). Docente do Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal de São Carlos (UFSCar), São Carlos, SP, Brasil. Endereço eletrônico: mirocaldeira@gmail.com

sistema tonal e da divisão das notas, na busca por um modelo de temperamento igual, mas também a viabilidade de transpor esses limites por meio de novas possibilidades sonoras que surgiram no século XX.

A pesquisa apresenta uma abordagem qualitativa, propiciada pela análise bibliográfica de trabalhos acadêmicos consultados no Catálogo de Teses e Dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) que apresentaram a temática: “matemática e música”; de livros e artigos que descrevem a história da música ocidental, nos quais se buscaram interseções com aspectos da história da matemática, tendo como foco: a escrita musical, o racionalismo presente no desenvolvimento de sistemas de afinação, a evolução do sistema tonal e as formas de temperamento musical que tendiam a seguir modelos aparentemente matemáticos.

Além da análise bibliográfica, a pesquisa como um todo também se pautou em um trabalho de campo desenvolvido em Curso de Licenciatura em Música de uma Universidade pública, em que foram utilizados instrumentos para produção dos dados, como: diário de campo, entrevistas e gravações de aulas para posterior análise (quando permitidas), nos momentos em que o pesquisador acompanhou disciplinas do curso referido, as quais apresentaram abordagens históricas sobre a música, sobre diferentes formas musicais e sobre temas que envolviam criação e experimentação de instrumentos musicais acústicos, eletroacústicos e eletrônicos. Isso nos levou a questionar as rupturas nos limites das estruturas matemáticas da música ocidental e a refletir sobre elas.

Nosso objetivo é mostrar como o modelo do racionalismo matemático também se encontra presente em fases da história da música ocidental eurocêntrica e como a música contemporânea vem buscando, de certa forma, caminhos que transcendam os limites impostos por estruturas matemáticas.

De início, teceremos reflexões remontando aos momentos históricos que culminaram no sistema tonal, desde o período helênico da Antiguidade greco-romana, passando pela Idade Média europeia, até o período iluminista do século XVIII, quando e onde a formatação musical, em uma tentativa de universalidade, se deu em um sistema matemático, denominado “temperamento igual”. Depois, evocando acontecimentos a partir do século XIX, mostraremos também o declínio do sistema tonal e, ao mesmo tempo, a forma como se deu a ultrapassagem dos limites gerados pelo sistema musical estabelecido no século XVIII.

Para fomentar a discussão teórica neste artigo, refletiremos sobre alguns aforismos das *Investigações filosóficas* de Wittgenstein, ideias sobre os limites da racionalidade, descritas em Foucault e em eruditos do contexto musical histórico eurocêntrico.

Dessa forma, valendo-nos da história da música ocidental como aporte, procuraremos debater a influência, o efeito rigoroso e controlador que a matemática acadêmica, ou mesmo a lógica matemática, tem sobreposto à sociedade, desde os pitagóricos até os dias atuais, neste mundo ocidental altamente informatizado. Assim, mais especificamente, descreveremos influências de uma linguagem cartesiana na constituição da partitura musical ocidental – por vezes conhecida no meio musical como uma “partitura de precisão” – e de pensamentos matemáticos na divisão das frequências sonoras dentro de uma escala de 12 notas que culminou no “temperamento igual”.

2 INFLUÊNCIAS DA RACIONALIDADE MATEMÁTICA EM MEIO À HISTÓRIA DA MÚSICA

Nada mais se opõe ao jogo formal das transposições... (Pierre Lévy, 1998).

Conforme afirma Vilela (2013, p. 16-17), as características predominantemente difundidas a respeito da matemática são “exatidão, precisão, previsão, unicidade e verdade”, e os valores propalados são os de racionalidade, progresso, objetividade, controle, abstração, disciplina, simplificação, uniformidade, dentre outros similares. São tais características e valores que, contemporaneamente, nos instigam quase universalmente a acreditar num único caminho a seguir, numa única resposta possível, fazendo com que, cada vez mais, sejamos formatados e influenciados por esse mito que criamos da matemática perfeita, ou seja, de uma linguagem ideal (VILELA, 2013).

Wittgenstein (2014, p. 60, grifo no original), em sua obra *Investigações filosóficas*, ao falar sobre considerarmos a lógica como uma “ciência normativa”, uma “linguagem ideal”, nos indica que a palavra “ideal” seria enganosa:

Ao passo que a lógica não trata em absoluto da linguagem – respectivamente do pensamento – no mesmo sentido que uma ciência da natureza trata de um fenômeno da natureza, e o máximo que se pode dizer é que nós *construímos* linguagens ideais. Mas, aqui a palavra “ideal” seria enganosa, pois isto soa como se estas linguagens fossem melhores, mais perfeitas, do que a nossa linguagem corrente; e como se o lógico fosse necessário, para mostrar aos homens, finalmente, que aspecto tem uma proposição correta.

Essa busca pela perfeição, por uma linguagem ideal que representasse fenômenos observados, já pôde ser percebida há aproximadamente 2500 anos, quando Pitágoras e seus discípulos esticaram uma corda que emitia um som para, assim, buscar relações entre a matemática e a música. De acordo com Lévy (1998, p. 72), esses filósofos e cientistas helênicos, conhecidos como “os pitagóricos”, expuseram um primeiro sistema em que algum tipo de escrita, de linguagem, representasse o som, ou melhor, uma representação de notas musicais por meio de números, “[...] forjaram as noções fundamentais sobre as quais continuam apoiando-se a análise e a compreensão da música: tom, ritmo, melodia e harmonia”.

De acordo com Abdounur (1999), Pitágoras inventou um instrumento de uma corda (monocórdio), capaz de verificar a teoria musical daquela época. Pitágoras teria esticado uma corda musical que produzia um determinado som, que tomou como fundamental o tom. Fez, na corda, marcas que a dividiam em 12 seções iguais. Quando tocou a corda na 6.^a marca, que correspondia à metade do comprimento, Pitágoras observou que se produzia a oitava (a 8.^a equivaleria a 1/2 corda). Tocou depois na 9.^a marca e resultou a quarta (a 4.^a representaria 3/4 da corda). Ao tocar a 8.^a marca, obtinha-se a quinta (a 5.^a correspondia a 2/3 da corda). Assim, as frações 1/2, 3/4, 2/3 equivaleriam, respectivamente, à oitava, à quarta e à quinta notas da escala, que conhecemos hoje como: Dó, Ré, Mi, Fá (4.^a), Sol (5.^a), Lá, Si e Dó (8.^a). Pitágoras verificou ainda que os sons produzidos, ao tocar em outras marcas, não eram tão consonantes quanto os anteriores.

As razões pitagóricas utilizadas para representar as relações entre as notas e o comprimento da corda eram: Dó = 1, Ré = 8/9, Mi = 64/81, Fá = 3/4, Sol = 2/3, Lá = 16/27, Si = 128/243 e Dó (8.^a) = 1/2. Essas frações foram calculadas com o *Percurso das Quintas*, baseado em uma razão igual a 2/3 entre as quintas.

O Percurso das Quintas envolve cálculos matemáticos, utilizando a fração $2/3$, correspondente à 5.^a nota. Exemplificando, o Percurso das Quintas obtém as frações relativas às outras notas da escala diatônica: “Dó, Ré, Mi, Fá, Sol, Lá, Si, Dó”, por meio dos seguintes cálculos:

Vale-se da escala diatônica de Dó como referência. Sabendo-se que a 4.^a nota (Fá) seria equivalente a $3/4$, calculando a 5.^a de Fá, obtém-se:

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$$

A fração $1/2$ representa uma nota Dó que, apesar de ser uma 5.^a correspondente à nota Fá, também equivale à oitava (8.^a), conforme a experiência do monocórdio.

Sabendo-se que a 1.^a nota (Dó) corresponde ao inteiro 1, e que sua 5.^a representa a fração $2/3$, então já se têm as seguintes frações:

Dó	Ré	Mi	Fá	Sol	Lá	Si	Dó
1	?	?	$3/4$	$2/3$?	?	$1/2$

Para calcular as frações alusivas às notas que faltam, é necessário estabelecer que tais frações estejam no intervalo $[1/2, 1]$. Assim, utilizando o Percurso das Quintas, é possível encontrar as outras frações por meio dos seguintes cálculos:

Seja uma fração f . Para encontrar sua quinta equivalente, faz-se: $f_n \cdot \frac{2}{3} = f_{n+1}$

Exemplificando, para calcular a 5.^a equivalente à nota Sol, faz-se:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

Porém, $4/9$ é menor do que $1/2$; então, é necessário multiplicar o resultado por 2, que corresponderia à oitava da fração $4/9$, conforme a relação entre tônica (1) e oitava ($1/2$), descrita na experiência de Pitágoras. Logo:

$$\frac{4}{9} \cdot 2 = \frac{8}{9}, \text{ sendo } \frac{1}{2} < \frac{8}{9} < 1.$$

Então, para a 5.^a equivalente à nota Sol, que corresponde à nota Ré, tem-se a fração $8/9$.

Assim, é possível estipular o seguinte modelo matemático para encontrar as notas que faltam:

$$\left(\frac{2}{3}\right) \cdot f_i = f_j, \text{ se } \frac{2}{3} f_i > \frac{1}{2} \text{ e}$$

$$2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \cdot f_i = f_j, \text{ se } \frac{2}{3} f_i < \frac{1}{2}.$$

Sendo f_j a quinta de f_i .

Portanto, depois de alguns cálculos utilizando a fração $2/3$, obtém-se o Modelo Pitagórico:

Dó	Ré	Mi	Fá	Sol	Lá	Si	Dó
1	$8/9$	$64/81$	$3/4$	$2/3$	$16/27$	$128/243$	$1/2$

Nesse modelo, se estabelece a fração $8/9$ para o espaço de um tom³ e a fração $243/256$ para o espaço de um semitom.

³ O tom corresponde ao espaço entre duas notas e também pode ser expresso como a soma de dois semitons; o semitom é menor espaço entre duas notas na escala cromática: Dó, Dó#, Ré, Ré#, Mi, Fá, Fá#, Sol, Sol#, Lá, Lá#, Si, Dó, utilizada constantemente na música ocidental temperada. Exemplificando, de Lá para Si há um tom, de Si

Esse modelo pitagórico foi sendo modificado no decorrer dos séculos, sofrendo influências à medida que o corpo de conhecimentos abstratos da matemática se expandiu, conforme mostraremos em meio às discussões sobre a partitura musical, que, de modo paralelo aos estudos das divisões feitas em sistemas de afinação, também sofreu, em seu sistema de notação, influências aparentemente de uma logicidade matemática.

Lévy (1998, p. 72) afirma que, no século II (d.C.), a “ritmografia e a melografia são ocasionalmente mencionadas como matérias de exame”. A teoria musical para os gregos dessa época, assim como para os pitagóricos, era considerada um dos ramos da ciência, ocupando lugar dentro do “*quadrivium*”, formado por música, aritmética, geometria e astronomia. Assim, segundo Lévy (1998, p. 73), na alvorada helênica iniciou-se um processo de “[...] formalização, certo tipo de universalização abstrata e um começo de projeção da música num sistema de *signus*”.

Foi na Idade Média europeia que a notação da música passou por uma nova evolução racional, pois, “[...] das neumas do século X, indicando apenas a linha geral da melodia, até o plano óptico do século XVII, a notação adquire uma precisão cada vez maior” (LÉVY, 1998, p. 73). As neumas, citadas por Levy (1998), remontam às primeiras notações musicais feitas em uma pauta; porém, este tipo de notação era “[...] ainda bastante *imperfeita*; representava a altura das notas, mas não indicava sua duração relativa” (GROUT; PALISCA, 2014, p. 83, *itálico nosso*). Apesar de encontrarem sinais que aparentemente se referiam a ritmos em muitos dos manuscritos encontrados da Idade Média, os musicólogos modernos não conseguiram firmar padrões quanto aos significados desses sinais. Em alguns casos, as linhas de símbolos das neumas apresentavam cores diferentes para significar tons diferentes. Por exemplo, as linhas vermelhas representavam a nota Fá, e as amarelas, o Dó (GROUT; PALISCA, 2014).

De acordo com Grout e Palisca (2014, p. 81), durante a Idade Média houve um grande empenho para criar um sistema de notação musical que atendesse aos mais variados cânticos religiosos que emergiam, porém ainda eram transmitidos oralmente; portanto, já no século IX começaram a utilizar os sinais denominados “neumas” acima das palavras nos cânticos, “indicando uma linha melódica ascendente (/), uma linha descendente (\) ou uma combinação de ambas (^)”. Grout e Palisca (2014, p. 82) assim explicam essa evolução:

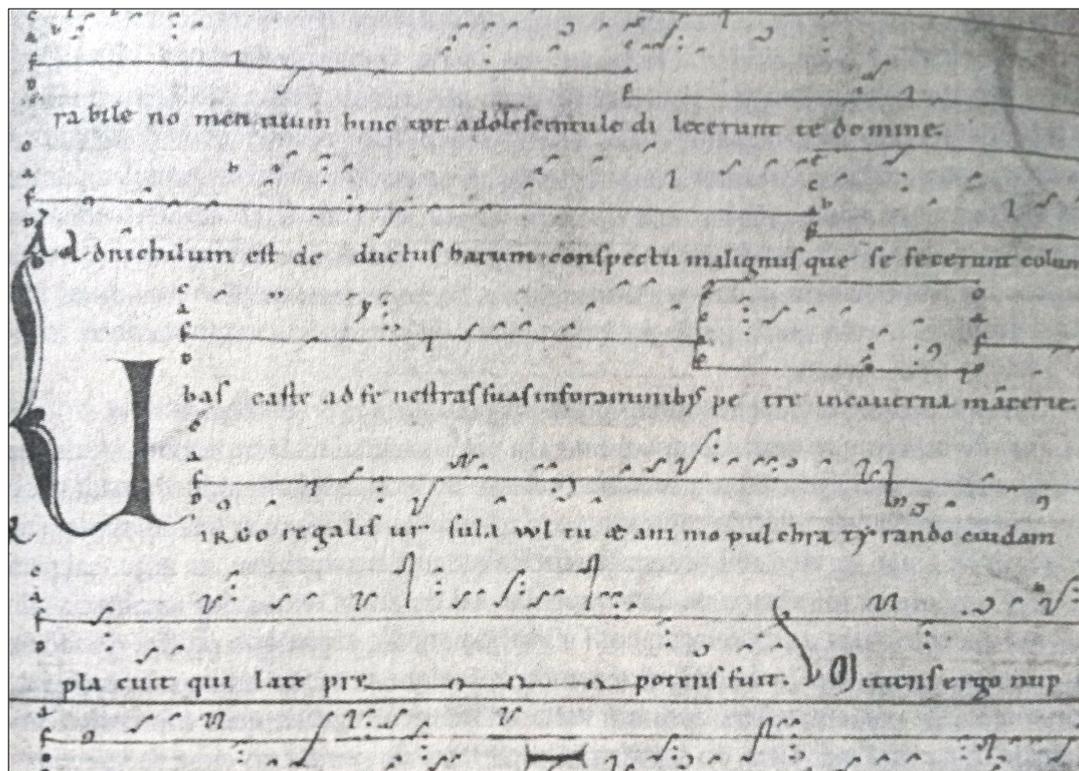
Registrrou-se um progresso decisivo quando um escriba traçou uma linha horizontal vermelha para representar a nota *fá* e agrupou os neumas em torno desta linha; mais tarde uma segunda linha, geralmente amarela, foi acrescentada a esta, representando o dó. No século XI Guido de Arezzo descrevia já a pauta de quatro linhas que então se usava e na qual se faziam corresponder, através de letras, as linhas às notas fá, dó e, por vezes, sol (f, c e g) – letras que acabaram por dar origem às nossas modernas claves.

Observemos na Figura 1 a seguir, no canto esquerdo, que as cifras c, a, f, d correspondem às notas Dó, Lá, Fá e Ré; segundo Grout e Palisca (2014), foi a partir dessas letras, visíveis nas antigas notações, que se originaram as claves utilizadas no sistema moderno de escrita musical.

para Dó um semitom (ou meio tom). O tom (ou tônica) é também uma denominação que corresponde à primeira nota de uma escala. Por exemplo, na escala diatônica, tendo a nota Dó como o tom, teremos: Dó (1.^a), Ré (2.^a), Mi (3.^a), Fá (4.^a), Sol (5.^a), Lá (6.^a), Si (7.^a) e Dó (8.^a).

Uma das características legadas à música europeia por essa evolução do sistema de notação e do sistema de afinação foi a polifonia⁴; muitos musicólogos, conforme frisa Lévy (1998), concordam que esse privilégio polifônico da música europeia é uma característica única entre outras culturas existentes. Grout e Palisca (2014, p. 97) salientam que “[...] a polifonia enquanto tal não é exclusivamente ocidental, mas foi a nossa música que, mais do que qualquer outra, se especializou nesta técnica”.

Figura 1: Neumas (notação musical feita por Guido de Arezzo, século XI)



Fonte: Grout e Palisca (2014, p. 83).

Podemos dizer que, paralelamente à evolução da escrita musical, necessária para registrar cada vez com mais detalhes as diversas notas que emergiam em melodias polifônicas, as notas musicais começaram a ter suas frequências analisadas por teóricos como Gioseffo Zarlino (1517-1590), Marin Mersenne (1588-1648) e Leonhard Euler (1707-1783), que avançariam para além das frações pitagóricas e continuariam a aperfeiçoar as relações entre matemática e música, em especial, lidando com as frequências das notas, que pareciam tender a bailar em um sarau polifônico.

Conforme observamos em Grout e Palisca (2014) e de acordo com Abdounur (1999), a supremacia das razões pitagóricas citadas anteriormente percorreu toda a Idade Média até o século XVI, sendo substituída gradativamente por outras razões, algumas sob o influxo de teorias matemáticas, como o desenvolvimento dos logaritmos e da divisão em progressão geométrica proporcionada pelo temperamento igual.

⁴ Ao contrário da monofonia, que se refere a uma única linha melódica, a um único som, a polifonia remete a uma combinação simultânea de vários sons, várias notas – por exemplo, um músico fazendo a nota dó, o outro fazendo uma nota fá e outro fazendo uma nota sol seria uma multiplicidade sonora buscando uma melodia.

Rodrigues (1999) descreve que a sequência de frações pitagóricas foi aprimorada no século XVI pelo padre italiano Gioseffo Zarlino, quando ele remodelou algumas relações de frequência que prevaleciam no sistema pitagórico. Zarlino tentou substituir frações pitagóricas mais complexas por outras mais simples, ou seja, tendo como base a escala diatônica: Dó, Ré, Mi, Fá, Sol, Lá, Si, modificou as notas Mi(3.^a), Lá(6.^a) e Si(7.^a), que resultaram em relações matemáticas (em termos de frequência) dadas, respectivamente, pelas frações: 5/4, 5/3 e 15/8.

De acordo com Bromberg (2014, p. 16), “Zarlino, apesar de ser mestre-capela, era um músico teórico, cuja prática musical era restrita”. Para ele, o conhecimento matemático das relações musicais tinha maior importância que a própria prática musical. Assim, conforme vimos em Camargos (2011, p. 52), o padre italiano construiu uma nova sequência de frequências, baseada na pitagórica, na qual o intervalo de terça apresentava uma relação de frequências 5/4, que existe na série harmônica. “Supondo-se que a primeira nota, *dó*, tenha frequência 1, obteremos para as outras notas as seguintes frequências: (Dó = 1, Ré = 9/8, Mi = 5/4, Fá = 4/3, Sol = 3/2, Lá = 5/3, Si = 15/8 e Dó (8.^a) = 2” (p. 51).

No entender de Rodrigues (1999), como Zarlino manteve as outras notas inalteradas, isso não resolveu o problema de transposição da época, que buscava um temperamento igual. As primeiras aproximações numéricas das gamas do que viria a ser chamado de “temperamento musical” eram geométricas e mecânicas. Segundo Rodrigues (1999), um instrumento mecânico chamado de mesolábio, constituído de três retângulos móveis, foi reproduzido na edição de 1573 da *Istitutione armoniche*, de G. Zarlino, como “um dos três métodos que ele expôs na sua obra *Sopplimenti musicali* (Veneza, 1588)”, numa tentativa de “dividir a oitava diretamente em 12 partes ou semitons iguais e proporcionais” (p. 23).

Conforme relato de Abdounur (1999), outro matemático que contribuiu com estudos sobre as formas de afinação, já no século XVII, foi o monge francês Marin Mersenne, que também era filósofo e músico teórico. Mersenne desenvolveu, em 1636, a obra *L'harmonie universelle*, em que aborda relatos de distintos experimentos utilizados nos estudos sobre o som, considerando a consonância como o papel principal de uma composição e refletindo sobre as relações observadas entre matemática e música. Mersenne apresenta ainda, nessa obra, considerações sobre as leis de vibração de uma corda esticada: estipula padrões físicos de vibrações da corda e determina como a frequência diminui em relação às suas características físicas.

Em meio a essa efervescência de pensamentos matemático-musicais, a escrita musical parece ter acompanhado essa tendência racionalista. Lévy (1998, p. 73) observa que, na evolução do sistema de notação musical, “[...] alturas, ritmos, passos, instrumentações e até as indicações de força e expressividade, as mínimas nuances [...]” puderam ser determinados.

Nesse decorrer dos tempos, então, as neumas da Idade Média foram evoluindo para um sistema de escrita cada vez mais detalhado, e isso foi um “[...] acontecimento tão crucial para a história da música ocidental como a invenção da escrita o foi para a história da linguagem” (GROUT; PALISCA, 2014, p. 82). Com as possibilidades de registro sonoro, inicialmente por meio de impressão, que culminou na difusão da imprensa no século XVI, “a partitura impressa fortaleceu a ideia de autoria, e com isso delineou a separação entre o compositor e o intérprete; disseminou o conhecimento musical, possibilitando a fixação dos traços composicionais e de uma teoria da música” (IAZZETTA, 2009, p. 29-30).

Com essa formalização inerente ao sistema de escrita musical, ocorrida entre os séculos XVI e XVIII, conforme descrito por Iazzetta (2009), a música impressa se disseminou pela Europa. No entanto, de nada adiantaria uma escrita logicamente padronizada, se as afinações (as

frequências) das notas não seguissem uma standardização que permitisse que os intérpretes pudessem executar as músicas conforme a ideia composicional. Assim, começaram a surgir padronizações nas divisões das frequências das notas, culminando para uma divisão semitonal na música, denominada “temperamento igual”. Essa forma de temperamento musical ocidental é constituída pela divisão da oitava em 12 notas, cujos intervalos de semitom se encontram em divisão simétrica, ou melhor, em progressão geométrica.

De acordo com Lévy (1998, p. 74), esse “sistema tonal envolve [...] uma graduação contínua e homogênea de semitons que facilita as modulações”. Com o temperamento igual, tornou-se possível realizar a transposição tonal sem alterar o resultado harmônico, o que forneceu homogeneidade e eficiência à música.

Referido por Rodrigues (1999, p. 24), um dos estudiosos responsáveis pela divisão conhecida como o “temperamento igual” foi o matemático Leonhard Euler (1707-1783). Em seus feitos “[...] se encontra uma das mais engenhosas teorias algébricas da divisão da oitava e do grau de consonância dos intervalos musicais”.

Na observação de Camargos (2011, p. 53), o problema consistia em encontrar um fator equivalente ao intervalo de semitom, que, após multiplicar 12 vezes uma frequência inicial (f_0), correspondente a uma determinada nota, atingisse a sua oitava referente a uma frequência que seria o dobro da tônica ($2f_0$). Baseado na progressão geométrica e após a criação dos logaritmos, Euler pesquisou um sistema de afinação que permitiria aos compositores ocidentais transporem ou tocarem qualquer música em quaisquer dos 12 centros tonais⁵, sem distorções geradas por intervalos correlatos, que se apresentavam, até então, como assimétricos em diferentes escalas.

Para Camargos (2011, p. 55), matematicamente isso foi feito da seguinte forma:

$$f_0.f.f.f.f.....f = f_0.f^{12} = 2.f_0.$$

Após algumas operações algébricas simples, podemos concluir que o fator f deve assumir o valor de $2^{1/12}$. Considerando a nota Dó com frequência 1 como referência, obtemos, para as outras notas da gama temperada, os valores: Dó = 2^0 , Dó# = Réb = $2^{1/12}$, Ré = $2^{2/12}$, Ré# = Mib = $2^{3/12}$, Mi = $2^{4/12}$, Fá = $2^{5/12}$, Fá# = Solb = $2^{6/12}$, Sol = $2^{7/12}$, Sol# = Láb = $2^{8/12}$, Lá = $2^{9/12}$, Lá# = Sib = $2^{10/12}$, Si = $2^{11/12}$, Dó = $2^{12/12} = 2$.

Feita essa divisão, houve o que podemos chamar aqui de uma formatação musical, de maneira que se pudesse tocar uma música em diversos tons diferentes, sem alterar o seu sentido, diferentemente do que se praticava no sistema anterior, conhecido como sistema modal⁶. Assim, consoante destaca Lévy (1998), ao final do século XVII e início do século XVIII, chega-se ao temperamento igual, um sistema de divisão das frequências sonoras que remete a uma escala temperada capaz de alterar sutilmente os sons naturais, em busca de uma standardização da escala musical, gerando dessa forma inúmeras possibilidades de transposições sonoras, num jogo

⁵ Os 12 centros tonais correspondem às 12 notas da escala temperada: Dó, Dó#, Ré, Ré#, Mi, Fá, Fá#, Sol, Sol#, Lá, Lá#, Si.

⁶ O sistema modal é um sistema musical baseado nos modos gregos: jônico, dórico, frígio, lídio, mixolídio, eólico e lócrio, conhecidos e utilizados na Europa. Conforme descreve Wisnik (2007, p. 85), entre os gregos, cada modo evidenciava certo “caráter de verdadeiro território sonoro, era associado, pela sua denominação, a uma região ou povo”. O sistema modal consistiu em “uma exploração dos efeitos dados pelas diferentes distribuições de intervalos”, conforme estivessem constituídas as escalas, e dependendo da nota que fosse tomada como tônica, nos mais diferentes contextos (WISNIK, 2007, p. 86).

formal de transposições, baseado em critérios matemático-musicais a que nenhum músico, durante um bom tempo, ousaria se opor.

A neutralidade que fundamenta a música europeia é uma das causas de seu sucesso junto às outras culturas. Fenômeno esse que não é isolado. A ciência moderna, as técnicas de ponta, a economia monetária capitalista (fundada num equivalente geral) são ao mesmo tempo produtos típicos da sociedade ocidental e dispositivos epistemológicos, práticos e sociais que tiram todo seu poder de uma fundamental neutralidade. Ciência, técnica ou capital não são neutros por serem bons ou maus apenas em função do seu uso, mas sim por cruzarem as fronteiras das identidades culturais por baixo demais do solo histórico para que as alfândegas das diversas tradições possam reconhecer a tempo a passagem do estranho radical. (LÉVY, 1998, p. 74)

Torna-se evidente em Lévy (1998) o enquadramento da música ocidental no que ele retrata como “a máquina universo”⁷, devido à sua “neutralidade”, às possibilidades de ser delineada num sistema moderno de escrita, tão cartesiano quanto um gráfico matemático bidimensional, e também por ser transponível para diversos tons, sem mudança de seu sentido musical.

3 TRANSBORDANDO LIMITES DO SISTEMA TONAL

No sistema tonal, pressupõe-se a ideia de que se está trabalhando dentro de uma escala maior ou menor. Resumidamente, se estabelece a noção de que temos um tom, um acorde principal; logo, quando as principais notas utilizadas no desenvolvimento da música parecem girar em torno de um centro, formando uma escala (maior ou menor), tal centro é chamado de tônica (tom). Nesse sistema, têm-se as funções harmônicas: tônica, sobretônica, mediantes, subdominante, dominante, sobredominante, subtônica ou sensível. Em músicas do sistema harmônico tonal, utiliza-se a subdominante para gerar uma sensação de afastamento, sair do repouso, afastar-se, para, em seguida, chegar ao trítono⁸ de dominante. Dessa forma, o compositor cria tensão e instabilidade e resolve isso com o acorde de tônica novamente (CAMARGOS, 2017). O discurso desse sistema, que se baseia principalmente nas relações entre as funções harmônicas denominadas como tônica, subdominante e dominante, veio sofrendo algumas influências e se modificando aos poucos, em meio ao surgimento de novas possibilidades sonoras, conforme descreveremos adiante.

De acordo com Wisnik (2007, p. 115), a primeira grande forma tonal ocorreu no início do século XVIII, precisamente em 1722, quando, com a adoção do temperamento igual, Johann Sebastian Bach (1685 - 1750) pôde escrever o primeiro volume do *Cravo bem temperado*, mesmo ano em que Jean-Philippe Rameau (1683-1764) publicou o seu *Tratado de harmonia*. Após as fugas bachianas, veio a “forma-sonata (que tem seu auge em Haydn, Mozart e Beethoven)”. Mais tarde,

⁷ Seu conceito de “máquina universo” caracteriza-se por meio das ideias de cálculo e algoritmo; uma máquina universal, como, por exemplo, o computador, utiliza uma linguagem numérica, interpretada ou lida por meio de cálculos e executada (colocada em execução) por meio de um algoritmo propício para resolver o problema dado. Lévy (1998, p. 63) também considera os *softwares* como “máquinas universais” e assim pensa pelo fato de utilizarem “regras sintáticas de uma linguagem formal” (matematizada), quando “todos os procedimentos efetivos podem ser descritos nessa linguagem” para obter os resultados procurados.

⁸ Trítono é uma relação sonora que existe no sistema tonal e corresponde à distância de três tons entre uma nota e outra, que gera uma sensação sonora de dissonância. Por exemplo, se tocarmos juntos uma nota Fá e um Si, teremos um trítono. A distância entre Fá e Si é de três tons: Fá - (tom) - Sol - (tom) - Lá - (tom) - Si.

com o declínio do sistema tonal, viria a “melodia infinita wagneriana”, no século XIX, sucedida pelo dodecafonismo de Schönberg, no início do século XX.

Também, já no início do século XX, vários compositores começaram a utilizar a ideia de ruído como elemento de composição sonora, em contraposição ao sistema “ideal” de notas permitido pelo modelo matemático do temperamento igual e pelo sistema de escrita musical já estabelecido como um sistema “ideal” de registro dos sons.

Foram utilizados elementos sonoros de máquinas — sons que buscavam representar uma locomotiva — na obra *Pacific 231*, de Honneger (1924), sons de hélices de avião, como no *Balé mecânico*, de Antheil (1926), dentre outros, consoante descreve Schafer (2012, p. 160-161). Contudo, o verdadeiro revolucionário dessa nova era teria sido “Luigi Russolo, que inventou uma orquestra de ruídos, formada por objetos que zumbiam e uivavam e outras quinquilharias, calculadas para introduzir o homem moderno no potencial musical do novo mundo que surgia”. Foi em 1913 que Luigi Russolo proclamou o evento em seu manifesto intitulado *A arte do ruído* (“*L’Arte dei Rumori*”). Conforme nos informa Schafer (2012, p. 160), “quando a orquestra continuou a se expandir no decorrer do século XX, basicamente se acrescentaram instrumentos de percussão”, até então não utilizados, por não terem altura definida.

Além desses pontos destacados por Lévy (1998) e por Schafer (2012), Iazzetta (2009, p. 43) assinala o poder do registro sonoro como influente no meio musical – não só a partitura como registro sonoro, mas, a partir do momento em que se pôde registrar o som musical para posteriormente ouvi-lo, essa ferramenta também passou a fazer parte da construção do que se entende hoje, no Ocidente, por música:

Deve-se tomar cuidado para não separar os meios de registro musical (partitura, gravação) dos processos de criação (composição e *performance*) e de escuta. As tecnologias do registro devem ser entendidas dentro desses processos e não como meios autônomos de inscrição ou transcrição de informação musical. Tanto a partitura quanto a gravação estão intimamente implicadas na construção daquilo que entendemos por música no Ocidente [...] a quantização dos parâmetros notados (por exemplo, a fixação das doze notas da escala cromática) serviu como um filtro para todos os tipos de desvios e flutuações que são característicos das músicas baseadas na tradição oral ou de culturas não ocidentais.

Sobretudo, a escrita musical, como um sistema cartesiano, pôde registrar várias formas musicais ocidentais provavelmente até a primeira metade do século XX, pois, com as novas formas musicais influenciadas por sons não definidos, espectros sonoros, ruídos etc., já não era possível registrar em um sistema de 12 notas temperadas alguns dos objetos sonoros advindos da música eletroacústica⁹ ou eletrônica. Observemos a partitura de uma música eletroacústica na Figura 2, proveniente de uma peça musical descrita em Camargos (2017). Não há vestígios de limitação temporal ou mesmo de uma temporalidade somente no sentido horizontal (da esquerda para direita), conforme ocorre em compassos de uma notação musical clássica, e os sons emitidos pelos instrumentos criados para o desenvolvimento da obra, representados pelos números 1, 2, 3, 4_A, 4_B

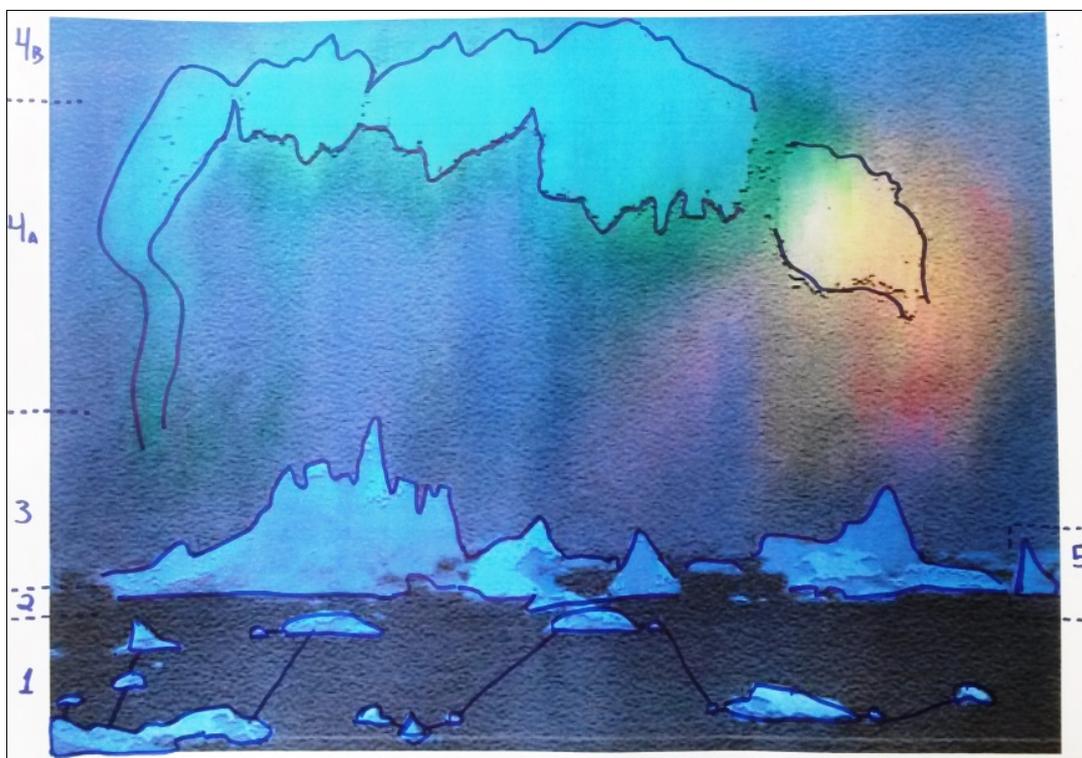
⁹ A música eletroacústica é um tipo musical que utiliza instrumentos elétricos, acústicos e eletrônicos (moduladores, sintetizadores, *samplers*, *softwares* etc.) em suas composições. Podem ser utilizados tanto sons temperados quanto ruídos, silêncio e espectros sonoros sem altura definida. Neste tipo de música, os sons naturais, como são habitualmente ouvidos em sua fonte no meio ambiente, podem ser modulados e modificados.

e 5, seguem linhas que indicam estruturas sonoras mais voltadas à improvisação do que a uma regulamentação nas alturas das notas.

Conforme observamos em Camargos (2017, p. 217), a noção temporal dessa paisagem mostrada na Figura 2 não segue um sentido horizontal nos instrumentos: “Tambor em 1, e as flautas em 4A e 4B”, uma característica distinta daquilo que se vê em uma partitura convencional, além da impossibilidade de limitar as notas emitidas por meio de uma “dialética das alturas” (FENERICH, 2015, p.16), estabelecida por uma relação entre alturas definidas e uma temporalidade distribuída horizontalmente em compassos. Na interpretação da peça musical ilustrada pela Figura 2, os músicos que a criaram interpretam os sons que são emitidos em meio às linhas formadas pela paisagem sonora.

Ao olharmos além do limite ocidental, veremos culturas orientais que utilizam notas que não se enquadram no que chamamos “temperamento igual”. Na Índia, por exemplo, temos cerca de 22 a 28 sons distintos dentro de um espaço ocidentalmente chamado de uma oitava. Apesar de haver formas de registro de submúltiplos tonais, como um quarto de tom, outras formas de culturas podem apresentar, em suas expressões musicais, sons não passíveis de serem identificados dentro do sistema de notas tradicional. Um exemplo, dado por Camargos (2017, p. 106), seria “o canto de povos indígenas africanos como os Bakas (também conhecidos como Pigmeus)”.

Figura 2: Partitura de uma música eletroacústica



Fonte: Camargos (2017, p. 207)

Mesmo dentro do limite que separa a música ocidental de outras culturas musicais, encontramos gêneros que não puderam ser reduzidos ao sistema de escrita musical. Segundo Iazzetta (2009, p. 44), o gênero musical conhecido como *jazz* também se contrapôs “[...] à submissão da música erudita às leis e hierarquias que podem ser anotadas na partitura [...]”. O *jazz* apresenta elementos (trechos) baseados em uma cultura musical de improvisação e, assim, não estaria preso a uma “camisa de força” imposta pela notação musical. Apesar de utilizar também

partituras, grande parte da execução apresenta elementos descritos como cifras, que dão liberdade aos músicos para improvisar, para jogar com as possibilidades sobre o tema, sem se preocupar com os limites impostos pela partitura de precisão. Para lazzetta (2009, p. 44), no século XX esse gênero musical teria se utilizado de uma configuração de registro “muito mais ágil e contundente” que a partitura. Provavelmente, devido sua complexidade e sua característica envolvendo as improvisações, seus registros fizeram uso das gravações.

Desse modo, a linguagem musical – pautada em divisões que poderiam ser expressas como um gráfico bidimensional: altura definida *versus* tempo – teve seus limites, tanto da escrita quanto em termos tonais, transbordados pelas possibilidades alcançadas pela música eletroacústica, pela música eletrônica e também pelo *jazz*, apesar de esses estilos musicais também utilizarem elementos da música ocidental temperada. A formatação musical estabelecida desde o período helênico até os dias atuais tornou-se um terreno escorregadio, um conflito insustentável. Dessa forma, cabe aqui utilizar o pensamento de Wittgenstein (2014, p. 70):

Quanto mais precisamente considerarmos a linguagem real, tanto mais forte se toma o conflito entre ela e nossa exigência. (A pureza cristalina da lógica não se deu a mim como *resultado* -, ela era, sim, uma exigência.). O conflito torna-se insustentável. A exigência corre o risco de se converter em algo vazio. – Entramos por um terreno escorregadio, onde falta o atrito, portanto, onde as condições, em certo sentido, são ideais, mas nós, justamente por isso, também não somos capazes de andar. Queremos andar. Então precisamos do *atrito*. De volta ao chão áspero!

Constatamos possibilidades de extrapolar os limites impostos por uma *linguagem real* expressa em aspectos que permeiam uma *pureza logicista*; ao se transbordarem tais limites, não se está mais preso a um único jogo musical proposto pela lógica, calcado em uma “dialética das alturas” (FENERICH, 2015, p.16). Aos poucos, os artistas passaram a empregar outras formas de composição, outras formas de criação musical, outros sons, além de notas definidas, outras formas temporais, além dos compassos, para assim expor sua arte, arte essa que não podia mais ficar somente sob uma égide construída sobre notas definidas, tempos cronométricos e um sistema de escrita cartesiano. Apesar de alguns compositores ainda se valerem de ferramentas possibilitadas pelo temperamento, como a noção de notas ou a noção de tempo presente na música, novas possibilidades foram estabelecidas pela manipulação do espectro sonoro.

De acordo com Camargos (2017, p. 56), a volta ao solo onde há atrito compreende voltar ao terreno da *práxis* e, “[...] dessa forma, enxergar as significações dentro de diferentes práticas, em meio aos jogos de linguagens estabelecidos em uma forma de vida”, tendo, assim, “uma visão de conjunto – ver os diversos usos – possibilita outras regras, as regras de um jogo mais amplo” (VILELA, 2013, p. 39).

Essa noção de jogos de linguagem¹⁰, apresentada nas *Investigações filosóficas* do filósofo austríaco Wittgenstein, permeia a ideia de que “os significados se constituem e se transformam em

¹⁰ “O significado de uma palavra é seu uso na linguagem” (WITTGENSTEIN, 2014, § 43, p. 38). Quando o filósofo austríaco refletiu sobre a utilização da palavra “significado”, pondera que esse poderia, em um grande número de casos, ser explicado de forma ostensiva, ao apontarmos para aquilo que pretendemos descrever. Contudo, o significado estaria ligado às formas de uso das palavras, à maneira, aos gestos, à entonação de voz, à colocação da palavra em uma frase – tudo isso em meio a uma comunicação, a um diálogo, gerando sentido (significados) para as palavras proferidas. Sobretudo, em meio à comunicação, existem regras que se estabeleceram no desenvolvimento da linguagem e que determinam relações de sentido entre o que se profere e o que se entende, conforme cita Wittgenstein (2014, § 7, p. 19): “chamarei de ‘jogo de linguagem’ também à totalidade formada pela linguagem e pelas atividades com as quais ela vem entrelaçada”.

seus usos em diferentes contextos” (VILELA, 2013, p. 30). As formas de vida podem ser compreendidas como contextos para esses jogos de linguagem, dentro dos quais as expressões linguísticas e/ou musicais adquirem seu significado. Compreendemos que até mesmo os aspectos culturais de um povo fazem parte dessa noção de formas de vida. Assim, as diferentes manifestações musicais se constituem em diferentes contextos. Portanto, nesta fase contemporânea, a forma de vida musical expressa outras possibilidades sonoras, além da dialética pautada no sistema de notas definidas (alturas) e tempos cromométricos.

Moreno (2005, p. 177) estabelece a noção de “formas de vida” como “sistemas de ações convencionais e imersos na prática efetiva de nossa vida com a linguagem”; ali se entrecruzam hábitos e atitudes, sob uma ética desse sistema, no qual se estabelecem concepções a respeito de conhecimentos e decisões. Portanto, até mesmo as formas musicais estabelecidas estão envoltas por suas formas de vida. Desse modo, assim como é possível enxergar outras matemáticas dentro de diferentes jogos de linguagem, devemos perceber outras formas musicais se constituindo em meio aos diversos jogos de linguagem musicais possíveis, sem atentar apenas às práticas musicais sutilmente limitadas pela racionalidade estabelecida pelo temperamento igual, pelo sistema tonal, ou, ainda, por uma única forma de notação musical.

Tais jogos musicais que apresentam elementos da música eletroacústica vão além de relações entre alturas definidas *versus* tempos cromométricos, ultrapassam os limites da música apoiada em critérios de exatidão, pois não há pretensão de tentar delimitar um ruído, como, por exemplo, os sons da hélice de um avião, em uma nota fundamental. O que se pode ouvir ou constatar nessas novas possibilidades musicais seriam manipulações do elemento primordial da música, que é o som, permitindo criar espectros sonoros, ruídos e massas sonoras, aproveitando outras formas sonoras, além das notas fundamentais.

Sendo assim, esta discussão dos limites entre a música ocidental baseada em sistemas como o sistema tonal e as possibilidades de criar uma linguagem musical contemporânea remete a ideias foucaultianas sobre os limites da racionalidade, ou seja, revela uma contraposição à visão universal posta pelo Iluminismo.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

As possibilidades de manipulação da onda sonora vêm trazer questionamentos, dúvidas e reflexões sobre os “limites” da música contemporânea. A introdução de outras sonoridades (massas sonoras, ruídos) como elementos de composição nos levaria à ideia de que não existe um “limite” matemático composicional fechado pelo conjunto do mencionado “temperamento igual”. Há novas potencialidades e, então, a música poderia remeter a uma arte de manipular sons (definidos ou não) que provoquem sensações ao ouvinte.

Refletindo sobre esse limite racional, formatado matematicamente e estabelecido no sistema de escrita musical e no sistema tonal que culminou no chamado “temperamento igual”, e pensando agora nas novas possibilidades permitidas pelos avanços tecnológicos e pelas influências de diversas culturas no que chamamos hoje de música contemporânea, consideramos eventuais formas de transbordar tais limites de uma perspectiva foucaultiana de afastamento de um racionalismo universal.

Conforme evidenciado em Foucault (2000), o filósofo expressa seus pensamentos por meio de sistemas. Com o pensamento relacional (relações de poder), não há como pensar em algo fora do sistema. Ele discute as diferenças, a ruptura dos limites... Em que medida o objeto se afasta da

universalidade? Nesse caso, há um afastamento do universal? Pelo menos houve uma tentativa de universalizar a música pelo sistema de escrita e pelo temperamento igual, verificado por nós anteriormente em Iazzetta (2009), Lévy (1998) e Schafer (2012).

Depois, porém, constata-se uma possível extrapolação dos limites da racionalidade presente na música temperada, em obras como: *A arte do ruído*, de Luigi Russolo (1885-1947); as experiências sonoras com gravações em fitas magnéticas do artista francês Pierre Schaeffer (1910-1995), que, em meados do século XX, manipulava os sons e os utilizava como “objetos sonoros” em suas composições; as obras de John Cage (1912-1992), em que o artista utilizava a poética do silêncio para gerar sensações ao ouvinte, modificava a estrutura de instrumentos convencionais temperados, como o piano, para obter resultados distintos daqueles regulados por uma estética musical ocidental temperada. Ou seja, Cage criava sistemas musicais distintos do que convencionalmente se considerava como música naquela época.

Para Foucault (2000), como a diferença é relacional, conseguimos delimitar tal diferença por meio da relação ao “o que” seria normal. Assim Foucault busca os limites e as tensões geradas nas rupturas desses limites. Para ele, não existe a ideia do terceiro excluído. Devemos ir além dos limites, discutir outras possibilidades, além do simples ser ou não ser. Então, fazendo uma analogia a essa ruptura desse limite da música puramente temperada, pautada em uma dialética altura definida *versus* tempo, para a música programática¹¹, por exemplo, podemos vislumbrar que não há o questionamento do que seria ou não música nesse sentido. O que há é uma revelação de que a música pode ir além dos limites impostos pela escrita ou pelo temperamento. Compositores contemporâneos propõem discutir possibilidades além do simples ser ou não ser música. Conforme destaca Swanwick (2003), para se fazer música, é necessária também a *intenção* de fazê-la. O compositor/intérprete pretende fazê-la, e nós pretendemos ouvi-la como música.

Ultrapassar tais limites descritos, enfatiza Foucault (2000), deve ser objeto da crítica, à qual cabe, certamente, analisar os limites e refletir sobre eles, pois o “*êthos*” filosófico seria uma atitude limite, ou seja, não seria um comportamento de simples rejeição, mas buscaria estabelecer-se nos limites, nas fronteiras, para fugir à alternativa de estar fora ou dentro. Dessa forma, Foucault (2000, p. 351) compreende que se deve transformar a crítica em uma atitude, em um “*êthos*”, em “[...] uma via filosófica em que a crítica do que somos é simultaneamente análise histórica dos limites que nos são colocados e prova de sua ultrapassagem possível”.

Como menciona Lévy (1998), novas possibilidades lógico-informacionais são abertas pelos computadores, que utilizam algoritmos de programação lógico-matemáticos. Assim, novamente cairíamos em uma influência logicista? Provavelmente cairíamos; porém, dessa vez, de uma forma que permitiria ultrapassar os próprios limites impostos por ela ao sistema formal de afinação da música ocidental temperada — mas isso seria assunto para outra discussão. Finalizando, ponderamos que, como a música é algo que envolve sensibilidade, criatividade e emoções, ela nem sempre estará restrita aos limites de uma racionalidade matemática.

REFERÊNCIAS

ABDOUNUR, O. J. **Matemática e música:** pensamento analógico na construção de significados. São Paulo: Escrituras, 1999.

BROMBERG, C. Os Objetos da Música e da Matemática e a Subalternação das Ciências em alguns tratados de Música

¹¹ Para Schafer (2012, p. 151), a música programática utiliza registros ou elementos sonoros do meio ambiente em sua composição, fazendo isso em contraposição à sala de concertos, que evita sons de ambientes externos.

- do século XVI, **TransFormAção**, Marília, vol.37, n.1, p.9-30. 2014.
- CAMARGOS, C. B. R. **Música e matemática**: a harmonia dos números revelada em uma estratégia de modelagem. São Paulo: Edgard Blücher, 2011.
- CAMARGOS, C. B. R. **Músicas que ultrapassam as estruturas regidas por números**: Uma análise de práticas matemáticas em construções de instrumentos musicais. Tese (Educação em Ciências e Matemática) – Universidade Federal de São Carlos. São Carlos, 2017.
- FENERICH, A. S. Obra musical opaca: a confluência de valores da música experimental em Pierre Schaeffer e John Cage. **Revista Poiésis**, Tubarão, n. 25, p. 13-26, 2015.
- FOUCAULT, M. O que são as luzes? In: **Ditos & Escritos**, vol. III. Rio de Janeiro: Forense Universitária, 2000. p. 335-351.
- GROUT, D. J. & PALISCA, C. V. **História da música ocidental**. Trad.: Ana Luísa Faria. 6. ed. Portugal, Lisboa: Gradiva Publicações, 2014.
- IAZZETTA, F. **Música e mediação tecnológica**. São Paulo: Perspectiva. 2009.
- LÉVY, P. **A máquina universo**: criação, cognição e cultura informática. Porto Alegre: ArtMed, 1998.
- MORENO, A, R. **Introdução a uma pragmática filosófica**: de uma concepção de filosofia como atividade terapêutica a uma filosofia da linguagem. Campinas, SP: Editora da Unicamp. 2005.
- RODRIGUES, J. F. A matemática e a música. **Revista Colóquio/Ciências**, Coimbra, nº 23, p. 17-32, 1999. Disponível em: <http://cmup.fc.up.pt/cmup/musmat/MatMus_99.pdf>. Acesso em: 16 jul. 2019.
- SCHAFER, M. Música, paisagem sonora e mudanças de percepção. In: **A afinação do mundo**. São Paulo: Editora da UNESP, 2012. p. 151-172.
- SWANWICK, K. **A basis for music education**. Oxford: Taylor & Francis e-Library, 2003.
- VILELA, D. S. **Usos e jogos de linguagem na matemática**: diálogo entre filosofia e educação matemática. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2013.
- WISNIK, J. M. **O som e o sentido**. 2. ed. São Paulo: Companhia das Letras, 2007.
- WITTGENSTEIN, Ludwig. **Investigações filosóficas**. Trad.: Marcos G. Montagnoli; revisão da tradução e apresentação: Emmanuel Carneiro Leão. 9. ed. Petrópolis, RJ: Vozes; Bragança Paulista, SP: Editora Universitária São Francisco, 2014.